3

المصـــفوفـات والمحـــددات

MATRICES and Determinants

ندرس في هذا الباب المصفوفات *(matrices)* كواحدة من أهـــم الموضوعات الرياضية التي ظهرت في القرن الثامن عـــشر. ومـــن المرجح أنه قد عرف المصطلح الرياضي مـــصفوفة *(matrix)* لأول مرة على يد عالم الرياضـــيات الإنجليـــزي المعـــروف سيلفـــستير *(Sylvester J. J., 1814 -1897)*. وقد ساهم علم المصفوفات في إحداث تطور مذهل في علم الرياضيات نفسه بالإضافة إلى العلوم التطبيقية الأخرى. هذا، ويمكن اعتبار علم المصفوفات بمثابة علـــم الترتيب، فكل العناصر الموجودة في هذا الكون الذي نحيا مرتبـــة ترتيباً غاية في الدقة. وكل ترتيب له الكثير من المعاني العظيمة وله قيمته التي تمييزه عن أي ترتيب آخر بحيث يكون لكل ترتيب معين قيمة (غير جبرية) يتميز بها عن غيره من الترتيبات الأخرى كمـــا سنرى في باب القيم المميزة *(Eigenvalues)* والمتجهات المميـــزة *(Eigenvectors)*. شكراً لعلم المصفوفات الذي مكن الإنسان من ترتيب نظم المعادلات الجبرية *(Algebriac Systems)* بالطريقـــة التي ساعدته على الحصول على حلولها بسهولة ويسر كما سنرى في البابين الخامس والسادس.

3.1 مقدمة عن المصفوفات

في هذا الفصل نتعرف على معني المصفوفة، وأشكالها المختلفة وأنواعها وصفات وخصائص كل نوع ، وكذلك، العمليات الرياضية التي يمكن أن تخضع لها مثل الجمع والطرح والضرب.

تعريف 3.1 | **المصفوفة - Matrix**

تُعرف المصفوفة على أنها ترتيب معين من الأشياء على شكل صفوف *(rows)* وأعمدة *(columns)*.

▲▲▲

ويستخدم للدلالة على المصفوفة القوسين (   ) أو [ ]، كما تستخدم الحروف الكبيرة والثقيلة *(Bold)* للتعبير عن المصفوفات أما الحروف الصغيرة فتستخدم للتعبير عن عناصر المصفوفة كما سنرى. فمثلاً فإن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة تتكون من عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة. وفي شكل رياضي مختصر يمكن أن تكتب هذه المصفوفة في الشكل

$$A=\left[a_{ij}\right]\ ;\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

حيث يرمز a_{ij} إلى عناصر المصفوفة *(entries)*، بينما يرمز i لرقم الصف أما j فيعبر عن رقم العمود. القطر الذي تقع عليه العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33} .., a_{mn}$ يسمى "القطر الرئيسي *(main diagonal)*، كما تسمى العناصر التي تقع على هذا القطر "عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة".

تعريف 3.2

رتبة المصفوفة
Order of a Matrix

رتبة أية مصفوفة تُعرف على أنها عدد الصفوف مضروباً في عدد الأعمدة.

▲▲▲

فمثلاً فإن رتبه المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ هي 2×3. أما المصفوفة $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ فرتبتها هي 3×2. صحيح أن عدد عناصر أي من المصفوفتين A,B يساوي 6 عناصر إلا أن ترتيب عناصر المصفوفة A مختلف عن ترتيب عناصر المصفوفة B. وبالتالي فالرتب مختلفة.

تعريف 3.3

المصفوفات المتساوية
Equal Matrices

يقال أن المصفوفتين $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$ متساويتان إذا وفقط

إذا كانتا من نفس الرتبة وكان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل $i = \overline{1,m}$ & $j = \overline{1,n}$.

▲▲▲

بمعنى أن العناصر المتناظرة تكون متساوية. فمثلاً لا يمكن جمع المصفوفتين A, B كما في تعريف **3.2** بسبب اختلافهما في الرتبة بينما يمكن جمع المصفوفتين C, D ــ مثلاً ــ وذلك بسبب تساويهما في الرتبة حيث رتبه أي منهما هي 3×2 فنجد أن

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C + D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 أنواع المصفوفات - Types of Matrices

توجد أنواع كثيرة من المصفوفات تختلف عن بعضها في الصفات والخواص والرتبة، والمرتبة *(rank)* ــ كما سنتعرف عليها لاحقاً ــ وغيرها من الصفات، نقدم بعضها في هذا الفصل.

1 المصفوفة المربعة (Square Matrix)

إذا كان عدد صفوف المصفوفة يساوي عدد أعمدها، أي أنه إذا كان $m = n$ فإنه يقال أن المصفوفة مربعة. على سبيل المثال فإن المصفوفة $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2.

2 مصفوفة الصف (Row Matrix)

إذا كانت المصفوفة تتكون من صف واحد فقط ($m=1$)، بغض النظر عن عدد الأعمدة فإن المصفوفة تسمى مصفوفة الصف. فمثلاً المصفوفة $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 12 & 2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صف من الرتبة 1×4.

3 مصفوفة العمود (Column Matrix)

إذا كانت المصفوفة تتكون من عمود واحد فقط ($n=1$)، بغض النظر عن عدد الصفوف فإن المصفوفة تسمى مصفوفة عمود. فمثلاً المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود من الرتبة 3×1.

4 المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

هي مصفوفة مربعة كل عناصرها غير القطرية صفرية، أي أن العناصر الواقعة فوق أو أسفل القطر الرئيسي أصفار. أي أن $\alpha_{ij}=0 \quad \forall \quad \mathrm{i}\neq \mathrm{j}$. تجدر الإشارة إلى أنه في معظم الأحيان يعبر عن مثل هذه المصفوفات القطرية في الصورة $\mathrm{A}=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)$ حيث α_{ij} هي عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة A. فعلى سبيل المثال فإن المصفوفات الآتية كلها مصفوفات قطرية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بينما المصفوفات الآتية كلها غير قطرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 المصفوفة الصفرية (Zero Matrix)

هي مصفوفة من أية رتبة بشرط أن تكون كل عناصرها أصفار.

فمثلاً المصفوفات الآتية هي مصفوفات صفرية من رتب مختلفة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 مصفوفة الوحدة (Unit Matrix)

هي مصفوفة قطرية عناصرها القطرية كلها متساوية وكل منها يساوى الوحدة. وعادة يرمز لمصفوفة الوحدة من الرتبة n بالرمز I_n. فمثلاً المصفوفات الآتية هي مصفوفات وحدة

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7 المصفوفة الموسعة (Augmented Matrix)

تُعرف المصفوفة الموسعة ويرمز لها بالرمز $\left[A|B\right]$ على أنها مصفوفة من الرتبة $m \times (n+1)$ و تتألف من المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ وعن يمينها المصفوفة B من الرتبة $m \times 1$ كمصفوفة إضافية. على سبيل المثال فإن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[A|B\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

8 مدورة المصفوفة (Transpose Matrix)

هي المصفوفة التي نحصل عليها بجعل الصفوف أعمدة أو بجعل الأعمدة صفوف. فإذا كانت A ـــ مثلاً ـــ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ فإن مدورة المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^t تكون من الرتبة $n \times m$. بمعنى أن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3.3 العمليات الجبرية على المصفوفات

المصفوفة مثلها مثل أي كائن رياضي آخر تخضع لعمليات جبرية.

بيد أن العمليات الجبرية على المصفوفات تختلف عن العمليات الجبرية للكائنات الرياضية الأخرى مثل الدوال المثلثية أو الدوال الأسية وغيرها.

في هذا الفصل نقدم بعض العمليات الجبرية التي تجرى على المصفوفات مثل الجمع والطرح والضرب، وضرب المصفوفة في عدد قياسي.

أولاً — الضرب القياسي - Scalar Multiplication

لنعتبر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ من الرتبة $m \times n$ والمعرفة على مجال العداد الحقيقية R مثلاً، و لنفرض أن α هو أي عنصر من عناصر المجال R، إذن فإن

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفة αA هي المصفوفة التي تنتج عن ضرب كل عنصر

من عناصر المصفوفة A في العدد α.

ثانياً جمع وطرح المصفوفات

في عالم الأعداد لا توجد شروط لعمليات الجمع (الطـرح) إلا أن تكون الأعداد من نفس المجال. في عالم المصفوفات يوجد شرط آخر بخلاف هذا الشرط وهو أن تكون المصفوفات المراد جمعها (طرحها) من نفس الرتبةز وتتم عملية الجمع بجمع العناصر المتناظرة في كـل منـهما. أي أنـه إذا كانـت هنـاك المـصفوفتان $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ مـن الرتبـة $m\times n$ حيـث $i=\overline{1,m}\ \&\ j=\overline{1,n}$، وكانت المصفوفة $C=\left[c_{ij}\right]$ هي حاصل جمـع المـصفوفتين $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$. إذن فـإن المعادلـة $C=A+B$ تعني أن

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

فإذا كانـت هنـاك المـصفوفتان $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$ مـن الرتبة $m\times n$ حيث $i=\overline{1,m}\ \&\ j=\overline{1,n}$، وكانـت المـصفوفة $C=\left[c_{ij}\right]$ هي حاصل طرح المصفوفتين $A=\left[a_{ij}\right], B=\left[b_{ij}\right]$.

إذن فإن المعادلة $C=A-B$ تعني أن

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\quad \forall\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}$$

مثال 3.1 أوجد $A + B, A - B$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -9\\ 6 & 3 & 8\\ 4 & -7 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -9 & 8\\ 8 & 4 & 0\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

الحل

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -5 & -1\\ 14 & 7 & 8\\ 5 & -10 & 7\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}1 & 13 & -17\\ -2 & -1 & 8\\ 3 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

✍.

مثال 3.2 أوجد $C + D$ إذا كان

$$C=\begin{bmatrix}11 & 2 & -9\\ 6 & 6 & 4\\ 4 & -7 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -7 & 3\\ 8 & 5\end{bmatrix}$$

الحل لا يمكن إجراء عملية الجمع و ذلك لاختلاف الرتب. فالمصفوفة C رتبتها هي 3×3 بينما رتبة المصفوفة D هي 3×2.

✍.

نظرية ـ 3.1 الصفات والخصائص التالية لجمع المصفوفات كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية *(Commutative)*.

أي أنه إذا كانت A,B مصفوفتان من نفس الرتبة فإن $A + B = B + A$ فإذا كان

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 8\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

فإن

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -1\\ 4 & 8\end{bmatrix};$$

$$B+A=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -1\\ 4 & 8\end{bmatrix}=A+B$$

[2] عملية جمع المصفوفات هي عملية إدماجية *(Associative)*. أي

أن $(A+B)+C=A+(B+C)$

وكمثال على ذلك إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 7\end{bmatrix}$$

فإن

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 4 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 13 & 21\end{bmatrix}$$

كما أن

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 9 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 1\\ 13 & 21\end{bmatrix}$$

✪✪✪

ثالثاً ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices

المصفوفات أيضاً يمكن ضربها في بعضها البعض ولكن ليس كما

تضرب الأعداد وإنما بطريقة أخرى غير أن ضرب المصفوفات أيضاً له شروط لكي يمكن من تنفيذه. لتكن A,B مصفوفتان على نفس المجال بشرط أن

عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B

حيث $m \times n$ هي رتبة المصفوفة A، بينما $n \times p$ هي رتبة المصفوفة B. إذن فإن عملية ضرب المصفوفة A في المصفوفة B تُعرف على أنها المصفوفة C من الرتبة $m \times p$ أي أن

$$\underset{m\times n}{A} \times \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$$

خطوات عملية ضرب المصفوفات:

[1] ضرب الصف الأول من A في العمود الأول من B (كل عنصر في الصف الأول من A يضرب في العنصر المناظر له في العمود الأول من B). [2] يتم جمع حاصل الضرب في الخطوة رقم [1] ويوضع الناتج في مكان العنصر الأول في الصف الأول من المصفوفة C . [3] يضرب الصف الأول من A في العمود الثاني من B (كل عنصر في الصف الأول من A يضرب في العنصر المناظر له في العمود الثاني من B). [4] نكرر الخطوة رقم [2]. [5] يوضع ناتج الخطوة رقم [4] مكان العنصر الثاني في الصف الأول من المصفوفة C. [6] نكرر الخطوات السابقة حتى يتم ضرب الصف الأول من A في الأعمدة الباقية من B، فنحصل

على الصف الأول من المصفوفة C. **[7]** يتم ضرب الصف الثاني من A في العمود الأول B، ثم في العمود الثاني وهكذا حتى آخر عمود ثم نكرر الخطوات السابقة حتى نحصل على المصفوفة C.

مثال 3.3 أوجد حاصل الضرب AB إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\\ 7 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

الحل نلاحظ أن رتبة المصفوفة A هي 3×2، ورتبة المصفوفة B هي 2×2، إذن عدد الأعمدة في A يساوي عدد الصفوف في B وبذلك يتحقق شرط إجراء عملية الضرب حيث نحصل على المصفوفة C من الرتبة 3×2. إذن

$$AB=\begin{bmatrix}1\times 1+2\times 0 & 1\times 2+2\times 4\\ 0\times 1+4\times 0 & 0\times 2+4\times 4\\ 7\times 1-5\times 0 & 7\times 2-5\times 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 0 & 16\\ 7 & -6\end{bmatrix}$$

نظرية - 3.2 **الصفات والخصائص التالية لضرب لمصفوفات كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة**

[1] ضرب المصفوفات ليست عملية تبديلية (طالما كان الضرب ممكناً)، أي أن

$$AB \neq BA$$

[2] ضرب المصفوفات عملية ادماجية، (طالما كان الضرب ممكناً) أي أن

$$(AB)\,C=A\,(BC)$$

[3] لأية ثلاث مصفوفات A,B,C قابلة لعمليات الجمع والضرب فإن

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)A=BA+CA$$

✪✪✪

3.4 عمليات الصف البسيطة والمصفوفة المختزلة

عمليات الصف البسيطة على المصفوفات هي عبارة عن بعض العمليات الجبرية كالجمع، والطرح، والضرب نجريها على صفوف المصفوفة للحصول على مصفوفة صف مكافئة لها بغرض تبسيطها. نعرض الآن لثلاث عمليات رياضية على الصف لأية مصفوفة. هذه العمليات الرياضية تلعب دوراً هاماً في استخدامات المصفوفات، وهذه العمليات الثلاث هي: [1] تبديل أي صف بأي صف. [2] ضرب أي صف في أي عدد قياسي *(scalar)* غير صفري. [3] ضرب أي صف في أي عدد قياسي *(scalar)* غير صفري وجمعه مع أي صف آخر.

مثال توضيحي إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن تطبيق عمليات الصف البسيطة السابقة على المصفوفة A لنحصل على المصفوفات المكافئة لها مثل المصفوفات B,C,W

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حيث حصلنا على المصفوفة B بتبديل الصف الأول مكان الثالث في المصفوفة A، وحصلنا على المصفوفة C بضرب كل عنصر من عناصر الصف الرابع في المصفوفة A في العدد 2، كما حصلنا على المصفوفة W بضرب الصف الثالث في المصفوفة A في العــدد 5 وجمعه على الصف الثاني. مما سبق فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة صف مكافئة للمصفوفات B,C,D.

<u>لاحــظ</u> أن مصفوفة الصف المكافئة تكافيء المصفوفو الأصلية ولكنها لا تساويها.

تعريف 3.4

مصــــفوفة الصف المكافئة
Row Equivalent Matrix

هي المصفوفة التي نحصل عليها بعد إجراء بعض عمليـــات الــصف البسيطة عليها.

▲▲▲

نظرية ـ 3.3

الخصائص الآتية للمصفوفات المكافئة كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] كل مصفوفة هي مصفوفة صف ــ مكافئـــة لنفـــسها. [2] إذا كانت A هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة B، فإن B هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة A. [3] إذا كانــت A هـــي مصفوفة صف مكافئة للمصفوفة B، وكانت B هي مصفوفة صف ــ مكافئة للمصفوفة C، فإن A هي مصفوفة صـــف ــ مكافئـــة للمصفوفة C.

✪✪✪

3.5 المصفوفة المختزلة – Reduced Form of a Matrix

من روائع علم المصفوفات ما يسمى المصفوفة المختزلة وهي عبـــارة مصفوفة أخرى معظم عناصرها أصفار أو وحدات. وهي تكـــافيء المصفوفة الأصلية. والمصفوفة المختزلة لا تساوي المصفوفة الأصلية وإنما تكافئها. فكيف نحصل عليها؟ دعنا نتعرف أولاً على تركيبتها وشكلها حتى يسهل علينا الحصول عليها.

تعريف 3.5 مصـــفوفة الصف المكافئة **Row Equivalent Matrix**

المصفوفة A_R التي من الدرجـــة $m\times n$ تـــسمى **" المصفوفة المختزلة "** للمصفوفة A إذا كانت تحقق الشروط الأربعة الآتية:

[1] أول عنصر غير صفري في أي صف هو الواحد الصحيح وهذا العنصر يسمى الدليل *(Leading Entry)*.[2] إذا كان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r يقع في العمود رقم c، إذن فجميـــع العناصر الأخرى في العمود رقم c هي أصفار. [3] الصف الـــذي كل عناصره أصفار يقع أسفل الصف الذي يحتوى على عناصر غير صفرية. [4] إذا كان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r_1 يقع في العمود رقم c_1 وكان أول عنصر غير صفري في الصف رقم r_2 يقع في العمود c_2 بحيث $r_1 < r_2$، إذن فإن $c_1 < c_2$.

▲▲▲

فمثلاً المصفوفات الآتية كلها في الشكل المختزل

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

أما المصفوفات

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&4&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

فليست كلها مختزلة. في المصفوفة A فإن أول عنصر غير صفري في الصف الثاني يقع في العمود الثاني وهذا العمود الثاني ليست كـــل عناصره الأخرى أصفار. في المصفوفة B الصف الثاني كل عناصره أصفار بينما الصف الثالث صف غير صفري. في المصفوفة C أول عنصر غير صفري للمصفوفة 4 وليس الواحد الصحيح.

مثال 3.4 أوجد المصفوفة المختزلة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&1&-7&4\\1&2&-3&0&0\\0&1&-4&0&1\end{bmatrix}$$

الحل للحصول على الشكل المختزل للمصفوفة A نجري عليها بعـــض عمليات الصف اليسيطة.

العملية الأولى : ضرب الصف الأول من A في 1−، والجمع مع الصف الثاني فنحصل على

$$\begin{bmatrix}1&-3&1&-7&4\\0&5&-4&7&-4\\0&1&-4&0&1\end{bmatrix}$$

العملية الثانية: نضرب الصف الثاني ــ فقط ــ في العدد $\frac{1}{5}$

فنحصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

العملية الثالثة: ضرب الصف الثاني في العدد 3، والجمع مع الصف الأول، ثم ضرب الصف الثاني ــ أيضاً ــ في العدد 1−، والجمع مع الصف الثالث فنحصل ــ على الترتيب ــ على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

العملية الرابعة: ضرب الصف الثاني في العدد $\frac{-5}{16}$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

العملية الخامسة : ضرب الصف الثالث في $\frac{4}{5}$، والجمع مع الصف الثاني، ثم ضرب الصف الثالث ــ أيضاً ــ في $\frac{7}{5}$، والجمع مع الصف الأول نحصل ــ على الترتيب ــ على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن A_R هي المصفوفة

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

مثال 3.5 أوجد المصفوفة المختزلة لكل من

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_1 - r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2r_2 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-19}{4} \end{bmatrix} = A_R$$

☺☺☺

$$B \xrightarrow{\frac{1}{2}r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} \times r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_R$$

☺☺☺

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 0 & \frac{-18}{5} & \frac{-7}{5} & \frac{9}{5}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-5}{18}r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{-4}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-14}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_3+r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{-49}{18} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}=C_R$$

تعريف 3.6 مرتـبة المصفوفة Rank of a Matrix

تُعرف مرتبة *(rank)* المصفوفة A ويرمز لهـا بـالرمز $rank(A)$ على أنها عدد الصفوف غير الصفرية في مصفوفتها المختزلة A_R.

▲▲▲

ملاحظة

في المثال السابق نجد أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفات المختزلة هو العدد 3 إذن فإن

$$rank(A)=3, rank(B)=3$$

نظرية

العلاقة بين المصفوفة المختزلة ومصفوفة الوحدة

إذا كانت المصفوفة A هي مصفوفة مربعة، غير شاذة من الرتبة n، بمعنى أن $|A| \neq 0$، إذاً فإن مصفوفتها المختزلة هي مصفوفة الوحدة من نفس الرتبة، أي المصفوفة I_n. كما أن مرتبتها هي ـــ أيضاً ـــ n أي أن $rank(A) = n$.

3.6 المحـــددات - Determinants

تعرفنا في الباب السابق على المصفوفات وبعض أنواعهـا وبعـض صفاها. في هذا الفصل نتعرف على ما يـسمى محـدد المـصفوفة، وندرس خواصه ونتعرف على كيفية حساب قيمته الجبرية. وسوف نلاحظ أن للمحدد قيمة جبرية على عكس المصفوفة والتي ليس لها أي قيم جبرية، بل هي مجرد ترتيب من العناصر.

تعريف 3.7 — المحدد - Determinant

يُعرف محدد المصفوفة المربعة A على أنه كائن رياضي له قيمة جبرية ويرمز له بالرمز $\det(A)$ أو الرمز $|A|$.

▲▲▲

فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة المربعة $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن محدد

المصفوفة A هو $4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|$.

تعريف 3.8

رتبة المحدد
Order of a Determinant

بما أن المحدد يُعرف للمصفوفات المربعة فقط إذن فإن رتبة *(Order)* المحدد هي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة.

▲▲▲

فإذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times n$، فإن رتبة المحدد تكون n. فمثلاً المحدد من الرتبة الثانية يتكون من صفين وعمودين فقط. هذا، ويمكن حساب القيمة الجبرية للمحدد بطرق كثيرة نقدم إحداها في هذا الباب وهي تعتمد على استخدام أي صف (أي عمود) آخذين في الأعتبار ما يسمى قاعدة الإشارات كما سنرى لاحقاً.

حساب القيمة الجبرية للمحدد

أولاً : حساب قيمة المحددات من الرتبة الثانية أي في حالة $n = 2$.

لنفرض محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. باستخدام الصف الأول نجد أن القيمة الجبرية لهذا المحدد هي المقدار $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$، أي أن

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ثانياً: حساب قيمة المحددات من الرتبة الثالثة أي في حالة $n = 3$.

لنفرض محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. باستخدام الصف الأول نجد أن القيمة الجبرية لهذا المحدد تحسب كما يلي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a31 & a33 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ثالثاً: المحددات من الرتب العليا : تحسب قيمتها الجبرية بنفس طريقة حساب قيمة المحددات من الرتبة الثانية أو الثالثة مع مراعاة قاعدة الإشارات التالية:

قاعدة الاشارات

يمكن حساب قيمة المحدد باستخدام أي صف أو أي عمود بشرط مراعاة قاعدة الإشارات الآتية :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

■ ■ ■

مثال 3.6 احسب كل من $|B|,|A|$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -9\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 4 & -9\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{vmatrix}=+1(3\times5-2\times1)-4(2\times5-2\times4)$$

$$-9(2\times1-3\times4)=95$$

$$|B|=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4\times1-3\times1=1$$

3.7 خـــواص المحـــــــــــــــددات Properties of Determinants

المحددات مثلها مثل أي كائن رياضي آخر تمتلك الكثير من الصفات والخواص الرياضية التي تميزها. فيما يلي نقـــدم بعـــض خـــواص المحددات. في الحقيقة أن معرفة هذه الصفات تسهل عملية حـــسابها وتسهم إلى حد كبير في توفير الجهد والوقت.

1 فك المحدد أو تعيين قيمته باستخدام أي صف أو أي عمود

فك المحدد أو تعيين قيمته باستخدام أي صف أو أي عمود يعطـــى نفس القيمة بشرط مراعاة قاعـــدة الإشـــارات. فمـــثلا المحـــدد

$$|X| = \begin{vmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$ إذا تم حسابه باستخدام الصف الأول يعطى

$$|X| = 8\times(0\times3-(-3)\times8)+2\times(1\times3-(-3)\times(-2))$$
$$+4\times(1\times8-0\times(-2)) = 218$$

وبحساب قيمة المحدد باستخدام العمود الثاني نحصل على نفس النتيجة، حيث نجد أن

$$|X| = -(-2)\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 8\times\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 218$$

2

ماذا يحدث إذا احتوى المحدد على صفوف أو أعمدة كل عناصرها أصفار؟

إذا احتوى المحدد على صف أو عمود وكانت كل عناصر هذا الصف أو العمود أصفاراً فإن قيمة المحدد تساوى صفراً. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وذلك لأن في المحدد الأول الصف الثاني كل عناصره أصفار بينما في المحدد الثاني العمود الثالث كل عناصره أصفار.

3

ماذا يحدث إذا احتوى المحدد على صفوف متساوية أو أعمدة متساوية؟

إذا تساوت عناصر صفان أو عمودان في المحدد فإن قيمته تساوى

صفراً. على سبيل المثال، فإن $0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$، وذلك لتساوى عناصر الصفين الأول والثالث.

4 هل تتغير قيمة المحدد عند تبديل الصوف إلى أعمدة أو العكس؟

لا تتغير قيمة المحدد إذا تم تبديل كل الصفوف إلى أعمدة أو كل الأعمدة إلى صفوف. أي أن $|A| = |A^t|$ حيث A^t هو مدور المصفوفة A . على سبيل المثال فإن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5 ضرب عناصر صف أو عمود في كمية قياسية

إذا ضربت عناصر صف (عمود) في كمية قياسية فإن قيمة المحدد الناتج تساوى قيمة المحدد الأصلي مضروباً في نفس الكمية القياسية.

فعلى سبيل المثال إذا كانت β كمية قياسية فإن

$$\beta \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta b_1 & b_2 & b_3 \\ \beta c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

فمثلا إذا كان

$$|A|=\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=2 \Rightarrow 5\times\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}45 & -4 & 1\\ 10 & 0 & 0\\ 20 & 1 & 0\end{vmatrix}=10$$

لاحظ أنه في حالة المحددات،فإن ضرب المحدد في كمية قياسية يعني ضرب صف واحد فقط (أي صف) أو ضرب عمود واحد فقط (أي عمود) من المحدد في هذه الكمية القياسية وليس ضرب كل عنصر كما في حالة المصفوفات.

6 كيف تتغير إشارة قيمة المحدد؟

تتغير إشارة قيمة المحدد إذا تغير وضع صف مكان صف آ خــر أو عمود مكان عمود آخر. فمثلاً

$$\begin{vmatrix}9 & -4 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 9 & -4 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

وذلك لتبديل الصف الأول مع الصف الثاني.

7 هل تتغير قيمة المحدد إذا تم جمع مضاعفات صف (عمود) إلى صف (عمود) آخر؟

لا تتغير قيمة المحدد إذا تم جمع أو طرح مضاعفات صف (أو عمود) إلى صف (أو عمود) آخر. فمثلاً لنفرض المحدد $\begin{vmatrix}4 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=2$

والآن نضرب الصف الثاني في العدد 3 ونجمع الناتج إلى الصف الثالث فنحصل على $2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

8 محدد حاصل ضرب مصفوفتين

محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوى محدد المصفوفة الأولى مضروباً في محدد المصفوفة الثانية. أي أنه إذا كانت A,B مصفوفتان مربعتين من الرتبة $n \times n$ فإن

$$|AB| = |A||B|$$

فإذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإننا نجد أن $|A| = 4, |B| = 2, |AB| = 8$

3.3 المصفوفة العكسية - Inverse of a Matrix

ما دمنا قد عرفنا المصفوفة فلابد أن تتعرف على عكسها أو ما يسمى المصفوفة العكسية. في هذا الفصل نقدم طريقتين لحساب المصفوفة العكسية. الأولى باستخدام المحددات والثانية باستخدام مفهوم المصفوفة المختزلة. على أية حال فليس لكل مصفوفة توجد

مصفوفتها العكسية إذ أهنالك بعض الشروط المطلوبة لكي توجد المصفوفة العكسية لمصفوفة ما. فلا بد للمصفوفة أن تكون مربعة وأن يكون محددها غير صفري أي لا يساوي الصفر حت توجد لها مصفوفة عكسية.

تعريف 3.9 المصفوفة العكسية Inverse of a Matrix

لنفرض أن A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$ ومحددها لا يساوي الصفر ($|A| \neq 0$). تعرف المصفوفة العكسية للمصفوفة A و يرمز لها بالرمز A^{-1} بأنها المصفوفة من الرتبة $n \times n$ التي تحقق الشرط:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

حيث I_n هي مصفوفة الوحدة.

▲▲▲

لاحظ أن A^{-1} يرمز إلى معكوس المصفوفة A وليس المقلوب، أي أن

$$A^{-1} \neq \frac{1}{A}$$

نظرية ـ 3.4 النظريات الآتية للمصفوفة العكسية كلها صحيحة

[1] الشرط اللازم و الكافي لكي يكون للمصفوفة معكوس هو أن تكون المصفوفة مربعة، وأن يتحقق الشرط $|A| \neq 0$. [2] إذا وجد

معكوس للمصفوفة فإن هذا المعكوس وحيد. [3] يمكن إثبات أنه لأي مصفوفتين مربعتين A,B بحيث $|A| \neq 0, |B| \neq 0$، فإن

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

✪✪✪

طريقة الحصول على المصفوفة العكسية

للحصول على المصفوفة العكسية A^{-1} للمصفوفة المربعة A والتي محددها لا يساوي الصفر لدينا طريقتين.

الطريقة الأولى:

[1] نكون ــ أولاً ــ ما تسمى مصفوفة العوامل المرافقة *(Cofactors matrix)* وذلك بأن يستبدل كل عنصر في المصفوفة A بالعامل المرافق له مع مراعاة قاعدة الإشارات.

[2] نوجد المصفوفة المحورة *(transpose)* لمصفوفة العوامل المرافقة والتي تسمى "المصفوفة المرتبطة *(adjoint matrix)* للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $\mathrm{Adj}(A)$.

[3] نحصل على المصفوفة العكسية A^{-1} في الشكل

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \mathrm{Adj}\ (A)$$

مثال 3.7 أوجد (إن وجدت) المصفوفة العكسية A^{-1} للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

الحل بما أن المصفوفة A مربعة، كما أن $|A|=-12\neq 0$، إذن يوجد A^{-1}. نوجد مصفوفة العوامل المرافقة ولنرمز لها بالرمز C، إذن

$$C=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -2\\ 4 & -10 & 2\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة المرتبطة $\mathrm{Adj}(A)$ وهي محورة المصفوفة C، أي أن

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة العكسية هي

$$A^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{bmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

✍.

مثال 3.8 أوجد A^{-1} (إن وجدت) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ; |A| \neq 0$$

الحل بما أن المصفوفة A مربعة كما أن $|A| \neq 0$، إذن يوجد A^{-1}.

مصفوفة العوامل المرافقة هـي $\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$. أمـا المـصفوفة المرتبطة فهي

$$\text{Adj}(A)=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة العكسية هي

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \text{Adj}(A)=\frac{1}{|A|}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

نلاحظ من المثال السابق أنه للحصول على المصفوفة العكسية لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بطريقة سريعة، علينا اتباع الخطوات الثلاث الآتية

[1] يتم تبديل موضع عنصري القطر الرئيسـي. [2] يـتم تغـيير إشارتي العنصرين الآخرين. [3] يتم قسمة كل عنصر من عناصـر المصفوفة الناتجة على قيمة المحدد $|A|$.

الطريقة الثانية:

هذه الطريقة تعتمد على مفهومين. مفهوم المصفوفة الموسعة ومفهوم المصفوفة المختزلة. لنعتبر الآن المصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ حيث $|A| \neq 0$. نكتب المصفوفة الموسعة $\left[A \middle| I_n\right]$، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n \times n$، ثم نجرى عمليات الصف البسيطة عليها للحصول على المصفوفة المختزلة لها علي الشكل $\left[A \middle| I_n\right]_R$، حيث نجد أن مصفوفة الوحدة ظهرت مكان المصفوفة A وبجانبها المصفوفة العكسية أي أن

$$\left[A \middle| I_n\right]_R = \left[I_n \middle| A^{-1}\right]$$

مثال 3.10 أوجد معكوس المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$A|I_n] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & 3 \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}$$

باستخدام الطريقة الأولى نجد أن

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times \mathrm{Adj}(A)=\frac{1}{1}\times\begin{bmatrix}4 & -1\\ -11 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -11 & 3\end{bmatrix}$$

.✍

3.9 مسائل

[1] أوجد $-A, 3A, A-B, A+2B$ إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

[2] إذا كـــــان $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$ أوجـــــد

$D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ بحيث يكون $A+B-D=0$.

[3] احسب $AB, AC, A+4BA, 2C^{-1}-2B$ إذا علمت أن

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

[4] أوجد المصفوفات العكسية (في حالة وجودها) للمـــصفوفات الآتية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 14 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 2\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

[5] حل المعادلة المصفوفية $AX=B$ ، إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

[6] أوجد الشكل المختزل لكل مصفوفة من المصفوفات الآتية

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -8 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 1\\ 0 & 6\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

[7] اثبت بدون فك أن $\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -5\\ -8 & -3 & 11\end{vmatrix}=-83$.

[8] اثبت بدون فك أن $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}=0$.

[9] إثبت باستخدام خواص المحددات أن

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^3 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

[10] أوجد الحل ـــ في حالة وجوده ـــ لنظم المعـــادلات الخطيـــة الآتية

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 3$ $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 + x_3 = -1$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-5x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2$	$x_1 - 3x_2 = 0$ $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 9$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 - x_3 = -2$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$ $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $-3x_2 - x_3 = 0$	$3x_2 + x_3 = 1$ $2x_1 + x_2 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$