1 المتسلسلات اللانـــهائية
INFINITE SERIES

في علم الرياضيات الرائع توجد الكثير من الكائنـــات الرياضـــية النشطة *(Active)* والتي تعتبر بمثابة أدوات للبحـــث والحـــساب تحتاجها كل العلـــوم الأخـــرى بـــدون أي اســـتثناء. فالـــدوال *(Functions)*، المتتابعـــــات *(Sequences)*، المتواليـــــات *(Progression)*، المـــــصفوفات *(Matrices)*، المحـــــددات *(Determinants)*، والمتسلسلات *(Series)* وغيرها الكثير والكثير هي كائنات رياضية نشطة متواجـــدة في شـــتى نـــواحي الحيـــاة وظواهرها الطبيعية.

كلٌ من هذه الكائنات له من الصفات النوعية والخـــصائص الـــتي تميزه عن غيره، كما أن لكـــل مـــن هـــذه الكائنـــات مجـــالات واستخدامات تسهم جميعها في الوصول إلي الحلول المثلى للمشاكل التي تواجه الإنسان سواء كانت هذه المشاكل علمية أو اقتصادية، اجتماعية أو غيرها.

في هذا الباب ندرس المتسلسلات اللانهائية وهي كائن رياضي غير متناهي من حيث عدد الحدود. و لا يوجد ما يسمى متسلـــسلات نهائية فالمتسلسلات هي دائماً لانهائية من حيث عدد الحدود علـــى عكس المتواليات العددية *(progression)* والتي حدودها محدودة

من حيث العدد. والعجيب في الأمر أن معظم الكائنات الرياضـــية التي نعتبرها محدودة من ناحية عدد حدودها يمكن تمثيلـــها علـــى شكل متسلسلات لانهاية ذات عدد لانهائي من الحدود.

لكي نتفهم ذلك دعنا نتأمل المثال التالي: لنفرض أن المسافة بينك وبين باب الغرفة التي تجلس بداخلها هي مترين مثلاً وانك تحركت نحو الباب مسافة متر واحد، ثم مسافة $\frac{1}{2}$ متر، ثم مسافة $\frac{1}{4}$متـــر، وهكذا تستمر بالتحرك في كل مرة نصف المـــسافة المتبقيـــة. في الحقيقة سوف تكتشف أنك تتعامل مع متسلسلة لا نهائيـــة أي أن حدودها لا تنتهي مع العلم أن مجموعها هو العدد 2، بمعنى أن

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$$

بالتأكيد إذا استمر الإنسان في التحرك بهذه الطريقة فإنه لن يصل إلي باب الغرفة أبداً. في الواقـــع أن المتسلـــسلات ذات الحـــدود اللانهائية تفيد في معرفة الكثير عن الظواهر الطبيعية، كمـــا أنهـــا تساعد في تمثيل الدوال المعقدة في صور أو صيغ رياضية بـــسيطة يمكن التعامـــل معهـــا بـــسهولة و خاصـــة في مـــسائل العلـــوم والتكنولوجيا. ولدراسة المتسلسلات نبدأ أولاً بدراسة ما يـــسمى المتتابعات اللانهائية ***(Infinite Sequences)***.

1.1 المتتابعة اللانهائية

الباحث في معمله يرصد النتائج ويدونها بترتيب. فهــو لا يــدون القراءة الثانية إلا بعد تدوين القراءة الأولى ولا يدون القراءة الثالثة إلا بعد القراءة الثانية. هذا الترتيب في وضع المعلومات لــه أهميــة كبرى في تحليل النتائج واستنباط القوانين والقواعد الرياضية الــتي تحكم الظواهر والتفاعلات والتجارب العلمية التي يجريها. ويستطيع الباحث المدقق أن يتوقع الشكل الرياضي للقراءة التالية بعد عــدد محدد من القراءات ويتوقع أن يستمر التغير أو التفاعل بنفس التشابه النمطي إلي عدد لا نهائي من القراءات أو لا يستمر. هكذا يمكن أن نعرف ما يسمى بالمتتابعة اللانهائية. وبالتأكيد فإن المتتابعة ليس لهــا قيمة جبرية أي مجموع جبري، ولذلك سوف نبحث في وجود نهاية لها عندما تقترب حدودها من اللانهاية، كما ســنبحث في إمكانيــة تقاربها إلي عدد حقيقي.

تعريف 1.1 | **المتتابعة اللانهائية**

تُعرف المتتابعة اللانهائية على أنها دالة f في المتغير n نطاقها هو فئة الأعداد الموجبة الصحيحة $R^+ = \{1,2,3,...\}$.

▲▲▲

ماذا يعني هذا الكلام ؟ يعني أنه إذا كانت $f(n)$ متتابعة لانهائيــة فإنه يوجد لكل عدد صحيح موجب $n \in R^+$ عـدد وحيـد حقيقي $f(n)$. وعلى هذا فإن الحد الأول في المتتابعة هـو $f(1)$، والحد الثاني هو $f(2)$ وهكذا نستمر حتى نصل إلي آخر حد أو ما يـسمى الحـد النـوني $f(n)$ وتكتـب المتتابعـة عندئـذٍ في الصورة $\{f(1), f(2), f(3), \ldots f(n), \ldots\}$. و للتبسيط يمكن كتابتها في الصورة $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. وكثيرا ما يعـبر عـن المتتابعـة بالرمز $\{a_n\}$. فالمتتابعة $\{2,4,8,\cdots,2^n,\cdots\} = \{2^n\}$ ـــ مـثلاً ـــ الحد النوني فيها هو $a_n = 2^n$.

الآن من حقنا أن نتساءل هل يخضع هذا الكائن الرياضي الجديـد لعمليات جبرية مثله مثل الكائنات الرياضية الأخـرى؟ الإجابـة بالتأكيد نعم. على أية حال دعنا نتعرف الآن على كيفية تـساوي متتابعتين.

تعريف 1.2 **تساوي متتابعتين**

يقال للمتتابعتين $\{a_n\},\{b_n\}$ انهما متساويتان إذا كـان $a_i = b_i$ لكل عدد صحيح موجب i.

▲▲▲

ولهذا فإن ترتيب العناصر في المتتابعة أمر هام جداً وذلك بعكس الفئات حيث لا يعني ترتيب العناصر فيها أي شئ.

تعريف 1.3 — نهاية متتابعة

يقال أن للمتتابعة $\{a_n\}$ توجد نهاية تساوى العــدد الحقيقــي L عندما $n \to \infty$ و تكتب في الصورة $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ إذا كان لأي عدد موجب ε، صغير لدرجه كافية يوجد عدد صحيح موجــب N بحيث يكون $(a_n - L) < \varepsilon$ لكل $n > N$.

▲▲▲

تعريف 1.4 — تقارب وتباعد المتتابعة

المتتابعة التي توجد لها نهاية تسمى متتابعــة تقاربيــة وبالإنجليزيــة *(Convergent Sequence)* وأحياناً يقــال أن المتتابعــة تتقــارب *(Converges)*. فإذا لم توجد لها نهاية أو إذا كان

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$$

فإن المتتابعة تسمى تباعدية *(Divergent Sequence)* أو يقال أنهــا تتباعد *(Diverges)*.

▲▲▲

مثال 1.1 ادرس وجود نهاية للمتتابعة التي حدها النوني هو

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

الحل الخمسة حدود الأولى في هذه المتتابعة هي

$$2-\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{8},\ 2+\frac{1}{16},\ 2-\frac{1}{32},\ \cdots$$

من الملاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 2 إما بالزيادة قليلاً وإما بالنقصان قليلاً عندما $n \to \infty$ وحسب شرط وجـــود نهايـــة للمتتابعة فإن

$$(a_n - 2) = \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n} \to 0$$

عندما $n \to \infty$. و تكون نهاية المتتابعة عندئذٍ هي

$$\lim_{n\to\infty}\left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2$$

✍.

تعريف 1.5 | **المتتابعة المحـــــــــــــدودة Bounded Sequence**

يقال أن المتتابعة $\{a_n\}$ محدودة، إذا وجـــد العـــددان الموجبـــان الحقيقيان P,Q بحيث يكون $P \le a_n \le Q$ لكل قيم n.

▲▲▲

مثال 1.2 بَين ما إذا كانت المتتابعات التالية محدودة

$$\left\{\frac{3}{2},\ \frac{5}{4},\ \dots,\ \frac{2n+1}{2n},\ \dots\right\},\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots\}$$

الحل واضح أن المتتابعة اليمنى غير محدودة أما الثانية فهي محدودة وذلك

لان $\frac{3}{2} \geq \frac{2n+1}{2n} \geq 1$ لكل قيم n.

1.2 المتسلسلة اللانهائية

تعرفنا في الباب السابق على المتتابعة وعرفنا أن للمتتابعة يمكـــن أن توجد نهاية ولا يوجد لها مجموع جبري. في هـــذا الفـــصل ســـوف نتعرف على ما يسمى المتسلسلة اللانهائية كمجموع جبري لعناصر المتتابعة اللانهائية. في الواقع فإن للمتسلسلة يمكن أن توجد قيمـــة جبرية، هذه القيمة هي عبارة عن حاصل جمع عناصرها اللانهائيـــة وفي هذه الحالة يقال أنها متسلسلة تقاربية فإذا لم يوجد لها مجمـــوع فإنها تكون تباعدية. في هذا الفصل ــ أيضاً ــ سوف نتعرف على ثلاثة اختبارات لتحديد نوع المتسلسلة مـــن حيـــث التقـــارب أو التباعد.

تعريف 1.6 | **المتسلسلة اللانهائية Infinite Series**

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة لانهائية فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

تسمى متسلسلة لانهائية.

ولكل متسلسلة لانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يمكن تكوين المجاميع الجزئية الآتية:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

و تسمى المتتابعة $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ متتابعة المجاميع الجزئية *(Partial Sums)* المصاحبة للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

المتسلسلات أيضاً يمكن أن تتقارب أو تتباعد ولكن لـــيس كمـــا تتقارب وتتباعد المتتابعات. فالمتسلسلة تتقارب إذا كان لها مجمـــوع وكان هذا المجموع عدداً حقيقياً. فإذا أقترب المجموع من اللانهايـــة كانت المتسلسلة تباعدية.

تعريف 1.7 **تقارب أو تباعد المتسلسلات**

لنعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. إذا كان $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ فإنه يقـــال أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية، حيث $\{S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots\}$ هـــي متتابعـــة المجاميع الجزئية المصاحبة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. إذا لم يوجد العـــدد الحقيقي S فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

▲▲▲

معنى

عدم وجود العدد الحقيقي S يعني إما أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

أو أن المتسلسلة تتزايد وتتناقص في آن واحد دون الوصول إلي نهاية محدودة، كما في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ مثلاً. هذا، وتوجد أنــواع كثيرة من المتسلسلات التقاربية المشهورة في عالم المتسلسلات نقدم منها على سبيل المثال ـــ المتسلسلة الهندسية.

نظرية 1.1 المتسلسلة الهندسية اللانــــهائية Infinite Geometric Series

المتسلسلة الهندسية

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \ldots\ ; \quad a \neq 0$$

تتقارب إذا كان $r < 1$ و تتباعد إذا كان $1 \leq r$.

✪✪✪

البرهان

أولاً : في حالة $r = 1$. في هذه الحالة فإن

$$S_n = a + a + \cdots + a = na$$

وعندئذ يكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تباعدية. ثانياً: في حالة $r \neq 1$ فإن

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{1.1}$$

وبضرب الطرفين في الأساس r، نحصل على

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (1.2)$$

و بطرح المعادلتين (1.1), (1.2) نحصل على

$$(1\text{-}r)S_n = a - ar^n$$

وهكذا نجد أن

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) =$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

والنهاية الأخيرة تتوقف على قيمة r هل هي أقـــل مـــن الواحـــد الصحيح أم هي اكبر من الواحد الصحيح؟ فإذا كان $|r|<1$ فـــإن $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$، وبالتالي نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

و تكون بذلك المتسلسلة تقاربية ومجموعها هو المقدار $\frac{a}{1-r}$. **أما إذا كـان** $|r|>1$ فإن $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ وفي هـــذه الحالـــة تكـــون المتسلسلة تباعدية.

مثال 1.3 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب أو التباعد

$$3+\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{3}{4^{n-1}}+\cdots$$

الحل بما أن هذه المتسلسلة هندسية، أساسها $r=\frac{1}{4}<1$، إذن حسب النظرية (1.1) فهي تقاربية ومجموعها هو $S=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$.

نظرية 1.2 **النظريات الآتية كلها صحيحة**

(1) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية فهذا يعني أن $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ولكن العكس ليس صحيحاً، أي أنه إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ فليس من الضروري أن تكون المتسلسلة تقاربية.

(2) إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تباعدية.

(3) إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربيتين فإن المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty}ca_n$$

تكون أيضا كلها تقاربية، حيث c عدد حقيقي.

(4) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية بينما $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعدية فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ تكون أيضاً تباعدية.

✪✪✪

مثال 1.4 ادرس المتسلسلات من حيث التقارب والتباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$$

الحل (1) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ توافقية *(Harmonic Series)*. بما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

إذن نكون المجاميع الجزئية

$$S_4 > 2\ , S_8 > 2.5\ , \ \cdots, \ S_{64} > 4, \ldots$$

نلاحظ أن متتابعة المجاميع الجزئية غـــير محـــدودة *(Unbounded)*، وعلى هذا فالمتسلسلة تباعدية. لاحظ ـــ أيـــضاً ـــ أن المتسلـــسلة تباعدية مع أن $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ هندسية أساســها $r = \frac{1}{5} < 1$، إذن

فهي تقاربية. وبما أن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية، إذن فإن

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n} \right)$ هي أيضاً تباعدية، طبقاً للنظرية (1.2).

(3) بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ تقاربيــة، إذن فالمتسلـــسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n(n+1)}$ تقاربية أيضاً. وبما أن المتسلسلة الهندســية $\frac{2}{3^{n-1}}$

تقاربية، إذن فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{n(n+1)} + \frac{2}{3^{n-1}} \right)$ تقاربية أيضاً.

1.3 اختبارات التقـــارب(التبـــاعد) للمتسلسلات الموجبة

أحيانا يكون من الصعب الحصول على الحد النوني للمجاميع الجزئية S_n وبالتالي يصعب تحديد ما إذا كانـــت المتسلـــسلة تقاربيـــة أو تباعدية. سنحاول الآن التعامل مع الحد النوني للمتسلـــسلة a_n، وليس الحد النوني للمجاميع الجزئية S_n، وذلك من خلال بعـــض الاختبارات لمعرفة التقارب أو التباعد.

وسنبدأ باختبارات التقارب أو التباعد للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة *(Positive Terms Series)*.

تعريف 1.8 المتسلسلات ذات الحدود الموجبة

متسلسلة الحدود الموجبة هي متسلسلة كل حدودها موجبة، كما أن متتابعة المجاميع الجزئية لها مطردة *(Monotonic)* ، بمعنى أن $S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots$.

▲▲▲

هذا، ولمعرفة ما إذا كانت مثل هذه المتسلسلات تقاربية أم تباعدية سنقدم الآن ثلاثة اختبارات.

أولاً: اختبار التكامل Integral Test

لنفرض أن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

وأننا استطعنا أن نعبر عن الحد النوني في الصورة $f(x) = a_n$ بحيث

$$a_1 = f(1),\ a_2 = f(2),\ \cdots,\ a_n = f(n),\ \cdots$$

لكل $x \geq 1$ و بحيث تكون الدالة $f(x)$ ذات حدود موجبة ومتصلة، وتناقصية لكل $x \geq 1$، إذن فإن

(1) المتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكـــون تقاربيـــة إذا كـــان التكامـــل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ تقاربي (قيمته الجبرية مقدار حقيقي).

(2) المتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكـــون تباعديـــة إذا كـــان التكامـــل $\int_1^{\infty} f(x)dx$ تباعدي *(Divergent)* أي أن $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$.

✪✪✪

مثال 1.5 ادرس المتسلسلتان من حيث التقارب أو التباعد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3+2n}\right)^2$$

الحل (1) نضع $f(x) = \frac{1}{x}$ وحيث أن $f(x)$ دالة موجبـــة الحـــدود ومتصلة وتناقصية لكل قيم $x \geq 1$ ، إذن يمكن تطبيـــق اختبـــار التكامل فنحصل على

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} \frac{1}{x} dx \to \infty$$

إذن المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية.

(2) نــــضع $f(x)=\left(\frac{1}{3+2n}\right)^2$، إذن بالتفاضـــــل نجــــد أن

$f'(x)=\frac{-4}{(3+2x)^3}<0$ وعلى هذا فإن الدالة $f(x)$ موجبة

الحدود ومتصلة وتناقصية لكل قيم $\forall x\geq 1$، وحيث أن

$$\int_1^\infty \frac{1}{(3+2x)^2}dx =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_1^t (3+2x)^{-2}(2dx)=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[(3+2x)^{-1}\right]_1^t$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{3+2t}-\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{10}$$

إذن المتسلسلة تقاربية.

✍.

نظرية 1.3

المتسلسلة من النوع p – series

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ والتي تعرف باسم p – series تقاربيـــة إذا كان $p>1$، وتباعدية إذا كان $p\leq 1$.

البرهان

في حالة $p=1$ فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ تتحول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

وهي متســلسلة توافقيــة تباعديــة. وفي حالــة $p \neq 1$، نــضع $f(x)=\frac{1}{x^{p}}$ وهي دالة موجبة الحدود و متصلة لكل قيم $x \geq 1$ وبما أن $f'(x)=-px^{-p-1}<0$، إذن فإن الدالة $f(x)$ تناقصية لكل قيم $x \geq 1$. لكن وبما أن

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx=\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{\infty}x^{-p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty}\left[t^{1-p}-1\right]$$

إذن فإنه إذا كان $p>1$، فإن $p-1>0$ وبالتالي فإن

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx=\frac{1}{1-p}(0-1)=\frac{1}{p-1}$$

وفي هذه الحالة فإن المتسلسلة تكون تقاربية. أما في حالــة $p<1$، أو $1-p>0$ فإن $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx\to\infty$ وتكون المتسلسلة تباعدية.

✪✪✪

ثانياً: اختبار المقــارنة
Comparison Test

لنعتبر المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}$، ذات الحدود الموجبة، فإذا كان

(1) $a_n \le b_n$، لكل عدد صحيح موجب n وكانـــت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

تقاربية، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون تقاربية أيضاً.

(2) $a_n \ge b_n$، لكل عدد صحيح موجب n وكانت المتسلـــسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تباعدية فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون هي أيضاً تباعدية.

✪✪✪

مثال 1.6 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+1}$$

الحل لنفرض أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+1}$$

ولإستخدام اختبار المقارنة علينا أن نبحث عن متسلـــسلة أخـــرى

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مثلاً، بحيث تكون معروفة لدينا من حيـــث التقـــارب أو

التباعـــد . لنختـــر المتسلـــسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ وبمـــا أن

$\frac{3}{4^n} = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، وحيث أن $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ متسلسلة هندســية أساســها

$1 > \frac{1}{4} = r$، إذن فهي تقاربية. و بما أن $\frac{3}{4^n} > \frac{3}{4^n+1}$ لكل قـــيم

$n \geq 1$، إذن فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+1}$ أيضا تقاربية.

ثالثاً: اختبــــــار نـهاية المقارنة Limit Comparison Test

لنعتبر المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، من ذوات الحدود الموجبـــة،

فإذا كان
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$$

فإن كلا المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ إما أن تكونا متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً.

✪✪✪

مثال 1.7 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$$

الحل لدينا $a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$. إذن نختار $b_n = \frac{1}{2^n}$ وهي متسلسلة

هندسية وبالتالي تقاربية. وبما أن

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 5n}{\left(n^2 + 1\right)} = 3 > 0$$

إذن المتسلسلتان تقاربيتان طبقاً لاختبار النهاية.

1.4 المتسلسلات التـــذبذبية - Alternating Series

في هذا الفصل نقدم نوعاً آخر من المتسلسلات وهو "المتسلسلات التذبذبية". في الحقيقة أن المتسلسلة المتذبذبـــة أو التذبذبيـــة هـــي متسلسلة حدودها تكون موجبة وسالبة بالتناوب بشرط أن تكـــون حدودها غير صفرية، بمعنى أن $a_i > 0$. على سبيل المثال إذا كـــان $a_i > 0$ فإن المتسلسلات التالية تذبذبية

$$\sum_{n=1}^{\yen} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + L + (-1)^{n-1} a_n + L$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

فهل تقارب أو تباعد المتسلسلات التذبذبية يشبه تقارب وتباعـــد المتسلسلات ذات الحدود الموجبة أم أن هناك بعـــض الاختلافـــات نتيجة اختلاف التركيبة الرياضـــية للمتســـلسلة التذبذبيـــة عـــن

المتسلسلات الأخرى؟ بالتأكيد أن اختبــار التقــارب والتباعــد للمتسلسلات التذبذبية تختلف عن اختبارات المتسلسلات الأخرى.

اختبار تقارب أو تباعد المتسلسلات التذبذبية

المتسلسلة التذبذبية

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

تتقارب إذا كان $a_i \geq a_{i+1}$ لكل عــدد صــحيح موجــب i،

وكان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

✪✪✪

مثال 1.8 ادرس من حيث التقارب أو التباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$$

الحل للتحقق من الشرط الأول: $a_i \geq a_{i+1}$ لكل عدد صحيح موجب i نفرض أن

$$f(x)=\frac{2x}{4x^2-3}$$

ثم نوجد المشتقة الأولى لمعرفة ما إذا كانت الدالة $f(x)$ تناقــصية.

بما أن

$$f'(x) = \frac{-8x^2 - 6}{\left(4x^2 - 3\right)^2} < 0$$

إذن فإن الدالة $f(x)$ تناقصية، بمعنى أن $a_i \geq a_{i+1}$ لكل $x \geq 1$.

للتحقق من الشرط الثاني لدينا

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{4n^2 - 3} = 0$$

إذن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

1.5 التقارب المطلق و التقارب المشـــروط
Absolute and Conditionally Convergence

في عالم المتسلسلات يوجد ثلاثة أنواع مــن التقـــارب: العـــادي، والمطلق والمشروط. إلا أن التقارب المطلق يصبح ذو معنى وأهميـــة للمتسلسلات التذبذبية اكثر من أية متسلسلة أخرى.

تعريف 1.9 | **التقارب المطلق**

يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقاربـــاً مطلقـــاً إذا كانـــت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + .. + |a_n| + ...$$

تقاربية.

لاحظ أنه

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود موجبة فهذا يعني أن $|a_n| = a_n$ وفي هذه الحالة فإن التقارب المطلق يكون هــو نفسه التقارب العادي.

تعريف 1.10 **التقارب المشروط**

يقال أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مــشروطاً إذا كانــت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + .. + |a_n| + ...$$

تقاربية، بينما المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذاتها تباعدية.

▲▲▲

مثال 1.9 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب المطلق و المشروط:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

الحل هنا نجد أن $f(x) = \frac{1}{x}$، وبالتالي فإن

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \geq 1$$

الأمر الذي يعني أن $a_i \geq a_{i+1}$

أيضاً فإن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

وبالتالي فإن $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ متسلسلة تذبذبية تقاربية. نـــدرس الآن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$. بما أن

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

وحيث أن هذه متسلـــسلة توافقيـــة تباعديـــة، إذن فالمتسلـــسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ تتقارب تقارباً مشروطاً.

✍.

مثال 1.10 ادرس المتسلسلة من حيث التقارب المطلق و المشروط:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots$$

الحل نوجد متسلسلة الحدود المطلقة ... $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + $

و هذه متسلسلة من النوع *p-series* ، وهي تقاربية لان $p = 2$.

إذن المتسلسلة التذبذبية المعطاة تتقارب تقارب مطلق.

✍.

هكذا، وجدنا أنه يمكن استخدام مفهوم التقارب المطلق والتقـــارب المشروط في دراسة المتسلسلات. والآن نقدم بعض الاختبارات التي تسهل عملية تحديد التقارب المطلق.

اختبار النسبـــة للتقارب المطلق

نفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، إذن فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} L<1 & \text{, the series absolutely converges} \\ L>1 & \text{, the series diverges} \\ L\to\infty & \text{, the series diverges} \\ L=1 & \text{, the series may be absolutely convergent,} \\ & \text{conditionally convergent, or divergent} \end{cases}$$

✪✪✪

مثال 1.11 ادرس المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

الحل بما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة مطلقة التقارب.

✍.

اختبار الجذر للتقارب المطلق

لنفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، إذن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} L<1 & \text{, the series is absolutely convergent} \\ L>1 & \text{, the series is divergent} \\ L\to\infty & \text{, the series is divergent} \\ L=1 & \text{, the series may be absolutely convergent,} \\ & \text{conditionally convergent, or divergent} \end{cases}$$

✪✪✪

مثال 1.12 ادرس المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{n^2}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2n^3-1\right)^n}{n^{3n}}$$

الحل (a) نستخدم اختبار الجذر وذلك لان كل من البسط والمقــام في الحد النوني a_n مرفوع في قوى n. وبما أن

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\left(2n^3-1\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}}{n^{3n\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{2n^3-1}{n^3} = 2-\frac{1}{n^3}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 > 1$$

وتكون المتسلسلة بذلك تباعدية.

(b) بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$$

وباستخدام قاعدة لوبيتالô(L'H pital' Rule)، نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n \ln 3} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة مطلقة التقارب.

1.6 متسلسلات القوى - Power Series

المتسلسلات التي تعاملنا مها في الفصول السابقة كل حدودها مــن الأعداد الحقيقية. وها نحن الآن نتعامل مع أهم نوع من المتسلسلات ألا وهو متسلسلات القوى التي يمكن اعتبارها ــ إن جاز القول ــ مادة أولية في علم الرياضيات يمكن لمعظم الــدوال أن ترجــع إلى الصورة الأصيلة لها على شكل متسلسلات القوى. وهــي تلعــب دوراً في غاية الأهمية في نظرية تقريب الدوال.

تعريف 1.11 متسلسلة القوى

تُعرف متسلسلة القوى في x على أنهــا المتسلــسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

لاحظ أن حدود متسلسلة القوى تحتوى على قوى المتغير x، الأمر الذي ليس له وجود في المتسلسلات اللانهائية العادية. وللدراســة

تقارب متسلسلات القوى يجب تحديد قيم x المختلفــة والــتي تتقارب عندها المتسلسلة.

▲▲▲

نظرية 1.4

لنعتبر متسلــسلة القــوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ولنفــرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p$ إذن فهنــاك ثلاث حالات:

(1) المتسلسلة تتقارب فقط عند $x=c$ إذا كــان $p=+\infty$. (2) المتسلسلة تتقارب لجميع قيم الحقيقية x إذا كان $p=0$. (3) إذا كان $p \in]0,\infty[$ فإن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لكل قيم x في الفترة $]c-r, c+r[$ وتتباعد المتسلسلة لكل قيم x في الفترة $]-\infty, c-r[\cup]c+r, +\infty[$، حيث $r=\frac{1}{p}$. (4) لدراسة تقارب المتسلسلة عند $x=c-r$, $x=c+r$ يتم بالتعويض عــن هــذه القيم في المتسلسلة الأصلية واستخدام اختبارات التقارب.

✪✪✪

في الواقع أن العدد الحقيقي r يسمى نصف قطر التقــارب *(radius of convergence)* للمتسلسلة.

أما فترة تقارب المتسلسلة *(Interval of Convergence)* فهي فئة كل الأعداد الحقيقية x والتي تتقارب عندها متسلسلة القوى.

مثال 1.13 أوجد جميع قيم x التي تتقارب عندها متسلسلات القوى

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

الحل (a) لدينا $a_n = n!\, x^n$، إذن

$$a_{n+1} = (n+1)!\, x^{(n+1)}$$

و باستخدام اختبار النسبة نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\, x^{(n+1)}}{n!\, x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| \to +\infty \ (x \neq 0)$$

إذن حسب النظرية السابقة فإن المتسلسلة تتقارب فقط عند $x = 0$.

لاحظ أنه في حالة المتسلسلة المعطاة فإن $c = 0$.

(b) في هذه الحالة فإن

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+1)} = 0$$

إذن المتسلسلة تتقارب لكل عدد حقيقي x.

(c) في هذه الحالة فإن

$$a_n = (x-1)^n \Rightarrow a_{n+1} = (x-1)^{n+1}$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}|x-1| = |x-1|$$

و باستخدام اختبار النسبة نجد أن المتسلسلة تقاربية إذا كان

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

أي أن المتسلسلة تقاربية لكل عدد حقيقي x في الفترة $x \in]0,2[$.

وتكون المتسلسلة تباعدية إذا كان

$$|x-1| > 1 \Rightarrow x < 0 \text{ or } x > 2$$

عند $x = 0$ فإن المتسلسلة تتحول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ وهي متسلسلة تباعدية. عند $x = 2$ فإن المتسلسلة تتحول إلي $\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$ وهي متسلسلة تباعدية أيضاً. إذن المتسلسلة المعطاة تتقارب تقارباً مطلقاً في الفترة $]0,2[$ والتي تسمى فترة تقارب المتسلسلة.

1.7 مسائل

ادرس المتسلسلات الآتية من حيث التقارب أو التباعد

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n)}{3n^2+3}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4}{n^3+2n^2+1}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2+5n+1\right)^{\frac{1}{3}}}$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{2n+5}$

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^n}$

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(16) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$

(18) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\ln(n)}$

(20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^{n^2}}$

ادرس المتسلسلات الآتية من حيث التقارب المطلـــق أو التقـــارب المشروط أو التباعد

(22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{3^{\frac{4n}{3}}}$	(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - n}$	(28) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1}$
(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$	(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$	(29) $\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n)]^{-n}$
(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2n}}{(3n^2+1)^n}$	(27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2}$	(30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{10^{10n-1}}$

أوجد فترة تقارب متسلسلات القوى

(31) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}}(x+4)^n$ (34) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$ (37) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+4} x$

(32) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$ (35) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} x^n$ (38) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

(33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{e^n}(x-e)^n$ (36) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} x^n$ (39) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n!}{2n!} x^n$

أوجد فترة التقارب مبيناً إذا ما كان التقارب مطلقاً

(40) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ (42) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^{2n}}{2n-1}$ (44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+5}$

(41) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{(n+1)}$ (43) $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ (45) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

****

التسامح يولّد في
الإنسان طاقة موجبة
قادرة على أن ترفع
عنه مشاعر الغضب
وتمنحه السعادة

اميل شكر الله