الفصل الثالث

المحتوى المنهجي

الرياضيات مادة وطريقة

أولاً : طبيعة الرياضيات

ثانيًا : فى تاريخ الرياضيات

ثالثًا : اتجاهات حديثة فى مناهج الرياضيات

أولاً : طبيعة الرياضيات

- فلسفة الرياضيات
- الأنظمة الرياضية
- طرق البرهنة الرياضية

الرياضيات هو ذلك العلم الذى يتعامل مع الكميات المجردة مثل العدد والشكل والرموز والعمليات . ويرى بعض الرياضيين أن الرياضيات هى الدراسة المنطقية للشكل والتنظيم والكم وذلك حتى يشمل التعريف موضوعات أكثر تجريداً وعمقًا مثل التوبولوچى الذى يبحث فى دراسة خواص الفراغات بعيداً عن هيئة أشكالها ومقاييس أبعادها .

والرياضيات علم من إبداع العقل البشرى والرياضيون فنانون مادتهم العقل ونتاجهم مجموعة من الأفكار والرياضيات فوق ذلك لغة مفيدة فى التعبير الرمزى وأبرز خاصية للرياضيات أنها طريقة للبحث تعتمد على المنطق والتفكير العقلى مستخدمة سرعة البديهة وسعة الخيال ودقة الملاحظة . ولذلك فقد قيل أن الرياضيات هى سيدة العلوم بلا منازع وفى ذات الوقت هى خادمتها وهذا هو موضوع العظمة للرياضيات .

ولقد اهتم رجال الرياضيات قديمًا بالبحث عن حلول لمشكلات عملية سواء ما كان منها متصلاً بالاقتصاد أو الفلك أو الفيزياء ولذلك فقد نظر كثير من الناس إلى الرياضيات على أنها وسيلة لحل بعض مشكلات حياتهم ولكن خلال القرنين الماضيين تغير الوضع تغيراً جوهريًا فبالإضافة إلى إمكانية استخدام العلوم الرياضية فى حل الكثير من مشكلات الحياة العصرية المعقدة بشكل لم يسبق له مثيل . نجد أن البحوث الرياضية قد اتجهت إلى تحليل طبيعة الرياضيات ذاتها والبحث عن حلول رياضية لمشكلات رياضية أو ما قد يسمى بالرياضيات من أجل الرياضيات . ولذلك ظهرت أبحاث الجبر المجرد والتحليل الدالى والتوبولوجى والفراغات الريمانية والمصفوفات الفراغية وغير ذلك من ميادين يصعب على أى باحث أن يلم بها .

وفى الحقيقة لم يكن هذا الاتجاه - الاتجاه نحو التجريد - على حساب الرياضيات التطبيقية وإمكانية استخدام العلوم الرياضية لحل مشكلات عالمنا المعاصر الصناعية والزراعية والتربوية والاقتصادية بل إنه ظهرت وتطورت علوم الإحصاء

والاحتمالات وبحوث العمليات وعلوم الحاسب الآلى وكل ذلك يدخل ضمن الرياضيات التطبيقية ومن الغريب حقًا أن البحث العلمى الرياضى كلما اتجه إلى التجريد وانطلق من قيود المحسوسات زادت بشكل لم يتصوره الرياضيون أنفسهم تطبيقات ذلك فى الواقع .

إننا نريد أن نؤكد أن الرياضيات علم من صنع العقل البشرى ونتيجة لمعاناة رجال اتعبوا عقولهم وبذلوا كل جهد ليصل علم الرياضيات إلى ما وصل إليه من تقدم وتطور .

وللرياضيات منهج وطريقة للبحث ولذلك يجب على المدرس أن يفهم طبيعة الرياضيات حتى يتمكن من تدريسها بشكل مفهوم .

الانظمة الرياضية

إن أى نظام رياضى يبنى على أساس مصطلحات غير معرفة ومصطلحات معرفة ومسلمات (أو بديهيات) ونظريات . وإليك وصفًا مختصرًا لكل من هذه المصطلحات .

أ) المصطلحات غير المعرفة والمعرفة

إن أول جزء فى أى نظام رياضى هو المصطلحات غير المعرفة "Undefined terms" فمن الطبيعى ألا نعرِّف كل مصطلح وكل كلمة فى أى نظام دون أن نتجنب مايسمى بالتعريفات الدائرية "Circalar definition" وأحيانًا نسمى المصطلحات غير المعرفة باسم المصطلحات الأولية "Primative terms" فقد عرف (مثلاً) أقليدس « النقطة على أنها قطعة مستقيمة ليس لها طول ولا عرض » ثم عرف القطعة المستقيمة على أنها « مجموعة من النقط » وهذا ماقصدناه بالتعريف الدائرى حيث عرف النقطة باستخدام مفهوم القطعة وعرف القطعة المستقيمة باستخدام النقطة .

والمصطلحات غير المعرفة ليس لها معنى إلا فى النظام المعرَّفة عليه ولذلك فلكل نظام مصطلحاته غير المعرَّفة وأنه عندما تحدد لكل مصطلح غير معرف معنى معين تحصل على نظام مختلف . وكمثال على ذلك إذا أخذنا نظرية المجموعات "Group theory" من الممكن أن تعتبر الفئة « » باعتبارها من المصطلحات غير المعرفة . فإذا أخذت الفئة على أنها فئة الأعداد الصحيحة "Integers" والعملية على أنها عملية الجمع العادى يكون لدينا مجموعة الأعداد الصحيحة .

أما إذا اخترنا الفئة على أنها العناصر ١ ، ٢ ، .... ، ١ والعملية هى الجمع المقياس ١٢ فإنه سيكون لدينا مجموعة الجمع الزمنى للساعة . وهكذا .

باستخدام المصطلحات غير المعرفة يمكن تعريف بعض المصطلحات . فالمعرفات هى كل جملة رياضية أو مصطلح رياضى فى نظام ماتم تعريفه باستخدام اللامعرفات وبعض عبارات النظام .

فمثلاً إذا قبلنا النقطة على أنها من اللامعرفات فإننا يمكن تعريف الخط المستقيم على أنه مجموعة من النقط .

ب) البديهيات أو المسلمات Axioms

ينظر بعض الرياضيين على أن البديهيات والمسلمات مترادفات ويعرفانها على أنها جملة رياضية مقبولة بدون برهان إلا أننا نميل إلى اعتبار فرضيات الهندسة بديهيات وفرضيات الجبر مسلمات .

والبديهيات أو المسلمات جمل رياضية تتضمن مصطلحات معرفة وغير معرَّفة والبديهية (أو المسلمة) هى قوانين النظرية فمثلاً فى الهندسة الاقليدية نجد أن أحد الأمثلة على البديهيات المثال التالى :

« أنه بين أى نقطتين يمكن رسم خط مستقيم واحد » .

من هذه البديهية تجد استخدام كلمات « نقطة » كمصطلح غير معرف وكلمات « خط » ، « بين » كمصطلحات معرفة وعليه نلاحظ أنه فى أى بديهية يجب أن تظهر اللامعرفات والمعرفات بشكل مباشر أو غير مباشر فى الصياغة اللغوية .

جـ) النظريات Theorms

إن آخر جزء فى النظام الرياضى هو النظريات والنظريات هى جمل رياضية قابلة للبرهان وتتضمن مصطلحات (معرفة – غير معرفة) وتنبع منطقياً من البديهيات (أو المسلمات) ولكى تقرر إذا كانت جملة معينة تمثل نظرية أم لا فإن النظرية تتطلب برهاناً رياضياً .

والبرهان "Proof" هو مجموعة من الخطوات أو الأدلة لإثبات قضية أو نظرية معينة . وتتعدد طرق البرهنة الرياضية ولذلك سوف نعرض بشئ من الاختصار لبعض أشهر طرق البرهنة الرياضية .

بعض طرق
البرهنة الرياضية

١- البرهان بالاستنتاج الرياضى

يعتمد الاستنتاج الرياضى (Mathematical Induction) على الخطوات التالية :

أ) لأى نظرية (قاعدة أو قانون) أثبت أنها صحيحة فى حالة ن = ١ .

ب) افترض صحة القاعدة أو القانون فى حالة ن = ك ثم اثبت صحة تلك القاعدة فى حالة ن = ك + ١ .

مثال : اثبت أن : ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ن – ١) = ن^{٢} ؟

البرهان :

أ) واضح أن القاعدة صحيحة فى حالة ن = ١ لأن ١ = ١^{٢} .

ب) افترض أن القاعدة صحيحة فى حالة ن = ك

... ١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ك – ١) = ك^{٢}

والمطلوب الآن إثبات صحة القاعدة فى حالة ن = ك + ١ .

بإضافة (٢ ك + ١) إلى كل من الطرفين نحصل على :

١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ ك – ١) + (٢ ك + ١) = ك^{٢} + (٢ ك + ١)

= (ك + ١)^{٢}

وعليه تثبت صحة القاعدة فى الحالة العامة طبقًا لطريقة الاستنتاج الرياضى .

إذن : ١ + ٣ + ٥ + ... (٢ ن – ١) = ن^{٢} .

١- البرهان الغير مباشر Indirect proof

عادة ما يعتمد البرهان الغير مباشر على افتراض عكس ما هو معطى وباستخدام المعلومات المعطاه والمنطق الرياضى يتم ايجاد تناقض بين ما توصل إليه الباحث وبين ما هو معطى ومن ثم يثبت خطأ الفرض الأول وأبسط طريق للبرهان الغير مباشر إذا كان لديك كرتين فإما أن يكونان متساويان أو أحدهما أصغر من الثانية فإذا استطعت إثبات أنه لايمكن أن تكون إحدى الكميتين أصغر أو أكبر من الثانية ففى هذه الحالة يجب أن تتساوى الكميتين .

مثال (١)

إثبت أن $\sqrt{٢}$ عدد غير قياسى ؟ .

افترض أن $\sqrt{٢}$ عدد قياس (عكس ما هو معطى)

$\therefore$ $\sqrt{٢} = \frac{أ}{ب}$. حيث أ ، ب أعداد صحيحة ، ب $\neq$ صفر

(أ ، ب) = ١ (أى أن أ ، بَ ليس بينهما عوامل مشتركة غير الواحد الصحيح) .

بتربيع الطرفين نحصل على :

$٢ = \frac{أ^٢}{ب^٢}$ $\therefore$ $أ^٢ = ٢$ $ك^٢$ $\longleftarrow$ (١)

$\therefore$ $أ^٢$ عدد زوجى

إذا كان $أ^٢$ عدد زوجى فإنه يمكن إثبات أن «أ» عدد زوجى .

سوف نثبت ذلك بطريقة التناقض .

إذا كان «أ» عدد زوجى فإنه يمكن كتابته على صورة أ = ٢م

$\therefore$ $أ^٢ = ٤م^٢$ حيث م عدد صحيح $\neq$ صفر

بالتعويض فى (١) نحصل على :

$٤م^٢ = ٢ ب^٢$ ــــــــــــ $٢م^٢ = ب^٢$ $\longleftarrow$ (٢)

$\therefore$ $ب^٢$ عدد زوجى – إذن «ب» عدد زوجى .

بنفس طريقة البرهان بالتناقض يمكن إثبات أنه إذا كان «$ب^2$» فإن «ب» عدد زوجي

∴ $ب^2$ عدد زوجي ، «أ» عدد زوجي .

وعليه فإن (أ ، ب) = ٢ أى أن هناك «٢»

كعامل مشترك على الأقل بين «أ ، ب» وهذا تناقض .

مع الفرض الذى افترضناه أولاً من أن (أ ، ب) = ١

ليس بينهما عامل مشترك غير الواحد الصحيح .

وعليه فإن $\sqrt{٢}$ لايمكن أن يكون عدد قياسى

إذن $\sqrt{٢}$ عدد غير قياسى .

مثال (٢)

إثبت أن الأعداد الأولية أعداد « لانهائية » ؟ باستخدام البرهان غير المباشر .

نفترض أن الأعداد الأولية نهائية . إذن يوجد عدد «ن» هو أكبر عدد أولى معروف .

إذن جميع الأعداد الأولية لابد أن تكون أقل من «ن» .

الآن إذا فرض أننا كتبنا عدد «م» بحيث يكون على الشكل التالى :

م = ١ × ٢ × ٣ × ٥ × .... × ن + ١

فإما أن يكون «م» عدداً أوليًا وإذا استطعنا إثبات ذلك فنكون قد حصلنا على تناقض لأننا افترضنا أن «ن» هو أكبر عدد أولى وطالما أننا أثبتنا أن «م» عدد أولى ومن الطبيعى أن «م» عدد أكبر من «ن» وعليه يكون الأعداد الأولية لانهائية . وإما أن يكون «م» عدد غير أولى سنحاول الآن إثبات أن «م» يجب أن يكون عدداً أوليًا .

العدد «م» لايقبل القسمة على أى عدد أولى بدون باقى . (طالما أن كتابة «م» بهذه الصورة تتضمن كافة الأعداد الأولية + ١) .

∴ «م» لايقبل القسمة إلا على نفسه أو على «١» .

وعليه يكون «م» عدداً أوليًا . وهذا يتناقض مع كون «ن» أكبر الأعداد الأولية .

∴ الأعداد الأولية لانهائية .

٣- البرهان بالتناقض

يعتمد البرهان بالتناقض على القاعدة المنطقية التالية :

(أ ← ب) ≅ («نفى» ب ← «نفى» أ)

بمعنى إذا كانت «أ» جملة رياضية صحيحة تؤدى إلى «ب» فإن ذلك يكافئ منطقيًا أن « معكوس « ب » يؤدى إلى « معكوس أ » .

ويمكن إثبات صحة ذلك من جداول الصواب والخطأ المنطقية .

مثال :

إثبت باستخدام البرهان بالتناقض أنه :

إذا كان «أ^{٢}» عددًا زوجيًا فإن «أ» يكون عددًا زوجيًا .

بتطبيق القاعدة المنطقة المبنى عليها البرهان بالتناقض نجد أن المراد إثباته فى المثال السابق يكافئ منطقيًا الجملة التالية : إثبت أنه إذا كان «أ» عددًا فرديًا فإن أ^{٢} عددًا فرديًا .

(أ ← ب) ≅ («نفى» ب ← «نفى» أ)

البرهان

بما أن «أ» عددًا فرديًا إذن أ = ٢م + ١

وعليه يكون أ^{٢} = (٢م + ١)^{٢}

= ٤م^{٢} + ٤م + ١

= ٢ (٢م^{٢} + ٢م) + ١

= ٢ ك + ١ حيث ك = ٢م^{٢} + ٢م

وعليه يكون أ^{٢} عدد فردى

وعليه نقول أن القاعدة الرئيسية صحيحة وهى أنه إذا كان «أ^{٢}» عدد زوجى فإن «أ» يكون عدد زوجى .

ثانياً : بعض التطورات الحديثة

في العلوم الرياضية

- ما قبل القرن السابع عشر
- القرن السابع عشر
- القرن الثامن عشر
- القرن العشرين

لما كانت التطورات الحديثة فى العلوم الرياضية من الضخامة والتعدد والثراء بحيث يصعب على أى كاتب متتبع لتاريخ الرياضيات من أن يلم بكافة الحقائق وعليه سنعرض فى عجالة سريعة لأبرز الأحداث التاريخية فى هذا العلم ليلم مدرسى الرياضيات خاصة بأهم الأحداث التاريخية ليكونوا على معرفة جيدة بمادتهم التى يدرسونها ومن ناحية أخرى قد يستخدمون ذلك كمقدمة لموضوعاتهم المدرسية أن وجدوا اتصالاً بين مايدرسونه فى الحصص المدرسية وبين المادة التاريخية المعروضة هنا .

وسوف نقسم تاريخ الرياضيات إلى المراحل التالية :

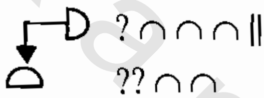
- المرحلة الأولى : ما قبل القرن السابع عشر
- المرحلة الثانية : القرن السابع عشر
- المرحلة الثالثة : القرن الثامن عشر
- المرحلة الرابعة : القرن التاسع عشر
- المرحلة الأخيرة : القرن العشرين

المرحلة الأولى : ما قبل القرن السابع عشر

ربما لايوجد فى تاريخ الرياضيات رجال أثروا العلوم الرياضية أكثر من المصريين القدماء . فربما يعود إليهم الفضل الأول فى وضع أول نظام عدى عشرى تجميعى معروف فى التاريخ ويعود ذلك إلى حوالى ٣٤٠٠ سنة قبل الميلاد . وكان هذا النظام يعتمد على نظام التجميع بمعنى أنه لايهم وضع الرقم فى المكان . فالمهم هو عدد الرموز المستخدمة بغض النظر عن مكانها كما أن هذا النظام يستخدم النظام العشرى وإليك بعض رموز النظام .

١ ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ ١٠٠٠٠ ١٠٠٠٠٠ ١٠٠٠٠٠٠

فإذا أردت كتابة العدد ١٣٥٢ فإنه يكتب على النحو التالى .



فمن الممكن ترتيب أى من الرموز المستخدمة بأى شكل من الأشكال المهم أن يحتوى على || ، وعلى خمس ∩ ، وعلى ثلاث ? وعلى 

كما يعود للمصريين القدماء الفضل فى استخدام الكسور الاعتدادية ولكن كانوا يستخدمون كسوراً بسطها واحد صحيح ويمكنهم بهذه الطريقة التعبير عن أى كسر وهذا يسمى الكسور الأحادية "Unit fraction" فمثلاً يمكن التعبير عن $\frac{٢}{٧}$ بالكسرين $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢٨}$.

أما فى مجال الهندسة فهناك بعض الأدلة التى تثبت أن المصريين القدماء كانوا يعرفون قانون مساحة الدائرة ، وحجم الاسطوانة القائمة ومعظم البحوث الحديثة فى مجال تاريخ الرياضيات أثبتت أن المصريين القدماء كانوا يعرفون أن مساحة أى مثلث عبارة عن حاصل ضرب القاعدة × $\frac{١}{٢}$ الارتفاع .

وبعد أفول الإمبراطورية المصرية القديمة بدأت إمبراطورية اليونان فى الظهور ولأول مرة فى تاريخ الرياضيات بدأنا نسمع عن الكلمة السؤالية لماذا ؟ مثل لماذا يكون فى المثلث المتساوى الساقين زاويتا القاعدة متساويتان ؟

ويعتبر فيثاغورث أحد أعظم علماء الإغريق الرياضيين . ويقال أنه ولد فى حدود عام ٥٧٢ ميلادى . ويعود لفيثاغورث وتلاميذه الفضل الأكبر فى تطور نظرية الأعداد . فقد قدم مفهوم الأعداد المتحابة Amicable ويقال لعددين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم الحقيقية لأحدهما هو العدد الثانى والعكس صحيح فمثلاً العددين ٢٢٠ ، ٢٨٤ يعتبران عددان متحابان لأن القواسم الحقيقية لـ ٢٢٠ هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ ، ١١ ، ٢٠ ، ٢٢ ، ٤٤ ، ٥٥ ، ١١٠) ومجموع هذه الأعداد يساوى ٢٨٤ وأن القواسم الحقيقية للعدد ٢٨٤ هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ٧١ ، ١٤٢) ومجموعها ٢٢٠ . ومن الغريب أنه لم يعلن عن أى زوج من الأعداد المتحابة حتى جاء العالم الفرنسى فورمات "Fermat" عام ١٦٣٦ حيث أعلن أن العددين ١٧٢٩٦ ، ١٨٤١٦ عددان متحابان .

وقدم فيثاغورث مفهوم العدد الكامل الذى يكون مجموع قواسمه الحقيقية تساوى نفس العدد مثل ٦ ، ٢٨ ، ٤٩٦ ، ٥٢١ ، ٦٠٧ ، ١٢٧٩ ، وقد أثبت اقليدى أنه إذا كان (٢ن – ١) عدداً أوليًا فإن (٢ن – ١) (٢ن –١) يعطى عددًا كاملاً . كما قدم فيثاغورث وتلاميذه التمثيل الهندسى للأعداد فتكلموا عن الأعداد المثلثية والأعداد الرباعية والخماسية وغيرها . وتعتبر نظرية فيثاغورث وثلاثيات فيثاغورث العددية من أشهر مايذكر عنه تاريخيًا .

وفى تلك الفترة ظهر واحد من أعظم الرياضيين فى التاريخ وهو أقليدس Euclid وقد عمل أقليدس أستاذًا للرياضيات فى جامعة الأسكندرية القديمة وقد ألف أقليدس أشهر كتاب للرياضيات فى التاريخ وهو كتاب العناصر "Elements" ويتكون هذا الكتاب من عشرة أجزاء ومن الطريف أن كتاب العناصر هذا لم يكن محتويًا على هندسة فقط بل يحتوى على جزء كبير من نظرية الأعداد ومبادئ الجبر . وتعتبر هندسة المرحلة الإعدادية والثانوية فى جزء كبير منها أجزاء من كتاب العناصر لأقليدس . ولقد

بنى أقليدس نظامه الهندسى والذى يعرف الآن باسم الهندسة الأقليدية نسبة إلى أقليديس على أساس خمس مسلمات رئيسية . كان أشهرها على الإطلاق المسلمة الخامسة والتى سميت بمسلمة التوازى والتى أدت إلى ظهور الهندسة اللاأقليدية فى العصر الحديث وسيأتى الحديث عن ذلك فيما بعد . بعد ذلك تأتى مرحلة الصحوة الإسلامية والتى شهدت ظهور علماء عظام فى تاريخ الرياضيات . مثل محمد بن موسى الخوارزمى . وكتابه الشهير حساب الجابر والمقابلة والذى ترجم إلى اللاتينية ومنه اشتق اسم الجبر ويعتبر بحق أبو الجبر ، ولقد ترجم كتاب الخوارزمى هذا العالم الإيطالى الرياضى الكبير فاباناش Fibanacci إلى اللغة اللاتينية ولقد كان لعمر الخيام جهد كبير فى تاريخ الرياضيات وربما يكون أفضل ما قدمه هو حله لمعادلة الدرجة الثالثة هندسيًا كما أن ناصر الدين « ١٢٥٠ م » ليعتبر أحد أهم من وضع أسس حساب المثلثات .

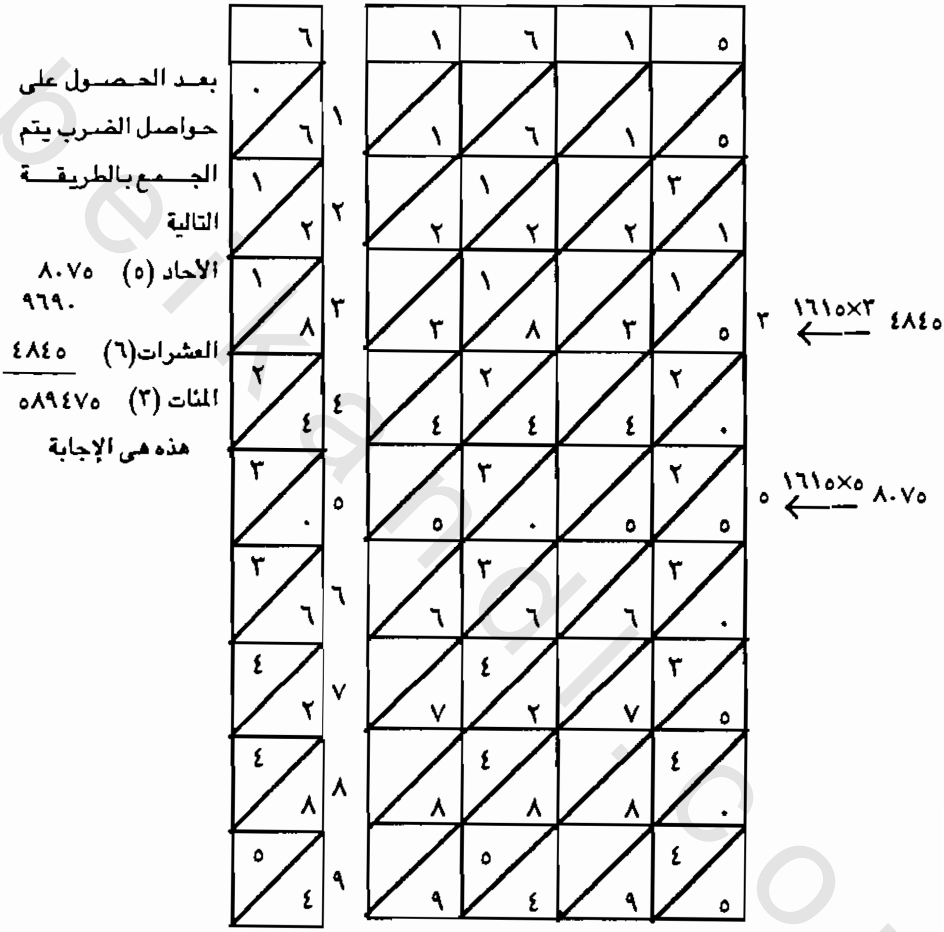
ولقد ظهرت فى تلك الفترة فى حوالى القرن الثالث عشر جامعات أوروبا الشهيرة مثل أكسفورد وكمبردج والتى كانت إحدى العلامات البارزة فى تاريخ الفكر الرياضى .

ومع تقدم القرن الخامس عشر وصحوة أوروبا من غفوتها ، ظهرت الطباعة التى غيرت شكل الحياة وظهرت مشاكل رياضية كثيرة ومعقدة وزاد الاهتمام بالرياضيات ومن ثم تطورت الكثير من المفاهيم الرياضية ولقد ظهر فى هذه الفترة (١٥٠٠م) كتاب للرياضيات للرياضى الإنجليزى الكبير روبت ركورد "R. Record" ويعتبر أهم اكتشافات القرن السادس عشر اكتشاف الحل الجبرى لمعادلات الدرجة الثالثة والرابعة على يد الرياضى الكبير كاردان "Cardano" وتلميذه الشهير فرير "Ferrai" كما قدمت العديد من الأعمال حول الأعداد القياسية وغير القياسية وكذلك الأعداد التخيلية.

القرن السابع عشر

لقد شهد القرن السابع عشر تطوراً هائلاً فى العلوم الرياضية كما ظهرت الكثير من الأسماء الشهيرة فى عالم الرياضيات . فمثلاً قدم نابير "Napier"

اللوغاريتمات للأساس « هـ » ولقد زار العالم الرياضى برجز "Briggs" نابير وقدم له اللوغاريتمات للأساس « هـ » فعملا معًا لتقديم اللوغاريتمات للأساس « ١٠ » . وإلى نابير يعود الفضل فى استخدام طريقته المعروفة باسم أعمدة نابير فى الضرب وهى الموضحة فى الشكل (١٠-٢) .



شكل (٣-١)

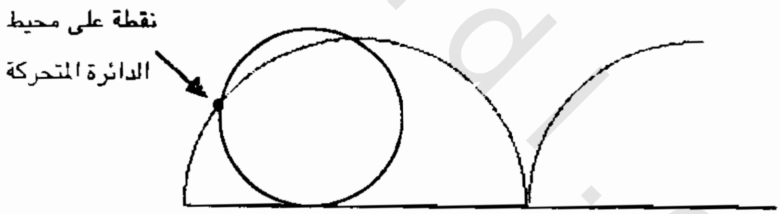
أعمدة نابير فى الضرب

لاحظ فى الشكل أن العمود المكتوب عليه « ٦ » قد وضع هنا لتوضيح كيفية الحصول على أى عمود من أعمدة نابير ويتم إعداد أعمدة لكل رقم (٠ ، ١ ،

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٠٠) بنفس الطريقة . فإذا فرض أننى أردت إيجاد حاصل ضرب ١٦١٥ × ٣٦٥ فإننى أجهز أعمدة نابير الخاصة بالأرقام ٥ ، ١ ، ٦ ، ١ كما هو موضح فى الشكل وأضعها جنباً إلى جنب كما هو مبين وأقرأ فى الصفوف ٥ ، ٦ ، ٣ النتيجة وأجمع الأعداد المتحصل عليها يعطينا حاصل ضرب ٣٦٥ × ١٦١٥ كما هو مبين فى الشكل (٢-٢) .

كما ظهر علماء عظام فى الفلك والرياضيات مثل جاليليو وكبلر كما فتح باسكال "Pscal" ميداناً جديداً للهندسة (ولد فى فرنسا فى عام ١٦٢٣) حيث قدم أعظم ما كتب عن هندسة القطاعات المخروطية .وذلك بمناقشة بعض أعمال ديسرجوز "Desargues" الذى قدم أيضاً الهندسة الإسقاطية .

كما كان باسكال أول من قدم أول آلة حاسبة فى التاريخ وذلك فى عام ١٦٤٢ - كما يعود له الفضل فى تقديم منحنى السيكلويد "Cycloid Curve" وهو عبارة عن المنحنى الذى ترسمه نقطة على محيط دائرة عند حركة الدائرة على خط مستقيم .



شكل (٣-٢)

وبعد اكتشاف باسكال للآلة الحاسبة قدم ليبنتز Leibnitz العالم الألمانى الشهير آلة حاسبة أخرى فى عام ١٦٧١ دون أن يكون عارف بما قدمه باسكال . كما قدم الإنجليزى مورلاند Morland آلة حاسبة أخرى فى عام ١٦٧٣ . وكانت كل هذه الآلات بطيئة وغير عملية إلا أنها كانت البدايات فى صناعة الآلات الحاسبة .

كما ظهرت فى ذلك القرن الهندسة التحليلية على يد ديسكارت Descarts والفرنسى الشهير فورمات Fermat التى حولت الأشكال الهندسية إلى معادلات جبرية .

ويعتبر من العلامات البارزة لهذا القرن ظهور التفاضل والتكامل قرب نهاية القرن السابع عشر . ولقد كان للعلامة الكبير إسحق نيوتن Newton والعالم الألمانى الشهير ليبنتز Leibnitz الفضل الأعظم فى ظهور ذلك العلم .

ولقد عمل نيوتن وليبنتز كلاً منفصلاً عن الآخر فى تجميع كل المعلومات التى كانت معروفة حتى ذلك التاريخ لإظهار علم التفاضل والتكامل فى شكل متكامل .

إلا أن اتجاه نيوتن كان مختلفًا عن اتجاه ليبنتز فلقد اهتم نيوتن بحل بعض المشكلات العملية رياضيًا . إلا أن ليبنتز كان مهتمًا بالبحث التجريدى والتحليل الرياضى بصفة خاصة . وكانت محاولات ليبنتز هذه أساس صحيح لعلم التحليل الرياضى والجبر البولى الذى قدمه چورچ بول Boole (١٨١٥-١٨٦٤) كما كان للعالم الرياضى الكبير برتراند رسلى الفضل الكبير فى تقديم الجبر البولى لنا فى القرن العشرين .

وإذا نظرنا إلى الدوريات التى نشرت فيها بحوث علوم الرياضيات قبل عام ١٧٠٠ لوجدناها ١٧ دورية فقط لاغير وفى عام ١٨٠٠ زاد العدد إلى أن وصل إلى ٢١٠ دورية أما فى القرن التاسع عشر فقد وصل ذلك العدد إلى ٩٥٠ دورية (Eves, 1969) وهذا العدد من الدوريات أصبح عدداً هائلاً مع دخول القرن العشرين ولايمكن أن ننسى فضل العالم الفرنسى الأشهر فورمات Fermat الذى قدم العديد من الأعمال فى مجال نظرية الأعداد وغيرها . ففى مجال الأعداد الأولية ذكر الكثير من النظريات التى لاتزال تحمل اسمه مثل : أى عدد أولى فردى يمكن التعبير عنه بالفرق بين مربعين بطريقة واحدة وواحدة فقط .

- Eves, H. **History of Mathematics**. Holt Rinehart. Winston, Pub. 1969. (P. 350).

إذا كان « و » عدداً أولياً فردياً فمن السهل إثبات أن

$$\text{و} = \left(\frac{\text{و} + ١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{و} - ١}{٢}\right)^{٢}$$

أما إذا كان و = س٢ - ص٢ ∴ و = (س - ص) (س + ص) ولكن (و) عدداً أولياً إذن عوامله هى (و ، ١) وعليه فإن (س + ص) = و (س - ص) = ١ .

أى أن س = $\frac{\text{و} + ١}{٢}$ ، ص = $\frac{\text{و} - ١}{٢}$ ومن أشهر ماقدمه فورمات ما يسمى بنظرية فورمات الأخيرة "Format's last theorem" وهى تنص على أنه لايوجد عدد صحيح موجب س ، ص ، ع ، ن بحيث (سن + صن) = عن حيث ن .

فقد قرأ فورمات كتاب دى فوناتيس "Diophantus" العالم الرياضى المصرى القديم وكان أن وصل إلى هذه النظرية فى ذلك الكتاب فكتب يقول لقد وجدت برهاناً رائعاً لإثبات هذه النظرية لكن الهامش لايتسع للكتابة هنا وسواء كان فورمات - قد وجد البرهان أو لم يجده ، فقد شغلت هذه المشكلة عقول كثير من علماء الرياضيات . فقد أوجد أيلور برهاناً لهذه النظرية فى حالة ن = ٣ . وفى حوالى عام ١٨٢٥ أوجد لاجنلر "Legendre" برهان لها فى حالة ن = ٥ . ومع دخول عصر الحاسبات الآلية السريعة تم إثبات صحة نظرية فورمات هذه فى حالة ن = ٤٠٠٢ (Eves, 1969) .

القرن الثامن عشر

لقد شهد القرن الثامن عشر تطوراً هائلاً فى العلوم الرياضية خاصة بعد اكتشاف التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية فى القرن السابع عشر وأثبت كل منهما قدرتهما على حل الكثير من المشكلات الرياضية المعقدة إلا أن من أشهر رياضى القرن الثامن عشر دموفوار "De Moivre" الذى ولد فى فرنسا فى الفترة (١٦٦٧-١٧٥٤) ولكن قضى معظم أيام حياته فى إنجلترا صديقاً عزيزاً لنيوتن . ويعود إلي دموفوار الفضل فى معالجة التكامل الخاص بالمنحنى الاعتدالى المعروف فى الإحصاء حيث أثبت أن :

$$\int \text{هـ}^{-\text{س}^{٢}} \, \text{د س} = \frac{\text{ط}}{٢}$$

كذلك الصيغة الرياضية المشهورة باسم قانون دموفوار

(حا س + ت جتا س)^{ن} = جتا ن س + ت حا ن س .

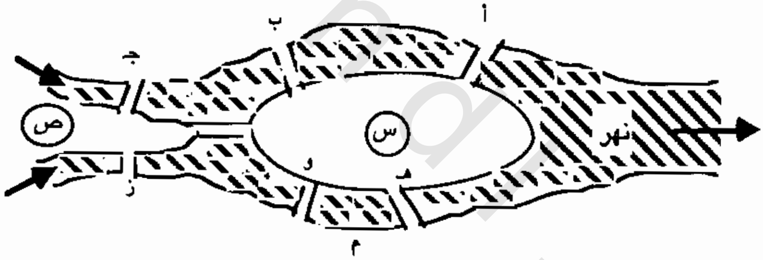
كما يعتبر آيلور من عظماء رياضيات القرن الثامن عشر وإليه يرجع الفضل فى كثير من الأعمال فإليه يعود الفضل فى اكتشاف العلاقة بين عدد أسطح أى مجسم وأحرفه ورؤوسه .

ر - ح + س = ٢ حيث ر «عدد الرؤوس » ح « عدد الأحرف » س عدد السطوح » .

كما يعود الفضل لايلور إلى الصيغة الرياضية المشهورة

هـ$^{ت س}$ = جتا س + ت حا س

وهناك حل ايلور لمعادلات الدرجة الثانية والدالة « هـ » لايلور كما حل ايلور مشكلة كوبرى كسونبرج "Konigsberg" ، الشهيرة والتى يوضحها الشكل (٣-٣) .



شكل (٣-٣)

رسم تخطيطى لمشكلة كوبرى كسونبيرج

والمشكلة ببساطة توجد جزيرة س فى مدينة كسونبيرج الألمانية والتى أصبحت بعد الحرب العالمية الثانية فى الاتحاد السوفيتى الآن وتسمى ستالنجراد وأن هناك سبع كبارى (أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ذ) فكيف يمكن لك أن تعبر النهر من أى جهة وتمر على السبع كبارى كل واحد مرة واحدة وتعود إلى المكان الذى بدأت منه ولقد أثبت ايلور رياضياً استحالة حدوث ذلك .

لقد تميزت رياضيات القرن الثامن عشر بالبحث التجريدي للرياضيات مثل التقارب والتباعد والاتصال والانفصال واللانهائيات .

ويعتبر بيرونالي "J. Bernoulli" أحد رواد علم الفيزياء الرياضية "mathenematical physics" فى ذلك العصر . كما قدم لاجرانج أول نظرياته فى المتغير الحقيقى "Real Variable" كما يعود له الفضل فى تقديم نظرية المجموعات "Group Theory" كما كانت أفضل وأعظم إنجازاته محاولاته لتقديم التحليل الحقيقى "Real Analysis" .

ومن الطريف أن كلمة دالة "Function" تعنى بالاتينى المكافئ وقد قدمها على أنها تعبير مكون من متغيرات وبعض القيم الثابتة ونظر ايلور إلى الدالة على أنها معادلة تتضمن متغيرات وثوابت . وجاء فورير "Fourier" (١٧٦٨-١٨٣٠) الذى تابع دراسة المتسلسلات بشكل عام ومتسلسلات حساب المثلثات خاصة واستخدم مفهوم الدالة بشكل أعم وأشمل من مفهوم ايلور على أنها علاقة بين مجموعة من المتغيرات .

ثم جاءت نظرية الفئات وعممت مفهوم الدالة أكثر ليشمل العلاقة بين مجموعتين من الفئات بمعنى أن الدالة د (س) فى نظرية الفئات تعرف على أنها فئة من الأزواج المرتبة بحيث إذا كان (أ ، ب) د (س) ، (حـ ، د) د (س) وكان أ = حـ فإن ب = د وتسمى الفئة التى تحتوى كافة العناصر (أ ، ب ، $أ_١$ ، $ب_١$ ، ..) بالنطاق ، وتسمى الفئة التى تحتوى العناصر (جـ ، د ، $ج_١$ ، $د_١$ ، ...) بالنطاق المصاحب وتتحول الدالة إلى مايسمى بالراسم "Mapping" وهكذا تلاحظ أن مفهومًا واحدًا مثلاً الدالة قد تطور بشكل ملفت للنظر وكلما تطور العلم لاحظ مدى التصميم والتوسع فى فهم الرياضيين للمفهوم نفسه وكلما ازداد فهم الناس زادت تطبيقات المفهوم على حالات أعم وأشمل .

القرن التاسع عشر

لقد شهد القرن التاسع عشر تغيرًا عظيمًا فى أسلوب ومحتوى الرياضيات فلم تعد تعتمد الرياضيات على الشكل والعدد كما كان سائدًا طوال العصور الماضية بل اتجهت إلى مزيد من التجريد الذى شهدنا بوادره فى القرن الثامن عشر على يد ايلور وغيره .

ولكن يتميز القرن التاسع عشر بثلاث تغيرات رئيسية غيرت مسار التفكير الرياضي . ويسمى الرياضيون المحدثون القرن التاسع عشر بالعصر الذهبى للرياضيات .

الاتجاه الأول :

وهذا الاتجاه يتمثل فى أهم الاكتشافات فى ميدان الهندسة فلقد ارتبطت الهندسة وحتى ذلك التاريخ بالمفهوم الاقليدى على الرغم من ظهور الهندسة التحليلية والإسقاطية وهندسة القطاعات المخروطية وغير ذلك .

ولقد شهد القرن التاسع عشر مولد الهندسة اللاقليدية وذلك نتيجة محاولات علماء الرياضيات خلال عصور التاريخ المختلفة إثبات مسلمة التوازى الخامسة فى كتاب أقليدس على أساس أنها تشبه النظرية وليست مسلمة لاختلاف الصياغة عن باقى المسلمات الأخرى . وهذه المسلمة تقول « إذا قطع خط خطين وكان مجموع الزوايا الداخلة فى جهة واحدة من القاطع ١٨٠° كان الخطان متوازيين » وفى محاولات العلماء البحث عن إثبات هذه المسلمة كنظرية مستخدمين المسلمات الأخرى الأربع توصل ثلاثة من كبار الرياضيين كلٌ منفصل عن الآخر إلى أن مسلمة التوازى لايمكن إثباتها كنظرية باستخدام المسلمات الأخرى لاقليدس .

وهؤلاء العلماء الرياضيون بولياى "Bolyai" المجرى والرياضى الروسى المشهور لوباتشفيسكى "Lobachevsky" وجاوس "Gauss" الألمانى .

ونتج عن تلك المحاولات ظهور هندسات أخرى مختلفة عن هندسة الاقليدية سميت بالهندسة اللاقليدية .

ومن أمثلة الهندسات اللاقليدية الهندسة التناقصية والهندسة الزائدية وهندسة السطوح الريمانية .

وبعيداً عن ذلك وجدنا فيلكس كلاين "Felix Klein" (١٩٢٥ - ١٨٤٩) الذى قدم برنامجاً للهندسة مختلفاً كل الاختلاف وهو المتعلق بهندسة التحويلات .

الاتجاه الثانى

إن أعظم الاكتشافات فى القرن التاسع عشر كان فى ميدان الجبر فقبل ذلك القرن كان الجبر يعتمد على أنه تعميم لدراسة العلاقات وخواص العدد إلا أن هذا القرن شهد عصر البناءات الرياضية "Mathematical Structure" ففى عام ١٨٤٣ قدم الرياضى الأيرلندى الشهير وليم هاملتون "Hamilton" أول نظام جبرى رياضى ضربى لا ينطبق عليه قانون الإبدال . وهذا النظام يسمى الأرباعيات "Quarternions" وتعرف الأرباعيات الحقيقة على أنها أرباع مرتبة (أ ، ب ، جـ ، د) حيث أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية وتعرف عمليات الضرب والجمع والتساوى على أساس :

١- (أ ، ب ، جـ ، د) = (هـ ، و ، م ، ن) أ = هـ ، ب = و جـ = م ، د = ن .

٢- (أ ، ب ، جـ ، د) + (هـ ، و ، م ، ن) = (أ + هـ ، ب + و ، جـ + م ، د + ن) .

٣- (أ ، ب ، جـ ، د) (هـ ، و ، م ، ن) = أ هـ - ب و - جـ م - د ن ، أ و + ب هـ + جـ ن - د م ، أ م + جـ هـ + د و - ب ن ، أ ن + ب م + د هـ - جـ و) .

بعد ذلك قدم كيلى "Cayley" المصفوفات عام ١٨٥٧ وهو نظام جبرى أيضًا لايتحقق قانون الإبدال على الضرب فيه .

الاتجاه الثالث

فى ميدان التحليل "Analysis" ويعتبر كوشى "Cauchy" وأبحاثه المشهورة فى تقارب وتباعد المتسلسلات والنهايات أحد أهم الرياضيين الذين وضعوا أساس التحليل كما كانت هناك إسهامات لكوشى فى مجال المعادلات التفاضلية والمتغير المركب كما ظهر فى نفس هذا القرن الرياضى الكبير آبل "Abel" والذى ترتبط باسمه المجموعات الإبدالية كما يعود إليه الفضل فى إثبات أنه لايوجد حل جبرى عام لمعادلات الدرجة الخامسة بدلالة معاملات حدودها .

ويعتبر چورچ كانتور "G. Cantor" أحد أهم رياضى القرن التاسع عشر والقرن العشرين . فلقد ولد كانتور فى عام ١٨٤٥ ودرس فى جامعة ببرلين ومات فى عام ١٩١٨ وقد نشر أهم أبحاثه حول نظرية الفئات فى عام ١٨٧٤ ونظرية اللانهائيات .

وفى القرن العشرين أثبت الكثير من الرياضيين أن الأعداد الطبيعية يمكن تعريفها فى ظل مفاهيم نظرية الفئات . وعليه فإن معظم النظريات الرياضية من الممكن تعريفها فى ظل ذلك المفهوم .

ولقد دفع برتران رسل "Bertran Russell" (١٨٧٢ - ١٩٧٠) الرياضى الشهير الرياضيات فى القرن العشرين دفعة أخرى فقد توصل إلى أن نظرية الفئات من الممكن استنتاجها باستخدام المنطق على الرغم من عدم موافقة عدد كبير من الرياضيين المعاصرين لهذا الاتجاه .

القرن العشرين

لقد شهد القرن العشرين تطوراً آخراً فى مجال الرياضيات فبعد وضع أسس التحليل الرياضى مع نهاية القرن التاسع عشر تم وضع أسس جديدة وتعاريف جديدة للمفاهيم الرياضية طبقًا لهذا التطور فى ميدان التحليل فعرفت مفاهيم قابلية التفاضل والتكامل والنهايات والدوال والاتصال والانفصال وغير ذلك فى ضوء هذا التطور الهام فى علوم الرياضيات .

لقد شهد القرن العشرين مولد الفراغات المجردة "Abstract spaces" التى أدت فى النهاية إلى ظهور التوبولوجى بمعنى أنه مع الفهم العميق لمفاهيم نظرية الفئات ولدت علوم جديدة وأبدعت أفكار معاصرة .

ولايمكن أن نختم حديثنا عن القرن العشرين دون أن نتكلم عن أهم أحداث ذلك العصر وهو الخاص بتطور علوم الحاسب الآلى . إن كثيراً من رجال تدريس الرياضيات فى عصرنا الحالى لايكفيهم أن يتعلم طالب المرحلة الثانوية بعض مبادئ

علوم الحاسب لكى نمحوا أميتهم حول ذلك العلم الجديد بل ينادون بضرورة تدريب الطلاب على استخدام وتصميم وإعداد بعض برامج الكومبيوتر ليس فقط بلغة الباسيك بالإضافة إلى ذلك لغة الكوبل أو لغة الباسكال "Pascal" .

إن دراسة الطالب فى المرحلة الثانوية لفصل دراسى كامل على الأقل لأهم أساسيات علم الحاسب الآلى بالإضافة إلى فصل دراسى كامل للبرمجة يمثل الحد الأدنى المطلوب لطالب المرحلة الثانوية

ولقد تطورت علوم الحاسب الآلى تطوراً سريعًا فى مدة زمنية قصيرة فإذا عرفنا أن أول آلة حاسبة بمعنى الكلمة قد صممت فى لندن أثناء الحرب العالمية الثانية نجد إلى أى حد هذا العلم سريع التطور والنمو ولقد كانت هذه الآلة تعتمد على الصمامات وكانت تلك الصمامات كثيرة حتى أنه قد وصل فى بعضها إلى ١٨ ألف صمام وفى الخمسينيات تم اختراع الترانزستور فى الولايات المتحدة فحلت تلك الترانزستورات محل الصمامات مما سهل العمل وقلل التكلفة . ومع بداية الستينات دخلت الولايات المتحدة ثورة الرقائق "Chips" التى أدت إلى ثورة فى عالم الالكترونيات .

ولقد مرت قصة الكومبيوتر فى أربعة مراحل أو أجيال كان أولها كما ذكرنا فى مطلع عام ١٩٤٥ وسمى "ENIAC" أما الجيل الثانى فقد استخدمت فيه « الترانزستورات » والجيل الثالث استخدمت فيه رقائق السليكون . والجيل الرابع هو جيل الميكروكومبيوتر . ولقد حدثت الطفرة الكبيرة فى عالم الميكروكومبيوتر فى عام ١٩٧١ . ويتم الآن تصنيع الجيل الخامس فى اليابان والذى يطلقون عليه الذكاء الاصطناعى . وفى ذلك النوع يطمعون فى إنتاج كومبيوتر لايقوم فقط بإجراء الحسابات والعلميات بسرعة وبدقة فقط ، بل يفكر فى الاختيارات المتاحة لحل المشكلة ويقدم حلولاً لكل احتمال . ومهما حاولنا أن نعرض بالتفصيل فإن قصة الرياضيات هى قصة الجنس البشرى وأى مجلد مهما اتسع صفحاته لايستطيع أن يحصى أهم إنجازات ذلك العلم السريع التطور الغنى برجاله وأفكاره .

ثالثاً : اتجاهات حديثة في مناهج الرياضيات

- بعض مناهج الرياضيات الحديثة (SMSG; UICSM) .
- نقد المناهج الحديثة للرياضيات
- برنامج مقترح لرياضيات التسعيات فى المرحلة الثانوية
- مراجع الفصل

اتجاهات حديثة فى مناهج الرياضيات

لقد بدأت حركة الرياضيات الحديثة "New math" فى الولايات المتحدة الأمريكية مع بداية الستينيات وكرد فعل مباشر للثورة التى اجتاحت الولايات المتحدة فى ذلك الوقت بعد إطلاق الاتحاد السوفيتى لمركبة الفضاء الأولى سبوتنك "Sputnik" فى أكتوبر ١٩٥٧ وعليه بدأت حركة واسعة فى تصميم وإعداد وتنفيذ العديد من برامج الرياضيات فى ذلك الوقت كان من أشهرها وأكثرها استخدامًا فى المدارس الثانوية الأمريكية برنامج "UICSM" .

"University of Illinois committee on school Mathematics"

برنامج جامعة الينوى للرياضيات المدرسية تحت قيادة « ماكس بيبرمسان » وكذلك برنامج جامعة « بيل » "SMSG" .

"School Mathematics study Group"

تحت قيادة ادوارد بيجل "E. Begle" وغير ذلك من برامج انتشرت واشتهرت فى ذلك الوقت مما لايتسع معه المجال لعرضها هنا .

إلا أن ما يهمنا فى هذا الخصوص هو أن حالة الرياضيات المدرسية فى الولايات المتحدة فى منتصف الثمانينيات تشبه وإلى حد كبير حالتها فى عام ١٩٥٧ فبعد ثلاثين عامًا من البحث والتجريب وإخراج العديد من البرامج نجد أن هناك عدم رضا سواء كان ذلك من المتخصصين أو أولياء الأمور أو المسئولين السياسيين على نوعية الرياضيات التى تقدمها المدارس الثانوية . وبالقطع فإن ذلك فيه بعض المؤشرات لرياضيات المدرسة الثانوية والإعدادية عندنا فى مصر وفى غيرها من الدول العربية التى لاتزال تستخدم المناهج الحديثة للرياضيات .

ولقد لخص يسوسكن "Z. Usiskin, 1985" الوضع :

"The similarities between the situation of the 1950 and 1970 were well known to the leader of mathematics. Education ..... these leaders saw a return, not to on era in which students were mathematically capable, but to an era where neither skills nor understanding was achieved" (P. 12).

بمعنى أننا فى حالة مشابهة للحالة فى عام ١٩٥٧ بل نحن الآن كما يرى كثير من قادة طرق تدريس الرياضيات فى أمريكا فى حالة أسوأ بمعنى أننا فى عصر لم يعد الطالب يعرف المهارات الرياضية فقط . بل إنه لايعرف ولايفهم الرياضيات .

وأبسط دليل على ذلك هو نتائج اختبار (SAT-M) .

"The scholastic Aptitude test of mathematics

وهو أشهر اختبار للرياضيات يعطى للطلاب الحاصلين على الثانوية العامة لدخول الجامعة . ولايقيس هذا الاختبار المهارات الرياضية بل هو اختبار يعتمد على حل المشكلة أكثر من اعتماده على الحسابات الرياضية ويمكن تلخيص أهم أهداف هذا الاختبار فى :

١- قياس إلى أى مدى يفهم ويطبق الطالب معلوماته الرياضية سواء كان ذلك على المستوى الابتدائى أو الإعدادى أو الثانوى .

٢- قياس كيف يستطيع الطالب استخدام معلوماته فى مواقف جديدة عليه .

٣- قياس كيف يستطيع الطالب استخدام معلوماته الرياضية فى مواقف ومشكلات غير روتينية (مواقف واقعية) .

وإليك متوسط درجات الطلاب الذين أخذوا هذا الاختبار فى الولايات المتحدة منذ عام ١٩٥١ وحتى عام ١٩٨٣ لترى الصورة كاملة ومدى التغير فى الأداء .

جدول (٣ – ١)

متوسط درجات الطلاب فى اختبار "SAT-M"(×)

السنة	متوسط	السنة	متوسط
١٩٥١ – ١٩٥٢	٤٩٤	٦٧ – ١٩٦٨	٤٩٤
١٩٥٢ – ١٩٥٣	٤٩٥	٦٨ – ١٩٦٩	٤٩١
١٩٥٣ – ١٩٥٤	٤٩٠	٦٩ – ١٩٧٠	٤٨٨
١٩٥٤ – ١٩٥٥	٤٩٦	٧٠ – ١٩٧١	٤٨٧
١٩٥٥ – ١٩٥٦	٥٠١	٧١ – ١٩٧٢	٤٨٢
١٩٥٦ – ١٩٥٧	٤٩٦	٧٢ – ١٩٧٣	٤٨١
١٩٥٧ – ١٩٥٨	٤٩٦	٧٣ – ١٩٧٤	٤٧٨
١٩٥٨ – ١٩٥٩	٤٩٨	٧٤ – ١٩٧٥	٤٧٣
١٩٥٩ – ١٩٦٠	٤٩٨	٧٥ – ١٩٧٦	٤٧٠
١٩٦٠ – ١٩٦١	٤٩٥	٧٦ – ١٩٧٧	٤٧١
١٩٦١ – ١٩٦٢	٤٩٨	٧٧ – ١٩٧٨	٤٦٩
١٩٦٢ – ١٩٦٣	٥٠٢	٧٨ – ١٩٧٩	٤٦٦
١٩٦٣ – ١٩٦٤	٤٩٨	٧٩ – ١٩٨٠	٤٦٧
١٩٦٤ – ١٩٦٥	٤٩٦	٨٠ – ١٩٨١	٤٦٨
١٩٦٥ – ١٩٦٦	٤٩٦	٨١ – ١٩٨٢	٤٦٨
١٩٦٦ – ١٩٦٧	٤٩٥	٨٢ – ١٩٨٣	٤٦٧

(×) هذه البيانات مأخوذة من :

- National Council of Teachers of mathematics "1985 Year Book" NCTM. The secondary school curriculum. P. 4.

وقبل الدخول فى تحليل بيانات هذ الجدول لبيان دلالتها يجدر بنا أن نلاحظ أن الحصول على درجات اختبار "SAT-M" عملية ليست سهلة فهى عملية معقدة إلا أننا نجد على سبيل المثال درجات عام ١٩٨٢ - ١٩٨٣ ومتوسطها ٤٦٧ مأخوذة من مجموعة من طلاب الصف الثالث الثانوى وعددهم ٧٤٨٣٦٠ وعدد ٥٩٦٧٦٠ من طلاب الصف الثانى الثانوى وغيرهم من طلاب آخرين قد يكونوا فى مراحل أخرى أو أنهوا الدراسة الثانوية وعدد هؤلاء ١٤٢٦٠٩ .

لاحظ من الجدول (١) أن الانحدار فى المتوسط للدرجات قد بدأ مع بداية ١٩٦٧ - ١٩٦٨ كما نلاحظ أن أعلى متوسط وهو ٥٠٢ فى بداية الحركة وفى زورة الاهتمام بها وذلك فى عام ١٩٦٢ - ١٩٦٣ وأن أقل متوسط ٤٦٦ فى عام ١٩٧٨ - ١٩٧٩ وأن أكبر فرق حدث بين عامى (١٩٦٢ - ١٩٦٣) ، (١٩٧٨ - ١٩٧٩) حيث وصل ذلك الفرق إلى ٣٦ درجة .

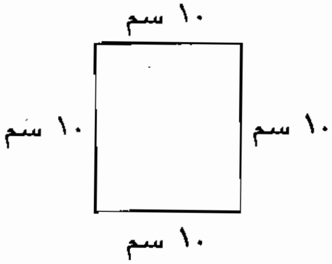
وباعتبار أن اختبار "SAT-M" هو اختبار فى الفهم قبل المهارة يتضح للقارئ أن المناهج الحديثة للرياضيات قد فشلت وإلى حد كبير فى تدريب الطلاب على الفهم وعلى المهارة فى ذات الوقت والدليل واضح على مستوى الولايات المتحدة ككل .

وقد يبدو أن الذين استفادوا حقًا من المناهج الحديثة هم الصفوة من الطلاب وليسوا المتوسطين أو البطئ التعلم .

وإليك عينة من الأمثلة التى تدلك على ذلك :

١- أن أبسط المسائل الرياضية المتعلقة بمناهج المرحلة الإعدادية يصعب على طلاب المرحلة الثانوية حلها فعلى سبيل المثال نجد أن ٣٥٪ من طلاب المرحلة الثانوية لم يتسطيعوا الإجابة عن المثال التالى . وأن ٥٢٪ من عدد الطلاب الذين درسوا مقرر فى الهندسة لمدة عام (سواء فى المرحلة الإعدادية أو الثانوية) هم فقط الذين استطاعوا الإجابة عن هذا المثال رغم بساطته "Usiskin, 1985" .

مساحة المربع المبين هى :



١- ٢٠ سم٢

٢- ٤٠ سم٢

٣- ٤٠ سم

٤- ١٠٠ سم٢

٥- ١٠٠ سم

ماذا يعنى ذلك ؟ نعتقد أن الدليل واضح علي مدى تمكن التلاميذ من المفاهيم الأساسية للرياضيات .

وفي دراسة أخرى لسنك (Senk, 1983) تضمنت ٨٤ فصلاً يدرسون هندسة وجد أن ٢٩٪ من طلاب هذه الفصول لايستطيعون تكملة برهان مشكلة بسيطة مثل تطابق المثلثات وبشكل عام فقد وجد أن ٥١٪ من هؤلاء الطلاب هم الذين يستطيعون حل مثل هذه المشكلة .

والصورة تتضح أكثر إذا عرفنا أن من بين جميع الطلاب الذين كان عمرهم ١٧ سنة فى ربيع ١٩٨٢ وجد أن ٧١٪ قد حصل على فصل دراسي واحد فى الجبر ، ٥٢٪ منهم قد حصل على فصل دراسى واحد فى الهندسة . وأن حوالى ٢٥٪ من طلاب المرحلة الثانوية لايحصلون على أى مقرر فى الجبر أو الهندسة سواء كان ذلك فى الصف الأول أو الثانى أو الثالث الثانوى (NAEP; 1983, Carpenter, 1983) .

وعلى ذلك فقد بدأ الفكر الرياضى التربوى يعيد النظر فى المناهج الرياضية وقد أوصت لجنة (NACOME, 1975)

"The National Advisory Committee on Mathematics Education"

بضرورة أن يتضمن أى محتوى منهجى للرياضيات الأساسيات التالية :

١- أن التركيب المنطقى للرياضيات وأصولها ينبغى أن يؤخذ فى الاعتبار فى أى منهج للرياضيات المدرسية .

٢- أن الخبرات المحسوسة لابد أن تتكامل مع تلك المجردة لتوضح المفاهيم الرياضية .

٣- أن تعطى كل فرصة للطلاب لتطبيق المعلومات الرياضية على مدى متسع (مجال العلوم ، الاقتصاد ، الهندسة ، ومشكلات الحياة العامة) .

٤- أن استخدام الرموز وصياغتها وفهم معناها وحدود استخدامها عامل مهم فى فهم الرياضيات ذاتها .

٥- ويجب قبل دخول الطالب للمرحلة الثانوية وعلى الأقل فى الصف الثانى الإعدادى أن يتعلم الطالب كيف يستخدم الآلة الحاسبة فى معظم حصص الرياضيات بما فى ذلك الاختبارات .

٦- أن على جميع طلاب المرحلة الثانوية أن يتعلموا شيئًا عن علوم الحاسب الآلى وليس هذا الشئ من الجانب النظرى فقط بل يجب عليهم أن يتعلموا أصول البرمجة والتدريب العملى على ذلك .

٧- أن مجرد الاعتماد على محو الأمية فيما يتعلق بعلوم الحاسب الآلى يعد كافيًا فى هذا العصر بل إن لغة الباسك ليست اللغة الوحيدة التى يجب أن يعرفوها .

٨- أن الإحصاء ونظرية الاحتمالات لابد وأن تحتويها مناهج المرحلة الإعدادية والثانوية على حد سواء .

وفى ذلك اقترح كلاً من كان ، كارى ، لاب (R. Cain, L.Carry,C. Lamb. 1985) اقترحوا برنامجًا للرياضيات يعتمد على أربع مكونات رئيسية لطلاب المرحلة الثانوية وهذه المكونات الأربع هى :

١- المهارات الأساسية Basic skill

٢- المفاهيم الرياضية Conceptual math

٣- الرياضيات التطبيقية Applied math

٤- الرياضيات البحتة . Pure math

فى الجدول (٢) وصف تفصيلى للمكونات الأربع وأهميتها وبدور المعلم ودور التلميذ والأسلوب المنهجى الممكن استخدامه ومجتمع الطلاب الواجب تطبيق البرنامج عليهم .

ونقدم لك شرحًا مختصرًا لكل مكون .

١- المهارات الرئيسية

يتضح من الاستعراض السابق مدى قصور المناهج الحديثة للرياضيات فى معالجة هذا الجانب حتى أنه فى منتصف السبعينيات بدأت الدعوة إلى العودة إلى المهارات الرئيسية "Back to Basic" وعليه فلايمكن بالقطع العودة إلى الوراء ولكن يمكن تشكيل الحاضر ليحقق ويعالج عيوب المناهج الموجودة والهدف الرئيسى للمحتوى المنهجى لهذا المكون هو تمكين الطلاب من معرفة واستخدام المهارات الأساسية للرياضيات بشكل عملى وبسهولة .

٢- المفاهيم الرياضية

إن هذا المكون وما يتضمنه من محتويات وموضوعات رياضية يجب أن يركز على تعرف المفاهيم الرياضية وفهمها فالرياضيات ليست محتوى منهجى فقط بل هى طريقة وأسلوب تفكير . هناك فرق بين الطريقة والأسلوب فالطريقة هى عملية تنظيم المحتوى المنهجى أما الأسلوب فهو عملية عرض تلك المادة داخل الفصل (Young, 1965) وعليه فتدريس المفاهيم هنا والمحتوى المنهجى يجب أن يركز على مستوى الإدراك خاصة فيما يتعلق بالعلاقات الرياضية والمفاهيم الفراغية ويعتبر المنهج الحلزونى هو أفضل أسلوب لعرض ذلك المحتوى المنهجى كما أن دور المدرس يجب أن يكون دور الموضح والمفسر وليس الناقل أو المردد للمعلومة كما فى (١) إن القدرة على التصميم والاستخدام فى مواقف جديدة تعد الهدف الأساسى من وراء هذا المكون المنهجى .

٣- الرياضيات التطبيقية

إن أحد أهم عيوب المناهج الحديثة للرياضيات هو عدم قدرة الطلاب على استخدام معلوماتهم الاستخدام التطبيقى فى مواقف الحياة وعليه فإن هدف هذا المكون هو تدريب الطلاب على استخدام معلوماتهم الرياضية فى مواقف تطبيقية لحل مشكلات حقيقية فى الاقتصاد والهندسة والعلوم وغير ذلك من ميادين المعرفة التى تساعد الطالب بعد تخرجه ليعيش حياته ويختار نوع التخصص الملائم له فى الجامعة فيما بعد .

وهذا المكون يحتاج إلى نوعين أرقى فى التفكير من المستويات الأخرى فهذا الجانب يركز على أسلوب حل المشكلة والإبداع والابتكار . ودور المعلم هنا هو الانتقاء والتوجيه والإرشاد إلى بعض الأساليب المتبعة فى حل المشكلات من خلال خبرته ومعرفته . إلا أن العبء الأكبر يقع على المتعلمين .

٤- الرياضيات البحتة

يعتقد البعض وهم على حق أن أرقى مستوى للرياضيات للمرحلة الثانوية هو ذلك المتعلق بالرياضيات البحتة فالهدف الأساسى لذلك المكون هو تدريب الطلاب على استخدام التحليل الرياضى والوصول إلى اكتشافات أو تعميمات جديدة . ولذلك فإن هذا المستوى يجب أن يقتصر على الطلاب الذين يمتلكون المهارات والقدرات العقلية العالية التي تمكنهم من الدراسة فى هذا الميدان ومتابعة الدراسة فيما بعد .

فنظرية الأعداد والتفاضل والتكامل وبعض مبادئ التحليل والمتسلسلات وغيرها مكونات أساسية .

ودور المدرس يجب أن يقتصر على اختيار الأمثلة وتقويم السلوك والعبء الأكبر يقع على الطالب .

جدول (٣ - ٢)

تصور منهجي لرياضيات المرحلة الثانوية

	المهارات الأساسية	المفاهيم الرياضية	الرياضيات التطبيقية	الرياضيات البحتة
الأهمية	الاستخدام العام للرياضيات كمواطنين صالحين	الاستخدام العقلي وتربية التفكير	الاستخدامات في حل بعض المشكلات التخصصية	الرياضيات من أجل الرياضيات
الأهداف	معرفي إدراكي تطبيق تحليل	إدراكي تطبيقي معرفي تحليلي	تطبيقي معرفي إدراكي تحليلي	تحليلي إدراكي تطبيقي معرفي
المنهج	الترتيب الهرمي والمنطقي	الحلزوني Spiral	أسلوب حل المشكلة	نظام المسلمات Axiomatic
التدريس	العمل على تمكين التلميذ مهاريًا	فهم المكونات والعلاقات	التدريب على أسلوب حل المشكلة	التحليل العقلي والمنطقي
المعلم	الشرح ، التوضيح التشخيصي	تربية وتكوين المفاهيم . أمثلة مختلفة وتدريبات مختارة	الحصول على المشكلات وعرضها وتدريب الطلاب عليها والتصميم من جانبهم	استخدام أسلوب الدور النموذجي
المسئوليات	المعلم عليه يقع العبء الأكبر	معلم ثم تلميذ	تلميذ ثم معلم	تلميذ
الطلاب	كل الطلاب	٧٥٪ من مجتمع الطلاب	أعلى ٢٥٪ من مستويات الطلاب	أعلى ١٠٪ من مستويات الطلاب

وفي ضوء هذا التصور المنهجي لرياضيات المرحلة الثانوية يمكننا وضع المقررات التالية التي تحقق تلك الأهداف .

نموذج مقترح

لمقرر الصف الأول الثانوى

المهارات الأساسية

أ) معلومات رئيسية عن الهندسة والجبر :

١- خصائص نظام الأعداد القياسية .

٢- جمع وضرب وقسمة كثيرات الحدود .

٣- حل المعادلات الخطية واللامتساويات فى متغيرين من الدرجة الأولى .

٤- قياس الزوايا وتصنيفها واستخدام المنقلة والفرجال والمسطرة الغير مرقمة .

٥- المساحات (مساحة شبه المنحرف ، متوازى الأضلاع ، المثلث) .

٦- الحجوم (المنشور ، متوازى المستطيلات ، الهرم الثلاثى) .

٧- النسبة والتناسب (جمع وطرح وضرب وقسمة الكميات المتناسبة) .

٨- التشابه والتطابق للأشكال الهندسية .

ب) المنطق :

١- الجمل المنطقية - جداول الصواب والخطأ ، الروابط و ، أو

٢- الاشتراطات (إذا كان فإن ، إذا كان وكان فقط) .

٣- النفى والتناقض .

٤- التتولوجى (تحصيل الحاصل) .

٥- أمثلة رياضية وغير رياضية لاستخدام المنطق .

٢- المفاهيم الرياضية

١- مفاهيم الاحتمال ، العينة ، الإحصاء .

٢- الهندسة التحليلية والتمثيل البيانى للأشكال الهندسية والمعلومات الإحصائية الهيستوجرام .

٣- المعادلات : معادلة لخط المستقيم فى مستوى معادلة الدائرة والمماس والقاطع .

٤- حل المعادلة : الحل البيانى لمعادلات الدرجة الأولى الحل البيانى للامتساويات فى متغيرين خطياً .

٣- الرياضيات التطبيقية

١- معدل تغير الكمية .

٢- قوانين الجاذبية وحركة الأجسام .

٣- مراكز الثقل لبعض الأشكال الهندسية .

٤- نظرية الاحتمالات .

٥- نظرية ذات الحدين وتطبيقاتها .

٦- الإحصاء .

أ) معنى الإحصاء - الإحصاء الوصفى - الإحصاء الاستنتاجى .

ب) التمثيل البيانى للمعلومات الإحصائية على مشكلات واقعية (معدلات نمو السكان ، نمو الصناعات الوطنية) .

جـ) مقاييس النزعة المركزية (المتوسط ، الوسيط ، المنوال) وباستخدام أمثلة تطبيقية .

د) الأرباعيات واستخدام أمثلة تطبيقية .

٧- نظرية فيتاغورث واستخداماتها فى الإنشاءات الهندسية .

٨- تطبيقات ومشكلات واقعية تحتاج إلى حلول رياضية البرمجة الخطية ، بحوث العمليات .

٩- برامج الكومبيوتر بلغة الباسيك كمقدمة وتعريف بأصول لغة الباسيك وكتابة بعض البرامج البسيطة مثل حساب مساحات المثلث والدائرة .

٤- الرياضيات البحتة

أ) الفئات ، الاتحاد ، التقاطع .

ب) المجموعات : خصائص المجموعات ، أنواع المجموعات (المجموعات الأبلية) .

جـ) نظام الأعداد الحقيقية :

١- أهمية توسعة النظام العدى .

٢- أمثلة لأعداد غير قياسية .

د) الهندسة الاقليدية :

١- مناقشة نظام المسلمات ، اللامعرفات ، المعرفات ، النظريات .

٢- البينية Betwenness .

هـ) هندسة التحويلات :

١- الدوران ، التعاكس ، الانتقال .

٢- ربط مفاهيم التحويلات بالمجموعات .

و) نظرية الأعداد :

١- الأعداد الأولية والكاملة والناقصة والزائدة .

٢- الأعداد الحقيقية والأعداد المركبة .

٣- الرباعيات كتوسعة لنظام الأعداد المركبة .

مراجع الفصل

أولا : المراجع العربية

١- فريدريك هـ . بل : طرق تدريس الرياضيات ترجمة وليم عبيد ومحمد أمين المفتى وممدوح سليمان ، الجزء الثانى ، الدار العربية للنشر والتوزيع ، ١٩٦٠ .

ثانيا : المراجع الأجنبية

2- Eves, H. ***History of Mathematics***, N. Y: Holt & Rinhart Winston pub. 1969.

3- Exner, R. M. & M. F. Rosskopf "Proof" in ***The Teaching of Secondary School Mathematics***. Thirty-third year book. NCTM, 1970.

4- Usiskin, R. "The Status of Secondary School Mathematics" in the 1985 year book. ***The Secondary School Mathematics Curriculum***. NCTM. 1985.

5- Young, N. in NCTM, 1985 year book.