

الباب الثالث

المعادلات التفاضلية

obeykandi.com

المعادلات التفاضلية

تصنف المعادلات التفاضلية وفقا للآتي:-

(أ) النوع : عادية او جزئية

(ب) المرتبة: مرتبة المشتق الاعلى الذي ياتي في المعادلة

(ت) الدرجة : اس اعلى قوة لاعلى رتبة للمشتق وذلك بعد تصفية الكسور
و الجذور في المتغير غير المستقل ومشتقاته.

فمثلا.....

$$\left(\frac{d^3Y}{dX^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)^5 + \frac{Y}{X^2+1} = e^x$$

معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية. توجد المشتقات
"العادية" فقط عندما يكون المتغير غير المستقل دالة لمتغير مستقل واحد X.

حل المعادلة التفاضلية:

يقال ان $Y=f(X)$ حل للمعادلة التفاضلية اذا كانت مشتقاتها منها تحقق المعادلة
التفاضلية.

فمثلا...

$$Y = c_1 \cos X + c_2 \sin X \dots\dots\dots(1)$$

(c_1, c_2 ثوابت)

تعتبر حلا للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + Y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

لان المعادلة رقم (1) ومشتقاتها تحقق المعادلة رقم (2):

$$\frac{dY}{dX} = -c_1 \sin X + c_2 \cos X \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -c_1 \cos X - c_2 \sin X \dots\dots\dots(4)$$

وبالتعويض من المعادلتين (1) و (4) في المعادلة (2):

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2Y}{dX^2} + Y &= -c_1 \cos X - c_2 \sin X + c_1 \cos X + c_2 \sin X \\ &= 0 \end{aligned}$$

∴ المعادلة رقم (1) تحقق المعادلة رقم (2).

ومن المألوف ان يكون للمعادلة او المعادلات التفاضلية حلولاً تحتوي على ثوابت اختيارية. وسيكون من الضروري ان تخصص قيماً لهذه الثوابت الاختيارية وفقاً للشروط المعطاة.

ويكون للمعادلة التفاضلية من المرتبة n بصفة عامة حلاً يحتوي على n من الثوابت الاختيارية يسمى هذا بالحل العام. ويبقى بعد ذلك تحديد قيم الثوابت (مسألة جبرية) اذا اعطيت شروط ابتدائية.

وسوف نتناول هنا معادلات المرتبة الاولى بطريقة:

(أ) فصل المتغيرات

(ب) المعادلات المتجانسة

(ت) المعادلات الخطية

أ- فصل المتغيرات:

وذلك بتجميع المتغيرات Y مع dY ، X مع dX

مثال 1:

أوجد حل المعادلة الاتية:

$$(X+1)dY = X(Y^2+1)dX$$

الحل:

$$\frac{dY}{Y^2 + 1} = \frac{X dX}{X + 1}$$

ويجاء التكامل للطرفين

$$\begin{aligned}\tan^{-1} Y &= \int \frac{X}{X+1} dX \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{X+1}\right) dX \\ &= X - \ln(X+1) + c\end{aligned}$$

مثال 2:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX} = e^{X-Y}$$

الحل

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} &= \frac{e^X}{e^Y} \\ \int e^Y dY &= \int e^X dX \\ e^Y &= e^X + C\end{aligned}$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة الآتية:

الحل:

$$\int \frac{\ln X}{X} dX = \int \frac{1}{Y} dY$$

بفرض ان:

$$\ln X = u$$

$$\frac{dX}{X} = du$$

$$\therefore \int \frac{\ln X}{X} dX = \int \frac{dY}{Y}$$

$$\int u \cdot du = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2}(\ln X)^2 = \ln Y + c$$

ومن المعتاد في بعض المسائل استعمال التعويضات التفاضلية الآتية:-

$$1- \quad d\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{Y \cdot dX - X \cdot dY}{Y^2}$$

$$2- \quad d\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X \cdot dY - Y \cdot dX}{X^2} = -\left(\frac{Y \cdot dX - X \cdot dY}{X^2}\right)$$

$$3- \quad d \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X \cdot dY - Y \cdot dX}{X^2 + Y^2}$$

$$4- \quad d \tan^{-1}\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{Y \cdot dX - X \cdot dY}{X^2 + Y^2}$$

$$5- \quad d(XY) = X \cdot dY + Y \cdot dX$$

$$6- \quad d(\ln \sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{X \cdot dX + Y \cdot dY}{X^2 + Y^2}$$

$$7- \quad d(X^2 + Y^2) = 2(X \cdot dX + Y \cdot dY)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية :

$$X \cdot dY - Y \cdot dX = (X^2 + Y^2) dY$$

$$\frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2} = dY$$

$$d \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore d \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = dY$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = Y + c$$

تمارين 1

I - أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

- 1- $X(2Y - 3)dX + (X^2 + 1)dY = 0$
- 2- $X^2(Y^2 + 1)dX + Y\sqrt{X^3 + 1}dY = 0$
- 3- $\sqrt{2XY} \frac{dY}{dX} = 1$
- 4- $\sin X \frac{dX}{dY} + 5 \sec^2 Y \tan Y = 0$
- 5- $Xe^Y dY + \frac{X^2 + 1}{Y} dX = 0$
- 6- $Y\sqrt{2X^2 + 3} dY + X\sqrt{4 - Y^2} dX = 0$
- 7- $\frac{dY}{dt} - 4t^3 = 0$

عند $t=5, t=0$

II - تحقق بان الدالة: $Y = \ln t$ هي حل للمعادلة: $t^2\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) - t\left(\frac{dY}{dt}\right) + 2 = 0$

III - أوجد حل المعادلات الآتية عند النقطة المقابلة:

(a) $X.dY + Y.dX = 3XY.dX$

عند $Y=1, X=1$

(b) $Y.dX - X.dY + dX = 4X^4.dX - dX$

$$\text{عند } Y = \frac{1}{3}, X = 1$$

$$(c) \frac{dY}{dX} = e^{X+Y}$$

$$\text{عند } Y=1, X=0$$

$$(d) \frac{dY}{dX} = X^2Y^4$$

$$\text{عند } Y=1, X=1$$

$$(e) Ye^{-X} \frac{dY}{dX} + 2 = 0$$

$$\text{عند } Y=2, X=0$$

$$(f) \frac{dY}{dX} = \frac{2X}{Y + X^2Y}$$

$$\text{عند } Y=4, X=0$$

ب- المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تكون المعادلة على الصورة :-

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{Y}{X}\right) \dots \dots \dots (1)$$

يمكن حلها بادخال متغير غير مستقل جديد v :

$$v = \frac{Y}{X} \dots \dots \dots (2)$$

$$Y = vX$$

$$\frac{dY}{dX} = v + X \frac{dv}{dX} \dots \dots \dots (3)$$

وتصبح المعادلة رقم (1):

$$\therefore v + X \frac{dv}{dX} = f(v) \dots \dots \dots (4)$$

ويمكن حل المعادلة (4) بفصل المتغيرات:

$$v - f(v) = -X \frac{dv}{dX}$$

$$\frac{dX}{X} = -\frac{dv}{v - f(v)}$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{dv}{v - f(v)} = 0$$

مثال 1:

بين أن المعادلة الآتية متجانسة ثم أوجد حلها .

$$(X^2 + Y^2)dX + 2XY.dY = 0$$

الحل :

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X^2 + Y^2}{2XY}$$

بالقسمة على X^2

$$\therefore \frac{dY}{dX} = -\frac{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)^2}{2\left(\frac{Y}{X}\right)} = -\frac{1 + v^2}{2v} \dots\dots\dots(1)$$

∴ المعادلة المعطاة متجانسة وبالتالي يمكن التعويض: $v = \frac{Y}{X}$ وإيجاد $\frac{dY}{dX}$ بدلالة

v وحلها بعد ذلك بفصل المتغيرات كالآتي:-

$$\therefore \frac{dY}{dX} = v + X \frac{dv}{dX}$$

بالتعويض في المعادلة (1)

$$\therefore v + \frac{1 + v^2}{2v} = -X \frac{dv}{dX}$$

$$\frac{2v^2 + 1 + v^2}{2v} = -X \frac{dv}{dX}$$

$$\frac{1 + 3v^2}{2v} = -X \frac{dv}{dX}$$

$$-\frac{dX}{X} = \frac{2v \cdot dv}{1+3v^2}$$

$$\ln|X| + \frac{1}{3} \ln|1+3v^2| = \frac{1}{3} \ln c$$

$$X^3(1+3v^2) = c$$

$$X^3(1+3(\frac{Y}{X})^2) = c$$

مثال 2:

اثبت أن المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها.

$$(X+Y)dY + (X-Y)dX = 0$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX} + \frac{X-Y}{X+Y} = 0$$

$$\frac{dY}{dX} + \frac{1-v}{1+v} = 0$$

∴ المعادلة المعطاة متجانسة حيث $\frac{dY}{dX}$ دالة في v . بالتعويض عن $\frac{dY}{dX}$ من (3)

$$\therefore v + X \frac{dv}{dX} + \frac{1-v}{1+v} = 0$$

$$X \frac{dv}{dX} + \frac{v+v^2+1-v}{1+v} = 0$$

$$X \frac{dv}{dX} + \frac{v^2+1}{1+v} = 0$$

$$\frac{v+1}{v^2+1} dv + \frac{dX}{X} = 0$$

$$\frac{v}{v^2+1} dv + \frac{1}{v^2+1} dv + \frac{dX}{X} = 0$$

$$\frac{1}{2} \ln|v^2+1| + \tan^{-1} v + \ln|X| = \ln c$$

$$\ln \frac{X \sqrt{v^2+1}}{c} + \tan^{-1} v = 0$$

وبالتعويض من المعادلة (2) عن v حيث $v = \frac{Y}{X}$

$$\therefore \ln \frac{X \sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 1}}{c} + \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = 0$$

تمارين 2

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية بعد إثبات إنها متجانسة:-

1- $X^2 dY + (Y^2 - XY)dX = 0$

2- $(Xe^{\frac{1}{x}} + Y)dX - X dY = 0$

3- $X^2 dY + (Y^2 - XY)dX = 0$

4- $(X^2 + Y^2)dY - Y^2 dX = 0$

5- $\frac{dY}{dX} = \frac{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}}{Y}$

ج- المعادلات الخطية من المرتبة الاولى:

من المعروف ان الحد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ من الدرجة الاولى ولكن من المرتبة الثانية بينما الحد

$Y\left(\frac{dY}{dX}\right)$ من الدرجة الثانية لان مجموع الاسس في Y ، $\frac{dY}{dX}$ يساوي 2.

فعندئذ تكون المعادلة التفاضلية خطية اذا كان كل حد في المعادلة من الدرجة صفر

او الدرجة الأولى وتكون على الصورة:

$$\frac{dY}{dX} + P(X)Y = Q(X)$$

او:

$$dY + P(X)Y dX = Q(X).dX \dots\dots\dots(1)$$

حيث أن $Q(X), P(X)$ دالتان في x

بضرب المعادلة (1) في $e^{\int P(X)dx}$

$$\therefore e^{\int P(X)dx} dY + e^{\int P(X)dx} P(X)Y dX = Q(X)e^{\int P(X)dx} dX \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{aligned} d(Ye^{\int P(X)dx}) &= Yd(e^{\int P(X)dx}) + e^{\int P(X)dx} dY \\ &= Ye^{\int P(X)dx} P(X)dX + e^{\int P(X)dx} dY \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

بمقارنة المعادلتين (2) و (3)

$$\therefore d(Ye^{\int P(X)dx}) = Q(X)e^{\int P(X)dx} dX$$

بتكامل الطرفين:

$$Ye^{\int P(X)dx} = \int Q(X)e^{\int P(X)dx} dX$$

يسمى المقدار $e^{\int P(X)dx}$ بالعامل المكمل ويرمز له بالرمز ρ

مثال 1: حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX} + 2XY = 5X$$

الحل:

$$P = 2X, \quad Q = 5X$$

$$\therefore \rho = e^{\int P(X)dx} = e^{x^2}$$

$$\therefore Ye^{x^2} = \int 5Xe^{x^2} dX$$

$$= \frac{5}{2}e^{x^2} + c$$

مثال 2: حل المعادلة الآتية

$$\frac{dY}{dX} + Y = e^x$$

الحل:

$$\begin{aligned}P &= 1, & Q &= e^x \\ \therefore \rho &= e^{\int P(x) dx} = e^{\int dx} = e^x \\ \therefore Y e^x &= \int e^x e^x dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} + c \\ Y &= \frac{1}{2} e^x + c e^{-x}\end{aligned}$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$X \frac{dY}{dX} - 3Y = X^2$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} - \frac{3}{X} Y &= X \\ P &= -\frac{3}{X}, & Q &= X \\ \therefore \rho &= e^{\int -\frac{3}{X} dx} = e^{-3 \ln X} = \frac{1}{e^{3 \ln X}} = \frac{1}{X^3} \\ \rho Y &= \int \rho Q dx + c \\ &= \int \frac{1}{X^3} \cdot X dx + c = -\frac{1}{X} + c \\ Y &= -X^2 + cX^3\end{aligned}$$

ملاحظات:

$$\begin{aligned}e^{\ln X} &= X \\ e^{m \ln X} &= X^m \\ e^{n+m \ln X} &= X^m \cdot e^n\end{aligned}$$

-I

II- قد تكون المعادلة التفاضلية الخطية في Y ، $\frac{dY}{dX}$ منفصلة او متجانسة

وبالتالي يكون عندنا حرية الاختيار في الحل.

III - المعادلة الخطية في X ، $\frac{dX}{dY}$ يمكن أن تحل بنفس الطريقة السابقة باستبدال

Y محل X .

تمارين 3

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

1- $\frac{dY}{dX} + 2Y = e^{-X}$

2- $2\frac{dY}{dX} - Y = e^{\frac{X}{2}}$

3- $X\frac{dY}{dX} + 3Y = \frac{\sin X}{X^2}$

4- $X.dY + Y.dX = \sin X.dX$

5- $X.dY + Y.dX = Y.dY$

6- $(X-1)^3 \frac{dY}{dX} + 4(X-1)^2 Y = X+1$

7- $e^{2Y} dX + 2(Xe^{2Y} - Y)dY = 0$

8- $(X-2Y)dY + Y.dX = 0$

9- $(Y^2+1)dX + (2XY+1)dY = 0$

اختبارات عامة

في

التكامل

obeykandi.com

اختبار رقم (1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1 - \int (\csc X - 1)^2 dX$$

$$2 - \int (X + 1)^{10} (X + 2) dX$$

$$3 - \int \frac{\sin \sqrt{X}}{\sqrt{X}} dX$$

$$4 - \text{احسب قيمة: } \int \frac{X+2}{(X^2-2)^2} dX$$

5- أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض:

$$Y = X^2 - 5X + 6, \quad Y = 0$$

حول المحور Y

6- حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) Y.dY - 4X.dX = 0$$

$$(b) (X - 2Y)dY + (Y + 4X)dX = 0$$

اختبار رقم (2)

احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$1 - \int X \ln X dX$$

$$2 - \int \frac{1}{\sqrt{X}} \csc^2 \sqrt{X} dX$$

$$3 - \int \frac{\sqrt{X^2 - 9}}{X} dX$$

$$4 - \text{احسب قيمة: } \int_0^{\sqrt{2}} X^3 e^{X^2} dX$$

5- أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم

المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول المحور X .

6- حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) X dY - Y dX = 2X^2 dX$$

$$(b) \frac{dY}{dX} + \frac{2}{X}Y = 6X^3$$

اختبار رقم (3)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1 - \int \cos^{-1} X dX$$

$$2 - \int \frac{3X+5}{X+2} dX$$

$$3 - \int X e^X dX$$

$$4 - \int \frac{dX}{1 + \cos X}$$

$$5 - \text{أوجد قيمة } \int_2^{10} \sqrt{2X+3} dX$$

6- أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم

المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول X=5

7- أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) \frac{dY}{dX} + \frac{1+Y^2}{XY^3(1+X^2)} = 0$$

$$(b) \frac{dY}{dX} - XY = X$$

اختبارات عامة

obeykandi.com

اختبار 1

س1 (a) باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولى لكل من:

$$i - f(X) = \sqrt{X}$$

$$ii - f(X) = \frac{1}{2X}$$

(b) أوجد $\frac{dY}{dX}$ لكل من الدوال الآتية:

$$i - f(X) = \frac{1}{\ln X} + \ln \frac{1}{X}$$

$$ii - f(X) = \frac{\cos 4X}{1 - \sin 4X}$$

س2 (a) احسب القيمة الوسيطة للدالة الآتية:

$$f(X) = X + \frac{4}{X}, \quad 4 \geq X \geq 1$$

(b) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى: $Y = X^2 - 2X + 3$ عند كل

نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y = X + 1$

(c) أوجد نقط الانقلاب للمنحنى: $Y = \frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + 4X + 10$

س3 أوجد $\frac{dY}{dX}$ لكل من الدوال:

$$1 - Y = (2X^2 - 1)\tan^3 5X$$

$$2 - Y = \tan^{-1} e^{2X}$$

$$3 - Y = 3^{\sin X^2}$$

$$4 - X^3 + \frac{X}{Y} = Y$$

$$5 - Y = \log \left| \frac{64+4}{2X-3} \right|$$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$$1- \int \frac{dX}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^2}$$

$$2- \int (\cos 3X)^3 \sqrt{\sin 3X} dX$$

$$3- \int X(2)^{-x^2} dX$$

$$4- \int \frac{X^4 + 2X^2 + 3}{X^3 - 4X} dX$$

س5 (a) اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$Y = \sqrt{X} \quad , \quad Y = X^2$$

(b) اوجد الحجم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$Y = \frac{1}{8}X^3 \quad , \quad Y = 2X$$

حول المحور Y.

اختبار 2

س1 باستخدام التعريف اوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(X) = (X^2 + X)^{\frac{1}{2}}$$

س2 اوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$1- f(X) = \frac{1}{(1+Z+Z^2)}$$

$$2- Y = \tan^{-1} e^{2X}$$

$$3- Y = \log \ln X$$

$$4- Y = \sin X^2 \cos X^2$$

$$5- Y = \frac{\sin X}{1 - \cos X}$$

$$6- Y^2 + 2XY - X^2 = \csc X$$

س3 اوجد النهاية العظمى و الصغرى و نقط الانقلاب للدالة:

$$f(X) = X^4 + \frac{4}{3}X^3 - 4X^2$$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$$1 - \int X^2 e^{2X} dX$$

$$2 - \int \frac{X^2 dX}{\sqrt{X^2 - 16}}$$

$$3 - \int \frac{2e^X}{\cos e^X} dX$$

$$4 - \int \sqrt{1 + \cos X} dX$$

س5 (a) أوجد المساحة المحصورة بين : $Y = 5$, $Y = 4X - X^2$
(b) حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$$1 - X e^Y dY + X \sqrt{1 - Y^2} dY = 0$$

$$2 - (X - Y)dY + (X - Y)dX = 0$$

اختبار 3

س1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة :

$$Y = \sqrt{3X^2 + 1}$$

س2 أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$$1 - Y = (X + 1)(X - 1)(X + 2)$$

$$2 - Y = X^2 \tan^3 4X$$

$$3 - Y = (\csc^2 2X - \cot 2X)^4$$

$$4 - Y = \frac{\sin 2X + X^2}{\tan 2X + 1}$$

$$5 - Y = \sin^{-1}(\sin 5X)$$

$$6 - Y = \ln(X^3 + 1)(\sin X^2)$$

س3 أ- أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة للدالة:

$$f(X) = \ln X^2 \quad , \quad 1 \leq X \leq e$$

ب- احسب القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{48.85}$

س4 أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$$1 - \int \frac{dX}{\sqrt{2-5X^2}}$$

$$2 - \int \frac{X-1}{X+1} dX$$

$$3 - \int e^x (2 + \cos e^x) dX$$

$$4 - \int \frac{\cot X + 1}{\sin^2 X}$$

س5 أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحدد بالقطع المكافئ $Y^2 = 4X$ والمستقيم $X=4$ حول المحور Y .

س6 حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$$1 - X \frac{dY}{dX} (2Y - 1) = Y(1 - X)$$

$$2 - (X^2 + Y^2) dX = 2XY dY$$

المراجع

- 1 - حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية - تأليف ج.ب.توماس ترجمة الدكتور موفق دعبول واخرين - منشورات جامعة الفاتح الطبعة الثانية ١٩٧٩
- 2 - حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية: تأليف وليم هـ.دورفي الدار الدولية للنشر والتوزيع . ترجمة الدكتور محمد علي محمد السمري جامعة حلوان جمهورية مصر العربية. الطبعة الثانية ١٩٩٢
- 3- أساسيات الرياضيات. حسين رجب مجمد. دار الفجر للنشر وانتوزيع القاهرة. الطبعة الأولى ١٩٩٨
- 4- Engineering formulas –Kurt Gieck. Third edition 1973 McGraw – Hill comp.