الباب الثانى

التـــــكامل

التكــــــامل

تعريف : هو العملية العكسية للتفاضل .

نفرض أنه أعطى المشتقة : $\frac{dY}{dX} = f'(x)$

وأنه طلب ايجاد قيمة : $Y = f(x)$

فعملية إيجاد قيمة Y من المشتقة تسمى تكامل على المشتقة ويرمز لها بالرمز $\int$

<u>مثال تمهيدي</u> :

أوجد قيمة Y عندما :

$$\frac{dY}{dX} = 2x \qquad (1)$$

من خلال المعرفة بالمشتقات نجد أن :

$Y = x^2$

$Y = x^2 - 1$

$Y = x^2 + c$ (c ثابت)

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأجوبة (مشتقة الثابت تساوى صفر) ولذلـــك

نضع الحل فى الصورة العامة :

$$Y = x^2 + c \qquad (2)$$

تسمى المعادلة (1) معادلة تفاضلية

المعادلة (2) حل للمعادلة التفاضلية وتكتب هكذا،

$$\int F'(x) = F(x) + c$$

$$\int \frac{dY}{dX} = Y + c$$

<u>مثال 1</u> إذا كان : $\frac{dY}{dX} = 3x^2$

أوجد قيمة Y (حل المعادلة التفاضلية)

الحـــــــل :

$$dY = \frac{dY}{dX} dX$$
$$= 3x^2 dx$$

ومن الخبرة السابقة بالتفاضل نجد أن :

$$\frac{d(x)^3}{dX} = 3x^2$$

$$d(x^3) = 3X^2 dX$$

$$\therefore \int d(X^3) = \int 3X^2 dX$$

$$= X^3 + c$$

ونلاحظ أن الحل يتم بزيادة الأس واحد والقسمة على الأس الجديد أى أن :-

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1} \qquad , m \neq -1$$

معنى ثابت التكامل هندسياً :

اذا كان ميل المماس لمنحنى هو : $\frac{dY}{dX} = 1$

$\therefore\ Y = X + C$ .... (1)

فعند اى نقطة على المنحنى ولتكن (X , Y) ولتكن مثلاً :

(a) $\mathbf{X = 0}$, $\mathbf{Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore\ 0 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 0$

$\therefore\ Y = X$

(b) $\mathbf{X = 1}$, $\mathbf{Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore 0 = 1 + C \quad \rightarrow \quad C = -1$

$\therefore\ Y = X - 1$

(c) $\mathbf{X = 2}$, $\mathbf{Y = 0}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore\ 0 = 2 + C \quad \rightarrow \quad C = -2$

(d) $\mathbf{X = 0}$, $\mathbf{Y = 1}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$\therefore\ 1 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 1$

$\therefore\ Y = X + 1$

(e) $\mathbf{X = 0}$, $\mathbf{Y = 2}$

بالتعويض فى المعادلة (1)

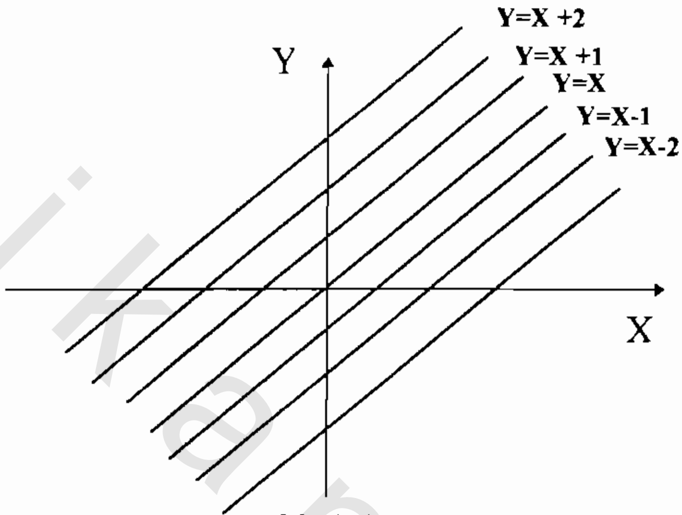
$\therefore\ 2 = 0 + C \quad \rightarrow \quad C = 2$

$\therefore\ Y = X + 2$

وهكذا .....

نلاحظ أن جميع المعادلات السابقة لها نفس الميل

أى أى $\frac{dY}{dX} = 1$ وممكن أن يكون أى منها حـــلاً للمعادلـــة $\frac{dY}{dX} = 1$ ويظهر هذا بشكل (29) ويتوقف هذا الحل على النقطة (X , Y) التى يمـــر بها الستقيم (المنحنى) .

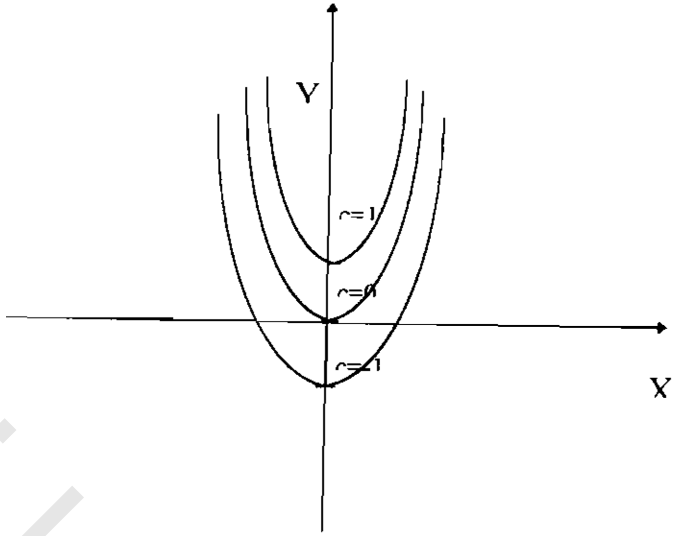


شكل 29

وبالمثل ايضاً عندما يكون : $\frac{dY}{dX} = 2X$ .... (1)

$$Y = \int 2X \; dX = X^2 + C$$

أى أن المنحنى $Y = X^2 + c$ والذى يأخذ إحدى المنحنيات المبينة فى الشكل رقم (30) وفقاً للنقطة التى يمر بها (X , Y) وكلها يكون ميل المنحنى فيهـــا هو 2X وأى من هذه المنحنيات ممكن أن يكون حلاً للمعادلة (1) .



شكل (30)

مثال 1 :

أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (2,4) A وميل المماس له عنـــــد أى نقطة هو: $3X^2-2X+1$

$$\frac{dY}{dX} = 3x^2 - 2x + 1$$

$$Y = \int (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$= x^3 - x^2 + x + c$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة A(2,4) فهى تحقق معادلته

$$\therefore\ 4 = 2^3 - 2^2 + 2 + c$$

$$4 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$c = -2$$

$$\therefore\ Y = x^3 - x^2 + x - 2$$

مثال 2 :

اذا كان ميل المماس لمنحنى هو $3x^2 - 2x + 5$ وكان هذا المنحنى يمر بـــ A(1,1) أوجد قيمة النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور y .

الحــــــــــل :

$$\frac{dY}{dX} = 3x^2 - 2x + 5$$

$$Y = \int (3x^2 - 2x + 5)\,dx$$

$$Y = x^3 - x^2 + 5x + c$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة A(1,1) فهى تحقق معادلته :

$$\therefore\ 1 = 1 - 1 + 5 + c$$

$$c = -4$$

$$\therefore\ Y = x^3 - x^2 + 5x - 4$$

ولايجاد النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور Y نضع $x = 0$

$$\therefore\ Y = -4$$

∴ النقطة التى يقطع فيها المنحنى المحور Y هى : $B(0, -4)$

تمارين (1)

1 – أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(0,0)$ وميله يساوى $2x - \frac{1}{2}x^2$

2 – أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(1,1)$ وميله يساوى $\frac{-4}{x^2}$

3 – أوجد القانون الذى يربط بين المسافة (s) والزمن (t) اذا كان القانون الذى يربط بين السرعة (v) والزمن (t) معطى كالآتى :

$V = 2 + 3t \quad , \quad (s = 3 \quad , \quad t = 0)$

$V = t^2 + 4t - 5 \quad , \quad (s = 4 \quad , \quad t = 1)$

$V = 2 - \frac{1}{t^2} \quad , \quad (s = 3 \quad , \quad t = 1)$

4 – أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $A(3, -6)$ وميل المماس له عند اى نقطة عليه يساوى $x^2 - 10x$

طرق التكامل

بما أن عملية التكامل غير المحدد معرفة على أنها عكس عملية التفاضل فإن مسألة حساب قيمة تكامل $\int f(x)\ dx$ تكافئ إيجاد دالة F بحيث ان

$$dF(x) = f(x)\ dx$$

وقد يبدو فى أول الامر أننا سوف نتعرض لإسلوب (التجربة والخطأ) للحصول على قيمة التكامل المطلوب ومن أجل إنقاص هذا الأسلوب (التجربة والخطأ) فى الحل أنشأنا جدولاً نمطياً يحتوى على صيغ التكامل المختلفة عن طريق عكس صيغ التفاضل السابق دراستها وذلك لتسهيل عملية الحل .

وبالتالى يمكن إرجاع أى مقدار يراد إجراء عملية التكامل عليه ومضاهاته بأى من صيغ الجدول (جدول 3)

ولعل نجاح الطالب فى إجراء عملية التكامل يعتمد على خبرته وملاحظاته أثناء حل التمرينات وتعامله مع الصيغ المختلفة المذكورة بالجدول بالاضافة الى التمكن التام من إجراء عمليات التفاضل وسوف نتناول هنا الطرق المستخدمة فى حل التكاملات .

جدول 3

مسلسل	تكاملات	تفاضلات
	قواعد قياسية فى التفاضلات والتكاملات	
1	$\int du = u + c$	$du = \frac{du}{dx} \cdot dx$
2	$\int a du = a \int du$	$dau = a \; du$
3	$\int (du + dv) = \int du + \int dv$	$d(u + v) = du + dv$
4	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq 0$	$d(u)^n = nu^{n-1} du$
5	$\frac{du}{u} = \ln\|u\| + c$	$d(\ln u) = \frac{du}{u}$
6	$a - \int e^u du = e^u + c$	$d\, e^u = e^u \; du$
	$b - \int a^u du = \frac{a^u}{\ln_a} + c$	$d\; a^u = a^u \ln a \; du$
	الدوال المثلثية :	
7	$\int \cos u \; du = \sin u + c$	$d \sin u = \cos u \; du$
8	$\int \sin u \, du = -\cos u + c$	$d \cos u = -\sin u \; du$
9	$\int \sec^2 u \, du = \tan u + c$	$d \tan u = \sec^2 u \, du$
10	$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + c$	$d(\cot u) = -\csc u \; du$
11	$\int \sec u \; \tan u \; du = \sec u + c$	$d \sec u = \sec u \tan u \; u$
12	$\int \csc u \cot u \; du = -\csc u + c$	$d \csc u = -\csc u \cot u \; du$

	الدوال المثلثية :	
13	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases}$	$d \sin^{-1} u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ $d \cos^{-1} u = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u + c \\ -\cot^{-1} u + c \end{cases}$	$d \tan^{-1} u = \frac{du}{1+u^2}$ $d \cot^{-1} u = \frac{-du}{1+u^2}$
15	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} \lvert u \rvert + c \\ -\csc^{-1} \lvert u \rvert + c \end{cases}$	$d \sec^{-1} u = \frac{du}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$ $d \csc^{-1} u = \frac{-du}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2-1}}$

الطرق المستخدمة فى حل التكاملات

1 - طريقة التكامل بالتعويض :

إذا كان المطلوب إيجاد $\int F(x)\, dx$ وكانت f(x) دالة مركبة غير واضحة ويمكن تحويلها بدلالة دوال بسيطة فإنه فى هذه الحالة يمكن أن تحصل على نتائج مفيدة عن طريق تغيير المتغير المستقل x الى متغير آخر u يسهل مضاهاته بصيغ التكامل المعروفة .

واذا ما حصلنا على التكامل فإننا بعد ذلك نعوض عن u بدلالة x السابق تبديلها وبذلك نحصل على التكامل المطلوب .

مثال 1 : أوجد قيمة التكامل الآتى :

$$\int \sqrt{2x - 1}\, dx$$

الحل : نفرض أن :

$$u = 2x - 1$$
$$du = 2dx$$
$$\frac{1}{2} du = dx$$

$$\therefore \int \sqrt{2x - 1}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(2x - 1)^3} + c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة : $I = \int (3x+1)^4 \, dx$

الحل :

نفرض أن :

$u = 3x + 1$

$du = 3dx$

$$I = \int \frac{1}{3} u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{1}{15}(3x+1)^5 + c$$

مثال 3 :

أوجد قيمة $I = \int \sqrt{x^3 - 1} \; x^2 \, dx$

الحل :

نفرض أن :

$u = x^3 - 1$

$du = 3x^2 \, dx$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} \, du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$$

مثال 4 :

أوجد قيمة : $I = \int \frac{x-2}{(x^2-4x+3)^2}\,dx$

الحل :

نفرض أن : $u = x^2 - 4x + 3$ ....(1)

$du = 2x - 4 = 2(x-2)$ .... (2)

بالتعويض من (1) ، (2) فى التكامل الأصلى بمراعاة تغيير x , dx الى du , u

$$\therefore I = \int \frac{(x-2)}{u^3}\;\frac{du}{2(x-2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u^2}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x^2-4x+3)^2}\right) + c$$

مثال 5:

أوجد قيمة : $I = \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx$

الحل :

نفرض أن :

$$u = \sqrt{x} + 1$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \qquad \rightarrow dx = 2\sqrt{x} \;\; du$$

$$\therefore I = \int \frac{1}{u^3} \; (2du)$$

$$= 2(\frac{u^{-2}}{-2}) + c$$

$$= -\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + c$$

تمـــــــارين 2

أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام التعويض

1 - $\int x^2 (3x^3 + 5)^4 \, dx$

2 - $\int x^2 (3x^3 - 1)^2 \, dx$

3 - $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \, dx$

4 - $\int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$

5 - $\int \frac{x^2}{2x^3 + 3} \, dx$

6 - $\int x\sqrt{x - 1} \, dx$

7 - $\int x(5 - x^2)^3 \, dx$

8 - $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx$

9 - $\int (1 + \frac{1}{x})^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

10 - $\int (3 - x^4)^3 x^3 \, dx$

11 - $\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}} \, dx$

12 - $\int \frac{2x + 4}{\sqrt{2x + 5}} \, dx$

2 - التكامل بالتجزئة

نعلم أنه اذا كانت u , v دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

$$u\,dv = d\,uv - v\,du$$

$$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

تستخدم القاعدة (1) فى حساب هذا النوع من التكامل مع مراعاة الآتى :

أ - فصل التكامل المعطى الى جزئين هما u , dv .

ب - يجب أن يكون الجزء dv قابلاً للتكامل مباشرة .

جـ - يجب الا يكون $\int v\,du$ أكثر تعقيداً من $\int u\,dv$

مثال 1 : أوجد قيمة : $\int x\cos x\,dx$

الحل :

$$u = x \qquad du = dx$$

$$v = \sin x \qquad dv = \cos x\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة : $\int x^2 \sin x\,dx$

الحل :

$$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$$

$$v = -\cos x \qquad dv = \sin x\,dx$$

$$\therefore \int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int -\cos x\,(2x)\,dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرة أخرى فى ايجاد قيمة $\int x\cos x \ dx$

$u = x \qquad\qquad du = dx$

$v = \sin x \qquad\qquad dv = \cos x \, dx$

$$\therefore \int x\cos x \ dx = x\sin x - \int \sin x \ dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

نعوض من المعادلة (2) فى المعادلة رقم (1)

$$\therefore \int x^2 \sin x \ dx = -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x + c_1)$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x\sin x + \cos x) + c$$

مثال 3 :

أوجد قيمة : $I = \int x\ln x \ dx$

<u>**الحل :**</u>

$u = \ln x \qquad\qquad du = \frac{1}{x}\, dx$

$v = \frac{x^2}{2} \qquad\qquad dv = x\, dx$

$$\therefore I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

تمارين 3

إستخدم التكامل بالتجزئة لايجاد قيمة التكاملات الآتية :

1 - $\int x \sec^2 x \, dx$

2 - $\int x \cos 2x \, dx$

3 - $\int x e^{-x} \, dx$

4 - $\int x^3 \cos 2x \, dx$

5 - $\int x e^{3x} \, dx$

6 - $\int x^3 e^x \, dx$

7 - $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

8 - $\int e^x \cos x \, dx$

9 - $\int (\ln x / \sqrt{x}) \, dx$

10 - $\int x^2 \ln x \, dx$

11 - $\int x(x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

12 - $\int \ln (x+1) \, dx$

13 - $\int (\ln x)^2 \, dx$

14 - $\int \sin^{-1} x \, dx$

التكاملات المثلثية

تستخدم المتطابقات التالية فى هذه التكاملات :

1 - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2 - $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

3 - $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

4 - $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5 - $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6 - $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

7 - $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$

8 - $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x \quad y) - \cos(x - y)\right]$

9 - $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$

أمثلة محلولة

1 - أوجد قيمة : $\int \sin^2 x \, dx$

الحل :

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) + c$$

2 - أوجد قيمة : $\int \cos^2 3x \, dx$

الحل :

$$\int \cos^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(x+\frac{1}{6}\sin 6x)+c$$

3 – أوجد قيمة : $\int \sin^3 x \;\; dx$

الحل :

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

<u>إرشاد :</u>

عند إجراء التكامل : $\int \cos^2 x \sin x \;\; dx$

ضع $u == \cos x$

$d\,u = -\sin x \;\; dx$

$$\therefore \int \cos^2 x \sin x \;\; dx = -\int u^2 \;\; du$$
$$= -\frac{1}{3}u^3 + c$$
$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

4 – أوجد قيمة : $I = \int \cos^5 x \;\; dx$

الحل :

$$I = \int \cos^4 x \cdot \cos x \;\; dx$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x \;\; dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x \; dx$$

إرشاد :

ضع $u = \sin x$ $\qquad du = \cos x \, dx$

$$\therefore I = \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

5 – أوجد قيمة : $I = \int \tan^4 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \tan^2 x \; (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^2 x \; \sec^2 x \; dx - \int \tan^2 x \; dx$$

$$= \int \tan^2 x \; \sec^2 x \; dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

إرشاد : ضع :

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x \, dx$

$$I = \int u^2 \; du - \int du + \int dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$$

6 – أوجد قيمة : $I = \int \tan^5 x \; dx$

الحل :

$$I = \int \tan^3 x \,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + c$$

ارشاد : استخدم نفس الارشاد السابق فى الجزء الأول

7 - أوجد قيمة : $I = \int \sec^4 x \, dx$

الحل :

$$I = \int \sec^2 2x(1+\tan^2 2x)\, dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \cdot \sec^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + c$$

8 - أوجد قيمة : $I = \int \cot^3 2x \, dx$

الحل :

$$I = \int \cot 2x \, (\csc^2 2x - 2)\, dx$$

$$= \int \cot 2x \, \csc^2 2x \, dx - \int \cot 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\csc 2x| + c$$

ملحوظة : بفرض $u = \cot 2x$

$du = -2\csc^2 2x \, dx$ يتم حل الجزء الأول من التكامل

9 - أوجد قيمة : $I = \int \cot 3x \, \csc^4 3x \, dx$

الحل :

$$I = \int \cot 3x\,(1+\cot^2 3x)\csc^2 3x \, dx$$

$$= \int \cot 3x \, \csc^2 3x \, dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x \, dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cot^2 3x - \frac{1}{12}\cot^4 3x + c$$

تمـــارين 4

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1 - $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)dx$

2 - $\int \sin 2x \quad \tan 2x \quad dx$

3 - $\int (\tan 3x \ + \ \sec \ 3x\ )\ dx$

4 - $\int \tan x - \sec^2 x \quad dx$

5 - $\int \sin x \ \ \cos x \quad dx$

6 - $\int \frac{\tan^2 2x}{\sec 2x}\, dx$

7 - $\int \frac{1-\sin x}{x + \cos x}\, dx$

8 - $\int \frac{e^{\cos x}}{\csc x}\, dx$

9 - $\int \frac{e^{x}}{\cos e^{x}}\, dx$

10 - $\int \frac{\sec^2 x^2}{\tan x^2}\, x \quad dx$

11 - $\int \frac{\sec^2 x}{2\tan x + 1}\quad dx$

12 - $\int \frac{xe^{x^2}}{\cos e^{x2}}\, x \quad dx$

13 - $\int \sin^2 x \quad \cos x \quad dx$

14 - $\int \sqrt{1+\cos x} \quad dx$

التعويضات المثلثية

تستخدم بعض التعويضات لتسهيل اجراء بعض التكاملات كما في الجدول (4) الاتي:

الدالة	التعويض المناسب	قيمة الدالة بعد التعويض
(a) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\sin\theta$	$a\sqrt{1-\sin^2\theta} = a\cos\theta$
(b) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\tan\theta$	$a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sec\theta$
(c) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec\theta$	$a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\tan\theta$

امثلة محلولة

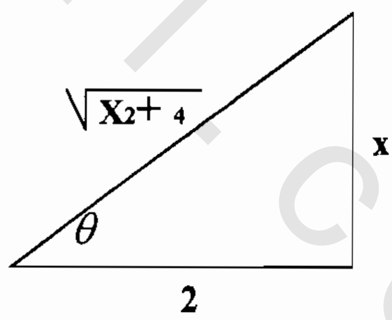
1 – أوجد قيمة : $I = \int \frac{dX}{X^2\sqrt{4+X^2}}$

الحل:

نستخدم التعويض :

$$X = 2\tan\theta$$
$$dX = 2\sec^2\theta d\theta$$

ويتم رسم المثلث : (شكل 31)



شكل 31

$$\therefore \tan\theta = \frac{X}{2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2\sec^2\theta \, d\theta}{(2\tan\theta)^2\sqrt{4+4\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{2\sec^2\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int (\sin\theta)^{-2}\cos\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4\sin\theta} + c$$

$$= -\frac{\sqrt{4+X^2}}{4X} + c$$

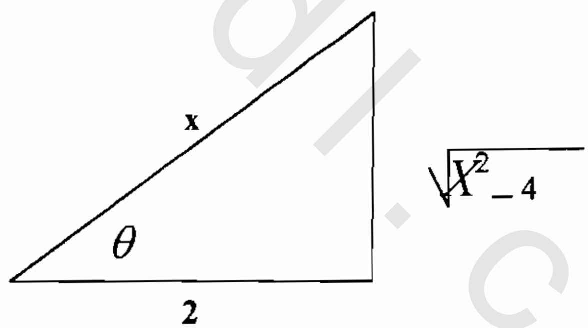
2 – أوجد قيمة: $I = \int \frac{X^2 \, dX}{\sqrt{X^2-4}}$

الحل :

ضع:

$$X = 2\sec\theta$$
$$dX = 2\sec\theta\tan\theta \, d\theta$$

مع رسم مثلث التعويض : $\sec\theta = \frac{X}{2}$ (شكل 32)



شكل 32

$$\therefore I = \int \frac{(2\sec\theta)^2 2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{(2\sec\theta)^2 - 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{(4\sec^2\theta)2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta} d\theta$$

$$= 4\int \sec^3\theta \, d\theta = 4I_1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$I_1 = \int \sec^3\theta \, d\theta$$

$$= \int \sec\theta\sec^2\theta \, d\theta$$

نستخدم التكامل بالتجزئة:

$u = \sec\theta$ $\qquad du = \sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$v = \tan\theta$ $\qquad dv = \sec^2\theta \, d\theta$

$$\therefore I_1 = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta \, d\theta + \int \sec\theta \, d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - I_1 + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$\therefore 2I_1 = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1)

$$\therefore \quad I = 4I_1 = 2\sec\theta\tan\theta + 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

بالتعويض عن النسب المثلثية من مثلث التعويض

$$\therefore I = 2(\frac{X}{2} \cdot \frac{\sqrt{X^2 - 4}}{2} + 2\ln\left|\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{X^2 - 4}}{2}\right| + c$$

3 –أوجد قيمة: $I = \int \frac{\sqrt{9 - 4X^2}}{X} dX$

الحل:

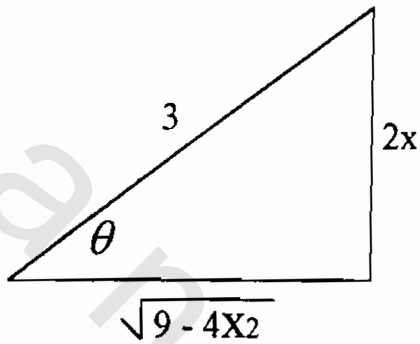
بفرض ان:

$$X = \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$dX = \frac{3}{2}\cos\theta \; d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{2X}{3}$$

برسم مثلث التعويض : (شكل 33)



شكل 33

$$\therefore I = \int \frac{3\cos\theta \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sin\theta}\cos\theta \; d\theta$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= 3\int \csc\theta \; d\theta - \int \sin\theta \; d\theta$$

$$= 3(\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + \cos\theta + c$$

$$= 3(\ln\left|\frac{3}{2X} - \frac{\sqrt{9-X^2}}{2X}\right| + \frac{\sqrt{9-X^2}}{3} + c$$

4- أوجد قيمة: $I = \int \frac{(16-9X^2)^{\frac{3}{2}}}{X^6} dX$

الحل:

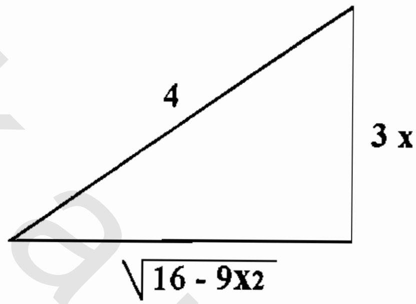
ضع التعويض :

$$X = \frac{4}{3}\sin\theta$$

$$dX = \frac{4}{3}\cos\theta \, d\theta$$

$$\sin\theta = \frac{3X}{4}$$

مثلث التعويض (شكل 34)



شكل 34

ضع

$$u = \cot^4\theta \qquad du = -4\cot^3\theta\csc^2\theta\, d\theta$$

$$v = -\cot\theta \qquad dv = \csc^2\theta\, d\theta$$

$$I = \frac{243}{16}\left[-\cot^5\theta - \int 4\cot^4\theta\cdot\csc^2\theta\, d\theta\right] = -\frac{243}{16}\cot^5\theta - \left(\frac{243}{16}\right)4\left(\frac{16}{243}\right)$$

$$I = -\frac{243}{80}\cot^5\theta = -\frac{243}{80}\frac{(16-9X^2)^{\frac{5}{2}}}{243X^5}$$

$$= -\frac{1}{80}\frac{(16-9X^2)^{\frac{5}{2}}}{X^5}$$

الدوال المثلثية العكسية في التكاملات:

$$\frac{d}{du}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

$$\therefore\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$\frac{d}{du}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{a}{a^2+u^2}$$

$$\therefore\quad\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

مثال 1:

أوجد قيمة:

$$I=\int\frac{dX}{\sqrt{16-X^2}}$$

الحل:

$$\int\frac{dX}{\sqrt{16-X^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$u=X$

$du=dX$

$a=4$

$$\therefore\qquad I=\sin^{-1}\frac{X}{4}+c$$

مثال 2 :

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dX}{X^2 + 2X + 5}$$

الحل:

$$X^2 + 2X + 5 = (X+1)^2 + 4$$
$$= (X+1)^2 + 2^2$$

بفرض أن : $u = X + 1 \ , \quad du = dX \ , \quad a = 2$

$$\therefore I = \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$
$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{X+1}{2}) + c$$

مثال 3:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dX}{\sqrt{25 - 4X^2}}$$

الحل:

$$I = \int \frac{du/2}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$u = 2X$$

$$du = 2dX$$

$$a = 5$$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$
$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2X}{5}) + c$$

تمــــاريـــن 5

أوجد قيم التكاملات التالية:

1- $\int \frac{dX}{\sqrt{1-4X^2}}$

2- $\int \sqrt{a^2 - X^2}\, dX$

3- $\int \frac{dX}{\sqrt{4-(X-1)^2}}$

4- $\int \frac{dX}{(4-X^2)^{\frac{1}{2}}}$

5- $\int \frac{dX}{\sqrt{4+X^2}}$

6- $\int \frac{dX}{\sqrt{4-X^2}}$

7- $\int \frac{XdX}{\sqrt{4+X^2}}$

8- $\int \frac{XdX}{4+X^2}$

9- $\int \frac{dX}{4+X^2}$

10- $\int \frac{X^2}{\sqrt{X^2-16}} dX$

11- $\int \frac{X+1}{\sqrt{4-X^2}} dX$

12- $\int \frac{dX}{X\sqrt{a^2+X^2}}$

13- $\int \frac{\sin X\, dX}{\sqrt{2-\cos^2 X}}$

14- $\int \frac{dX}{\sqrt{144-25X^2}}$

15- $\int \frac{dX}{(a^2+X^2)^{\frac{3}{2}}}$

16- $\int \frac{dX}{X\sqrt{a^2-X^2}}$

17- $\int \frac{dX}{(a^2+X^2)^2}$

18- $\int \frac{(X-1)dX}{\sqrt{8+2X-X^2}}$

19- $\int \frac{(X+1)dX}{\sqrt{2X-X^2}}$

20- $\int \frac{dX}{\sqrt{X^2-8X+12}}$

21- $\int \frac{XdX}{\sqrt{X^2+4X+5}}$

22- $\int \frac{(2X+3)dX}{4X^2+4X+5}$

23- $\int \frac{\sec^2 X\, dX}{1+\tan^2 X}$

24- $\int \frac{e^X}{\sqrt{1-e^{2X}}} dX$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية:

درسنا فيما سبق الكسور الجزئية وعرفنا أن الكسر الغير حقيقي هو عبارة عن كسر حقيقي+دالة كثيرة الحدود. وينتج من حاصل قسمة البسط على المقام (درجة البسط $\leq$ درجة المقام).

وان الكسر الحقيقي هو حاصل قسمة كثيرتي الحدود وتكون درجة البسط فيه اقل من درجة المقام.

ودرسنا طرق تحليل الكسر الحقيقي إلى كسوره الجزئية، وسوف ندرس هنا التكاملات باستخدام الكسور الجزئية:

الحالة I: معاملات المقام من الدرجة الاولى ومختلفة:-

مثال 1:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{1}{X^2 - 4} dX$$

الحل:

يتم تحليل الكسر الحقيقي إلى كسوره الجزئية:

$$\frac{1}{X^2 - 4} = \frac{A}{X - 2} + \frac{B}{X + 2}$$

وبتوحيد المقام ليصبح $(X - 2)(X + 2)$

$$\therefore 1 = A(X + 2) + B(X - 2)$$

وبمساواة قوى x المختلفة في الطرفين:

$$\therefore \quad 1 = 2A - 2B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$0 = A + B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) ينتج أن :

$$A=\frac{1}{4} \qquad B=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{X^2-4}=\frac{1}{4(X-2)}-\frac{1}{4(X+2)}$$

$$\int\frac{dX}{X^2-4}=\int\frac{dX}{4(X-2)}-\int\frac{dX}{4(X+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(X-2)-\frac{1}{4}\ln(X+2)+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{X-2}{X+2}+c$$

الحالة II : بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ومتساوية:

مثال 2:

اوجد قيمة: $$I=\int\frac{3X+5}{X^3-X^2-X+1}dX$$

الحل:

$$\frac{3X+5}{X^3-X^2-X+1}=\frac{3X+5}{(X+1)(X-1)^2}$$

$$=\frac{A}{X+1}+\frac{B}{X-1}+\frac{C}{(X-1)^2}$$

وبتوحيد المقام إلى $(X+1)(X-1)^2$ ينتج ان:

$$3X+5=A(X-1)^2+B(X-1)(X+1)+C(X+1)$$

نضع X=1

$$8=2C\rightarrow C=4$$

نضع X=-1

$$2=4A\rightarrow A=\frac{1}{2}$$

نضع X=0

$$\therefore 5 = A - B + C$$
$$= \frac{1}{2} - B + 4$$
$$B = 4\frac{1}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{3X+5}{X^3 - X^2 - X + 1} = \frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{4}{(X-1)^2}$$
$$\int \frac{3X+5}{X^3 - X^2 - X + 1} dX = \int \frac{dX}{2(X+1)} - \int \frac{dX}{2(X-1)} + \int \frac{4dX}{(X-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(X-1) - \frac{1}{2}\ln(X-1) - \frac{4}{X-1} + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{X+1}{X-1} - \frac{4}{X-1} + c$$

الحالة III: بعض عوامل المقام من الدرجة الثانية ولايتحلل:

مثال 3:

أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} dX$$

الحل:

$$\frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} = \frac{AX + B}{X^2 + 1} + \frac{CX + D}{X^2 + 2}$$

بعد توحيد المقام في الطرفين

$$\therefore X^3 + X^2 + X + 2 = (AX + B)(X^2 + 2) + (CX + D)(X^2 + 1)$$
$$= (A + C)X^3 + (B + D)X^2 + (2A + C)X + 2B + D$$

بمساواة قوى X المختلفة في الطرفين:

$2B + D = 2$................(1)

$2A + C = 1$................(2)

$B + D = 1$..................(3)

$A + C = 1$..................(4)

بحل المعادلتين (2) و (4) ينتج ان:

$$A = 0 \rightarrow C = 1$$

بحل المعادلتين (1) و (3) ينتج ان:

$$B = 1 \rightarrow D = 0$$

وبالتعويض عن الثوابت

$$\therefore \int \frac{X^3 + X^2 + X + 2}{X^4 + 3X^2 + 2} dX = \int \frac{dX}{X^2 + 1} + \int \frac{X\,dX}{X^2 + 2}$$

$$= \tan^{-1} X + \ln(X^2 + 2) + c$$

تمارين 6

أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام الكسور الجزئية:

1 – $\int \frac{dX}{X^2 - 9}$

2 – $\int \frac{2X + 1}{X^2 + 10X + 21} dX$

3 – $\int \frac{dX}{X^2 + 7X + 6}$

4 – $\int \frac{X - 4}{X(X - 2)} dX$

5 – $\int \frac{X\ dX}{(X - 2)^2}$

6 – $\int \frac{X - 1}{X + 1} dX$

7 – $\int \frac{6X}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} dX$

8 – $\int \frac{X^2 + 3X - 2}{(X - 1)(X^2 - 1)} dX$

9 – $\int \frac{-2X + 4}{(X^2 + 1)(X - 1)^2} dX$

10 – $\int \frac{X + 1}{X^2(X - 1)} dX$

11 – $\int \frac{dX}{(X^2 - 1)^2}$

12 – $\int \frac{X^4 + 9}{X^2(X^2 + 9)} dX$

تعويضات اخرى في التكاملات:

اذا كانت u,v دالتين في x تسمى النسبة $\frac{u}{v}$ كثيرة الحدود بوجه عام بدالة قياسية حيث تكون كلمة نسبة بمثابة كلمة قياسي.

كما انه يمكن تحويل مسالة تكامل أي دالة قياسية في cos X , sin X إلى مسالة تحتوي على دالة قياسية في z ثم تحل بعد ذلك بالطرق المعتادة، وذلك بوضع:

$$Z = \tan\frac{X}{2}$$

نعلم ان:

$$\cos X = 2\cos^2\frac{X}{2} - 1$$
$$= \frac{2}{\sec^2\frac{X}{2}} - 1$$
$$= \frac{2}{1+\tan^2\frac{X}{2}} - 1$$
$$= \frac{2}{1+Z^2} - 1$$
$$= \frac{1-Z^2}{1+Z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sin X = 2\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}$$
$$= 2\frac{\sin\frac{X}{2}\cos^2\frac{X}{2}}{\cos\frac{X}{2}}$$
$$= \frac{2\tan\frac{X}{2}}{\sec^2\frac{X}{2}}$$
$$= \frac{2Z}{1+Z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

تستخدم المعادلات 1 و 2 في حل كثير من المسائل.

مثال :

أوجد قيمة: $\int \sec X \; dX$

الحل:

$$I = \int \sec X \; dX = \int \frac{1}{\cos X} dX$$
$$= \int \frac{1+Z^2}{1-Z^2} \cdot \frac{2dZ}{1+Z^2}$$
$$= \int \frac{2 \; dZ}{1-Z^2}$$
$$\frac{2}{1-Z^2} = \frac{A}{(1-Z)} + \frac{B}{(1+Z)}$$
$$2 = A(1+Z) + B(1-Z)$$

وبحل المتطابقة:

$$\therefore A = B = 1$$
$$\therefore \int \frac{2dZ}{1-Z^2} = \int \frac{dZ}{1-Z} + \int \frac{dZ}{1+Z}$$
$$= -\ln|1-Z| + \ln|1+Z| + c$$
$$= \ln \frac{1+Z}{1-Z} + c$$
$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{X}{2}}{1-\tan\frac{X}{2}}\right| + c \quad = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\tan X}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{X}{2}}\right| + c$$
$$= \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2})\right| + c$$

امثلة محلوله منوعة

أوجد قيمة التكاملات الآتية:-

1- $\int X\sqrt[3]{X^2+5}\, dX$

2- $\int 10^{2X}\, dX$

3- $\int \sin 4X \cos 3X\, dX$

4- $\int \frac{\cos X}{1+\sin X} dX$

5- $\int \frac{1}{X \ln X} dX$

6- $\int \frac{\cot X - 1}{\sin^2 X} dX$

7- $\int \frac{2X-1}{4X+1} dX$

8- $\int \sin^3 X\, dX$

9- $\int \frac{1}{X\sqrt{1+\ln X}} dX$

10- $\int \sin^2 X \cos^2 X\, dX$

11- $\int \frac{1}{(X^2+5)^{\frac{3}{2}}} dX$

12- $\int X^3 \ln X\, dX$

13- $\int \tan^{-1} X\, dX$

14- $\int \frac{X}{(3+X^2)^{\frac{1}{3}}} dX$

15- $\int \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{1}{2}}}$

16- $\int \frac{dX}{2+\sin X}$

الإجـــابــة

1 – $u = X^2 + 5$

$du = 2X\ dX$

$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}} du$

$= \frac{1}{2} u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{1}{2}(X^2 + 5)^{\frac{4}{3}} + c$

2 – $\int 10^{2X} dX = \frac{10^{2X}}{2\ln 10} + c$

3 – $I = \int \sin 4X \cdot \cos 3X\ dX$

$= \frac{1}{2}\int (\sin X + \sin 7X) dX$

$= -\frac{1}{2}(\cos X + \frac{1}{7}\cos 7X) + c$

4 – $I = \int \frac{\cos X}{1 + \sin X} dX$

بفرض أن : $u = 1 + \sin X$

$du = \cos X\ dX$

$I = \int \frac{du}{u} = \ln u + c$

$= \ln|1 + \sin X| + c$

5 – $I = \int \frac{1}{X \ln X} dX \longrightarrow u = \ln X$:بفرض أن

$du = \frac{1}{X} dX$

$= \int \frac{du}{u}$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln X| + c$

$$u = \cot X$$

$$du = -\csc^2 X\ dX$$

$$\therefore \quad I = -\int u.du + \int du$$

$$= -\frac{1}{2}u^2 + u + c$$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 X + \cot X + c$$

7 - $$I = \int \frac{2X-1}{4X+1}\,dX$$

$$= \int \frac{2X}{4X+1}\,dX - \frac{1}{4X+1}\,dX$$

$$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2(4X+1)})dX - \int \frac{1}{4X+1}\,dX$$

$$= \frac{X}{2} - \frac{1}{2(4)}\ln|4X+1| - \frac{1}{4}\ln|4X+1| + c$$

$$= \frac{X}{2} - \frac{3}{8}\ln|4X+1| + c$$

8 - $$I = \int \sin^3 X\ dX$$

$$= \int \sin^2 X.\sin X\ dX$$

$$= \int (1-\cos^2 X)\sin X\ dX$$

$$= \int \sin X\ dX - \int \cos^2 X\ d\cos X$$

$$= -\cos X + \int \cos^2 X\, d\cos X$$

$$= -\cos X + \frac{1}{3}\cos^3 X + c$$

9 - $$I = \int \frac{1}{X\sqrt{1+\ln X}}\,dX$$

نفرض ان:

$$u = 1 + \ln X$$

$$du = \frac{1}{X} dX$$

$$\therefore \quad I = \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1 + \ln X} + c$$

10 – $$I = \int \sin^2 X \cos^2 X \; dX$$

$$= \int (\frac{1}{2} \sin 2X)^2 dX$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2X \; dX$$

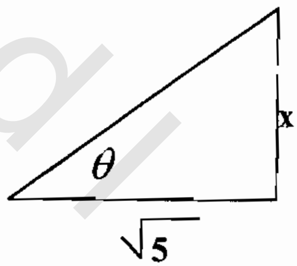
$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4X) dX$$

$$= \frac{1}{8} [X - \frac{1}{4} \sin 4X] + c$$

11 – $$I = \int \frac{1}{(X^2 + 5)^{\frac{3}{2}}} dX$$

$$X = \sqrt{5} \tan \theta$$

$$dX = \sqrt{5} \sec^2 \theta \; d\theta$$



$$\therefore \quad I = \int \frac{\sqrt{5} \sec^2 \theta \; d\theta}{5 \sec^2 \theta \cdot \sqrt{5} \sec \theta}$$

$$= \frac{1}{5} \int \cos \theta \; d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \sin \theta + c$$

$$= \frac{1}{5} \frac{X}{\sqrt{X^2 + 5}} + c$$

12 – $$I = \int X^3 \cdot \ln X \; dX$$

نفرض ان:

$$u = \ln X \qquad du = \frac{1}{X}dX$$

$$v = \frac{1}{4}X^4 \qquad dv = X^3$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{4}X^4 \ln X - \int \frac{1}{4}X^4 \cdot \frac{1}{X}\, dX$$

$$= \frac{X^4}{4}\ln X - \frac{1}{4}\frac{X^4}{4} + c$$

$$= \frac{X^4}{4}(\ln X - \frac{1}{4}) + c$$

$$13 - \quad I = \int \tan^{-1} X\, dX$$

بفرض :

$$u = \tan^{-1} X \qquad du = \frac{1}{1+X^2}dX$$

$$v = X \qquad dv = dX$$

$$\therefore \quad I = X\tan^{-1} X - \int \frac{X}{1+X^2}dX$$

$$= X\tan^{-1} X - \frac{1}{2}\ln\left|1+X^2\right| + c$$

$$14 - \quad I = \int \frac{X}{(3+X^2)^{\frac{1}{3}}}dX$$

بفرض أن :

$$u = 3 + X^2$$

$$du = 2X\, dX$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}(3+X^2)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$15 - \quad I = \int \frac{dX}{(1-X^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \sin\theta$$
$$dX = \cos\theta \, d\theta$$
$$I = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \int d\theta$$
$$= \theta + c$$
$$= \sin^{-1} X + c$$

16 - $$I = \int \frac{dX}{2+\sin X}$$

باستخدام التعويض: $Z = \tan\frac{X}{2}$

$$\therefore \quad \sin X = \frac{2Z}{1+Z^2}$$
$$\cos X = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$$
$$X = 2\tan^{-1} Z$$
$$dX = \frac{2\,dZ}{1+Z^2}$$

$$\therefore \int \frac{dX}{2+\sin X} = \int \frac{1+Z^2}{2+2Z+2Z^2} \cdot \frac{2\,dZ}{1+Z^2}$$
$$= \int \frac{dZ}{(Z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

بفرض أن :

$$u = Z + \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore \quad I = \int \frac{du}{u^2+a^2}$$
$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2Z+1}{\sqrt{3}} + c$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\tan\frac{X}{2}+1}{\sqrt{3}} + c$$

نماذج اختبارات في التكاملات وحلولها

نموذج اختبار رقم (1)

I- أوجد التكاملات التالية (باستخدام طرق التكامل):-

$$1- \quad \int e^{X}\cos 2X \, dX$$

$$2- \quad \int \frac{X^2+3X-2}{(X-1)(X^2+1)}dX$$

$$3- \quad \int X^2 e^{-X} dX$$

II- أيوجد التكاملات التالية: -

$$1- \quad \int e^{X}(1+\cos e^{X})dX$$

$$2- \quad \int \frac{1-\sin X}{X+\cos X}dX$$

$$3- \quad \int \frac{(X-2)}{(X^2-4X+3)^3}dX$$

$$4- \quad \int \frac{1}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^3}dX$$

$$5- \quad \int (1+\frac{1}{X})^2 \frac{1}{X^2}dX$$

إجابة نموذج اختبار رقم (1)

$$I-1- \qquad I=\int e^{X}\cos 2X \, dX$$

$u=e^{X}$ $\qquad\qquad$ $du=e^{X}dX$

$v=\frac{1}{2}\sin 2X$ $\qquad\qquad$ $dv=\cos 2X \, dX$

$$I=\frac{1}{2}e^{X}\sin 2X-\frac{1}{2}\int e^{X}\sin 2X \, dX$$

$u = e^X$ $\qquad du = e^X dX$

$v = -\frac{1}{2}\cos 2X$ $\qquad dv = \sin 2X\ dX$

$$\int e^X \sin 2X\ dX = -\frac{1}{2}e^X \cos 2X + \frac{1}{2}\int e^X \cos 2X\ dX$$

$$\therefore \qquad I = \frac{1}{2}e^X \sin 2X - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}e^X \cos 2X + \frac{1}{2}I)$$

$$= \frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X - \frac{1}{4}I$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X$$

$$\therefore \qquad I = \frac{4}{5}(\frac{1}{2}e^X \sin 2X + \frac{1}{4}e^X \cos 2X) + c$$

$2-$ $\qquad I = \int \frac{X^2 + 3X - 2}{(X-1)(X^2+1)} dX$

$$\frac{X^2 + 3X - 2}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{X^2+1}$$

$$X^2 + 3X - 2 = A(X^2+1) + (BX+C)(X-1)$$

$$= (A+B)X^2 + (C-B)X - C + A$$

بمساواة معاملات قوى x المختلفة:

$1 = A + B$...............(1)

$3 = C - B$ ....(2)

$-2 = A - C$..........(3)

بجمع (2) + (3)

$\therefore 1 = A - B$............(4)

بجمع (4) + (1)

$2=2A$

$\therefore A=1$

$B=1-A=1-1=0$

$C=3+B=3+0=$

$$\therefore \quad I=\int\frac{1}{X-1}dX+\int\frac{3}{X^2+1}dX$$

$$=\ln|X-1|+3\tan^{-1}X+c$$

$3- \quad I=\int X^2e^{-X}dX$

$u=X^2 \qquad\qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad\qquad dv=e^{-X}dX$

$$I=-X^2e^{-X}+2\int Xe^{-X}dX$$

$u=X^2 \qquad\qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad\qquad dv=e^{-X}dX$

$$\therefore\int Xe^{-X}=-Xe^{-X}+\int e^{-X}dX$$

$$=-Xe^{-X}-e^{-X}+c$$

$$\therefore \quad I=-X^2e^{-X}+2(-Xe^{-X}-e^{-X})+c$$

$$=-X^2e^{-X}-2Xe^{-X}-2e^{-X}+c$$

$II-1- \qquad I=\int e^X(1+\cos e^X)dX$

$$=\int e^XdX+\int e^X\cos e^XdX$$

$$=e^X+\sin e^X+c$$

$2 \ - \qquad I=\int\frac{1-\sin X}{X+\cos X}dX$

$2=2A$

$\therefore A=1$

$B=1-A=1-1=0$

$C=3+B=3+0=$

$\therefore \quad I=\int \frac{1}{X-1}dX+\int \frac{3}{X^2+1}dX$

$= \ln|X-1|+3\tan^{-1}X+c$

3- $I=\int X^2 e^{-X}dX$

$u=X^2 \qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad dv=e^{-X}dX$

$I=-X^2e^{-X}+2\int Xe^{-X}dX$

$u=X^2 \qquad du=2X\,dX$

$v=-e^{-X} \qquad dv=e^{-X}dX$

$\therefore \int Xe^{-X}=-Xe^{-X}+\int e^{-X}dX$

$=-Xe^{-X}-e^{-X}+c$

$\therefore \quad I=-X^2e^{-X}+2(-Xe^{-X}-e^{-X})+c$

$=-X^2e^{-X}-2Xe^{-X}-2e^{-X}+c$

II -1- $\quad I=\int e^X(1+\cos e^X)dX$

$=\int e^X dX+\int e^X \cos e^X dX$

$=e^X+\sin e^X+c$

2 - $\quad I=\int \frac{1-\sin X}{X+\cos X}dX$

بفــــرض:

$$u = X + \cos X$$

$$du = (1 - \sin X)dX$$

$$I = \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|X + \cos X| + c$$

3- $$I = \int \frac{X - 2}{(X^2 - 4X + 3)^3} dX$$

بفــــــرض:

$$u = X^2 - 4X + 3$$

$$du = (2X - 4)dX = 2(X - 2)dX$$

$$I = \int \frac{1}{(u)^3} \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + c = -\frac{1}{4}\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{(X^2 - 4X + 3)^2} + c$$

4- $$I = \int \frac{1}{\sqrt{X}(\sqrt{X} + 1)^3} d$$

بفــرض:

$$u = \sqrt{X} + 1$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{X}} dX$$

$$2du = \frac{1}{\sqrt{X}} dX$$

$$\therefore \quad I = 2\int \frac{1}{u^3} du$$

$$= 2\frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{u^2} + c$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{X}+1)^2} + c$$

$$5- \quad I = \int (1+\frac{1}{X})^2 \frac{1}{X^2} dX$$

بفرض:

$$u = 1 + \frac{1}{X}$$

$$du = -\frac{1}{X^2} dX$$

$$-du = \frac{dX}{X^2}$$

$$\therefore I = -\int u^2 du$$

$$= -\frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= -\frac{1}{3}(1+\frac{1}{X})^3 + c$$

نموذج اختبار رقم (2)

أوجد التكاملات الآتية:-

1- $\int \tan X \sec^2 X \, dX$

2- $\int X e^{-X^2} dX$

3- $\int \frac{\ln(X+1)}{X+1} dX$

4- $\int \frac{X}{\sqrt{9-X^2}} dX$

5- $\int \frac{X^2}{\sqrt{4-X^2}} dX$

6- $\int \frac{1}{4+25X^2} dX$

7- $\int \ln X \, dX$

إجابة نموذج اختبار رقم (2)

1- $I = \int \tan X \sec^2 X \, d$

بفرض:

$$u = \tan X$$

$$du = \sec^2 X \, dX$$

$$\therefore \quad I = \int u \, du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + c$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 X + c$$

2- $I = \int X e^{-X^2} dX$

بفرض:

$$u = e^{-X^2}$$

$$du = -2Xe^{-X^2}dX$$

$$\frac{du}{-2} = Xe^{-X^2}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{du}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}u + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-X^2} + c$$

$$3- \quad I = \int \frac{\ln(X+1)}{(X+1)}dX$$

بفرض

$$u = \ln(X+1)$$

$$du = \frac{1}{X+1}dX$$

$$\therefore \quad I = \int u \, du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(X+1))^2 + c$$

$$4- \quad I = \int \frac{X}{\sqrt{9-X^2}}dX$$

بفرض

$$u = 9 - X^2$$
$$du = -2X\ dX$$
$$\frac{du}{-2} = X\ dX$$
$$I = \int \frac{du}{-2\sqrt{u}}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -\sqrt{9 - X^2} + c$$

$$5 - \quad I = \int \frac{X^2}{\sqrt{4 - X^2}} dX$$

بفرض

$$X = 2\sin\theta$$
$$dX = 2\cos\theta\ d\theta$$
$$\therefore I = \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} 2\cos\theta\ d\theta$$
$$= 4\int \sin^2\theta\ d\theta$$
$$= 4\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)d\theta$$
$$= 4(\frac{1}{2})(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) + c$$
$$= 2(\sin^{-1}\frac{X}{2} - \sin\theta\cos\theta) + c$$
$$= 2(\sin^{-1}\frac{X}{2} - \frac{X\sqrt{4 - X^2}}{2}) + c$$

$$6 - I = \int \frac{1}{4 + 25X^2}$$

بفرض:

$$u = \frac{5X}{2}$$

$$du = \frac{5}{2} dX$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{5X}{2})^2} dX$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{2}{5})\int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{10}\tan^{-1}(\frac{5X}{2}) + c$$

7 - $I = \int \ln X \; dX$

بفرض:

$$u = \ln X \rightarrow du = \frac{dX}{X}$$

$$v = X \leftarrow dv = dX$$

$$I = X \ln X - \int X(\frac{1}{X}) dX$$

$$= X \ln X - X + c$$

تمــــرينـــات عـــامة

فــــي

التكــــامــــلات

تمرين رقم (1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \tan^{-1} X \; dX$

2- $\int e^{X} \sin X \; dX$

3- $\int \sqrt{a^2 - X^2} dX$ $\qquad a > X$

4- $\int \tan X \; dX$

5- $\int \csc u \; du$

6- $\int \frac{2X+1}{X^2-4} dX$

7- $\int \frac{\sqrt{25 - X^2}}{X} dX$

8- $\int X^2 e^{3X} dX$

9- $\int X (3)^{-X^2} dX$

10- $\int X \tan X^2 \; dX$

11- $\int \frac{X \; dX}{e^{X^2+9}} dX$

12- $\int \sec^2 e^{2\tan X} dX$

13- $\int \sin 2X \tan 2X \; dX$

تمرين رقم (2)

أوجد قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int \sin^{-1} X \, dX$

2- $\int X \sin X \, dX$

3- $\int X^2 e^X dX$

4- $\int \sec X (\sec X + \tan X) dX$

5- $\int \cot u \, du$

6- $\int \frac{X}{\sqrt{1 - X^2}} dX$

7- $\int \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - 16}} dX$

8- $\int \frac{3X + 5}{(X+1)(X-1)^2} dX$

9- $\int \frac{1}{X \log X} dX$

10- $\int \frac{\cos X}{2 - \cos^2 X} dX$

11- $\int X e^{X^2+2} dX$

12- $\int \frac{X - \sin 2X}{2X^2 + \cos 2X} dX$

13- $\int e^X \cos X \, dX$

تمرين رقم (3)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

1 – $\int \frac{dX}{1+\cos X}$

(الجواب: $Y = \cot X + \csc X + c$)

2 – $\int \csc X \; dX$

(الجواب: $Y = \ln\left|\tan \frac{1}{2} X\right|$)

3 – $\int \frac{X \; dX}{X^4 + 3}$

(الجواب: $Y = \tan^{-1} \frac{X^2}{\sqrt{3}} + c$)

4 – $\int \frac{dX}{e^X + e^{-X}}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tan^{-1} e^X + c$)

5 – $\int \frac{dX}{X^2 + 10X + 30}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{X+5}{\sqrt{5}} + c$)

6 – $\int \frac{dX}{\sqrt{20 + 8X - X^2}}$

(الجواب: $Y = \sin^{-1} \frac{X-4}{6} + c$)

7 – $\int \frac{dX}{X^2 - 4X + 8}$

(الجواب: $Y = \frac{1}{2} \ln\left|X^2 - 4X + 8\right| + \frac{3}{2} \tan^{-1} \frac{X-2}{2} + c$)

8 – $\int \frac{dX}{\sqrt{28 - 12X - X^2}}$

(الجواب: $Y=\sin^{-1}\frac{X+6}{8}+$)

9- $\int \frac{X+2}{\sqrt{4X-X^2}}dX$

(الجواب: $Y=-\sqrt{4X-X^2}+4\sin^{-1}\frac{X-2}{2}+$)

10- $\int \frac{X+1}{X^2+2X-3}dX$

11- $\int (\sin X)e^{\cos X}dX$

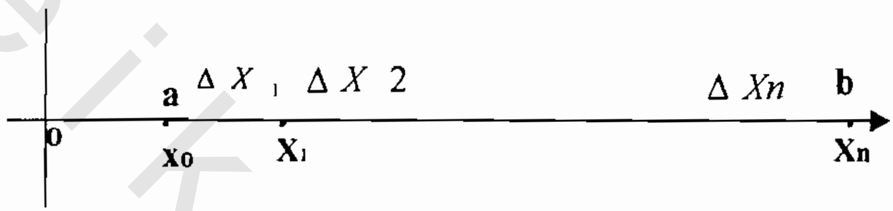
12- $\int \frac{dX}{e^{4X}}$

13- $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}d\theta$

التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت الدالة f(X) متصلة في الفترة $a \le X \le b$. تقسم هذه الفترة إلى n فترة جزئية بواسطة النقاط $X_0, X_1, X_2 ...... X_r, X_n$. كما هو موضح شكل 35



شكل (35)

ويرمز بطول الفترة الجزئية ΔX حيث:

نفرض أن مجموع حواصل ضرب كل من الفترات ΔX_r في قيمة الدالة عند X_r ويرمز له بالرمز $\sum$ قيمته S_n أي ان:-

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(X_r)\Delta X_r = f(X_1)\Delta X_1 + f(X_2)\Delta X_2 + ... + f(X_n)\Delta X_n$$

نجعل عدد الفترات الجزئية يزداد إلى مالا نهاية أي ان ΔX_r تقترب من الصفر.

نجد ان نهاية المجموع تصل إلى نهاية مجموع متسلسلة:

$$S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f(X_r).\Delta X_r$$

فإذا كان لهذه النهاية وجود أي تساوي عددا معينا مهما اختلفت طريقة تقسيم الفترة المغلقة $[a,b]$ فان:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f(X_r).(\Delta X_r) = \int_a^b f(X).(\Delta X)$$

حيث $\int_a^b f(X).(\Delta X)$ يسمى بالتكامل المحدد للدالة f(X) وتقرا التكامل المحدد لــ f(X) بالنسبة لX من X=a إلى X=b وتسمى الدالة f(X) دالة التكامل وتسمى b ,a على الترتيب الحد الادنى والحد الاعلى للتكامل.

خواص التكامل المحدد:

اذا كانت الدالة $g(X), f(X)$ دالتين متصلتين في الفترة [a,b] فان:

$$1-\quad \int_a^a f(X).dX = 0$$

$$2-\quad \int_a^b f(X).dX = -\int_b^a f(X).dX$$

$$3-\quad \int_a^b cf(X).dX = c\int_a^b f(X).dX$$

$$4-\quad \int_a^b (f(X) \pm g(X))dX = \int_a^b f(X).dX \pm \int_a^b g(X).dX$$

$$5-\quad \int_a^b f(X).dX = \int_a^c f(X).dX + \int_c^b f(X).dX$$

حيث c ثابت : $b > c > a$

النظرية الأساسية في حساب التكامل:

اذا كانت f(X) دالة متصلة في الفترة [a,b] وكانت F(X) تكاملا غير محدود ل f(X) فان:-

$$\int_a^b f(X).dX = F(X)]_a^b = F(b) - F(a)$$

وسوف نكتفي هنا بحل مسائل التكامل المحدد باستخدام النظرية الاساسية في حساب التكامل.

مثال 1:

اوجد قيمة : $\int_{-1}^{1}(2X^2 - X^3)dX$

الحل:

$$\int_{-1}^{1}(2X^2 - X^3)dX = [\frac{2X^3}{3} - \frac{X^4}{4}]_{-1}^{1}$$

$$= [\frac{2}{3} - \frac{1}{4}] - [-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}] = \frac{4}{3}$$

مثال 2:

اوجد قيمة : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}} \sin X \; dX$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}} \sin X \; dX = -\cos X]_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{4}}$$

$$= [-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0] = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

مثال 3:

أوجد قيمة: $\int_{1}^{e} \ln X \; dX$

الحل:

$$\int_{1}^{e} \ln X \; dX = [X \ln X - X]_{1}^{e}$$

$$= [e \ln e - e] - [\ln 1 - 1]$$

$$= [e - e] - [0 - 1]$$

$$= 1$$

تمـــــاريـــــن 7

أوجد التكاملات الآتية باستخدام النظرية الأساسية في حساب التكامل:

1- $\int_{1}^{5} X^2\, dX$

2- $\int_{0}^{\text{[illegible]}} X^2\, dX$

3- $\int_{0}^{4} (3X^2 + 2X - 1)\, dX$

4- $\int_{1}^{5} X^3\, dX$

5- $\int_{1}^{3} X^2\, dX$

6- $\int_{2}^{4} (X^3 + X)\, dX$

7- $\int_{0}^{1} (1 - X)^2\, dX$

8- $\int_{1}^{2} (X - 1)(2 - X)\, dX$

9- $\int_{1}^{\text{[illegible]}} (X^2 + \frac{1}{X^2})\, dX$

10- $\int_{-3}^{-1} (\frac{1}{X^2} - \frac{1}{X^3})\, dX$

11- $\int_{-6}^{-10} \frac{dX}{X + 2}$

12- $\int_{-2}^{2} \frac{dX}{X^2 + 4}$

13- $\int_{-5}^{-3} \sqrt{X^2 - 4}\, dX$

14- $\int_{4}^{5} \frac{X\, dX}{\sqrt{X^2 - 15}}$

15- $\int_{2}^{1} \frac{dX}{25 - X^2}$

16- $\int_{\text{[illegible]}}^{\pi} \sin\frac{1}{2} X\, dX$

17- $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16 - X^2}}{X}$

18- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dX}{3 + \cos 2X}$

تطبيقات على استخدام التكامل

1 - حساب المساحات

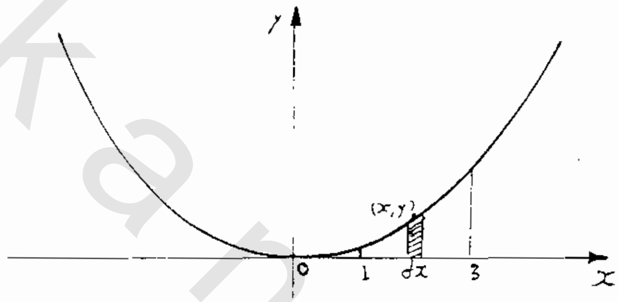
مثال 1:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $Y = X^2$ والمحور X والمستقيمين X=1,X=3

الحل:

باخذ عنصر مساحة ΔA الممثل بالمستطيل لبمقرب والذي يظهر بالرسم مهشرا (شكل 36).

$$\Delta A = Y\Delta X$$



شكل 36

وعندما يصل عدد عناصر المساحة إلى عدد لانهائي فان مجموع هذه المساحات تساوي المساحة المطلوبة A حيث:

$$A = \int_1^3 Y.dX$$

$$= \int_1^3 X^2.dX$$

$$= \frac{1}{3}[X^3]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}[3^3 - 1^3] = \frac{26}{3} \quad \text{وحدةمساحة}$$

مثال 2:

أوجد المساحة الواقعة فوق المحور X وتحت المنحنى $Y = 4X - X^2$

الحل:

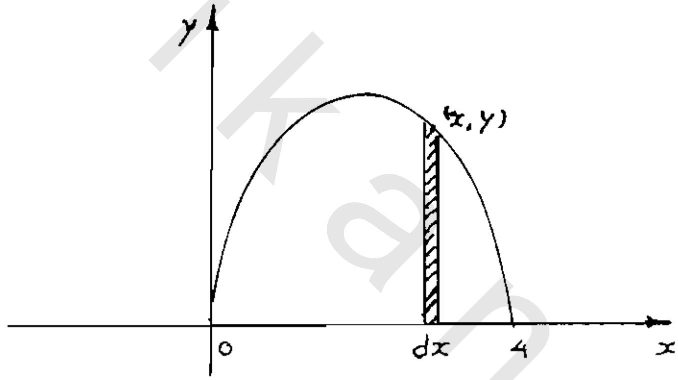
لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور X نضع Y=0:

$$\therefore 4X - X^2 = 0$$

$$X(4 - X) = 0$$

$$\therefore \quad X = 0 \quad , \quad X = 4$$

باخذ عنصر مساحة ΔA والمهشر بالرسم. شكل 37



شكل 37

$$\therefore \Delta A = Y \Delta X$$

$$A = \int_0^4 Y \, dX$$

$$= \int_0^4 (4X - X^2) dX$$

$$= [2X^2 - \frac{1}{3} X^3]_0^4$$

$$= [2(16) - \frac{1}{3}(64)]$$

$$= \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$ وحدتمساحة

مثال 3:

أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $X = 8 + 2Y - Y^2$ والمحور Y والمستقيمان Y=-1,Y=3 (شكل 38)

الحل:

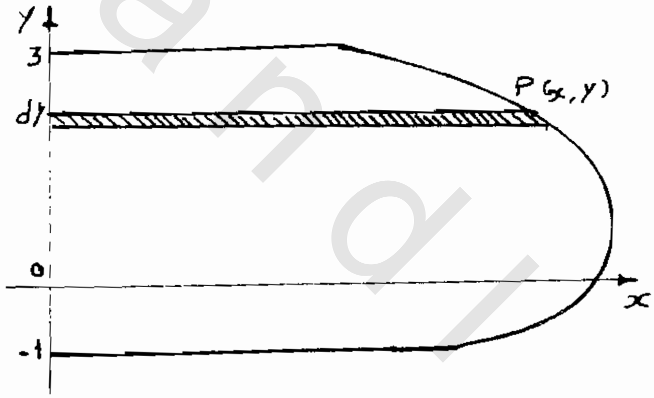
القطع المكافئ المذكرر يوضحه الشكل (38) حيث محوره يوازي المحور X لإيجاد تقاطع القطع مع المحور Y نضع X=0 :

$$\therefore 8 + 2Y - Y^2 = 0$$

$$(2+Y)(4-Y) = 0$$

$$Y = -2 \quad , \quad Y = 4$$

باخذ عنصر مساحة ΔA الممثل بالمستطيل المقرب المهشر بالرسم:



شكل (38)

$$\therefore \Delta A = X \ \Delta Y$$

$$\therefore \int = \int_{-1}^{3} (8 + 2Y - Y^2) dY$$

$$= [8Y + Y^2 - \frac{1}{3} Y^3]_{-1}^{3}$$

$$= [(8(3) + (3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3) - (8(-1) + (-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3)]$$

$$= \frac{92}{3}$$ وحدةمساحة

مثال 4:

أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $Y = X^2 - 7X + 6$ والمحور X والمستقيمين X=6 , X=2

(شكل 39)

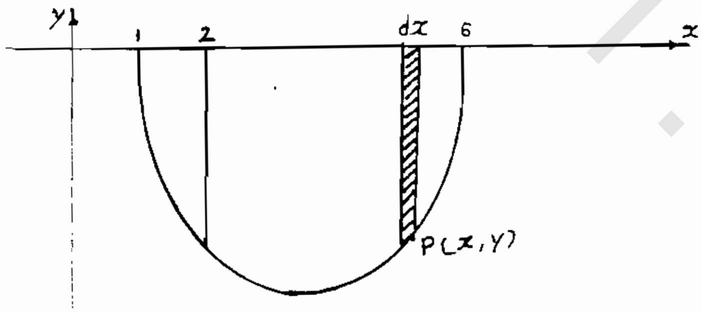
الحل:

لايجاد تقاطع القطع مع المحور X نضع Y=0:

$$\therefore X^2 - 7X + 6 = 0$$

$$(X - 6)(X - 1) = 0$$

$$\therefore X = 6 \quad , \quad X = 1$$



شكل 39

نأخذ عنصر مساحة ΔA المهشر بالرسم :

$$\Delta A = Y.\Delta X$$

$$\therefore A = \int Y.dX$$

$$= \int_{2}^{6} (X^2 - 7X + 6)dX$$

$$= [\frac{1}{3}X^3 - \frac{7}{2}X^2 + 6X]_2^6$$

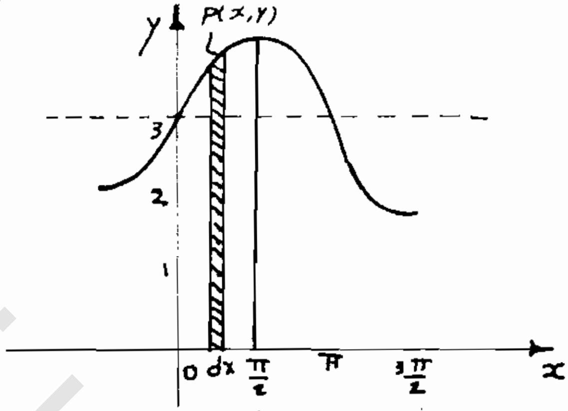
$$= [(\frac{1}{3}(6)^3 - \frac{7}{2}(6)^2 + 6(6)) - (\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{7}{2}(2)^2 + 6(2))$$

$$= \frac{56}{3} \text{وحدةمساحة}$$

مثال 5:

أوجد المساحة تحت المنحنى : $Y = 3 + 2\sin X$, $X[0, \frac{\pi}{2}]$ شكل (40)

الحل:



شكل (40)

نحسب مساحة عنصر المساحة ΔA من المستطيل المهشر بالرسم:

$$\Delta A = Y.\Delta X$$

$$\therefore A = \int Y.dX$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\sin X)dX$$

$$= [3X - 2\cos X]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [(3(\frac{\pi}{2}) - 2\cos\frac{\pi}{2}) - (3(0) - 2\cos 0)]$$

$$= \frac{3\pi}{2} + 2$$

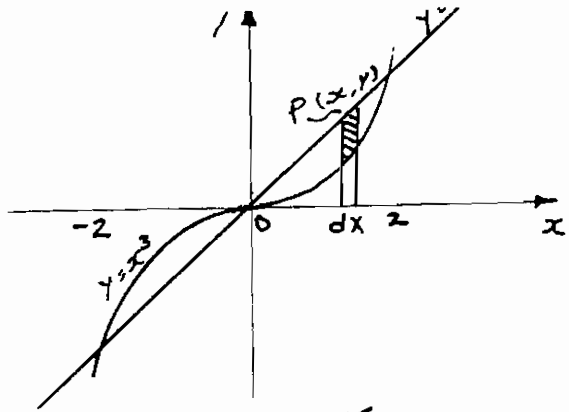
مثال 6 :

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين: $Y = X^3$, $Y = 4X$

الحل:

نوجد نقط التقاطع بينهما (شكل 41):

$$X^3 = 4X$$
$$\therefore X^3 - 4X = 0$$
$$X(X^2 - 4) = 0$$
$$X(X-2)(X+2) = 0$$
$$\therefore X = 0,\ X = 2,\ X = -2$$



شكل 41

نلاحظ أن المنحنيين دوال فردية متماثلة حول نقطة الاصل. بأخذ عنصر مساحة dA كما بالرسم الممثل بالمساحة التي على شكل مستطيل = $(dA_1) YdX$

$$\therefore dA_1 = \int Y.dX = \int 4X.dX$$

باخذ عنصر المساحة dA_2 والممثل بالمساحة تحت المنحني $Y = X^3$

$$dA_2 = \int Y.dX = \int X^3.dX$$

∴ عنصر المساحة المطلوب (المظلل) dA :

$$dA = dA_1 - dA_2$$

$$A = \int_0^2 4X.dX - \int_0^2 X^3.dX$$

$$= 4[\frac{X^2}{2}]_0^2 - [\frac{X^4}{4}]_0^2 = 2(4) - 4 = 4$$ وحدةمساحة

والمساحة المطلوبة A_t تساوي ضعف المساحة A من التماثل:

$$A_t = 2(4) = 8$$ وحدةمساحة

تمـــــاريـــــن 8

1 – أوجد المساحة الواقعة على المحور X والمنحنى:

(a) $Y = \sqrt{X+1}$

بين X=3 , X=8

(b) $Y = 2 - \frac{1}{2}X^3$

بين X=-2 , X=1

2 –أوجد المساحة المحصورة بين:

(a) $Y = X \ , Y = X^3$

(b) $Y = 4X \ , Y = X^3$

(c) $Y^2 = 4X \ , \ X^2 = 4Y$

(d) $Y = X^4 - 8X^2 + 16 \ , X$ المحور

(e) $Y = +2 \ , Y = X^2 - 1 \ , Y$ المحور

(f) $X = 4 \ , Y^2 = X^3$

$Y = \frac{1}{(2X-1)^2} \ , \ X = -1 \ , \ X = 1$

3- أوجد المساحة المحصورة بين X=0 ,X=-9 وكل من:

(a) $Y = X - X^3$

(b) $Y = X^3 - X^2 - 2X$

(c) $Y = \frac{1}{1-X}$

باستخدام التكامل أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$A(0,0) \quad , \quad B(7,0) \quad , \quad C(3,4)$

4- أوجد قيمة احدى المساحات المحصورة بين المنحنيين:–

$Y = \sin X \quad , \quad Y = \cos X$

5 –أوجد المساحة المحصورة بين:

$(a) \quad Y = X^2 - 4X + 3$

ونقطة تقاطعه مع المحور X

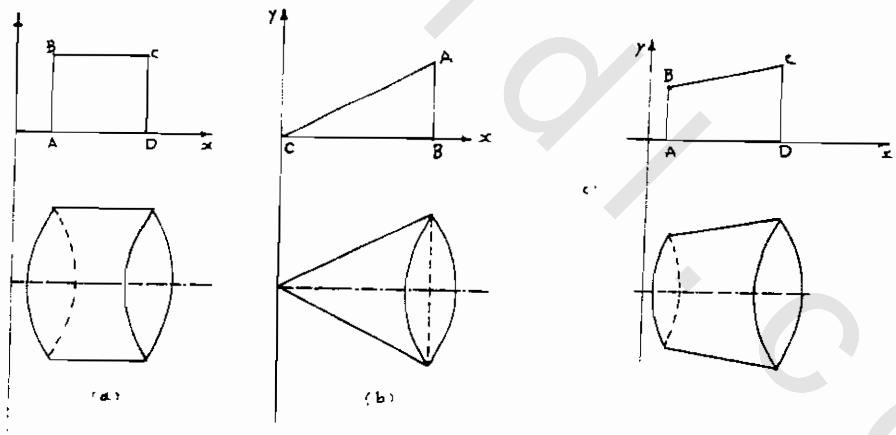
$(b) \quad Y = 2\tan^2 X \quad , \quad Y = \sec^2 X$

$(c) \quad Y = X^2 - 4 \quad , \quad Y = 4 - X^2$

$(d) \quad Y = X \quad , \quad Y = X^2$

2 حساب حجوم الأجسام الدورانية

نرى في الشكل (42-a) اذا دار المستطيل ABCD حول المحور X دورة كاملة فـان الشكل الناتج من الدوران يكون اسطوانة. واذا دار المثلث ABC حول المحور X دورة كاملة فان الشكل الناتج من الدوران يكون مخروطـــا (42-b) . واذا دار شبه المنحرف ABCD حول المحور X فان الشكل الناتج من الـــدوران يكــون مخروط دائري قائم ناقص شكل (42-c).



شكل (42)

مما سبق يتضح أن الجسم الدوراني ينشا من دوران مساحة حـــول مستقيم ثابت يسمى محور الدورات .

إيجاد حجم الجسم الدوراني:

1 - طريقة القرص:-

يكون محور الدوران جزا من حدود السطح. يتم رسم شـــريحة (قطعـــة مـــن السطح) عمودية على محور الدوران. ويحسب الحجم الناتج من دورانها.

عندما يزداد اعداد هذه الشريحة الى عدد لانهائي يتم استخدام النظرية الاساسية في حساب التكامل و التي سبق استخدامها في ايجاد المساحة.

مثال 1:

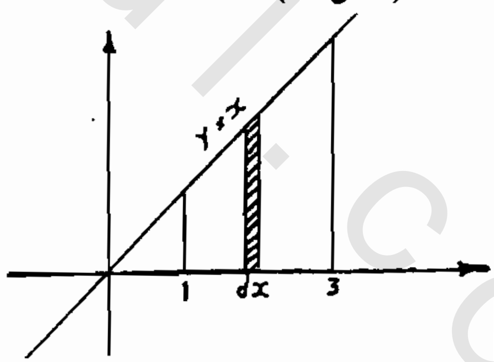
اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة M والمحددة بالمنحنى Y=X والمحور X والمستقيمين

X=3 , X=1

الحل:

يتم رسم شريحة (قطعة من السطح) عمودية على محور الدوران يكون حجمها ΔV .(شكل 43):

$$\therefore \quad \Delta V = A.\Delta X$$
$$= \pi Y^2.\Delta X$$
$$\sum \Delta V = \sum \pi Y^2.\Delta X$$
$$V = \int_1^3 \pi Y^2.dX = \int_1^3 \pi X^2.dX$$



شكل 43

$$= \frac{\pi}{3}[X^3]_1^3$$

$$= \frac{\pi}{3}[3^3 - 1]$$

$$= \frac{26}{3}\pi$$

مثال 2 :

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة M المحددة بالمنحنى Y=sinX والمحور X وX=0 و $X = \pi$. شكل 44

$$V = \int_0^\pi \pi Y^2 .dX$$

$$= \pi \int_0^\pi \sin^2 X.dX$$

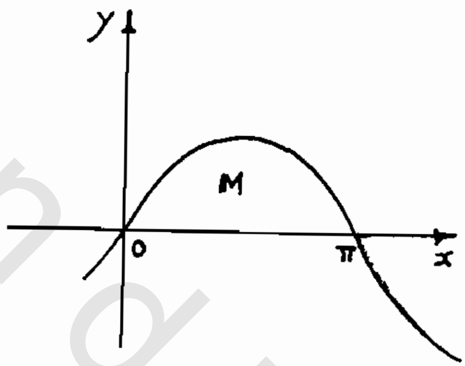
$$= \pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2X)dX$$

$$= \frac{\pi}{2}[\int_0^\pi dX - \int_0^\pi \cos 2X.dX]$$

$$= \frac{\pi}{2}[X - \frac{1}{2}\sin 2X]_0^\pi$$

$$= \frac{\pi}{2}[\pi - 0] - [0 - 0]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$ وحدةحجم



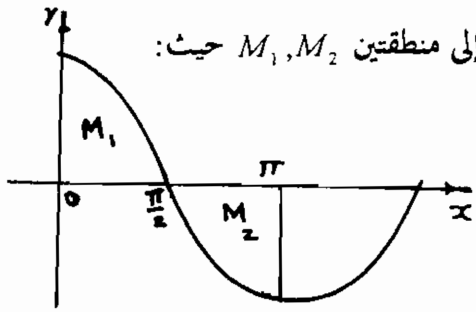
شكل 44

مثال 3:

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدد بالمنحنى Y=cosX والمحور X و $X = 0$, $X = \pi$ حول المحور X (شكل 45)

الحل:

تقسم المنطقة M إلى منطقتين M_1, M_2 حيث:



$$M_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$M_2 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

شكل 45

ويكون الحجم الكلي V الناشئ من دوران M حول المحور X هو:

$$V = V_1 + V_2$$

حيث V_1 هو حجم الجسم الناشئ من دوران M_1

، V_2 هو حجم الجسم الناشئ من دوران M_2

$$\therefore \quad V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi Y^2 . dX + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi Y^2 . dX$$

ومن خواص التكامل نلاحظ ان:

$$\int_a^b Y.dX = \int_a^c Y.dX + \int_c^b Y.dX$$

$$\therefore \quad V = \int_0^{\pi} \pi Y^2 . dX$$

$$= \int_0^{\pi} \pi \cos^2 X.dX$$

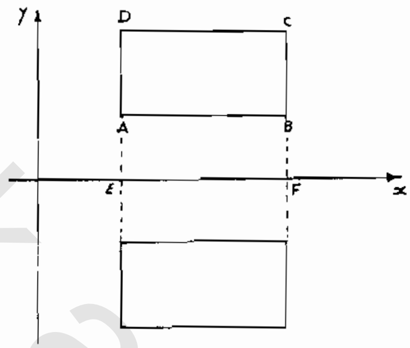
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2X) dX$$

$$= \frac{\pi}{2} [X + \frac{1}{2} \sin 2X]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$ وحدةحجم

2 - عندما لا يكون محور الدوران جزءاً من حدود قطعة السطح:

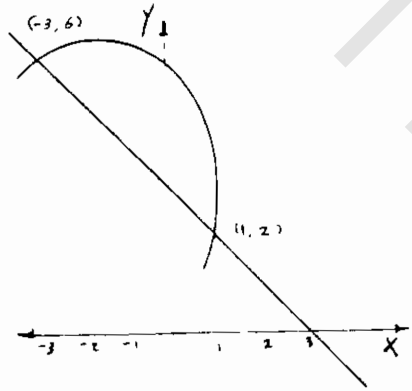
كما في الشكل (46). حيث مد اضلاع المستطيل لتقطع محور الدوران في F, E وعندما يدور المستطيل حول محور الدوران يتكون شكل حلقي حجمه هو الفرق بين الحجمين المولدين من دوران المستطيل ECDF , EABF حول المحور X . يتم حساب الفرق بين الحجمين بنفس الطريقة السابقة.



شكل 46

مثال 1: أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين: $Y_1 = 6 - 3X - X^2$, $Y_2 = 3 - X$ حول المحور X . شكل 47.

الحل:



شكل 47

لإيجـــاد تقـــاطع المنحنييــن يتــم حـــل المعـــادلتين معـــا:

$$\therefore 6-3X-X^2=3-X$$

$$X^2+2X-3=0$$

$$(X-1)(X+3)=0$$

$$\therefore X_1=1 \quad , \quad X_2=-3$$

$$Y_1=3-1=2$$

$$Y_2=3-(-3)=6$$

$$\therefore \ V=\int_{-3}^{1}\pi(Y_1^2-Y_2^2).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}((6-3X-X^2)^2-(3-X)^2).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}((36-36X-3X^2+6X^3+X^4)-(9-6X+X^2)).dX$$

$$=\pi\int_{-3}^{1}(X^4+6X^3-4X^2-30X+27).dX$$

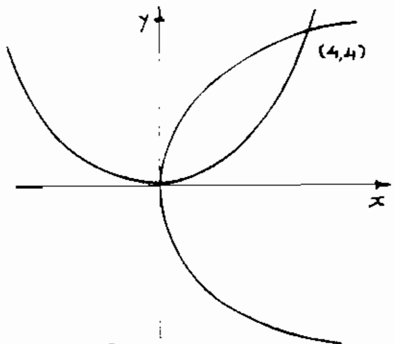
$$=\pi[\frac{X^5}{5}+\frac{6}{4}X^4-\frac{4}{3}X^3-15X^2+27X]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{1792}{15}\pi$$ وحدةحجم

مثال 2:

أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

$Y^2=4X$, $X^2=4Y$. **شكل 48**



شكل 48

الحل:

لإيجاد نقط التقاطع يتم حل المعادلتين:

$$Y^2 = 4X = (\frac{X^2}{4})^2$$

$$X^4 = 4(16)X$$

$$X^4 - 64X = 0$$

$$X(X^3 - 64) = 0$$

$$X(X-4)(X^2 + 4X + 16) = 0$$

$$\therefore X = 0 \quad \rightarrow \quad Y = 0$$

$$X = 4 \quad \rightarrow \quad Y = 4$$

$\therefore$ **نقط التقاطع هما: (0.0) و (4.4).شكل (48)**

$$\therefore V = \int_0^4 \pi(Y_2^2 - Y_1^2)dX$$

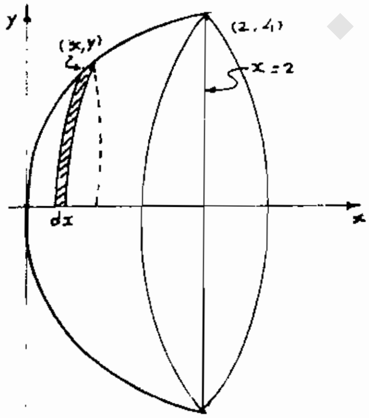
$$= \pi\int_0^4 (4X - \frac{X^4}{16})dX$$

$$= \pi(2X^2 - \frac{X^5}{80})_0^4 = 19.2\,\pi \text{ وحدةحجم}$$

مثال 3:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح الواقعة في الربع الأول حول المحـور X علما بان القطعة محددة بالقطع المكافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمــودي X=2 . شكل 49.

الحل:



شكل 49

بأخذ عنصر حجمي ΔV حيث

$$\Delta V = A.\Delta X = \pi Y^2.\Delta X$$

وبتجميع هذا العنصر إلى عدد لانهائي ينتج الحجم المطلوب حيث:

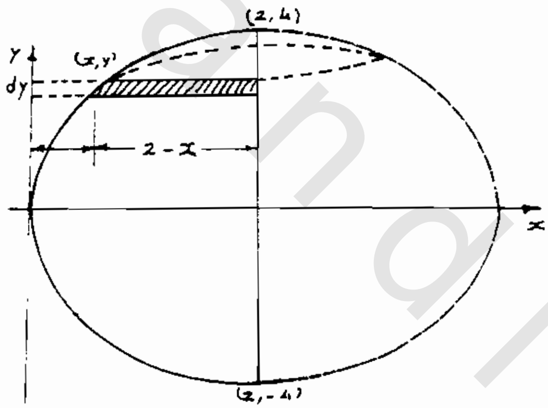
$$V = \sum \pi Y^2.\Delta X$$

$$= \int_0^2 \pi Y^2 dX = \pi \int_0^2 8X.dX = 4\pi[X^2]_0^2 = 16\pi \text{ وحدةحجم}$$

مثال 4:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحدد بالقطع المكـــافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمودي (X=2) حول الوتر البؤري . شكل 50

الحل:



شكل 50

نقسم السطح إلى شرائح افقية صغيرة جدا كما بالشكل(50) وعـــندما يــدور المستطيل (dY)(2-X) الممثل لاحدى هذه الشرائح ينتج قرص نصف قطـره (2-X) وارتفاعه dY ويكون حجمه dV :

$$dV = \pi(2 - X)^2 dY$$

$$V = \int_{-4}^{4}(4 - 4X + X^2)dY$$

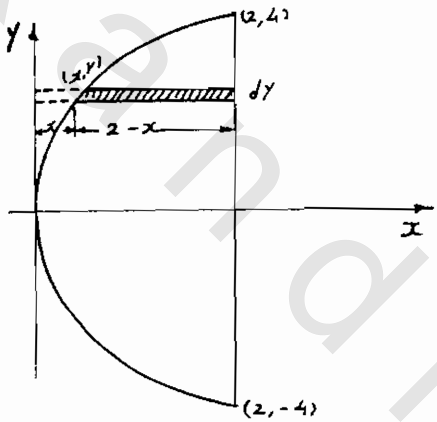
$$= 2\pi\int_{0}^{4}(4 - 4(\frac{Y^2}{8}) + \frac{Y^4}{64})dY$$

$$= 2\pi[4Y - 4\frac{Y^3}{24} + \frac{Y^5}{5(64)}]_0^4$$

$$= 2\pi\frac{4}{15}32 = \frac{256}{15}\pi$$ وحدةحجم

مثال 5:

أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $Y^2 = 8X$ والوتر البؤري العمودي X=2 حول المحور Y .(شكل 51)



شكل 51

توخذ شريحة على السطح والممثلة بالجزء المهشر في الرسم وعند ادارتها حول المحور Y ينتج قرص حلقي نصف قطره الداخلي X ونصف قطره الخارجي 2 . وعلى ذلك يكون الجزء الناتج من دوران الشريحة من حاصل طرح قرص مفرغ نصف قطره X وحجمه ΔV_2 حيث:

$$\Delta V_2 = \pi X^2 \Delta Y$$

من القرص المجسم ΔV_1 والذي نصف قطره 2 حيث:

$$\Delta V_1 = \pi(2)^2 . \Delta Y$$

$\Delta V =$ حجم الشريحة المهشرة

$$= \Delta V_1 - \Delta V_2$$

$$V = \int_{-4}^{4} \pi(2)^2 dY - \int_{-4}^{4} \pi X^2 . dY$$

$$= 4\pi \int_{-4}^{4} dY - \pi \int_{-4}^{4} \frac{Y^4}{64} . dY$$

$$= 4\pi [Y - \frac{1}{64} \frac{Y^5}{5}]_{-4}^{4}$$

$$= 8\pi [Y - \frac{1}{64} \frac{Y^5}{5}]_{0}^{4}$$

$= \frac{32}{5}\pi$ وحدةحجم

تمــــــــــاريـــــــــــن 9

1 – أوجد الحجم الناشئ من دوران كل من المساحات الاتية حول المحور Y:

(a) $Y = \sqrt{X}$, $X = 0$, $Y = 2$

(b) $Y = X^3$, $Y = 0$, $X = 1$

(c) $Y = 0$, $Y = 2\ln X$, $Y = 2$

(d) $Y = \sqrt{X}$, $Y = X^3$

2- أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصـــورة بـــين Y=0 والمنحنيـــين

$X = Y^2$, $X = 8 - Y^2$

3- أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين قوس ربع دائرة نصف قطرها r والمماسين له عند احد نهايتيه حول احد المماسين.

4 – أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين المحور X والمنحـــــنى $Y^2 = X^3$ والمستقيم X=1:

–حول المحور X

–حول المحور Y

5- أوجد الحجم الدوراني الناشئ من دوران المساحة المحصـــورة بـــين المنحـــنى $Y = 1 - X^2$ والمستقيمين X=1 , Y=1 حول المستقيم X=1

6 –أوجد الحجم الدوراني الناشئ من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيـــين $Y = \sqrt{X}$, $Y = X^2$ حول المحور X.