الباب الأول

التفاضل

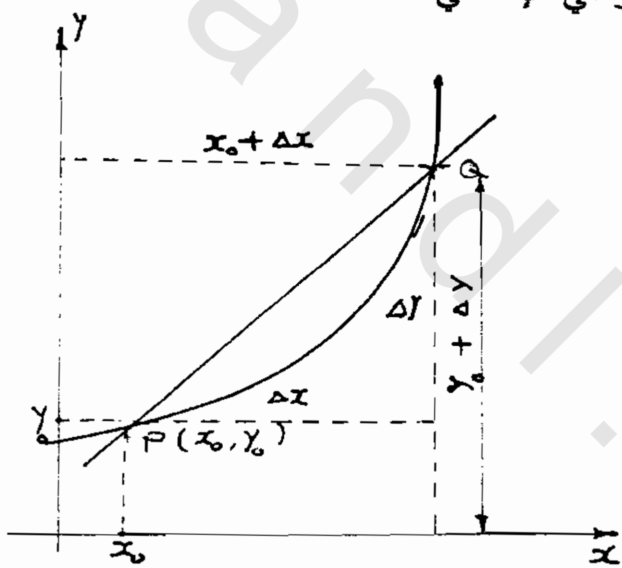
ميل المماس لمنحنى

إذا كان $y = f(x)$ يمثّل منحنى الدالة، وكان النقطتين $P(x_o , y_o)$
$Q(x_o + \ x , y_o + \ y)$
واقعين على المنحنى شـــكل(1) فأن PQ يكون قاطعاً للمنحنى
وميله m_s :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y التغير في الإحداثي y

x التغير في الإحداثي x



شـــكل(1)

بفرض أن النقطة P ثابتة على المنحنى،النقطة Q تتحرك على المنحنى في اتجاه P إذاً ميل القطع PQ يتغير على المنحنى،. وعندما تقترب النقطة P قرباً كافياً من النقطة Q فإن القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تصل إلى قيمة محددة حيث x اقتربت من الصفر ويصبح PQ في هذه الحاله مماســاً للمنحنى عند P أي أن ميل المماس m :

$$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\Delta x \to 0}$$

مثال**1**: إذا كان :

$$y = x^3 - 3x + 3$$

فأوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة : $x = 0$، $x = 1$

الحل:

بفرض أن$P(x_o , y_o)$، $Q(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ نقطتين على

$$\therefore \quad y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 3$$

$$\Delta y + y_0 = (x_0 + \Delta x)^3 - 3(x_0 + \Delta x) + 3$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 3$$

$$\therefore \Delta y \quad = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)$$

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = 3x_o^2 + 3x_o(\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3$$

فيكون ميل القاطع m_s. حيث : m_s ميل القاطع للمنحى

نجعل Q تقترب من P على طول المنحنى فيقترب كل مـــن Δy و Δx من الصفر. فتكون القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غير محدده. ولكن نجد

$$3x^2 - 3 \rightarrow \text{ثابته} \qquad \text{كمية}$$

$$3x^2 \cdot \ x + \ x \rightarrow \text{صفر}$$

الطرف الأيمن يساوي المقدارين التاليين:

أي أن نهاية m_s عندما Δx تقترب من الصفر تساوي $3x_o^2-3$

وفي هذه الحالة

يصبح $m = m_s$

$$\therefore \ m = 3x_o^2 - 3$$

حيث m هو ميل المماس للمنحنى عند $P(x_o, y_o)$ ، $\because$ (x_o, y_o) هي أي نقطة على المنحنى فإنه يمكن أن نحذف الدليـــل وتكتـــب كالتالـــي :

$$m = 3x^2-3$$

بالتعويض عن x=o يكون ميل المماس للمنحنى عندهـــا يســـاوي:

$m = 3(o)-3 \quad = -3$

بالتعويض عن x=1 يكون ميل المماس للمنحنى عندها يساوي :

$m = 3(1) - 3 = 0$

مثال **2** :

أوجد ميل المنحنى (ميل المماس للمنحنى) للدالة f(x)

حيث :

$f(x) = y = x2 - 2x - 3$

ثم أوجد النقط التي يكون فيها المماس أفقياً مع رسم الدالة بيانياً .

الحل : بفرض أن P(x , y) نقطة على المنحنى

$$\because \quad y = x^2 - 2x - 3$$

$$\Delta y + y = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 3$$

$$= x^2 + 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3$$

$$\therefore \Delta y = 2x \,.\, \Delta x - 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2 + \Delta x$$

وحيث أن ميل المماس للمنحنى هو $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر .

$$\therefore m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0}$$

$$= 2x - 2$$

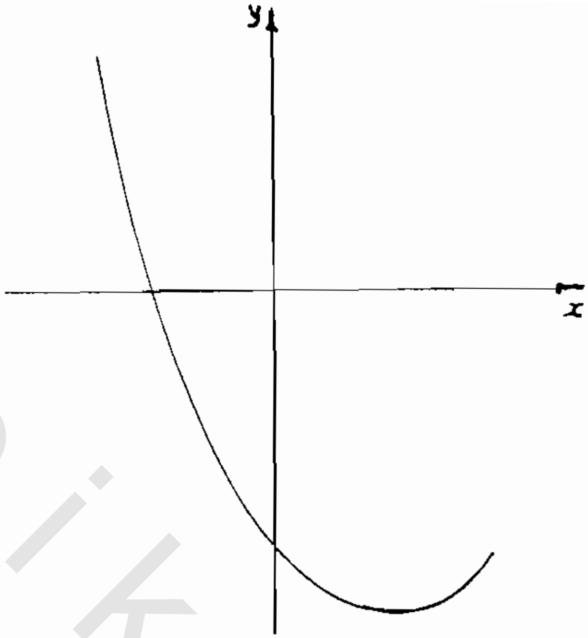
ويكون الميل أفقياً عندما $m = 0$

$$\therefore\ 2x - 2 = 0$$

$$\therefore\ x = 1$$

x	−2	−1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3

ويوضح الجدول بيانياً الذي يوضحه شكل ٢



شـــكل 2

مثال 3 :

أثبت أن لمنحنى الدالة في المثال السابق مماساً عند $x = 2$. ثم أوجد معادلته .

الحل :

بالتعويض في معادلة المنحنى عن $x = 2$ لإيجاد قيمة y :

$$\therefore f(x)=y=(2)^2-2(2)-3=-3$$

ويكون المطنوب هو إثبات أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماس عند

النقطة $P(2,-3)$ ، وعلى فرض أن المماس هو m حيث

$m = 2x-2$

$= 2(2)-2 = 2$ بالتعويض عن $m = 2$

وعلى هذا يكون لمنحنى الدالة مماس ميله = 2 ويمر بالنقطة $P(2,-3)$ ومعادلة هذا المماس هو :

$$\frac{y-(-3)}{x-2} = 2$$

$$y + 3 = 2(x-2)$$

$$y - 2x + 7 = 0$$

مثال 4 :

أثبت بالطريقة الأولية أن لمنحنى الدالة :

$$f(x) = x^3 + 1$$

مماساً عند $x = -1$. أوجد معادلته

الحل :

لإثبات أنه يوجد مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x = -1$ يكون

بإثبات أن قيمه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ معرفة محددة كالآتي :

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 + 1$$

$$= x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x.(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= 3x^2 . \Delta x + 3x . (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + (\Delta x)^2$$

قيمة ميل المماس عند أي قيمة لـــ x هي قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

عندما $\Delta x \longrightarrow 0$

$$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0} = 3x^2$$

وحيث أن x تنتمي لجميع الأعداد الحقيقية

$\therefore$ مماسات منحنى الدالة $f(x)$ موجودة ومحددة لجميع الأعداد الحقيقية .

$\therefore$ عند $x = -1$. يكون الميل هو :

$$m = 3(-1)^2$$

$$= 3$$

$$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$$

أي أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماساً ميله 3 ويمر بالنقطة $A(-1, 0)$

معادلة المماس هي :

$$\frac{y-0}{x-(-1)}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=3$$

$$\therefore\ y=3x+3$$

مثال 5 :

أوجد باستخدام المبادئ الأولية ميل المماس للمنحنى :

$$y=\sqrt{x}$$

الحل :

بفرض أن $P(x, y)$ أي نقطة على المنحنى :

$$y=\sqrt{x}$$

، $Q(x_o+\Delta x\ ,\ y_o+\Delta y)$ واقعة على المنحنى وقريبة جداً من P

$$\therefore\ y+\ \Delta y=\sqrt{x_o+\ \ x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x_o+\ \ x}-\sqrt{x_o}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_o+\ \ x}-\sqrt{x_o}}{\Delta x}$$

وبالضرب في مرافق البسط :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_\circ + \Delta x} - \sqrt{x_\circ}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_\circ + \Delta x} + \sqrt{x_\circ}} = \frac{1}{2\sqrt{x_\circ}}$$

وحيث أن $P(x, y)$ هي أي نقطة على المنحنى :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمـــــاريـــــن (1)

1- أثبت أن هناك مماس لمنحنى الداله المعطاة عند النقاط المعطاة في كل حالة . إذا كان المماس معرفا اكتب معادلته لما يأتي :-

1- $f(x) = 1 - 5x \quad , \quad (0, 1)$

2- $f(x) = x \quad , \quad (2, 4)$

3- $f(x) = x^3 \quad , \quad (0, 0)$

4 - $f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad , \quad (4, 3)$

5 - $f(x) = \sqrt{2x - 1} \quad , \quad (1, 1)$

6- $f(x) = \begin{bmatrix} 2x - 1 & \rightarrow & x \le 1 \\ x + 1 & \rightarrow & x \quad 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (1, 1)$

2-أوجد ميل المماســـــات المنحنى :

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

عند النقطة تقاطعه مع المحور x .

3-إذا كان : $y = x2 + 5x - 8$

فأوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

عندمـــا تتغير x كآلاتي :-

$x_o = 1 \qquad x_1 = 1.2 \longrightarrow$

$x_o = 1 \qquad x_1 = 0.8 \longrightarrow$

4-جسم يسقط من السكون سقوطا وفقا للعلاقة :

$S = 4.9\ t^2$

حيث S (m) المسافة ، t (s) الزمن بالثانية فأوجد $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

عندمـــا تتغير t كآلاتي :-

$t_o = 3 \qquad t_1 = 3.5 \longrightarrow$

$t_o = 3 \qquad t_1 = 3.1 \longrightarrow$

5-أوجد بالطرق الأولية ميل المماس والنقاط التي يكون فيها المماس أفقيا مع رسم المنحنى في كل حالة :

(a) $y = 2x^2 - x - 1$

(b) $y = x^2 + 4x + 4$

(c) $y = x^3 - 12x$

(d) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

المشتقـــــــة

تعريف:

تعرف مشتقة الدالة Y=f(X) بالنسبة لـX على انها:

بشرط ان تكون النهاية موجودة.

نلاحظ انه من تعريف المشتقة انها تساوي ميل المماس للمنحنى أي انه:

ميل المماس عند نقطة هو قيمة المشتقة عند نفس النقطة.

ويمكن الاشارة الى ان المشتقة للدالة Y=f(X) بالنسبة ل X تسمى المشتقة الاولى للدالة بالنسبة ل X وتاخذ الرموز:-

$$\frac{d}{dx} f(X),\ \frac{d}{dx} Y,\ D_X,\ Y',\ f'(x)$$

مثال:

اذا كانت:-

$$Y = f(x) = \sqrt{X} - 1$$

فاوجد قيمة المشتقة الاولى باستخدام التعريف:

الحل : بفرض ان P(X,Y) على المنحنى

$$\therefore \quad Y = \sqrt{X} - 1$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - 1$$

$$\therefore \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\therefore \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X - \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X} * \frac{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$= \frac{X + \Delta X - X}{\Delta X\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}\right)}$$

$$\left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

وحيث أن P(X,Y) هي أي نقطة على المنحنى:

$$\therefore \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \to 0} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dX} Y = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

مشتقات الدوال الجبرية

تعريف:

يقال لدالة ما أنها قابلة للاشتقاق عند $X = X_0$ اذا كان لها مشتقة عند نفس النقطة. وأيضا أنها قابلة للاشتقاق في فترة ما اذا كان لها مشتقة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

صيغ مشتقات الدوال الجبرية:

1- مشتق أي ثابت يساوي صفر

$$\frac{d}{dx}C = 0$$

حيث C مقدار ثابت

البرهان:

بفرض ان :

Y=C

وهذا يعني ان قيمة Y لاتتوقف على المتغير X

$$\therefore Y + \Delta Y = C$$

$$\therefore \quad \Delta Y = 0$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 0$$

من تعريف المشتقة

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= 0$$

$$\therefore \frac{d}{dX}C = 0$$

2- مشتق X مرفوع للاس n:

$$\frac{d}{dX}X^n = nX^{n-1}$$

حيث n عدد صحيح موجب

البرهان:

بفرض ان:

$$Y = X^n \text{ ....}(1)$$

أي زيادة في Y مقدارها ΔY يقابلها زيادة في X مقدارها ΔX

$$\therefore Y + \Delta Y = (X + \Delta X)^n = \begin{cases} X + \Delta X & ,n = 1 \\ X^2 + 2X.\Delta X + (\Delta X)^2 & ,n = 2 \\ X^3 + 3X^2.\Delta X + 3X.(\Delta X)^2 + (\Delta X)^3 & ,n = 3 \\ \text{..................................} & \\ X^n + nX^{n-1}.\Delta X + nX^{n-2}(\Delta X)^2 & ,n \end{cases}$$

$$\text{....................}(2)$$

بطرح (1) من (2)

$$\Delta Y = \begin{cases} \Delta X \text{..}, n = 1 \\ 2X.\Delta X + (\Delta X)^2 \text{...........................}, n = 2 \\ 3X^2.\Delta X + (3X + \Delta X) + (\Delta X)^2 \text{.......}, n = 3 \\ \text{..................................} \\ nX^{n-1}.\Delta X + (\Delta X, X \text{ حدود })(\Delta X)^2 \text{...} n \end{cases}$$

$$\text{........................}(3)$$

بقسمة (3) على ΔX

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \begin{cases} 1 \text{...}, n = 1 \\ 2X + \Delta X \text{...........................}, n = 2 \\ 3X^2 + (3X + \Delta X) + \Delta X \text{.......}, n = 3 \\ \text{..................................} \\ nX^{n-1} + (\Delta X, X)(\Delta X)^2 \text{...........} n \end{cases}$$

$$\text{........................}(4)$$

واخيرا

$$\frac{dY}{dX}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\begin{cases}1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, n=1\\ 2X\ldots\ldots\ldots\ldots, n=2\\ 3X^2\ldots\ldots\ldots\ldots, n=3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ nX^{n-1}\ldots\ldots\ldots, n\end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dX}Y=nX^{n-1}$$

حالات خاصة:

(أ)عند n=1

$$Y=X$$

$$\frac{d}{dX}Y=1$$

(ب)عند n=2

$$Y=X^2$$

$$\frac{d}{dX}Y=2X$$

وهكذا....

3- اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل X فان:

$$\frac{d}{dx}Cu=C\frac{d}{dX}u$$

يمكن بسهولة اثبات هذه الصيغة وذلك بوضع Y=Cu مع استخدام تعريف المشتقة وعلى الطالب اثباته.

4 ـمشتقة مجموع وطرح دالتين منتهيتين يساوي مجموع وطرح مشتقات الدالتين:

وليكن v,u دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة ل X فان:

$$\frac{d}{dX}(u \pm v) = \frac{d}{dX}u \pm \frac{d}{dX}v$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض $Y=u \pm v$

5 ـمشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لX :

$$\frac{d}{dX}uv = u\frac{d}{dX}v + v\frac{d}{dx}u$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض Y=uv

نتيجة 1:

اذا كان:

$$u = v = f$$

$$\therefore \frac{d}{dX}f^2 = 2f\frac{d}{dX}f$$

نتيجة 2:

من الممكن استخدام الصيغة السابقة لتشمل ثلاث دوال او اكثر.

نتيجة 3:

اذا كانت u قابلة للاشتقاق بالنسنة لــ X وان n عدد صيحح موجب فعندئذ u^n قابلة للاشتقاق وان:

$$\frac{d}{dX}u^n = nu^{n-1}\frac{d}{dX}u$$

6-إذا كان $Y=\frac{u}{v}, v\neq 0$

$$\therefore \frac{d}{dX}Y=\frac{d}{dX}\frac{u}{v}$$

$$=\frac{v\frac{du}{dX}-u\frac{dv}{dX}}{v^2}$$

7-**مشتقة الدالة المرفوعة لأس صحيح سالب :**

$$\frac{d}{dX}u^n=nu^{n-1}\frac{d}{dX}u$$

حيث n عدد صحيح سالب

ارشاد: من الممكن اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض ان: n=-m حيث m عددا صحيحاً موجبا.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد المشتقة الاولى لكل من الدوال التالية:

$(a)\quad Y=5$

$(b)\quad Y=7X^5$

$(c)\quad 3X^3+7X^2-5X+4 \quad = Y$

الإجابة :

$(a)\quad Y=5$

$Y'=0$

$(b)\quad Y=7X^5$

$Y'=7(5)X^4=35X^4$

$(c)\quad Y=3X^3+7X^2-5X+4$

$Y'=3(3)X^2+7(2)X-5$

$=9X^2+14X-5$

مثال 2: اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = X^3\sqrt{X}$$

الحل:

$$u = X^3 \quad , \quad v = \sqrt{X}$$

$$u' = 3X^3 \ , \ v' = \tfrac{1}{2}X^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$Y = uv$$

$$Y' = uv' + vu'$$

$$= X^3\frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X}(3X^2)$$

مثال 3 :

اوجد المشتقة الاولى للدالة :

$$Y = (3X-1)^2$$

الحل:

$$u = (3X-1)$$

$$\therefore Y = u^2$$

$$Y' = 2u\frac{du}{dX}$$

$$= 2(3x-1)(3)$$

$$= 6(3X-1)$$

مثال 4:

اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = (3X-1)^3$$

الحل:

الحل:

$$Y = (3X-1)(3X-1)^2$$

$$Y' = (3X-1)\frac{d}{dX}(3X-1)^2 + (3X-1)^2\frac{d}{dX}(3X-1)$$

$$= (3X-1)(6)(3X-1) + (3X-1)^2(3)$$

$$= 6(3X-1)^2 + 3(3X-1)^2$$

$$= 9(3X-1)^2$$

مثال 5: اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة التالية :

$$Y = \frac{5X^2}{X^2+1}$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X^2+1)10X - 5X^2(2X)}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{10X^3 + 10X - 10X^3}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{10X}{(X^2+1)^2}$$

مثال 6:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة الآتية:

الحـل :

$$Y = \frac{X+1}{\sqrt{X-1}}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sqrt{X-1}(1) - (X+1)\frac{1}{2\sqrt{X-1}}}{(X-1)}$$

$$= \frac{2(X-1)-(X+1)}{2\sqrt{X-1}\ (X-1)}$$

$$= \frac{X-3}{2(X-1)^{\frac{3}{2}}}$$

تمـــاريــــن (2)

1 -باستخدام التعريف اوجد مشتقة الدوال الاتية:

$(a)\quad Y = X^2 + 5X$

$(b)\quad Y = X^3 - 3X^2 - 5X$

$(c)\quad Y = \sqrt{2X+1}$

$(d)\quad Y = \dfrac{1}{X-2}$

$(e)\quad Y = \sqrt{2+X}$

$(f)\quad Y = \sqrt{X}$

$(g)\quad Y = \dfrac{1}{X^2}$

2-أوجد المشتقة الأولى لكل من : -

$(a) \quad Y = 10X^2 + 9X - 4$

$(b) \quad Y = (X^3 - 7)(2X^2 + 3)$

$(c) \quad Y = 15 - s + 4s^2 - 5s^4$

$(d) \quad Y = \dfrac{8X^2 - 6X + 11}{X - 1}$

$(e) \quad Y = \sqrt{(3X + 4)(2X - 1)}$

$(f) \quad Y = 1 + \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X^2}$

$(g) \quad Y = \sqrt{\sqrt{X} + \sqrt{X + 2}}$

3- يتحرك جسم على خط مستقيم وفق قانون الحركة:

$$s = t^3 - 4t^2 - 3t$$

اوجد: السرعة-العجلة

الزمن الذي تنعدم فيه السرعة-الزمن الذي تنعدم فيه العجلة

4- قذف جسم راسيا لاعلى بسرعة 160 م/ث إلي ارتفاع s :

$$s = 160t - 16t^2$$

أ- ما هو اقصى ارتفاع يمكن ان يبلغه و العجلة

ب- ماهي سرعته عندما يصل إلي ارتفاع ٢٥٦م وهو صاعد

5- اذا كانت s(m) تمثل المسافة التقريبية التي يقطعها جسم يسقط من السكون

سقوطا حرا بلأمتار خلال زمن قدره t ثانية وكانت: $s = 4.9t^2$

فاوجد: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ عندما تتغير t من : -

$t_0 = 3 \to t_1 = 3.5$

$t_0 = 3 \to t_1 = 3.1$

الدوال العكسية : -

لايجاد $\frac{dY}{dX}$ عندما تعطى X=g(Y) باحدى الطريقتين:

(أ) حل المعادلة بالنسبة ل X اذا كان ذلك ممكننا ثم اشتق بالنسبة ل X

(ب) اشتق X=g(X) بالنسبة لY ثم استخدم العلاقة :

$$dy / dx = 1 / (dx / dy)$$

مثال 1:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان : $X = \sqrt{Y+5}$

الحل: الطريقة أ:

$$X^2 = Y + 5$$
$$Y = X^2 - 5$$
$$dY/dX = 2X$$

الطريقة ب:

$$\frac{dX}{dY} = \frac{1}{2\sqrt{Y+5}}$$
$$\frac{dY}{dX} = 2\sqrt{Y+5}$$
$$= 2X$$

اشتقاق دالة الدالة:

اذا كانت Y=f(u) , u=g(X) يمكن الحصول على $\frac{dY}{dX}$ باحدى الطريقتين :

(أ) عبر Y صريحة في X

(ب) استخدام العلاقة (قاعدة السلسلة)الآتية :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dX}$$

مثال 2 :

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان :

$$Y = u^2 + 3$$
$$u = 2X + 1$$

الحل : الطريقة أ:

$$\begin{aligned} Y &= u^2 + 3 \\ &= (2X+1)^2 + 3 \\ &= 4X^2 + 4X + 4 \end{aligned}$$

$$\frac{dY}{dX} = 8X + 4$$

الطريقة ب:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{du} = 2u \quad , \quad \frac{du}{dX} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dY}{dX} &= 2u.2 \\ &= 4u \\ &= 4(2X+1) \\ &= 8X + 4 \end{aligned}$$

المشتقات العليا:

اذا كانت Y=f(X) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لX حينئذ تسمى مشتقتها بالمشتقة الاولى للدالة.

فإذا كانت مشتقتها الاولى هي الاخرى قابلة للاشتقاق بالنسبة لX فان مشتقتها حيئذ تسمى المشتقة الثانية للدالة(الاصلية) ويرمز لها باحدى الرموز التالية:

$$f''(X) \quad , \quad Y'', \frac{d^2Y}{dX^2}$$

وايضا اذا كانت المشتقة الثانية قابلة للاشتقاق بالنسبة ل X فان مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة ويرمز لها باحدى الرموز التالية:

$$\frac{d^3Y}{dX^3} \quad , \quad Y''', f'''(X)$$

وهكذا......

الاشتقاق الضمني:

نعلم ان الدوال الضمنية تظهر على الصورة $f(X,Y)=0$ ويتم الحصول على المشتق Y' باتباع الاتي:-

اعتبر Y دالة في X واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة ل X ثم العلاقة الناتجة بالنسبة لـــ Y' .

مثال 1:

اوجد Y' إذا كان:

$$X^2 + Y^2 + XY = 5$$

الحل:

بعمل الاشتقاق بالنسبة ل X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 2X + 2YY' + XY' + Y = 0$$

$$Y'(2Y + X) = -Y - 2X$$

$$Y' = \frac{-Y - 2X}{2Y + X}$$

مثال 2:

اذا علمت ان :

$$4X^2 + 3Y^2 = 12$$

فاوجد $\frac{dY}{dX}$ عند $X = \frac{3}{2}$

الحل:

بتفاضل (اشتقاق) المعادلة بالنسبة لـــ X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 4(2X) + 3(2Y)Y' = 0$$

$$\therefore Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8X}{6Y}$$

لايجاد قيمة Y عند $X = \frac{3}{2}$ يتم التعويض في المعادلة الاصلية.

$$4(\frac{9}{4}) + 3Y^2 = 12$$

$$3Y^2 = 3$$

$$Y = \pm 1$$

$$\therefore Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8(\frac{3}{2})}{6(1)} = -2$$

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8(\frac{3}{2})}{6(-1)} = 2$$

تمـــــاريـــــن (3)

1 - اوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للدالة f (X) حيث:

$$f(X) = \frac{5X}{X^2 + 1}$$

عند النقطة A(2,2)

2- اوجد Y' بفرض ان:

$$Y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \quad , \quad u = \sqrt[3]{X^3 + 2}$$

3 ـ اذا كان : $Y = X^2 - 4 \quad , \quad X = \sqrt{2t^2 + 1}$

فاوجد Y' عند $t = \sqrt{2}$

4 – تتحرك نقطة على مستوي وفقاً للمعادلات:

$$Y = 2t^3 - 6t$$
$$X = t^2 + 2t$$

اوجد Y' عند t=0,2,5

5 – استخدم قاعدة السلسلة لايجاد Y' في كل من :

(a) $Y = \frac{u - 1}{u + 1}, u = \sqrt{X}$

(b) $Y = u^3 + 4, u = X^2$

(c) $Y = \sqrt{1 + u}, u = \sqrt{X}$

6 –اوجد المشتقة الثانية في كل من:

$$Y = \sqrt{2 - 3X^2} \quad , \quad Y = \frac{X}{\sqrt{X - 1}}$$

7 – أوجد Y', Y'' في كل من:

(a) $X^2Y - XY^2 + X^2 + Y^2 = 0$

(b) $X^3 - 3XY + Y^3 = 1$

(c) $X + XY + Y = 2$

8- اوجد بطريقتين مختلفتين Y' في كل من:

$$X = \frac{1}{2 + Y} \quad , \quad X = (1 + 2Y)^3$$

9–اوجد Y' اذا كان: $X = \sqrt{1 - Y^2}$

10 - اوجد ميل المنحنى $X = Y^2 - 4Y$ عند نقطة تقاطعه مع المحور Y .

الدوال المتزايدة و الدوال المتناقصة

أولا: الدوال المتزايدة:-

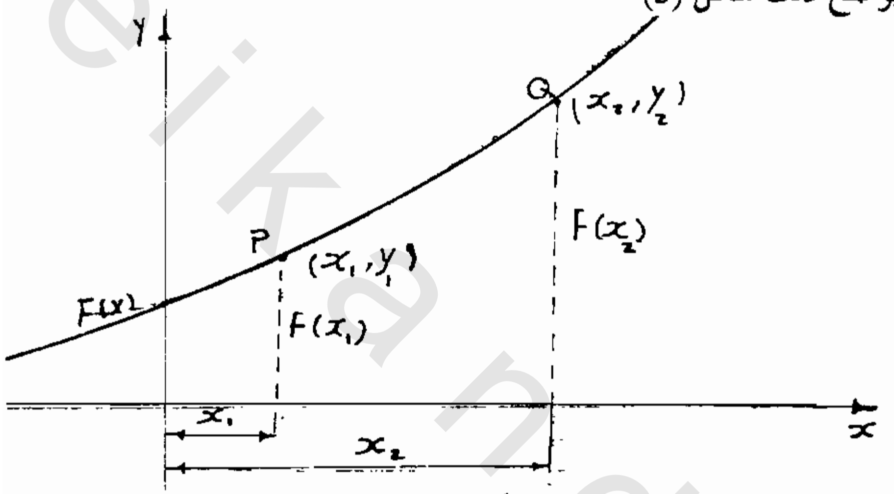
اذا كانت الدالة f(X) معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان

$X_2 > X_1, f(X_2) > f(X_1)$

تكون الدالة تزايدية ويكون ميل المماس للدالة موجبا أي

ان: $f'(X) > 0, X_2 \geq X \geq X_1$

ويوضح ذلك شكل (3)



شكل (3)

ثانيا: الدوال المتناقصة:-

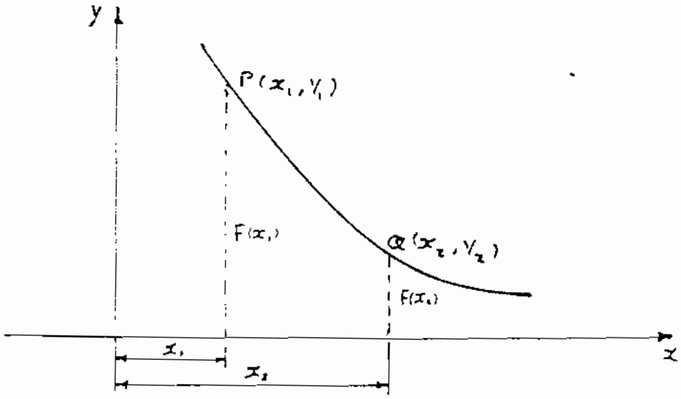
إذا كانت الدالة f(X) معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان:

$$X_2 > X_1, f(X_2) < f(X_1)$$

تكون الدالة تناقصية ويكون ميل المماس للدالة سالبا أي أن:

$$f'(X) < 0, X_2 \geq X \geq X_1$$

ويوضح ذلك شكل (4)



شكل (4)

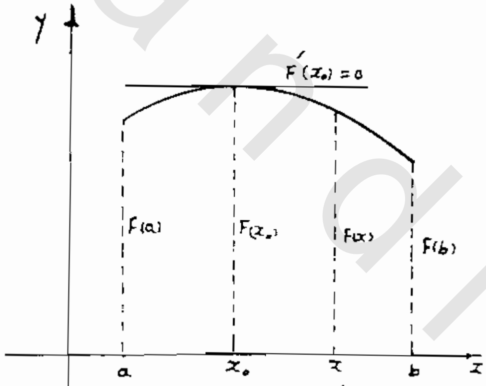
القيم العظمى والقيم الصغرى

اذا كانت f(X) دالة معرفة خلال الفترة I(a,b) فانه:

1 - عندما $F(X_0) \rangle F(X), X \in I$:-

تكون للدالة نهاية عظمى نسبية عند $X = X_0$ ويكون عندها $F'(X) = 0$.

شكل (5)

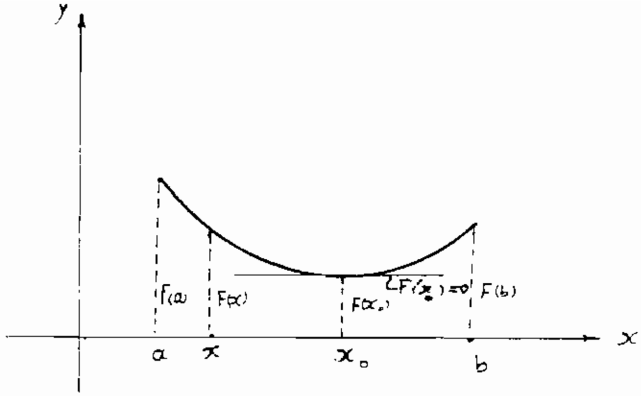


شكل (5)

2 - عندما $F(X_0) \langle F(X), X \in I$:-

تكون للدالة نهاية صغرى نسبية عند $X = X_0$ ويكون عندها $F'(X_0) = 0$

شكل (6)



شكل (6)

اختبار المشتقة الاولى:

1 -حل المعادلة $F'(X)=0$ للحصول على القيمة الحرجة

2-حدد مواضع القيم الحرجة على خط الاعداد مكونا بذلك عدد من الفترات

3-حدد اشارة $F'(X)$ في كل فترة

4-اجعل X تتزايد خلال الفترة مارة بالقيم الحرجة عند $X=X_0$ فيكون :-

(أ) لF(X) قيمة عظمى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من + إلي -

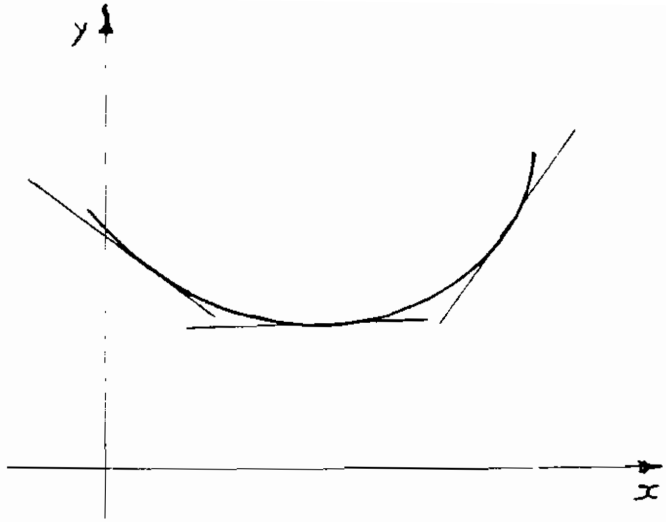
(ب) لF(X) قيمة صغرى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من - إلي +

(جـ) لا يكون ل F(X) قيمة عظمى او صغرى عند $X=X_0$ اذا لم تغير $F'(X)$ إشارتها

(د) يمكن للدالة Y=F(X) ان يكون لها قيمة عظمى او صغرى $F(X_0)$ مع ان $F'(X_0)$ ليست موجودة.

اتجاه انحناء المنحنى:

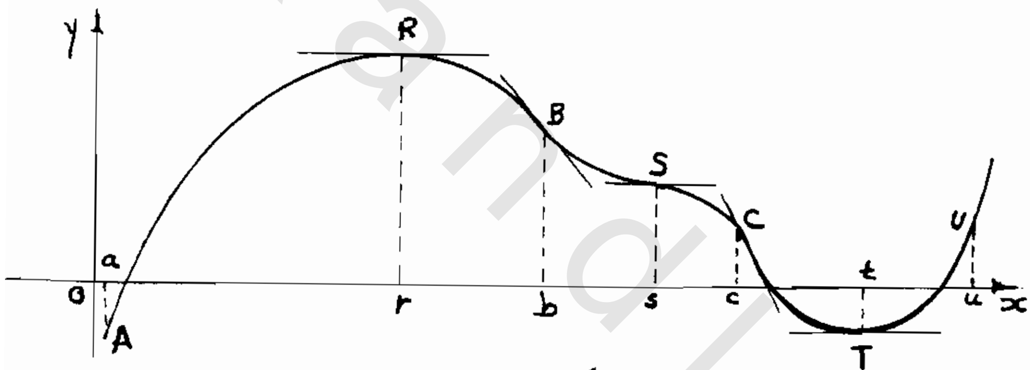
يكون المنحنى مقعرا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس المنحنى فوق مماسه عند كل نقاطه شكل (7)



شكل (7)

وبزيادة x فإما:

1– ان تحافظ $F'(X)$ على إشارتها وتكون تزايدية كما بالشكل (8) $b \langle X \langle s$

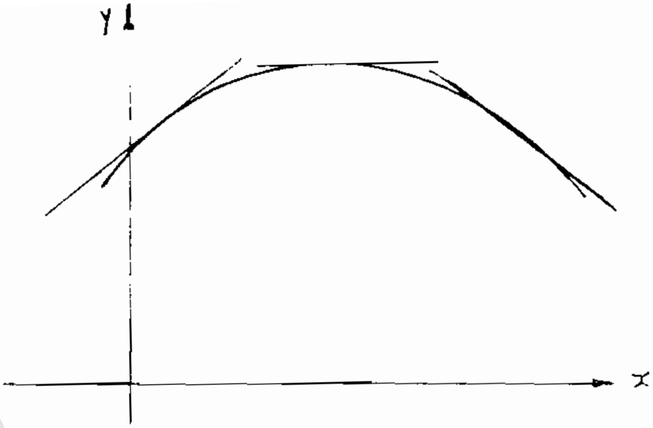


شكل (8)

2 – ان تغير $F'(X)$ اشارتها من السالبة إلي الموجبة كما بالشكل (8). $c \langle X \langle u$

وفي كلا الحالتين يكون $F'(X)$ متزايدا ، $F''(X) \rangle 0$

I– يكون المنحنى محدبا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس النحنى تحت مماسه عند كل نقاطه. شكل (9)



شكل (9)

وبزيادة قيمة X فاما:

1 - أن تحافظ $F'(X)$ على اشارتها وتكون متناقصة في الفترة $s\langle X\langle c$ شكل (8)

2- ان تغير $F'(X)$ اشارتها من الموجبة إلي السالبة . $a\langle X\langle b$ شكل (8)

وفي كلا الحالتين يكون الميل $F'(X)$ متناقص وتكون $F''\langle 0$

نقطة الانقلاب (نقطة الانعطاف):

عندما يتغير شكل المنحني من التقعر إلى التحدب او من التحدب إلى التقعر فان نقاط التغير هذه تسمى نقط انقلاب كما بالشكل (8) . النقط C,S,B

ويكون للمنحنى نقط انقلاب عند $X = X_0$ اذا:

1 –كانت $F''(X_0) = 0$ او انها غير معرفة.

2- غيرت $F''(X)$ اشارتها بزيادة X عبر X_0

الاختبار الثاني للقيم العظمى و الصغرى. (اختبار المشتقة الثانية:) : –

1 – حل المعادلة $F'(X) = 0$ لايجاد القيم الحرجة

2 - عند القيم الحرجة $X = X_0$ يكون:

لـــ F(X) قيمة عظمى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0)\langle 0$

لـــ F(X) قيمة صغرى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0)\rangle 0$

ويفشل الاختبار اذا كانت $F''(X_0) = 0$ او تكون غير محددة وفي هذه الحالة يجب استخدام طريقة المشتقة الاولى.

الخطوات المتبعة في رسم المنحنيات:

1 –يتم ايجاد المشتقة الاولى $F'(X)$ وذلك لتحديد النقاط الحرجة للدالة وكذلك فترات التزايد والتناقص.

2– يتم ايجاد المشتقة الثانية $F''(X)$ وذلك لتحديد النهايات العظمى والنهايات الصغرى النسبية ونقط الانقلاب.

3 - يتم ايجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحاور الرئيسية (وذلك بوضع X=0 لايجاد التقاطع مع المحور Y ، Y = 0 لايجاد التقاطع مع المحور x) وذلك بقدر المستطاع.

4- نختار قيما أخري للمتغير x ونعين قيمة y المناظرة.

5 - نرتب كل هذه النقاط في جدول ونرسم المنحنى المطلوب.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد الفترات المتزايدة والمتناقصة والنقاط الحرجة للدالة:

$$f(X) = X^3 - 3X + 3$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 3$$

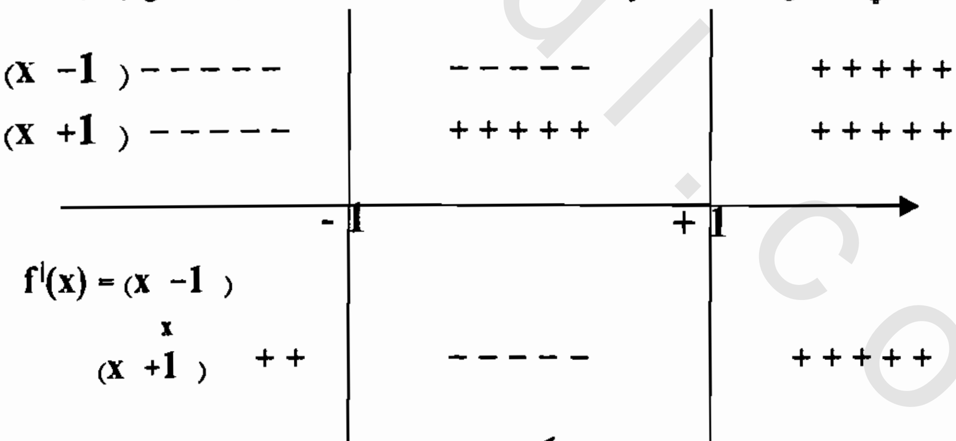
لإيجاد النقاط الحرجة :

$$\therefore \quad f'(X) = 0$$
$$\therefore 3X^2 - 3 = 0$$
$$3(X^2 - 1) = 0$$
$$(X - 1)(X + 1) = 0$$
$$\therefore X = 1, X = -1$$

يتم تقسيم خط الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات:

(- ∞ , 1 -) , (1 - , 1) , (1 و ∞)

ثم نوجد اشارة $f'(X)$ في الفترات الثلاث وفي كل فترة تكون إشارة $f'(X)$ هي حاصل ضرب إشارتي القوسين $(X-1),(X+1)$ كما في الشكل (10).



شكل (10)

نلاحظ من الشكل الأتي:

الفترة الاولى	$-1 > X > -\infty$	تكون الدالة تزايدية لان $f'(X) > 0$
الفترة الثانية	$1 > X > -1$	تكون الدالة تناقصية لان $f'(X) < 0$
الفترة الثالثة	$\infty > X > 1$	تكون الدالة تزايدية لان $f'(X) > 0$

احداثيات النقطة الحرجة :

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$$

النقطة الحرجة الأولى هي: A(1,1)

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$$

النقطة الحرجة الثانية هي: B(-1,5)

مثال 2 :

اختبر الدالة التالية من حيث القيم الصغرى والعظمى النسبية.

$$f(X) = \frac{1}{3}X^3 - 2X^2 + 3X + 1$$

الحل:

$$f'(X) = X^2 - 4X + 3$$

وعند القيم الحرجة (العظمى والصغرى) تكون $f'(X) = 0$

$$\therefore X^2 - 4X + 3 = 0$$
$$(X-1)(X-3) = 0$$
$$X = 1 \quad , \quad X = 3$$

وباستعمال المشتقة الاولى:

أولا: عند X=1 يتم اخذ قيم $X > 1, X < 1$:

$$1 - X < 1 \rightarrow f'(X) = (-)(-) = +$$

$$2 - X > 1 \rightarrow f'(X) = (+)(-) = -$$

أي أن $f'(X)$ غيرت اشارتها من + إلى -

وهذا يعني ان الدالة لها قيمة عظمى نسبية عند X=1 وقيمتها:

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$$

∴ احداثي القيمة العظمى النسبية هي:

$$(1, 2\ \frac{1}{3})$$

ثانيا: عند X=3يتم اخذ قيم : $X\langle 3 \quad , \quad X\rangle 3$

$$1- \quad X\langle 3 \rightarrow f'(X) = (+)(-) = -$$

$$2- \quad X\rangle 3 \rightarrow f'(X) = (+)(+) = +$$

أي ان $f'(X)$ غيرت اشارتها من - إلى +

وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى نسبية عند X=3 وقيمتها:

$$F(3) = \frac{1}{3}(27) - 2(9) + 3(3) = 1$$

∴ احداثي القيمة الصغرى النسبية هي: $(3,1)$

مثال 3 :

أوجد الفترات التي يكون فيها المنحنى للدالة:

$$f(X) = X^3 - 2X^2 + X + 1$$

له تقعر إلى أعلى والفترات التي يكون فيها له تقعر إلى اسفل

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 4X + 1$$

نستخدم المشتقة الثانية لإيجاد نقط الانقلاب وإيجاد المطلوب.

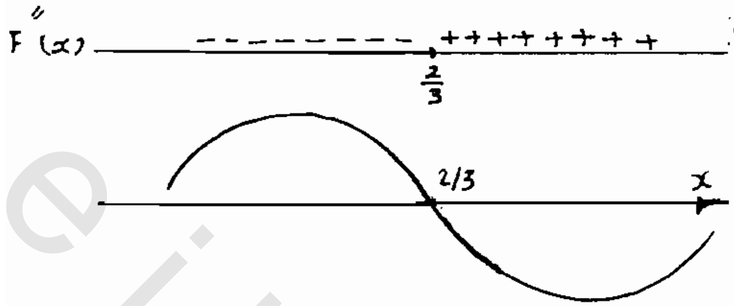
$$f''(X) = 6X - 4$$

عند نقط الانقلاب: $f''(X) = 0$

$\because 6X - 4 = 0$

$\therefore X = \frac{2}{3}$

نوجد إشارة $f''(X)$ عند $X\langle\frac{2}{3}, X\rangle\frac{2}{3}$ للكشف عن التقعر إلى أعلى او التقعر إلى اسفل(التحدب.



(شكل11)

$X\langle\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad f''(X) = -$

$X\rangle\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad f''(X) = +$

ويتضح من الشكل ان :فترات التحدب هي: $I_1\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

فترات التقعر هي : $I_2\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

حيث تسمى النقطة التي يغير عندها المنحني تقعره من اسفل إلى اعلى او العكس بنقطة الانقلاب.

مثال 4:

أوجد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة:

$f(X) = X^3 - 3X^2 + 5X + 1$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 6X + 5$$
$$f''(X) = 6X - 6$$

عند نقطة الانقلاب يكون $f''(X) = 0$

$$\therefore 6X - 6 = 0$$
$$X = 1$$
$X < 1 \quad \therefore f''(X)$ سالبة

$X > 1 \quad \therefore f''(X)$ موجبة

$\therefore$ تكون نقطة الانقلاب عند X=1 وقيمتها f(1) :

$$f(1) = 1 - 3 + 5 + 1 = 4$$

أي ان احداثي نقطة النقلاب هو (1,4)

مثال 5 :

باستخدام المشتقة الثانية اوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة:

$$f(X) = X^3 - 6X^2 + 1$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 12X$$

عند القيم الحرجة تكون $f'(X) = 0$

$$\therefore 3X^2 - 12X = 0$$
$$3X(X - 4) = 0$$

$\therefore$ القيم الحرجة تكون عند X=0 , X=4

لاختيار القيم العظمى والصغرى يتم التعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$$f''(X) = 6X - 12$$
$f''(0) =$ كمية سالبة

وحيث ان $f''(X)$ كمية سالبة فيوجد نهاية عظمى قيمتها f(0)

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

احداثي النهاية العظمى هو :A(0,1)

$f''(X) =$ كميةموجبة

وحيث $f''(X)$ كمية موجبة فيوجد نهاية صغرى قيمتها f(4)

$\therefore f(4) = 64 - 96 + 1 = -31$

احداثي النهاية الصغرى هو :B(4,-31)

مثال 6:

اختبر القيم العظمى والصغرى للدالة : $f(X) = (X-1)^3$

الحل:

$f'(X) = 3(X-1)^2$

عند القيم الحرجة $f'(X) = 0$

$(X-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad X = 1$

$f''(X) = 6(X-1)$

وبالتعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$\therefore f''(X) = 6(1-1) = 0$

وعلى ذلك لاتعطي الدالة نهاية عظمى او صغرى عند استخدام المشتقة الثانية.

فيجب استخدام المشتقة الأولى :

$X < 1 \quad \rightarrow \quad f'(X) > 0$

$X > 1 \quad \rightarrow \quad f'(X) > 0$

وبالتالي فان المشتقة الاولى $f'(X)$ لاتغير اشارتها عند $X > 1, X < 1$

∴ لا توجد نهاية عظمى او صغرى للدالة المذكورة.

مثال 7:

أوجد القيم العظمى و الصغرى النسبية للدالة :

$$Y = f(X) = X + \frac{1}{X}$$

مع رسم الدالة.

الحل:

$$\frac{dY}{dX} = 1 - \frac{1}{X^2}$$

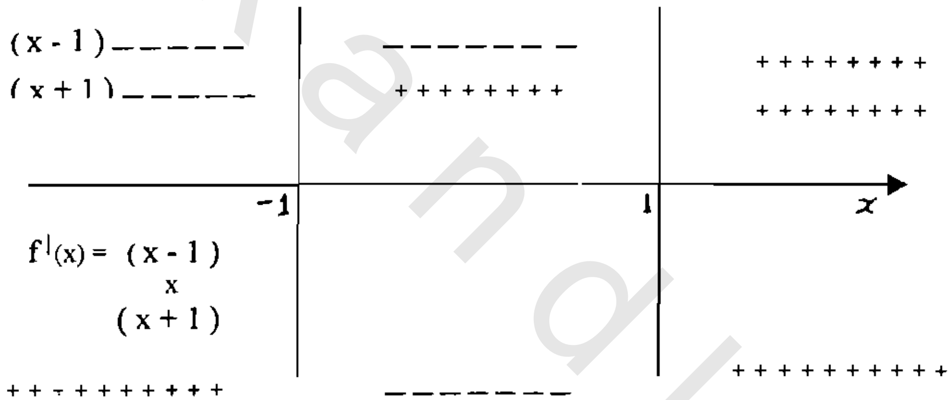
$$= \frac{X^2 - 1}{X^2} = \frac{(X-1)(X+1)}{X^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 2X^{-3} = \frac{2}{X^3}$$

للقيم الحرجة $\frac{dY}{dX} = 0$

$$\therefore X = 1, X = -1$$

نوقع القيم الحرجة على خط الاعداد. ثم نحدد اشارة الفترا ت (شكل 12)



شكل (12)

ولتسهيل الرسم:

يمكن اعتبار الدالة Y تتكون من منحنيين :

$$Y = Y_1 + Y_2$$

حيث : $Y_1 = \frac{1}{X}$

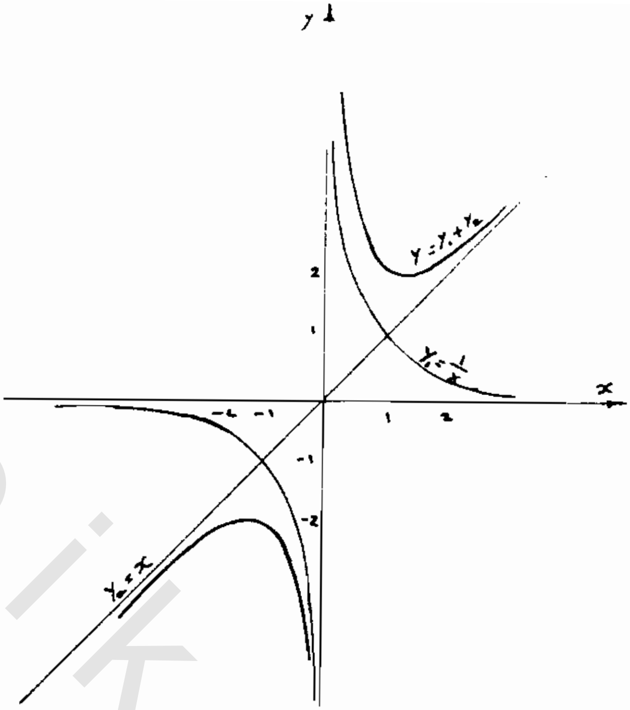
$Y_2 = X$

وبالتالي يمكن عمل الجدول الآتي (جدول 1)

ومن الجدول يتم رسم الدالة بيانيا (شكل 13)

x	Y_1	Y_2	Y	Y'	Y''	ملاحظات
-4	- 1/4	- 4	17 / 4 –	+	–	التقعر إلي أسفل
- 2	- 1/2	- 2	- 5 / 2	+	–	التقعر إلي أسفل
- 1	- 1	- 1	- 2	0	-2	قيمة عظمى
- 1/2	- 2	- 1/2	- 5 /2	–	–	التقعر إلي أسفل
- 1/4	- 4	- 1/4	- 17/4	–	–	التقعر إلي أسفل
1/4	4	1 /4	17 /4	–	+	التقعر إلي أعلى
1 /2	2	1 /2	5 /2	–	+	التقعر إلي أعلى
1	1	1	2	0	2	قيمة صغرى
2	1/2	2	5 / 2	+	+	التقعر إلي أعلى
4	1/4	4	17 / 4	+	+	التقعر إلي أعلى

جدول (1)



شكل (13)

تمـــــارين 4

1- إذا كانت : $f(X) = 3X^2 - X^3$

فاوجد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها الدالة متناقصة. ثم أوجد القيم العظمى و الصغرى.

2 - ارسم منحنى الدالة : $f(X) = \frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + 4X + 10$

3 -أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$f(X) = 3X^2 - 6X - 9$$

4- أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$f(X) = X^3 - 12X$$

5 - أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة f(X) :

$$f(X) = 8X / (4 + X^2)$$

6 -ارسم المنحنى f(X) حيث:

$$f(X) = \frac{1}{6}(X^3 - 6X^2 + 9X + 6)$$

و اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب.

7 - اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة f(:

$$f(X) = X^3 + X^2 - 5X$$

8 -اوجد النقاط الحرجة وفترات التزايد و التناقص والقيم العظمى والقيم الصغرى ونقط الانقلاب للدالة F(X) :

$$f(X) = 4X^3 - 3X^2 + 2$$

9 -اوجد القيم العظمى والصغرى وكذلك نقط الانقلاب للدالة f(X) :

$$(a) \quad f(X) = X^2 / (X + 1)$$

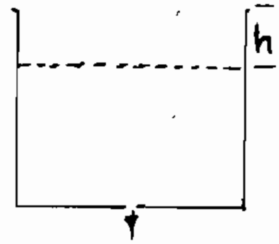
$$(b) \quad f(X) = \frac{3}{8}(X - 9)(X - 1)^{5/3}$$

تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

ثال 1:

اناء في وضع راسي يحتوي على سائل حجمه V يعطى بدلالة h بعد سطح السائل عن المستوي الافقي المار بالحافة العليا بالمعادلة: $V = 5h^2 - 5h + 3$. فإذا كان بقاعدة الاناء (شكل 14) ثقب يتسرب منه السائل بمعدل 10 وحدات مكعبة/ثانية وكان معدل زيادة h يساوي 3 وحدات مكعبة/ثانية. اوجد h في هذه اللحظة.

الحل:



$$V = 5h^2 - 5h + 3$$

$$\frac{dV}{dh} = 10h - 5 \text{..........}(1)$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{dh}$$

$$= (-10).(\frac{1}{3}) \text{..................}(2)$$

بمساواة المعادلة (1) بالمعادلة (2)

$$\therefore 30h - 15 = -10$$

$$30h = 5$$

$$h = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

مثال 2:

ab سلم منتظم طوله 50 قدم يرتكز بطرفه a على حائط راسي وبطرفه b على ارض افقية. فإذا تحرك الطرف b مبتعدا عن الحائط بسرعة مقدارها 3 قدم/دقيقة فاوجد: (شكل 15)

1- سرعة a عندما يبتعد الطرف b عن الحائط بمقدار 14 قدم

2- بعد b عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من a,b

3- بعد b عن الحائط عندما يتحرك a إلي اسفل بسرعة 4 قدم /دقيقة

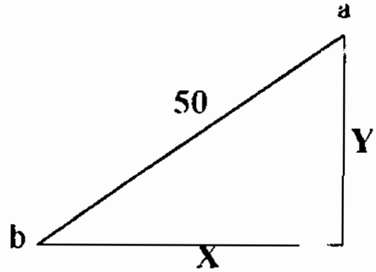
الحل:

$$l^2 = X^2 + Y^2$$

وباجراء التفاضل للطرفين بالنسبة للطرفين:

$$\therefore 2l \cdot \frac{dl}{dt} = 2X\frac{dX}{dt} + 2Y\frac{dY}{dt} \text{......}(1)$$

$$(0) = 2(14)\frac{dX}{dt} + 2\sqrt{50^2 - 14^2}\,\frac{dY}{dt}$$



شكل (15)

$$\frac{dX}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dY}{dt} = \frac{14(3)}{48} = \frac{14}{16}$$

2- $\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt}$

∴ بالتعويض في المعادلة رقم (1)

$$0 = 2(X) + 2\sqrt{50^2 - X^2}$$

$$\therefore X^2 = 50^2 - X^2$$

$$2X^2 = 50^2$$

$$\therefore \quad X = \frac{50}{\sqrt{2}}$$

iii- – بالتعويض في (1) عن $\frac{dX}{dt} = 3, \frac{dY}{dt} = 4$

$$\therefore 0 = X(3) + \sqrt{50^2 - X^2}(-4)$$

$$\frac{9X^2}{16} = 50^2 - X^2$$

$$25X^2 = 50^2(16)$$

$$X^2 = 100(16)$$

$$X = 40$$

مثال 3:

كرة حديدية قطرها 8 سم مغطاة بطبقة من الجليد. فإذا كان الجليد ينصهر

بمعدل $10cm^3/s$ فاوجد:

1 – سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون هذا السمك 2سم.

2 – سرعة تناقص مساحة سطح الجليد الخارجي عند نفس اللحظة.

الحل:

بفرض ان نصف قطر الكرة هو r ، سمك الجليد هو x فان الحجم الكلي V هو:

$$V=\frac{4}{3}\pi(r+x)^3$$
$$=\frac{4}{3}\pi(r^3+3rx^2+3r^2x+x^3)$$

فإذا كان حجم الكرة V_b

$$V_b=\frac{4}{3}\pi r^3$$

فان حجم الجليد $V_i=(V-V_b)$:

$$V_i=\frac{4}{3}\pi(3rx^2+3r^2x+x^3)$$

معدل انصهار الجليد

$$\frac{dV_i}{dt}=\frac{4}{3}\pi(3(2)(4)2\frac{dx}{dt})+3(16)\frac{dx}{dt}+3(2)^2\frac{dx}{dt})$$
$$10=\frac{4}{3}\pi(48\frac{dx}{dt}+48\frac{dx}{dt}+12\frac{dx}{dt})$$
$$\frac{30}{4\pi}=108\frac{dx}{dt} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{30}{132\pi}$$

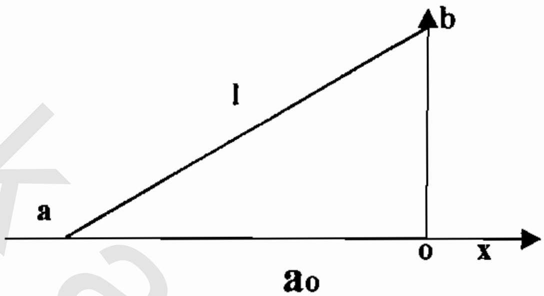
2 – بفرض ان المساحة السطحية هي A :

$$\therefore \quad A=4\pi(r+x)^2$$
$$\therefore \frac{dA}{dt}=4\pi(2)(r+x)\frac{dx}{dt}$$
$$=4\pi(2)(6)(\frac{30}{132\pi})=\frac{10}{3}\ cm^2/s$$

مثال 4:

في الساعة الثامنة صباحا شاهد شخص واقف في جزيرة سفينة تتحرك غربا بسرعة مقدارها 15 ميلا بحريا/ساعة وبعد ساعتين شاهد سفينة اخرى تتحرك بسرعة 60 ميل بحري/ساعة فاوجد سرعة تباعدهما عند الساعة الحادية عشر صباحا. شكل 16.

الحل:



شكل (16)

بفرض ان o هي نقطة الاصل وان a_0 موضع السفينة الاولى بعد ساعتين

$$\therefore 0a_0 = 2(15) = 30$$

نفرض ان a موضع السفينة بعد t من الساعات من مرور السفينة الثانية بالنقطة o، و ان b موضع السفينة الثانية في هذه اللحظة:

$$0a = 0a_0 + a_0a$$
$$= 30 + 15t$$
$$0b = 60t$$

فإذا كان البعد بين السفينتين عند اللحظة $t = ab = l$

$$\therefore \overline{ab}^2 = \overline{0a}^2 + \overline{0b}^2$$

$$\therefore \quad l^2 = (30+15t)^2 + (60t)^2$$

$$= 3825t^2 + 900t + 900 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبإجراء التفاضل:

$$\therefore 2l\frac{dl}{dt} = 7650t + 900$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{7650t + 900}{2l}$$

وبالتعويض عن t=1 في المعادلة رقم (1)

$$\therefore \ l^2 = 3825 + 900 + 900 = 5625$$

$$\therefore \quad l = 75$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = \frac{7650 + 900}{2(75)} = \frac{8550}{150}$$

=57 mil/h

تمـــــاريـــــن (5)

1 - اوجد عددان مجموعها 20 وحاصل ضربهما اكبر مايمكن.

2 – نريد ان نصنع علبة مربعة القاعدة ومفتوحة من اعلى تتسع $0.032m^3$ اوجد ابعاد العلبة التي تتطلب اقل كمية من المادة اهمل سمك المادة وما يتلف اثناء التصنيع.

3 – قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه 9سم ونصف قطر قاعدته 6سم بحيث يكون محوريهما راسيين وراس المخروط لاسفل يصب في القمع سائل بمعدل $25cm^3/s$ اوجد معدل ارتفاع سطح السائل إلى نصف ارتفاع القمع ثم اوجد المعدل الذي يزداد به نصف قطر السائل في القمع تلك اللحظة.

4 – صفيحة من القصدير مربعة الشكل طول ضلعها a تستعمل هذه الصفيحة لصنع علبة مفتوحة من .على وذلك بان يقطع منها مربع صغير من كل ركن من اركانها الاربعة. ثم تثنى الاطراف كم ينبغي ان يكون المربع المقطوع من كل ركن كي نحصل على اكبر حجم ممكن للعلبة.

5 – المطوب تصنيع علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة تتسع $100cm^3$ ما هي ابعاد العلبة كي تستهلك اقل كمية من المادة

6 – سلك طوله l نرغب ان نقطعه إلي قطعتين نثني الاولى على شكل دائرة ونثني الثانية على شكل مربع. كيف ينبغي ان نقطع السلك كي يكون مجموع المساحتين اللتين تحددهما القطعتان اكبر ما يمكن.

7 – نرغب ان نبني مخزنا مفتوحاً من اعلى، مربع القاعدة وجدرانه رأسية بكمية معينة من مواد البناء بين كم ينبغي ان تكون ابعاد هذا المخزن كي نحصل على اكبر حجم ممكن مع اهمال سمك المادة وما يتلف اثناء البناء.

اشتقاق الدوال المثلثية

عرفنا فيما سبق النسب المثلثية والتطبيقات المرتبطة بها والان سوف ندرس قواعد الاشتقاق لها.

قواعد الاشتقاق:

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فان:

(1) $\dfrac{d}{dX}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dX}$

(2) $\dfrac{d}{dX}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dX}$

(3) $\dfrac{d}{dX}\tan u = \sec^2 u\dfrac{du}{dX}$

(4) $\dfrac{d}{dX}\cot u = -\csc^2 u\dfrac{du}{dX}$

(5) $\dfrac{d}{dX}\sec u = \sec u \tan u\dfrac{du}{dX}$

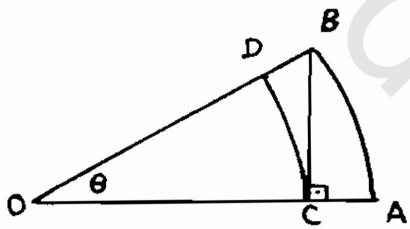
(6) $\dfrac{d}{dX}\csc u = -\csc u \cot u\dfrac{du}{dX}$

مثال 1:

اثبت ان : $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

الحل :

نعتبر القطاع الدائري AOB ذو زاوية مركزية θ صغيرة وموجبة ونصف قطر دائرة القطاع OA=1 (شكل 17).



شكل (17)

من الشكل يتضح ان :

مساحة القطاع OAB اكبر من مساحة $OAB\Delta$ القائم في C اكبر من مساحة القطاع الدائري OCD. وحيث ان زاوية θ صغيرة يكون بمقارنة المساحات:

$AOB \geq COB \geq OCD$ مساحة

$$\frac{1}{2}\theta \geq \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \geq \frac{1}{2}\theta\cos\theta^2$$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}\theta\cos\theta$ واخذ النهاية عندما $\theta \leftarrow 0$:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos B} \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0}\cos\theta$$

$$1 \geq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geq 1$$

وبالتالي يجب ان تكون:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(يمكن للدارس ان يصل إلي هذه النتيجة بطريقة الاقتراب من جهتي $\theta = 0$ أي من جهة يمين $\theta = 0$ ومن جهة يسار $\theta = 0$)

مثال 2 :

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـــ X اثبت ان:

$$\frac{d}{dX}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dX}$$

الحل : بفرض أن : -

$$Y = \sin u$$

$$Y + \Delta Y = \sin(u + \Delta u)$$

$$\therefore \quad \Delta Y = \sin(u + \Delta u) - \sin u$$

$$= 2\cos(u + \frac{1}{2}\Delta u)\sin\frac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \cos(u + \frac{1}{2}\Delta u)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= \cos u$$

وباستخدام قاعدة السلسلة :

$$\frac{dY}{dX}=\frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dX}$$

$$\frac{d}{dX}\sin u=\cos u\frac{du}{dX}$$

مثال 3:

اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y=3\sin X+4\cos X$$

الحل:

$$Y'=3\cos X+4(-\sin X)$$
$$=3\cos X-4\sin X$$

أمثلة محلوله

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

1- $Y=4\cos\frac{X}{3}$

2- $Y=\tan^2 3X$

3- $Y=\tan^2(\cos X)$

4- $Y=(\csc X+\cot X)^2$

5- $Y=\sqrt{\cot x}$

6- $Y=\frac{\cos 4x}{1-\sin 4x}$

7- $Y=\sin(X+Y)$

الإجابة

1- $Y = 4\cos\dfrac{X}{3}$

$Y' = 4(-\sin\dfrac{X}{3})\cdot\dfrac{1}{3} = -\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{X}{3}$

2- $Y = \tan^2(3X)$

$= (\tan 3X)^2$

$Y' = 2(\tan 3X).\sec^2 3x.3$

$= 6\tan 3X.\sec^2 3X$

3- $Y = \tan^2(\cos X)$

$= (\tan(\cos X))^2$

$Y' = 2(\tan(\cos X))(\sec^2(\cos X)).(-\sin X)$

$= -2\sin X\tan(\cos X).\sec^2(\cos X)$

4- $Y = (\csc X + \cot X)^2$

$Y' = -2(\csc X + \cot X)(\csc X\cot X + \csc^2 X)$

5- $Y=\sqrt{\cot X}$

$$Y'=\frac{-\csc^2 X}{2\sqrt{\cot X}}$$

6- $Y=\dfrac{\cos 4X}{1-\sin 4X}$

$$Y'=\frac{(1-\sin 4X)(-4\sin 4X)-\cos 4X(-4\cos 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4(-\sin 4X+\sin^2 4X)+\cos^2 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4(1-\sin 4X)}{(1-\sin 4X)^2}$$

$$=\frac{4}{1-\sin 4X}$$

7- $Y=\sin(X+Y)$

$$Y'=\cos(X+Y)(1+Y')$$

$$Y'(1-\cos(X+Y))=\cos(X+Y)$$

$$\therefore \quad Y'=\frac{\cos(X+Y)}{1-\cos(X+Y)}$$

تمـــــاريـــن 6

I – اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية : -

1 – $Y = \sin^2 X$

2 – $Y = 3\sin 2X$

3 – $Y = \cos \dfrac{3}{X}$

4 – $Y = 5\cos \dfrac{1}{2}X$

5 – $Y = \dfrac{1}{3}\sec^3 X$

6 – $Y = \tan 3X$

7 – $Y = \tan^2(3X - 2)$

8 – $Y = \cot 8X$

9 – $Y = X - \tan X$

10 – $Y = \sec \dfrac{1}{3X}$

11 – $Y = \cos(1 - X^2)$

12 – $Y = \cos(1 - X)^2$

13 – $Y = \sec^2 X - \tan^2 X$

14 – $Y = \cot^3(3X - 1)$

15 – $Y = \csc(X^4 - 4)$

16 – $Y = \tan \sqrt[3]{5 - 6X}$

17 – $Y = \sin \sqrt{X} + \sqrt{\sin X}$

18 – $Y = (\tan 2X - \sec 2X)^3$

19 – $Y = X^2 \sec^3 4X$

20 – $Y = \tan^3 X.(X)$

21 – $Y = \tan^2 X \sec^3 X$

22 – $Y = 4X^3 - X^2 \cot^3(\dfrac{1}{X})$

23 – $Y = \dfrac{\csc 3X}{X^3 + 1}$

24 – $Y = \dfrac{\sec 2X}{\tan 2X + 1}$

25 – $\sin Y + \cos X = 1$

26 – $f(X) = \sin X \cos 3X$

27 – $\sin X = \cos 2X$

28 – $X \cos Y = \sin(X + Y)$

II – اوجد المشتقة الثانية للدوال التالية :–

1 – $Y = \sec^2 3X$

2 – $Y = \sin X - X\cos X$

3 – $Y = \sqrt{\tan X}$

4 – $Y = \cot^3 5X$

5 – $Y = \dfrac{\cos X - 1}{\cos X + 1}$

الدوال المثلثية العكسية

اذا كانت X=sinY فان الدالة العكسية تكون: $Y = \sin^{-1} X$ (شكل 18).

فيكون المجال (الحيز): $-1 \le X \le 1$

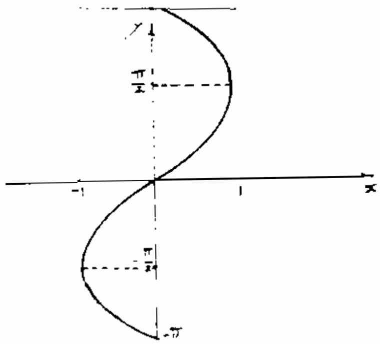
والمدى: مجموعة الأعداد الحقيقية .

ويبين الجدول التالي رقم (2) بعض الدوال المثلثية العكسية.

F(Y)=X

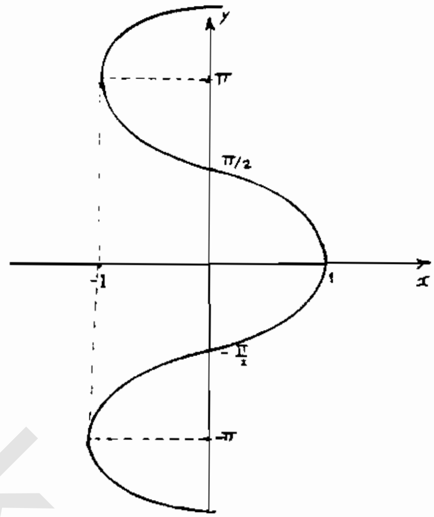
	$\sin^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$\tan^{-1} x$	$\cot^{-1} x$
التعريف	X = sin y	X= cos y	X= tan y	X=cot y
المجال	$-1< x <1$	$-1< x <1$	$-\infty<x<\infty$	$-\infty<x<\infty$
المدى	$-\pi/2<y<\pi/2$	$\pi \ge y \ge 0$	$-\pi/2<y<\pi/2$	$\pi>y>0$

جدول (2)



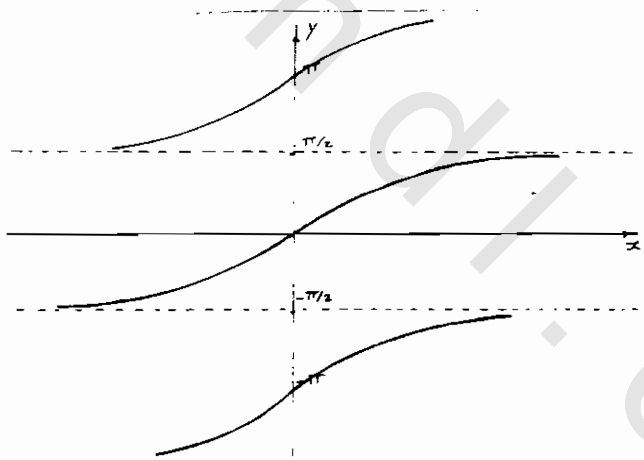
شكل (18)

الدالة : $y. = Cos^{-1}\ x$. شكل (19)



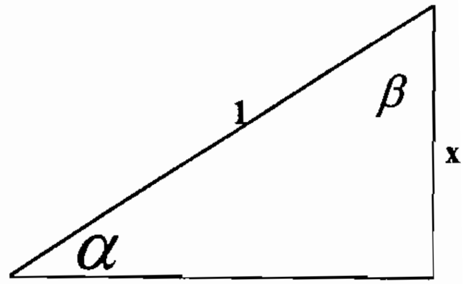
شكل (19)

الدالة : $y. = Tāh^{-1}\ x$. شكل (20)



شكل (20)

العلاقة بين β,α (شكل 21):



شكل (21)

$$\sin\alpha = X = \cos\beta$$
$$\therefore\ \alpha = \sin^{-1} X$$
$$B = \cos^{-1} X$$
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$
$$B = \frac{\pi}{2} - \alpha$$
$$\cos^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} X$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان:

$$\cot^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} X$$
$$\sec^{-1} X = \cos^{-1}\left(\frac{1}{X}\right)$$
$$\csc^{-1} X = \sin^{-1}\left(\frac{1}{X}\right)$$

والمدى الخاص بهم من الجدول السابق حيث:

$$0 \le \sec^{-1} X \le \pi \quad , \quad \pi \ge \cot^{-1} X \ge 0$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \csc^{-1} X \le \frac{\pi}{2}$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية:

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـــ x فان:

$$1-\quad \frac{d}{dX}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

$$2-\quad \frac{d}{dX}\cos^{-1}u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

$$3-\quad \frac{d}{dX}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dX}$$

$$4-\quad \frac{d}{dX}\cot^{-1}u=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dX}$$

$$5-\quad \frac{d}{dX}\sec^{-1}u=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dX}$$

$$6-\quad \frac{d}{dX}\csc^{-1}u=-\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dX}$$

طريقة استنتاج المشتقة :

بفرض ان: sinY=u

$$\therefore \cos Y\cdot\frac{dY}{dX}=\frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{1}{\cos Y}\frac{du}{dX}$$

وحيث أن :

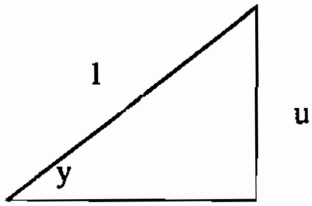
$$\sin^{-1}u=Y$$

$$\therefore \frac{d}{dX}\sin^{-1}u=\frac{dY}{dX}$$

$$=\frac{1}{\cos Y}\frac{du}{dX}$$

ومن هندسة الشكل يمكن ايجاد

قيمة cosY .(الشكل 22)



شكل (22)

وحيث ان: $-\frac{\pi}{2} \le Y \le \frac{\pi}{2}$

فتكون الزاوية Y في الربع الأول أو الرابع

$\therefore \cos Y$ غير سالبة

$$\therefore \frac{d}{dX}\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dX}$$

لاثبات القاعدة 5 :

بفرض ان : $Y = \sec^{-1} u$

$$\therefore \sec Y = u$$

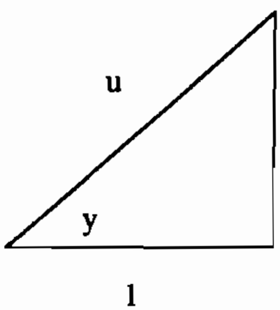
بتفاضل طرفي المعادلة

$$\therefore \sec Y \tan Y \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sec Y \tan Y}\frac{du}{dX}$$

ومن هندسة الشكل يمكن ايجاد قيمة $\tan Y$

شكل 23.



شكل (23)

$$\therefore \tan Y = \pm\sqrt{u^2 -}$$

وحيث ان : $\pi \ge Y \ge 0$

$$\therefore \tan Y = +\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \ge Y \ge 0$$

$$\tan Y = -\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \pi \ge Y \ge \frac{\pi}{2}$$

وبصفة عامة يكون :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{u(\pm\sqrt{u^2 - 1})} \frac{du}{dX}$$

$$\frac{d}{dX} \sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$$

أمثلـــــة محلـــولـــــه

اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$

2- $Y = \tan^{-1} X^2$

3- $Y = \tan^{-1}(\sin X)$

4- $Y = \dfrac{1}{\sin^{-1} X}$

5- $Y = (\sec^{-1} \sqrt{X})(\sqrt{X})$

6- $Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$

الإجابة

1 – $Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$

$$Y' = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1-9X^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$$

2 – $Y = \tan^{-1} X^2$

$$Y' = \frac{2X}{1+X^4}$$

3 – $Y = \tan^{-1}(\sin X)$

$$Y' = \frac{1}{1+\sin^2 X}(\cos X)$$

4 – $Y = \dfrac{1}{\sin^{-1} X}$

$$Y' = -1(\sin^{-1} X)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$= -\frac{1}{(\sin^{-1} X)^2\sqrt{1-X^2}}$$

5 – $Y = (\sec^{-1}\sqrt{X})(\sqrt{X})$

$$Y' = \sec^{-1}\sqrt{X} \cdot \frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X}\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{X}}}{\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

$$= \frac{\sec^{-1}\sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + \frac{1}{2\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

6 – $Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$

$$2YY'\sin X + Y^2\cos X + Y' = \frac{1}{1+X^2}$$

$$Y'(2Y\sin X + 1) = \frac{1}{1+X^2} - Y^2\cos X$$

$$= \frac{1-(1+X^2)Y^2\cos X}{1+X^2}$$

$$Y' = \frac{1-(1+X^2)Y^2\cos X}{(2Y\sin X + 1)(1+X^2)}$$

تمـــــاريـــــن 7

١- اوجد قيمة المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y = \sin^{-1}(8X+3)$

2- $Y = (\cot^{-1}(3X+1))^3$

3- $Y = X^2 \csc^{-1} 5X$

4- $Y = \tan^{-1}(\sin 2X)$

5- $Y = X^2 + X \sin^{-1} X$

6- $Y = (1+\cos^{-1} 3X)^3$

7- $Y = \sec^{-1} X^2$

8- $Y = \cos^{-1} 5X$

9- $Y = \tan^{-1}(3X-5)$

10- $Y = \sec^{-1}\sqrt{X^2-1}$

11- $Y = \cot^{-1}\dfrac{1+X}{1-X}$

12- $Y = X \csc^{-1}\dfrac{1}{X} + \sqrt{1-X^2}$

13- $Y = (\dfrac{1}{X} - \sin^{-1}\dfrac{1}{X})^4$

14- $Y = \tan^{-1}\dfrac{X+1}{X-1}$

15- $Y = \tan^{-1}(\ln X^2)$

16- $Y = X \sin^{-1}(3X)$

17- $Y = \tan^{-1} e^{3X}$

I- احسب قيمة كل من:

18 – $\sin^{-1}\frac{1}{2}$

19 – $\cot^{-1}1$

20 – $\tan^{-1}(-1)$

21 – $\csc^{-1}1$

22 – $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

23 – $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

اشتقاق الدوال الآسية و اللوغاريتمية

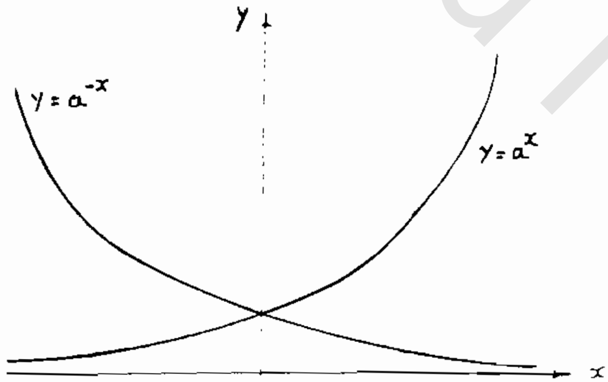
نعلم ان:

1 - اذا كان $a^{Y} = X, a \neq 1, a > 0$ فان :

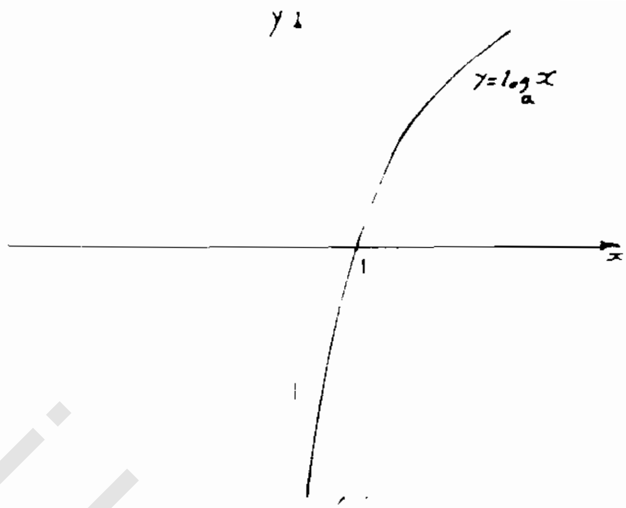
$Y = \log_a X$, $Y = \log_{10} X = \log X$

$, Y = \log_e X = \ln X$

2 – الدوال اللوغارتمية معكوس الدوال الآسية وهذا ما يوضحه شكل (24) وشكل(25)



شكل (24)



شكل (25)

قواعد الاشتقاق :

اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسنة ل x فان:

$$I)\quad \frac{d}{dX}\log_a u=\frac{1}{u}\log_a e\frac{du}{dX}$$

$$II)\quad \frac{d}{dX}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dX}$$

$$III)\quad \frac{d}{dX}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dX}$$

$$IV)\quad \frac{d}{dX}e^u=e^u\frac{du}{dX}$$

امثلة محلولة

1 - اوجد المشتقة الاولى لكل مما يأتي:-

$(a)\quad Y = \log_a(3X^2 - 5)$

$(b)\quad Y = \ln(X+5)^2$

$(c)\quad Y = \ln(X^3+2)(X^2+3)$

$(d)\quad Y = \ln(X = \sqrt{1+X^2})$

الإجابة

$$(a)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{1}{3X^2-5}\log_a e \frac{d}{dX}(3X^2-5)$$

$$= \frac{1}{3X^2-5}(\log_a e)(6X)$$

$$(b)\quad \frac{d}{dX}Y = \frac{2}{X+5}\frac{d}{dX}(X+5)$$

$$= \frac{2}{X+5}$$

$$(c)\quad Y = \ln(X^3+2)(X^2+3)$$

$$= \ln(X^3+2) + \ln(X^2+3)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{X^3+2}\frac{d}{dX}(X^3+2) + \frac{1}{X^2+3}\frac{d}{dX}(X^2+3)$$

$$= \frac{3X^2}{X^3+2} + \frac{2X}{X^2+3}$$

$$(d)\quad \frac{dY}{dX} = \frac{1+\frac{1}{2}(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}(2X)}{X+\sqrt{1+X^2}} \cdot \frac{X-\sqrt{1+X^2}}{X-\sqrt{1+X^2}}$$

$$= \frac{X-\sqrt{1+X^2}+X^2(1+X^2)^{-\frac{1}{2}}-X}{X^2-(1+X^2)}$$

$$= +\sqrt{1+X^2} - \frac{X^2}{\sqrt{1+X^2}}$$

2 – اثبت ان:–

$$(a) \quad \frac{d}{dX}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dX}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dX}e^u = e^u \frac{du}{dX}$$

الإجـــابـــــة

بفرض ان $Y = a^u$ وباخذ لوغاريتم الطرفين

$$(a) \quad \ln Y = u \ln a$$

وبإجراء التفاضل للطرفين بالنسبة لـX

$$\therefore \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = \ln a \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dX}$$

بفرض ان

$$(b) \quad Y = e^u$$

$$\ln Y = u$$

باجراء التفاضل للطرفين بالنسبة ل X :

$$\therefore \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = Y\frac{du}{dX}$$

$$= e^u \frac{du}{dX}$$

3 -أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي : –

$(a) \quad Y = e^{-\frac{1}{2}X}$

$(b) \quad Y = e^{X^3}$

$(c) \quad Y = a^{nX}$

$(d) \quad Y = \ln X^n$

$(e) \quad Y = \ln \sqrt{X}$

$(f) \quad Y = X^X$

الإجابـــــة

$(a) \quad Y = e^{-\frac{1}{2}X}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{-\frac{1}{2}X}\frac{d}{dX}(-\frac{1}{2}X) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}X}$$

$(b) \quad Y = e^{X^3}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{X^3}\frac{d}{dX}X^3 = 3X^2e^{X^3}$$

$(c) \quad Y = a^{nX}$

بأخذ لوغاريتم الطرفي

$$\therefore \quad \ln Y = nX\ln a$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = n\ln a$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = Yn\ln a = na^{nX}\ln a$$

$(d) \quad Y = \ln X^n$

$$= n\ln X$$

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = n\frac{1}{X}$$

$(e) \quad Y = \ln\sqrt{X}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sqrt{X}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2X}$$

$(f) \quad Y = X^X$

باخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln Y = X\ln X$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة X :

$$\therefore \quad \frac{1}{Y}\frac{dY}{dX} = X(\frac{1}{X}) + \ln X$$

$$\frac{dY}{dX} = Y(1 + \ln X)$$

$$= X^X(1 + \ln X)$$

تمـــــارين 8

أجد المشتقة الأولى للدوال الآتية : -

1) $Y = \ln(X^2 + 2X)$

2) $Y = (\ln X)^3$

3) $Y = \ln(\cos X)$

4) $Y = X \ln X - X$

5) $Y = \ln(X\sqrt{X^2 + 1})$

6) $Y = \ln \dfrac{1 + X}{1 - X}$

7) $Y = \ln(\ln X)$

8) $Y = \log_a(\sqrt[3]{(2X + 5)^2})$

9) $Y = e^{x^2} / (2X - 5)$

10) $Y = a^{x^2}$

11) $Y = e^{x^3}$

12) $Y = e^{\sqrt{x}}$

13) $Y = 6Xe^{x^2 - 1}$

14) $Y = e^{\sin x}$

15) $Y = e^{\sqrt{3x - 2}}$

16) $Y = e^{x^3 + 3x}$

17) $Y = e^{x} - e^{-x}$

18) $Y = e^{x} / X$

19) $Y = 3e^{\tan x^2}$

20) $Y = \ln(\cos e^{5x})$

21) $Y = (\cos X)e^{3x^2}$

22) $Y = \ln(x \sin X)$

23) $Y = \ln(\tan 3X)$

24) $Y = \ln \dfrac{5X}{1 - X^2}$

25) $Y = \ln(\sec^2 X)$

26) $Y = \log(4X - 3)$

27) $Y = (\ln X)(\sin X)$

28) $Y = \ln(X^3 - 1)^{1/3}$

29) $Y = \ln(X^3 \cos 2X)$

30) $Y = \ln(\ln X)$

قانون القيمة المتوسطة

نظرية رول:

اذا كانت F(X) دالة متصلة في الفترة $b \geq X \geq a$ وقابلة للاشتقاق وكان

$f(a) = f(b) = 0$ فانه:

يوجد على الأقل عدد واحد X_0 بين a,b تكون فيه $f'(X_0) = 0$

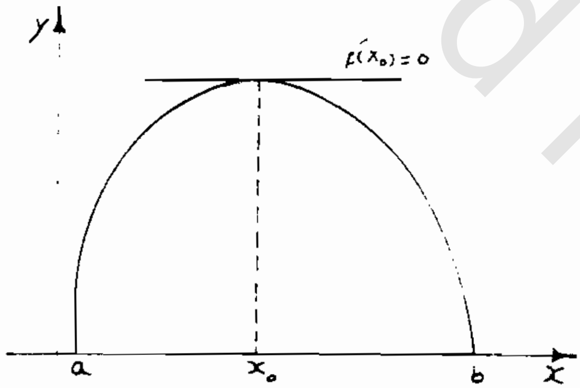
البرهان:

اما ان تكون f(X) مطابقة للصفر لجميع قيم $X(b > X > a)$ او ان تكون مختلفة عن الصفر لبعض قيم X في هذا المجال.

ففي الحالة الاولى يكون $f'(X)$ مطابقا للصفر والنظرية صحيحة في هذه الحالة.

اما في حالة ان تكون f(X) مختلفة عن الصفر لبعض قيم X في هذا المجال. فهي اما موجبة وتكون في المواضع الاخرى سالبة او العكس.

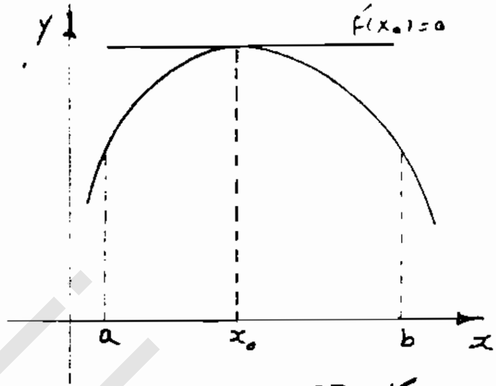
أي ان للدالة قيمة عظمى موجبة او قيمة صغرى سالبة أو كلا الآمرين بين a,b اذا يوجد على الأقل قيمة ل X بين $X = X_0 a,b$ عندها يكون $f'(X_0) = 0$ شكل (26).



شكل (26)

نتيجة :

اذا حققت الدالة f(X) شروط نظرية رول ولكن $f(a) = f(b) \neq 0$ تكوِن ايضا $f'(X_0) = 0$ شكل (27)



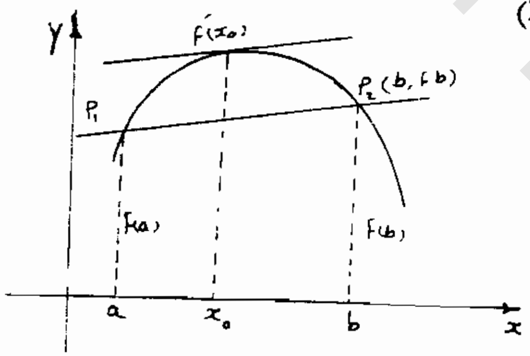
شكل (27)

قانون القيمة المتوسطة:

إذا كانت f(X) متصلة في الفترة $a \leq X \leq b$ وكانت f(X) موجودة عند كل موضع في هذه الفترة باستثناء نهايتي الفترة على الاكثر. فعندئذ يوجد على الاقل قيمة واحدة $X = X_0$ يكون عندها:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X_0)$$

وهذا ما يوضحه شكل (28)



شكل (28)

ففي الشكل (28):

$f(X)$ منحنى متصل له مماس عند جميع نقاطه

P_1, P_2 نقطتين على المنحنى.

يكون ميل P_1P_2 مساويا الميل عند X_0

صيغ القانون:

$$I-\quad f(b)=f(a)+(b-a)f'(X_0) \qquad , \quad b>X_0>a$$

$$II-\quad f(X)=f(a)+(X-a)f'(X_0) \qquad , \quad X>X_0>a$$

$$III-\quad f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \qquad , \quad 0<\theta<1$$

$$IV-\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \qquad , \quad b-a=h$$

$$V-\quad f(X+\Delta X)=f(X)+\Delta X(X+\theta\Delta X)$$

مثال 1 :

أوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول لكل مما يأتي:-

(a) $f(X)=X^3-12X \;,\; 0\le X\le 2\sqrt{3}$

(b) $f(X)=\sin X \;,\; 0\le X\le \pi$

الإجـــابـــــة

(a) $f'(X)=3X^2-12$

$f'(X)=0$

$\therefore\; 3X^2-12=0$

$X^2-4=0$

$X=\pm 2$

$\therefore\; X=X_0=2$

(b) $f(X)=\sin X$

$f'(X)=\cos X$

$f'(X)=0$

$\therefore\; X=(2n+1)\frac{\pi}{2},\; n\in Z$

$X=X_0=\frac{\pi}{2}$

مثال 2:

أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من :-

$$(a) \quad f(X)=X^3, 0 \le X \le 6$$

$$(b) \quad f(X)=\ln X, 1 \le X \le 2e$$

الإجــــابــة

$(a) \quad a = 0 \quad, b = 6$

$f'(X) = 3X^2$

$f'(X_0) = 3X_0^2$

$f(a) = f(0) = 0$

$f(b) = f(6) = 6^3$

$b - a = 6$

$f(b) = f(a) + (b-a)f'(X_0)$

$\therefore 6^3 = 0 + 6(3X_0^2)$

$X_0 = 2\sqrt{3}$

$(b) \quad a = 1 \quad , \quad b = 2e$

$\therefore f(a) = f(1) = 0$

$f(b) = f(2e) = 1 - \ln 2$

$b - a = 2e - 1$

$$f'(X) = \frac{1}{X}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{X_0}$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(X_0)$$

$$1 + \ln 2 = 0 + (2e-1)\frac{1}{X_0}$$

$$X_0 = \frac{2e-1}{1+2\ln 2}$$

مثال 3:

استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية $\sqrt{15}$

الحل : –

$$b = 15 \quad , \quad a = 16$$

$$f(X) = \sqrt{X}$$

$$f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{X_0}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = 0.125$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(X_0)$$

$$\sqrt{15} = 4 - 1(0.125)$$

$$= 3.875$$

تمـــــارين 9

1- اوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول بفرض ان:

$$(a) \quad f(X) = X^2 - 4X + 2 \quad , \quad 1 \le X \le 3$$

$$(b) \quad f(X) = \sin X \quad , \quad 0 \le X \le \pi$$

$$(c) \quad f(X) = \cos X \quad , \quad \frac{\pi}{2} \le X \le \frac{3\pi}{2}$$

2 –هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين الاتيتين:–

$$(a) \quad f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X - 2}$$

$$(b) \quad f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X + 2}$$

3-ا وجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة اذا كانت:

$a = 1 \quad , \quad b = 3$

$f(X) = 3X^2 + 4X - 3$

4- استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لكل من :

$\sqrt{15}, (3,001)^3, \frac{1}{999}, \sqrt[6]{65}$

5 – المطلوب توسيع ثقب دائري في قطعة معدنية قطرها 10 سم وعمقها 30سم ليصبح قطرها 10.3 احسب كمية المعدن الذي تزيله من القطعة.

6 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X} < \ln(1+X) < X$$

وذلك عند $1 < X < 0$ وعند $X > 0$

7 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\sqrt{1+X} < 1 + \frac{1}{2}X$$

وذلك عند $-1 < X < 0$ و عند $0 < X$

8- اوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من:

$(a) \quad Y = X^2 \quad , \quad 0 \le X \le 6$

$(b) \quad Y = aX^2 + bX + c \quad , \quad X_1 \le X \le X_2$

$(c) \quad Y = \ln X \quad , \quad 1 \le X \le 2e$

9 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X^2} < \tan^{-1} X < X$$

وذلك عند $0 < X$

التفـــاضـــلات

تعـــريـــف:

1 ـ اذا ما ضربنا المشتقة في dX يسمى حاصل الضرب بالتفاضل فمثلا:

المشتقة	التفاضل
$\frac{dc}{dX} = 0$	$dc = 0$
$\frac{dcu}{dX} = c\frac{du}{dX}$	$dcu = cdu$

2- وجود تفاضل dY مثلا على الطرف الايسر من المعادلة يســتدعى وجــود تفاضل dx في الطرف الايمن من المعادلة

3 – تعطى dx المسماة تفاضل X بالعلاقة: $dX = \Delta X$

تعطى dY المسماة تفاضل Y بالعلاقة: $dY = f'(X)dX$

مثال 1:

اذا كان : $Y = X^2$ اوجد dY والاختلاف فيها عن ΔX

الحل:

$$dY = 2XdX \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Delta Y = (X + \Delta X)^2 - X^2 = 2X\Delta X + (\Delta X)^2$$

$$= 2XdX + (dX)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1)و(2) نلاحظ ان ΔX تزيد عن dY بمقدار $(dX)^2$

التقريب بالتفاضل : -

اذا كان $dX = \Delta X$ صغير نسبيا بالنسبة لــ X فان dY تقريب جيد و مناســب لــ ΔY

مثال 2:

إذا كان: $Y = X^2 + X + 1$

X تتغير من 1 إلي 1.01

أوجد $\Delta Y, dY$ والفرق بينهما

الحل :

$$
\begin{aligned}
Y + \Delta Y &= (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1 \\
\Delta Y &= (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1 - (X^2 + X + 1) \\
&= 2X\Delta X + (\Delta X)^2 + \Delta X \\
&= 2(1)(1.01) + (0.01)^2 + (0.01) \\
&= 0.0301 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\
dY &= Y' dX \\
&= (2X + 1)dX \\
&= (2(1) + 1)(0.01) \\
&= 0.03 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

بمقارنة (1),(2) نجد ان $dY \cong \Delta Y$ ويمكن اعتبارهما متساويتان لان الفرق بينهما ضئيل جدا (0.0001) .

مثال 3:

استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية لكل من:

$(a)\quad \sqrt[3]{124}$

$(b)\quad \sin 60^\circ 1'$

الحل:

$$(a)\quad Y = X^{\frac{1}{3}}$$

$$dY = \frac{1}{3} X^{-\frac{2}{3}} dX$$

$$X = 125$$

$$dX = -1$$

$$\therefore dY = \frac{1}{3(125)^{\frac{2}{3}}}(-1) = -0.0133$$

$$\therefore \sqrt{124} = Y + \Delta Y$$

$$= 5 - 0.013 = 4.9867$$

$$(b)\quad X = 60^\circ$$

$$dX = 1'$$

$$Y = \sin X$$

$$= \sin 60 = 0.86603$$

$$dY = \cos X dX = (\cos 60)(0.0003) = 0.00015$$

$$\sin 60^\circ 1' = Y + \Delta Y$$

$$= 0.866031 + 0.00015 = 0.86618$$

تمـــــاريـــــن 10

1 - اوجد dY في كل مما يأتي : -

$$(a)\quad Y = X^3 - 3X^2 + 5X$$

$$(b)\quad Y = (3X^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$(c)\quad X^2 Y = 4 - XY^2$$

$$(d)\quad Y = \frac{2X}{1 + X^2}$$

$$(e)\quad Y = X\sqrt{1 - X^2}$$

$$(f)\quad Y = \frac{1 - X - X^2}{1 - X}$$

2– استعمل التفاضلات لتحصل على قيم معقولة لما يأتي:–

(a) $\sqrt{145}$, $(2.1)^3$, $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[3]{0.126}$

(b) $(8.01)^{\frac{4}{3}} + (8.01)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

3 - اوجد التغير التقريبي في حجم مكعب طول ضلعه Xcm الناتج عن زيادة أطوال اضلاعه ب 1%

4 – استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية للتغير في:

(a) X^3 , $X = 5 \rightarrow X = 5.01$

(b) $\frac{1}{X}$, $X = 1 \rightarrow X = 0.98$

5 - تتمدد صفيحة دائرية تحت تاثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من $12.5cm$ إلى $12.65cm$ اوجد الزيادة التقريبية في المساحة.

6 – اذا كانت $pv = 20$ وقيست P فوجدت:

$p = 5 \pm 0.02$

فاوجد V.

نماذج اختبارات وحلولها

نموذج اختبار 1

س1 باستخدام التعريف اوجد المشتقة الاولى للاتي:-

$$1- \quad F(X) = 3X^2 - 5X + 4$$

$$2- \quad F(X) = \sqrt{X}$$

س2 أوجد $\frac{dY}{dX}$ للدوال الآتية:-

$$1- \quad Y = (X^2 - \frac{1}{X^2})^6$$

$$2- \quad Y = \sin^{-1} 3X \cos^{-1} 3X$$

$$3- \quad Y = (2X^2 - 1)\tan^3 5X$$

$$4- \quad Y = \ln\sqrt[3]{\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}}$$

$$5- \quad Y = (X^2 + 1)^{10} + 10^{X^2+1}$$

$$6- \quad Y = \tan^{-1} e^{2X}$$

س3 اوجد المشتقة الثانية للدالة:

$$Y^4 + 3Y - 4X^2 = 5X +$$

س4 اوجد معادلة العمودي للمنحنى: $Y = X^2 - 2X +$

عند كل نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y = X +$

إجابة نموذج اختبار رقم 1

1− $f(X)=3X^2-5X+4$

$$f(X+\Delta X)=3(X+\Delta X)^2-5(X+\Delta X)+4$$

$$f(X+\Delta X)-f(X)=3(X^2+2X\Delta X+(\Delta X)^2)-5X-5\Delta X+4-3X^2+5X-$$

$$=6X\Delta X+3(\Delta X)^2-5\Delta X$$

$$=\Delta X(6X-5+3\Delta X)$$

$$\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\frac{\Delta X(6X-5+3\Delta X)}{\Delta X}$$

$$f'(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}$$

$$=6X-5$$

2− $f(X)=\sqrt{X}$

$$f(X+\Delta X)=\sqrt{X+\Delta X}$$

$$\therefore f(X+\Delta X)-f(X)=\sqrt{X+\Delta X}-\sqrt{X}$$

$$\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\frac{\sqrt{X+\Delta X}-\sqrt{X}}{\Delta X}\cdot\frac{\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X}}{\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X}}$$

$$f'(X)=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(X+\Delta X)-f(X)}{\Delta X}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{X+\Delta X-X}{\Delta X(\sqrt{X+\Delta X}+\sqrt{X})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{X}}$$

2ـج

1 - $\frac{dY}{dX} = 6(X^2 - \frac{1}{X^2})^5 (2X + \frac{2}{X^2})$

2 - $\frac{dY}{dX} = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$

3 - $\frac{dY}{dX} = (2X^2 - 1)3(\tan^2 5X)(5)\sec^2 5X + 4X\tan^3 5X$

$= 15(2X^2 - 1)\tan^2 5X \sec^2 5X + 4X\tan^3 5X$

4 - $Y = \frac{1}{3}[\ln(X^2 - 1) - \ln(X^2 + 1)]$

$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{3}[\frac{2X}{X^2 - 1} - \frac{2X}{X^2 + 1}]$

$= \frac{1}{3}[\frac{2X(X^2 + 1) - 2X(X^2 - 1)}{X^4 - 1}$

$= \frac{4}{3}\frac{X}{(X^4 - 1)}$

5 - $\frac{dY}{dX} = 10(X^2 + 1)^9 2X + 10^{X^2+1}.2X.\ln 10$

$= 20X(X^2 + 1)^9 + 2X(\ln 10)10^{X^2+1}$

6 - $\frac{dY}{dX} = \frac{2e^{2X}}{1 + e^{4X}}$

3 ــج

$4Y^3Y' + 3Y' - 12X^2 = 5$

$Y'(4Y^3 + 3) = 5 + 12X^2$

$\therefore Y' = \frac{5+12X}{4Y^3+3}$

$Y'' = \frac{(4Y^3+3)(24X) - (5+12X)\frac{5+12X^2}{4Y^3+3}}{(4Y^3+3)^2}$

$= \frac{(4Y^3+3)^2(24X) - 12Y^2(5+12X^2)^2}{(4Y^3+3)^2}$

جـ4

$$X+1=X^2-2X+3$$
$$0=X^2-3X+2$$
$$0=(X-2)(X-1)$$

∴ نقطتي التقاطع هما : $X_2=2, X_1=1$

$$m_1=\frac{dY}{dX}=2X-2=\frac{-1}{0}$$
$$Y_1=X_1+1=1+1=2$$

∴ معادلة المماس هي:

$$Y-2=\frac{-1}{0}(X-1)$$

$\therefore\ X=1$ ← المماس رأسي

$$m_2=1$$
$$m_2=1\Big/\frac{dY}{dX}=-1\big/(2X-2)=-1\big/(2(2)-2)=\frac{-1}{2}$$
$$Y_2=X_2+1=2+1=3$$

معادلة العمودي هي:

$$Y-3=\frac{1}{2}(X-2)$$
$$2Y+X-8=0$$

نموذج اختبار رقم 2

س1 أ–أوجد المشتقة الأولى للدالة f(X) باستخدام المبادئ الأولية:

$$f(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$$

ب– اوجد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ اذا كان:–

$$Y = Z^2 + 3Z$$
$$X = Z^3 + 2Z$$

س2 اوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:–

$$1 - \quad Y = \ln[\sec(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})]$$

$$2 - \quad Y = \tan^{-1}\frac{X}{Y}$$

$$3 - \quad Y = e^{-X} \csc\sqrt{X}$$

$$4 - \quad X^2Y^3 + \sin^{-1}(\cos X) = \sqrt[3]{X^2 + 1}$$

س3 اوجد معادلتي المماس والعمودي للدالة: $Y = \frac{5X}{X^2 + 1}$ عند النقطة A(2.2)

س4 إذا كانت الدالة $f(X) = X^3 - 12X$ اوجد:–

1 - النهايات العظمى والصغرى واحداثياها.

2– فترات التزايد والتناقص

3- اختبر النهايات العظمى والصغرى باستخدام المشتقة الثانية

حل أختبار رقم (2)

جـ(1) (أ)

$$Y = \sqrt{3X^2 - 1} \qquad i.e \;\; F(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} \qquad i.e. F(X + \Delta X) = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1}$$

$$\Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X}$$

بضرب المعادلة فى مرافق البسط :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X} \cdot \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}$$

$$= \frac{3(X + \Delta X)^2 - 1 - (3X^2 - 1)}{\Delta X\left(\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}\right)}$$

$$= \frac{\Delta X(6X + 3\Delta X)}{\Delta X\left(\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}\right)}$$

بتطبيق النظرية :

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to o} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= \frac{6X}{2\left(\sqrt{3X^2 - 1}\right)} = \frac{3X}{\sqrt{3X^2 - 1}}$$

(ب) :

$$\frac{dY}{dZ} = 2Z + 3 \qquad\qquad \frac{dX}{dZ} = 3Z^2 + 2$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dZ} / \frac{dX}{dZ}$$

$$= \frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2} \qquad\qquad \therefore \frac{dY^2}{dX^2} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2}\right) \cdot \frac{dZ}{dX}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{2(3Z^2 + 2) \quad - 12Z^2 - 18Z}{(3Z^2 + 2)^2} \cdot \frac{1}{3Z^2 + 2}$$

$$= \frac{4 - 18Z - 6Z^2}{((3Z^2 + 2)^3}$$

جـ2 :

$$1 - Y' = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)} \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)$$

$$2 - Y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2} \cdot \frac{d}{dX}\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= \frac{Y^2}{Y^2 + X^2} \cdot \frac{Y - XY'}{Y^2}$$

$$Y' = \frac{Y - XY'}{Y^2 + X^2}$$

$$\therefore Y'(Y^2 + X^2) + XY' = Y$$

$$Y' = \frac{Y}{Y^2 + X^2 + 1}$$

$$3-\quad Y' = e^{-X}\left[-\csc\sqrt{X}\cdot\cot\sqrt{X}\cdot\frac{1}{2\sqrt{X}}\right] - e^{-X}\csc\sqrt{X}$$

$$= -\csc\sqrt{X}\,e^{-x}\left[\frac{\cot\sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + 1\right]$$

$$4-\quad X^2(3Y^2Y') + 2XY^3 + \frac{1}{\sqrt{1-(\cos X)^2}}\cdot(-\sin X) = \frac{1}{3}(X^2+1)^{-\frac{2}{3}}(2X)$$

$$3X^2Y^2Y' = \frac{2X}{3(X^2+1)^{\frac{2}{3}}} + 1 - 2XY^3$$

$$= \frac{2X + 3(X^2+1)^{\frac{2}{3}} - 6XY^3(X^2+1)^{\frac{2}{3}}}{3(X^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore Y' = \frac{2X + 3(X^2+1)^{\frac{2}{3}} - 6XY^3(X^2+1)^{\frac{2}{3}}}{9X^2Y^2(X^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

جـ 3 :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X^2+1)5 - 5X(2X)}{(X^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5X^2+5}{(X^2+1)^2}$$

بالتعويض عن $X = 2$ لايجاد الميل :

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{-20+5}{(5)^2} = \frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$$

∴معادلة المماس هي :

$$Y - 2 = -\frac{3}{5}(X-2)$$

5Y-10 = -3 X+ 6

$\therefore 3X + 5Y - 16 = 0$

ولايجاد معادلة العمودى (حيث ميل العمودى $m_\perp$)

$m_\perp = \frac{5}{3}$

$\therefore Y - 2 = \frac{5}{3}(X - 2)$

$3Y - 6 = 5X - 10$

$5X - 3Y - 4 = 0$

جـ 4 ١- عند القيم الحرجة تكون $F'(X) = 0$ $\qquad F'(X) = 3X^2 - 12$

$3X^2 - 12 = 0$

$X^2 - 4 = 0$

$\therefore$ القيم الحرجة عند : $X = \pm 2$

توقع القيم الحرجة على خط الأعداد :

(X-2)	− − −	− − − − −	+ + + + + +
(X+2)	− − −	+ + + + +	+ + + + + +
	-2	2	x
$F'(x)=$	+ + +	− − − − − −	+ + + + + +
الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,2)$

$X = -2$ عند

$f'(x)$ تغير اشارتها من (+) الى (−) وبالتالى تكون نهاية عظمى عند $-X =$
2 قيمتها :

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$

أحداثى النهاية العظمى : $A(-2, 16)$

$X = 2$ عند

$f'(x)$ تغير اشارتها من (−) الى (+) وبالتالى تكون نهاية صغرى عند $X =$
2 قيمتها :

$f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$

إحداثى النهاية الصغرى : $B(2,-16)$

2 – فترات التزايد : $(-\infty, -2)$, $(2,2)$

فترة التناقص : $(-2,2)$

3– إختبار النهايات بالمشتقة الثانية :

$f''(x) = 6X$

عند $X = -2$

$f''(-2) = -$

∴ توجد نهاية عظمى عند $X = -2$ لأن $f''(X_0)$ سالبة

عند $X = 2$

$f''(2) = +$

∴توجد نهاية صغرى عند $X = 2$ لأن $f''(X_0)$ موجبة

تمرينات عامة فى

التفاضـــل

تمرين رقم (1)

أوجد قيمة المشتقى الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (2X^2 - 1)\tan^3(5X)$

2 - $Y^2 = 3X^2 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\tan X^2 + \csc^{-1} X^2)^{\frac{1}{2}}$

4 - $Y = 3^{\sin^{-1} X^3}$

5- $Y = \frac{\sec 2X}{\tan(2X + 1)}$

6 - $Y = \frac{X \ln x}{1 - X} + \ln(1 - X)$

7- $Y = \left(\frac{X}{1 + x}\right)^5$

8- $e^{y} = X^{\sin x^2}$

9 - استخدام قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = X^2 + 2X \qquad Y = u^3 + 4$

10 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = X / \sqrt{X - 1}$

11 – حوض على شكل متوازى مستطيلات طولـــه 2m وعرضـــه 0.5m وعمقه 1m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل $900 cm^3 s^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25cm . ($0.09\ cms^{-1}$)

12 – إختبر الدالة : $Y = X^2 + \frac{250}{X}$

لمعرفة إتجاه الانحناء وتحديد نقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى .

13 – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة :

$\frac{1}{999}$ و $(3.00)^3$

14 – من التعريف أوجد قيمة المشتقى الأولى للدالة :

$Y = \sqrt{X^2 - 3}$

15 – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$Y = X^3 - 2X^2 + 4$

عند النقطة A (2,4)

تمرين رقم (2)

أوجد قيمة المشتقى الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (X+1)(X-1)(X+2)$

2 - $Y^2 = X^3 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\sin)^{\cos x}$

4 - $Y = (X^3 + X^2 + X)^{X3}$

5 - $Y = \sin^{-1}(\sin 5x)$

6 - $10 = \frac{X^4 + Y^3}{\cos xY + X}$

7 - $Y = \sqrt{1 + \sqrt{X}}$

8 - استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = x(3 - 2x)$ $\qquad$ $Y = \sqrt{x}$

9 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

10 - يمشى رجل طوله 1.5m بمعدل $1.2ms^{-1}$ مبتعداً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذى يعلو 6m عن ارض الشارع .

أ - بأى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ $(1.6\ ms^{-1})$

ب - بأى معدل يتغير طول الظل ؟ $(0.4ms^{-1})$

11 - إختبر الدالة : $Y = 3x + (x+2)^{\frac{3}{5}}$

لمعرفة إتجاه الانحناء وتحديد نقط الانقلاب .

12 - أوجد قيمة X_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة بفرض أن

$Y = aX^2 + bX + c$ $\qquad X_1 \leq X \leq X_2$

13 - من التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$Y = \sqrt{3X^2 - X}$

14 - أوجد معادلة المماس عند النقطة $A(2, -2)$ للمنحنى :

$X^2 - Y^2 = 16$

تمرين رقم (3)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{e^{x^2} + 5x}}}$

2 - $5 = \dfrac{X^2 + Y^2}{XY}$

3 - $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

4 - $Y = (\csc x)^{\csc x}$

5 - $Y = \log_3 (x^2 + 2)^3 + 5^{\sin x}$

6 - $Y = X^2 \tan^3 4x$

7 - $e^Y = \tan^{-1} x^2$

8 - يستند سلم أب طوله 5m على جدار منزل أوجد :

معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان اسفل السلم على بعـــد 3m مــن الجدار ويبتعد عنه بمعــــدل $0.5ms^{-1}$.

$$\left(\frac{3}{8} m s^{-1} \right)$$

9 - اختبر الدالة : $Y = x(12 - 2x)^2$

للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

10 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن :

$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ عند $x > 0 , -1 < x < 0$

(إرشاد : $f(x) = \sqrt{x}$ واستخدم الصيغة IV $a = 1 , h = x$)

11 – استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{dY}{dX}$:

$$y = t^3 - 3t + 5$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$$

12 – أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$$Y = \sqrt{2 - 3x^2}$$

13 – باستخدام التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$$Y = \sqrt{1 - X^2}$$

14 – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$$X^2+3XY + Y^2 = 5$$

عند النقطة $A (1,1)$