

Σ

$$p^2$$

$$p$$

الفصل الثالث

$$x^2 + 2x = 3^n$$

الحلول

obeikandi.com

1. من فرض السؤال نستنتج وجود أعداد صحيحة x و y و z بحيث $a-1=rx$ و $b-1=ry$ و $c-1=rz$. هذا يقتضي أن

$$abc-1=(rx+1)(ry+1)(rz+1)-1$$

$$=r^3xyz+r^2(xy+xz+yz)+r(x+y+z)$$

نستنتج من ذلك أن $r \mid abc-1$.

2. أي عدد n يمكن كتابته بإحدى الصيغ الآتية:

$$4l, 4l+1, 4l+2, 4l+3$$

إذا كان $n=4l$ فإن $4 \mid n(n^2+3)$. وإذا كان $n=4l+1$ فإن $n^2+3=16l^2+8l+4$ ومن ثم $4 \mid n(n^2+3)$. إذا كان $n=4l+3$ فإن $n^2+3=16l^2+24l+12$ ومن ثم $4 \mid n(n^2+3)$. لكن إذا كان $n=4l+2$ فإن $n^2+3=16l^2+16l+7$ عدد فردي، لذا فالعدد $n(n^2+3)$ يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 4. لذا $4 \mid n(n^2+3)$ إذا وفقط إذا كان $n \neq 4l+2$.

3. لاحظ أولاً أن أي عدد n يمكن أن يأخذ إحدى الصيغ الآتية:

$$5l, 5l+1, 5l+2, 5l+3, 5l+4$$

تكون n على الصيغة $5l+2$. حيث إن

$$3n^3-n^2+3n-1=(3n-1)(n^2+1)$$

و $5 \mid n^2+1$ ، إذاً $25 \mid 3n^3-n^2+3n-1$.

4. الإثبات ينتج مباشرة من العلاقة

$$5(3n+7m)-3(5n+6m)=17m$$

5. لاحظ أن $6^3 + 9^3 \mid (6^3)^{15} + (9^3)^{15}$ و $7^3 + 8^3 \mid (7^3)^{15} + (8^3)^{15}$ بما أن .

$$6^3 + 9^3 = (6+9)(36-54+81) = 3^3 \times 5 \times 7$$

$$7^3 + 8^3 = (7+8)(49-56+64) = 5 \times 9 \times 17$$

إذاً $4516^{45} + 9^{45}$ و $4517^{45} + 8^{45}$ ومن ثم $4516^{45} + 7^{45} + 8^{45} + 9^{45}$.

6. باستخدام نظرية ذات الحدين نجد أن

$$7^n = (6+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 6^i = 1 + 6n + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 6^i$$

حيث إن $\sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 6^i = 36 \mid 7^n - 6n - 1$ ، إذاً $36 \mid 7^n - 6n - 1$.

7. لنضع $M = (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$.

إذا كان n عدداً زوجياً فإن $n = 2k$ ومن ثم $8 \mid n^3$. هذا يقتضي - أن $8 \mid M$. إذا كان n عدداً فردياً فإنه إما $n = 4k + 1$ أو $n = 4k + 3$. في حالة $n = 4k + 1$ نجد بسهولة أن $2 \mid n^3 + 1$ و $4 \mid n^3 - 1$. وفي حالة $n = 4k + 3$ نجد بسهولة أن $4 \mid n^3 + 1$ و $2 \mid n^3 - 1$. في كلتا الحالتين نجد أن $8 \mid M$.

إذا كان $n = 3k$ فإن $9 \mid n^3$. إذا كان $n = 3k + 1$ فإن $9 \mid n^3 - 1$ وإذا كان $n = 3k + 2$ فإن $9 \mid n^3 + 1$. إذاً في جميع الحالات $9 \mid M$.

إذا كان $n = 7k$ فإن $7 \mid n^3$. إذا كان $n = 7k + 1, 7k + 2, 7k + 4$ فإن $7 \mid n^3 - 1$. وإذا كان $n = 7k + 3, 7k + 5, 7k + 6$ فإن $7 \mid n^3 + 1$. إذاً في جميع الحالات $7 \mid M$.

الآن بـ_____ ما أن $(7,8,9)=1$ ، إذاً $7 \times 8 \times 9 \mid M$ ، أي أن $504 \mid (n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$.

8. لنكتب $a\alpha = m$ و $b\alpha = n$ حيث m و n عددان صحيحان. هذا يقتضي أن $\alpha = \frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ ومن ثم $an = bm$. بما أن $a \mid bm$ و $(a,b)=1$ ، إذاً $a \mid m$ أيضاً بما أن $b \mid an$ و $(a,b)=1$ فإن $b \mid n$. من كلتا الحالتين نستنتج أن $\alpha = \frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ عدد صحيح.

9. بملاحظة أن $a < \frac{a+b}{2} < b < c$ نجد أن $a+b < 2c$. حيث إن $a+b < 2c$ و $c \mid a+b$ نستنتج من ذلك أن $c = a+b$. هذا بدوره يقتضي أن $a+c = 2a+b$. حيث إن $b \mid a+c$ ، إذاً $b \mid 2a$. هذا يقتضي أن $b = 2a$ لأن $2a < 2b$. نستنتج من ذلك أن $c = a+b = 3a$. إذاً الأعداد المطلوبة هي $a = n$ ، $b = 2n$ ، $c = 3n$ حيث n عدد صحيح موجب.

10. لاحظ أولاً أن القسمة $19 \mid n^3 + 2n^2 + n + 1$ متحققة عند القيمة $n = 2$. إذاً بأخذ القيم $n = 2 + 19k$ ، حيث k عدد صحيح، نلاحظ أيضاً أن $19 \mid (2+19k)^3 + 2(2+19k)^2 + (2+19k) + 1$.

11. بتحليل المقدار $n^{n-1} - 1$ نحصل على الآتي:

$$n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1)$$

نقوم بكتابة الحد الثاني في الطرف الأيمن على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 \\ &= (n^{n-2} - 1) + (n^{n-3} - 1) + \dots + (n - 1) + [1 + (n - 2)] \\ &= (n^{n-2} - 1) + (n^{n-3} - 1) + \dots + (n - 1) + (n - 1) \end{aligned}$$

هذا يقتضي أن $n - 1$ يقسم $n^{n-2} + n^{n-1} + \dots + n + 1$ ومن ثم نستنتج من المعادلة الأولى أن $(n - 1)^2$ يقسم $n^{n-1} - 1$.

12. نريد أن نثبت أن $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n)}{2^n}$ عدد

صحيح. بضرب بسط الكسر و مقامه بالعدد $n!$ نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n)}{2^n} &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\ &= \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

13. من العلاقة

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{n+1}{n} \binom{2n}{n-1}$$

نستنتج أن

$$n \binom{2n}{n} = (n+1) \binom{2n}{n-1}$$

بما أن $n+1 \mid n \binom{2n}{n}$ فإن $(n+1, n) = 1$ و $n+1 \mid n \binom{2n}{n}$

14. بملاحظة أن

$$\binom{kn}{n} = \frac{(kn)!}{n!(kn-n)!} = \frac{kn}{n} \cdot \frac{(kn-1)!}{(n-1)!(kn-n)!} = k \cdot \binom{kn-1}{n-1}$$

نستنتج أن $k \mid \binom{kn}{n}$

15. حيث إن $(a, b) = g$ فإنه بإمكاننا أن نكتب $a = ga_1$ و $b = gb_1$ حيث a_1 و b_1 عددان صحيحان. الآن المعادلة $g = ax + by$ تصبح $1 = a_1x + b_1y$ وهذا يقتضي أن $1 \mid (x, y)$ ومن ثم $(x, y) = 1$.

16. لنفرض أن $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ عدداً صحيحاً، أي أن $bd \mid ad+bc$ هذا يقتضي أن $bd \mid abd + b^2c$ ومن ثم $bd \mid b^2c$ ومنه $d \mid bc$ بما أن $(d, c) = 1$ فإن $d \mid b$.

أيضاً $bd \mid d(ad+bc) = ad^2 + bdc$ ومن ثم $bd \mid ad^2$ ومنه $b \mid ad$ بما أن $(a, b) = 1$ فإن $b \mid d$ من $b \mid d$ نستنتج أن $b = d$ ، وهذا يناقض مفروض السؤال. إذاً العدد $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ليس عدداً صحيحاً.

17. من المعطى $p^n \mid ab$ نستنتج أن $p \mid ab$. هذا يقتضي - أنه إما $p \mid a$ أو $p \mid b$ ، لكن ليس كليهما لأن $(a, b) = 1$. إذاً يمكننا أن نفرض أن $p \mid a$. هذا يقتضي أن $(p, a) = 1$ ومن ثم $(p^n, a) = 1$ أيضاً. الآن بما أن $p^n \mid ab$ و $(p^n, a) = 1$ فإننا نستنتج أن $p^n \mid b$.

18. بما أن $(a, b) = g$ فإنه يوجد عددان صحيحان x و y يحققان

$ax + by = g$. بضرب طرفي المعادلة في c نحصل على المعادلة

$$acx + bcy = gc$$

نلاحظ الآتي:

$$b \mid c \Rightarrow ab \mid ac \Rightarrow ab \mid acx$$

$$a \mid c \Rightarrow ab \mid cb \Rightarrow ab \mid bcy$$

هذا يقتضي- أن $ab \mid acx + bcy$ وباستخدام المعادلة أعلاه نستنتج أن $ab \mid gc$.

19. لنفترض أن $k > 1$. إذا بأخذ $n = k$ نحصل على $(k, 2k) = k \neq 1$ ، وهذا يناقض المعطى في السؤال. هذا بدوره يؤدي إلى أن $k = 1$.

20. أي عدد صحيح n يأخذ إحدى الصيغ الآتية:
 $3k, 3k + 1, 3k + 2$

$$* \text{ إذا كان } n = 3k \text{ فإن } n^2 + n + 5 = 9k^2 + 3k + 5$$

$$* \text{ إذا كان } n = 3k + 1 \text{ فإن } n^2 + n + 5 = 9k^2 + 9k + 7$$

$$* \text{ إذا كان } n = 3k + 2 \text{ فإن } n^2 + n + 5 = 9k^2 + 15k + 11$$

في جميع الحالات العدد 3 لا يقسم $n^2 + n + 5$. إذا $(n^2 + n + 5, 3) = 1$.

21. ليكن $(n^2 + n + 1, n^3 + n + 1) = g$. لاحظ أولاً أن

$(g, n) = 1$: لو أن p عدد أولي يقسم g و n ، فإن p يقسم 1 لأن g

يقسم $n^2 + n + 1$. الآن $n^2 + n + 1$ يقسم $n^3 + n + 1$ لأن

$(n^3 + n + 1) - (n^2 + n + 1) = n^2(n - 1)$ و $(g, n) = 1$ ، إذاً

$g \mid n-1$. أيضاً $g \mid (n^3 + n + 1) - (n-1)(n^2 + n + 1) = n + 2$.
هذا يقتضي أن $g \mid (n+2) - (n-1) = 3$ ومن ثم $g = 1$ أو $g = 3$.

بما أن $g \mid n-1$ فإننا نستنتج أنه إذا كان $3 \mid n-1$ فإن $g = 1$. أما إذا كان $3 \mid n-1$ فإن $3 \mid (n-1) + 3 = n + 2$ أيضاً. لكن حيث إن

$$n^2 + n + 1 = (n^2 - 1) + (n + 2)$$

$$n^3 + n + 1 = (n^3 - 1) + (n + 2)$$

فإننا نستنتج أن 3 يقسم $n^2 + n + 1$ و $n^3 + n + 1$ ، ومن ثم 3 يقسم g .
هذا يقتضي أنه إذا كان $3 \mid n-1$ فإن $g = 3$.

22. لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أن $(40n + 13, 28n + 9) = 1$.

باستخدام خوارزمية أقليدس نحصل على

$$40n + 13 = 1(28n + 9) + (12n + 4)$$

$$28n + 9 = 2(12n + 4) + (4n + 1)$$

$$12n + 4 = 3(4n + 1) + 1$$

$$4n + 1 = (4n + 1)1 + 0$$

هذا يقتضي أن $(40n + 13, 28n + 9) = 1$.

23. إذا كان $n = 2$ فإن $(2(n!) + 1, 5(n!) + 1) = (5, 11) = 1$. إذاً

نفرض أن $n \geq 3$. لنفرض أن $(2(n!) + 1, 5(n!) + 1) = d > 1$. ليكن

p عدد أولي يقسم d . إذاً $p \mid 2(n!) + 1$ و $p \mid 5(n!) + 1$. هذا يقتضي أن

p يقسم الفرق، أي $3(n!)$ ومن ثم إما $p \mid 3$ أو $p \mid n!$. في كلتا

الحالتين لا بد أن يكون $p \leq n$ (لأن $n \geq 3$). هذا يقتضي أن $p \mid 2(n!)$.

لكن $p \mid 2(n!) + 1$ أيضاً. إذاً $p \mid 1$ وهذا مستحيل. هذا يعني أن $d = 1$

ومن ثم $(2(n!) + 1, 5(n!) + 1) = 1$.

24. لنضع $(a+b, a-b, ab) = g$. حيث إن $g \mid a+b$ و $g \mid a-b$ فإن $g \mid b(a+b) = ab + b^2$ و $g \mid a(a-b) = a^2 - ab$. وبسبب أن $g \mid ab$ نستنتج أن $g \mid b^2$ و $g \mid a^2$. هذا يقتضي—أن $g \mid (a^2, b^2)$. لكن $(a, b) = 1$ يقتضي أن $(a^2, b^2) = 1$. إذاً $g \mid 1$ ومن ثم $g = 1$ ، أي أن $(a+b, a-b, ab) = 1$.

25. لنفرض أن $t \geq k$. إذاً $p^{k+1} \mid ap^k + bp^t = p^k(a + bp^{t-k})$. إذا كان $t - k \neq 0$ فإن هذا يقتضي—أن $p \mid a + bp^{t-k}$ وهذا مستحيل لأن $(p, a) = 1$. إذاً لا بد أن يكون $t - k = 0$ ، أي أن $k = t$ ومن ثم $p^{k+1} \mid ap^k + bp^k = p \mid a + b$.

26. إذا كان $a = b$ فإن المساواة $(a, b) = [a, b]$ متحققة. نُثبت الآن العكس. يمكننا أن نكتب تحليل العددين a و b إلى عواملهما الأولية على الصورة $a = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ و $b = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ حيث $\alpha_i \geq 0$ و $\beta_i \geq 0$ لجميع القيم $1 \leq i \leq r$. في هذه الحالة يصبح لدينا

$$(a, b) = \prod_{i=1}^r p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}, \quad [a, b] = \prod_{i=1}^r p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

حيث $\min(\alpha_i, \beta_i)$ يساوي العدد الأصغر بين العددين α_i و β_i ، و $\max(\alpha_i, \beta_i)$ يساوي العدد الأكبر بين العددين α_i و β_i . إذا كان $(a, b) = [a, b]$ ، فإنه لجميع القيم $1 \leq i \leq r$ يصبح لدينا $\min(\alpha_i, \beta_i) = \max(\alpha_i, \beta_i)$ ، أي $\alpha_i = \beta_i$. هذا يقتضي أن $a = b$. إذاً $(a, b) = [a, b]$ إذا وفقط إذا كان $a = b$.

27. لنضع $(a, b) = g$. إذاً $a = gr_1$ و $b = gr_2$ حيث r_1 و r_2

عددان صحيحان موجبان يُحققان $(r_1, r_2) = 1$. لاحظ أيضاً أن

$$a + b = g(r_1 + r_2)$$

$$[a, b] = [gr_1, gr_2] = g[r_1, r_2] = gr_1r_2$$

لأن $(r_1, r_2) = 1$ و $(r_1, r_2)[r_1, r_2] = r_1r_2$ يقتضي أن $[r_1, r_2] = r_1r_2$. بما أن

$$(a + b, [a, b]) = (g(r_1 + r_2), gr_1r_2) = g(r_1 + r_2, r_1r_2)$$

فإن الإثبات سوف يتم إذا أثبتنا أن $(r_1 + r_2, r_1r_2) = 1$. لنضع

$$(r_1 + r_2, r_1r_2) = h. \text{ بما أن } h \mid r_1 + r_2 \text{ و } h \mid r_1r_2 \text{ فإن}$$

$$h \mid r_1(r_1 + r_2) - r_1r_2 \Rightarrow h \mid r_1^2$$

$$h \mid r_2(r_1 + r_2) - r_1r_2 \Rightarrow h \mid r_2^2$$

ومن ثم $h \mid (r_1^2, r_2^2)$. لكن $(r_1, r_2) = 1$ يقتضي أن $(r_1^2, r_2^2) = 1$. إذاً $h \mid 1$

ومن ثم $h = 1$ وبهذا يتم الإثبات.

28. لإثبات المساواة

$$([a, b], [a, c], [b, c]) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$$

نقوم بإثبات أن العدد الأولي p مرفوع لنفس الأس في كلا الطرفين. لتكن

الأعداد α و β و γ هي أسس العدد p الموجودة للأعداد a و b و c

على التوالي. بما أن ترتيب الأعداد a و b و c في المساواة أعلاه لن يغير من

جوهر المساواة، فإنه بإمكاننا أن نفرض أن

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \geq 0$$

هذا يقتضي أن $[a, b]$ و $[a, c]$ و $[b, c]$ تحتوي العدد p مرفوعاً

للأسس α و β و α على التوالي. إذاً $([a, b], [a, c], [b, c])$ يحتوي

العدد p مرفوعاً للأس β .

أيضاً الأعداد (a,b) و (a,c) و (b,c) تحتوي العدد p مرفوعاً للأس β و β على التوالي. إذاً $[(a,b), (a,c), (b,c)]$ يحتوي العدد p مرفوعاً للأس β .

إذاً كلا الطرفين يحتوي على العدد الأولي p مرفوعاً لنفس الأس. هذا يقتضي تساوي الطرفين.

29. حيث إن $(x, y) = 7$ ، فإنه يوجد عدنان صحيحان موجبان x_0 و y_0 بحيث $x = 7x_0$ و $y = 7y_0$. بالتعويض في المعادلة $x + 8y = 245$ نحصل على المعادلة $x_0 + 8y_0 = 35$ والتي حلوها الموجبة هي $(3, 4)$, $(11, 3)$, $(19, 2)$, $(27, 1)$. هذا يقتضي أن الحلول المطلوبة هي

$$(x, y) = (198, 7), (133, 14), (77, 21), (21, 28)$$

30. لنضع $g = (2^m - 1, 2^n + 1)$. هذا يقتضي وجود عددين صحيحين k و l حيث $2^m - 1 = kg$ و $2^n + 1 = lg$ ، أي أن

$$2^m = kg + 1 \text{ و } 2^n = lg - 1. \text{ من ذلك نستنتج أن}$$

$$2^{mn} = (kg + 1)^n = sg + 1,$$

$$2^{mn} = (lg - 1)^m = tg - 1$$

حيث s و t عدنان صحيحان (في المعادلة الثانية استخدمنا المعلومة m عدد فردي). بطرح المعادلتين السابقتين نحصل على المعادلة $g(t - s) = 2$. هذا يقتضي أن $g \mid 2$ ومن ثم $g = 1$ لأن كلا العددين $2^m - 1$ و $2^n + 1$ فردي. إذاً $1 = (2^m - 1, 2^n + 1)$.

31. نضع $T_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$ و نبدأ الحل بالملاحظة الآتية:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= ((a-b) + b)^n - b^n \\ &= (a-b)^n + \binom{n}{1}(a-b)^{n-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-2}(a-b)^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1}(a-b)b^{n-1} \end{aligned}$$

بالقسمة على $a-b$ نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a-b} &= (a-b)^{n-1} + n(a-b)^{n-2} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-2}(a-b)b^{n-2} + nb^{n-1} \end{aligned}$$

أو بشكل مُختصر

$$T_n = (a-b)L + nb^{n-1} \dots\dots\dots (*)$$

حيث L عدد صحيح. الآن نضع $g_1 = (T_n, a-b)$ و $g_2 = (a-b, n)$.
 ليكن $(g_1, b) = d$. أذاً $d \mid g_1$ و $d \mid b$. بما أن $g_1 \mid a-b$ إذاً $d \mid a-b$.
 هذا يقتضي أن $d \mid (a-b) + b$ أو $d \mid a$ و من ثم $d \mid (a, b) = 1$ و منه $d = 1$ ، أي أن $(g_1, b) = 1$.

بما أن $g_1 \mid T_n$ و $g_1 \mid a-b$ فإنه من العلاقة (*) نستنتج أن $g_1 \mid nb^{n-1}$.
 هذا يقتضي أن $g_1 \mid n$ لأن $(g_1, b) = 1$. بملاحظة أن $g_1 \mid a-b$ و $g_1 \mid n$ نستنتج أن $g_1 \mid (a-b, n)$ ، أي أن $g_1 \mid g_2$.

أيضاً بما أن $g_2 \mid a-b$ و $g_2 \mid n$ فإنه من العلاقة (*) نستنتج أن $g_2 \mid T_n$.
 بملاحظة أن $g_2 \mid T_n$ و $g_2 \mid a-b$ نستنتج أن $g_2 \mid (T_n, a-b)$ ، أي أن $g_2 \mid g_1$.

الآن نستنتج من $g_2 \mid g_1$ ، $g_1 \mid g_2$ ، $g_1 > 0$ ، $g_2 > 0$ أن $g_1 = g_2$

وهو المطلوب.

حل آخر: نضع $t = a - b$. باستخدام العلاقة
 $(xy + z, x) = (z, x)$ نحصل على

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}, a - b \right) &= (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}, t) \\ &= ((t + b)^{n-1} + (t + b)^{n-2}b + \dots + b^{n-1}, t) \\ &= (b^{n-1} + b^{n-2}b + \dots + b^{n-1}, t) \\ &= (nb^{n-1}, t) = (nb, t) \\ &= (nb, a - b) = (n, a - b) \\ &\text{لأن } (b, a - b) = (a, b) = 1 \end{aligned}$$

32. ليكن $a > 1$ هو أصغر القواسم الموجبة للعدد n . إذا كان a عدداً مؤلفاً، فبإمكاننا كتابة $a = bc$ ، حيث إن $1 < b \leq c < a$. هذا يقتضي أن العدد b هو عدد موجب أصغر من العدد a ويقسم العدد n . هذا التناقض يُثبت أن العدد a عددٌ أولي.

33. حيث إن $p + 1$ عدد زوجي، فإن $p + 1$ تأخذ إحدى الصور الآتية: $6k, 6k + 2, 6k + 4$. إذا كان $p + 1 = 6k + 2$ ، فإن $p + 2 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ عدد غير أولي ($p > 3$ يقتضي أن $k > 0$). وإذا كان $p + 1 = 6k + 4$ ، فإن $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ عدد غير أولي ($p > 3$ يقتضي أن $k > 0$). هذا التناقض يقتضي أن $p + 1 = 6k$ ومن ثم $6 \mid p + 1$.

34. لنكتب $pq + 1 = n^2$. إذاً $pq = (n - 1)(n + 1)$. لأن n عدد

زوجي، نجد بسهولة أن $(n-1, n+1) = 1$. حيث إن $p < q$ و $n-1 < n+1$ نستنتج أن $p = n-1$ و $q = n+1$ ومن ثم $q = p+2$.

35. نلاحظ أولاً أن $(m, n) = 1$. لنأخذ عدداً أولياً p_j حيث $1 \leq j \leq t$. إذا كان $1 \leq j \leq i$ فإن $p_j \mid m$ و $p_j \mid n$. هذا يقتضي أن $p_j \mid m+n$. وإذا كان $i+1 \leq j \leq t$ فإن $p_j \mid n$ و $p_j \mid m$. هذا يقتضي أن $p_j \mid m+n$. نستنتج من ذلك أن $m+n$ غير قابل للقسمة على أيٍّ من الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_t .

الآن لو فرضنا أنه يوجد عدد منتهٍ من الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_t فإن المناقشة أعلاه تقتضي أن $m+n$ يقبل القسمة على عدد أولي p مختلف عن الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_t ، وهذا تناقض. هذا يعني أن فرض وجود عدد منتهٍ من الأعداد الأولية غير صحيح ومن ثم يوجد عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية.

36. ليكن p هو أصغر عدد أولي يقسم $n!+1$ حيث $n > 1$. إذا كان $p \leq n$ فإن $p \mid n!$. هذا يقتضي أن $p \mid (n!+1) - n!$ ، أي أن $p \mid 1$ وهذا تناقض. إذاً لا بد أن يكون $p > n$.

الآن لنأخذ أي عدد طبيعي $n > 1$. باستخدام المناقشة أعلاه نستنتج وجود عدد أولي p يُحقق $p > n$ ، أي أنه يوجد عدد أولي أكبر من أي عدد طبيعي معطى. هذا يُثبت وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية.

37. لنفرض وجود عدد منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $6n+5$ ، ولتكن $p_1=5, p_2=11, p_3, \dots, p_r$. نُعرف العدد $N = 6p_2p_3 \dots p_r + 5$. بما أن N عدد صورته العامة هي $6n+5$ فلا بُد

أن يكون أحد عوامله الأولية له نفس الصورة العامة $6n + 5$ ، (لو كانت الصورة العامة لجميع العوامل الأولية للعدد N هي $6n + 1$ فإن الصورة العامة للعدد N ستكون $6n + 1$ ، وهذا تناقض). يُسمى هذا العامل الأولي p_i ، حيث i يُحقق $2 \leq i \leq r$. الآن بما أن $p_i \mid N$ و $p_i \mid 6p_2p_3 \cdots p_r$ فإن $p_i \mid 15$ ، وهذا تناقض لأن $p_i > 5$. من هذا التناقض نستنتج وجود عدد غير متته من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $6n + 5$.

38. بملاحظة أن $19 = 27 - 8$ ، فإن العبارة المعطاة يمكن كتابتها بالصيغة الآتية:

$$(3^{2n+1} + 3)^3 - 8 = (3^{2n+1} + 1) \left((3^{2n+1} + 3)^2 + 2(3^{2n+1} + 3) + 4 \right)$$

حيث إن كلا الحدين في الطرف الأيمن أكبر من 1، إذاً العبارة المعطاة عدد مؤلف لجميع قيم $n \geq 1$.

39. نقوم بتحليل المقدار المعطى:

$$\begin{aligned} 4n^3 + 3n - 7 &= 4n^3 - 4 + 3n - 3 \\ &= 4(n-1)(n^2 + n + 1) + 3(n-1) \\ &= (n-1)(4n^2 + 4n + 7) \end{aligned}$$

إذا كان $n \geq 3$ ، فإن $n-1 \neq 1$ و $4n^2 + 4n + 7 \neq 1$ ومن ثم فالمقدار $4n^3 + 3n - 7$ عدد مؤلف. باختبار القيمتين $n=1$ و $n=2$ نجد أن $4n^3 + 3n - 7$ عدد أولي إذا كان $n=2$ فقط.

40. الإثبات ينتج من التحليل الآتي:

$$n^5 + n - 1 = (n^2 - n + 1)(n^3 + n^2 - 1)$$

كلا الحدين في الطرف الأيمن لا يساوي 1 عندما $n > 1$.

41. لاحظ أولاً أن $R_n = \underbrace{111\dots11}_n = \frac{10^n - 1}{9}$. إذا كان n عدداً مؤلفاً، فإن $n = ab$ حيث $1 < a, b < n$. بالتحليل نحصل على

$$R_n = R_{ab} = \frac{10^{ab} - 1}{9} = \frac{10^a - 1}{9} \times ((10^a)^{b-1} + (10^a)^{b-2} + \dots + 10^a + 1)$$

بما أن $9 \mid 10^a - 1$ و $a > 1$ و $b > 1$ فإن كلا الحدين في الطرف الأيمن أكبر من 1. نستنتج من ذلك أن R_n عدد مؤلف.

42. كما في إجابة السؤال السابق، نلاحظ أولاً أن $R_k = \frac{10^k - 1}{9}$. باستخدام مثال 6 نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} 9(R_n, R_m) &= (9R_n, 9R_m) = (10^n - 1, 10^m - 1) \\ &= 10^{(n,m)} - 1 = 9R_{(n,m)} \end{aligned}$$

بالقسمة على 9 نحصل على المطلوب.

43. نبدأ الحل بكتابة $n = 4k + r$ ، حيث $r = 0, 1, 2, 3$. لاحظ

الآن ما يأتي:

$$\begin{aligned} R_n = R_{4k+r} &= \underbrace{11\dots1}_{4k} \underbrace{00\dots0}_r + \underbrace{11\dots1}_r \\ &= \underbrace{11\dots1}_{4k} \times 10^r + \underbrace{11\dots1}_r \\ &= 1111 \times 100010001 \dots 10001 \times 10^r + \underbrace{11\dots1}_r \end{aligned}$$

حيث إن العدد $100010001 \dots 10001$ يحتوي على $k - 1$ مجموعة من الأصفار. بملاحظة أن $1111 = 11 \times 101$ وأن 101 لا يقسم $\underbrace{11\dots1}_r$

عندما يكون $r = 1, 2, 3$ فإننا نستنتج أن $1011 \mid R_n$ إذا و فقط إذا كان $r = 0$ ، أي أن $1011 \mid R_n$ إذا و فقط إذا كان $4 \mid n$.

ملحوظة عامة:

$$R_{nm} = \underbrace{11 \dots 1}_{nm} = \underbrace{11 \dots 1}_n \times \underbrace{100 \dots 01}_{n-1} \underbrace{100 \dots 01}_{n-1} \dots \underbrace{100 \dots 01}_{n-1}$$

حيث إن مجموعة الأصفار $\underbrace{00 \dots 0}_{n-1}$ مكررة $m - 1$ مرة.

44. يمكننا أن نأخذ $N = (k + 1)! + 2$ حيث $t = 1, 2, 3, \dots$

45. لنفرض أنه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث إن $p_n > n^2$ لجميع القيم $n \geq N$. هذا يقتضي أن $\frac{1}{p_n} < \frac{1}{n^2}$ لجميع القيم $n \geq N$. بما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية، نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ تقاربية أيضاً، وهذا غير صحيح. وبهذا التناقض يتم الإثبات.

46. أي عدد صحيح $n > 0$ يُمكن كتابته على إحدى الصُور الآتية:
 $n = 5k + 4$ فإن $n + 6 = 5(k + 2)$ ليس عدداً أولياً. وإذا كان
 $n = 5k + 3$ فإن $n + 12 = 5(k + 3)$ ليس عدداً أولياً. وإذا كان
 $n = 5k + 2$ فإن $n + 18 = 5(k + 4)$ ليس عدداً أولياً. وإذا كان
 $n = 5k + 1$ فإن $n + 24 = 5(k + 5)$ ليس عدداً أولياً. أما إذا كان
 $n = 5k$ فإن العدد الأولي الوحيد هو $n = 5$ عندما يكون $k = 1$. إذا كان
 $k > 1$ فإن $n = 5k$ ليس عدداً أولياً. بالتعويض نجد أنه عندما تكون

$n = 5$ فإن جميع الأعداد $5, 5+6, 5+12, 5+18, 5+24$ أعداد أولية. نستنتج من ذلك أن العدد الوحيد الذي يُحقق شرط السؤال هو $n = 5$.

47. نريد أن نجد عدداً صحيحاً موجباً x يحقق $p^n + 1 = x^2$

ندرس حالتين. عندما $p = 2$ نكتب المعادلة على الشكل $(x-1)(x+1) = 2^n$. حيث إن x عدد فردي، فإن $(x-1, x+1) = 2$. هذا يقتضي أنه إما $x-1 = 2$ و $x+1 = 2^{n-1}$ أو $x-1 = 2^{n-1}$ و $x+1 = 2$. وفي الحالة الثانية لا يوجد أي حل.

عندما يكون $p > 2$ عدداً أولياً فردياً فالمعادلة تأخذ الشكل $(x-1)(x+1) = p^n$. حيث إن x عدد زوجي، فإن $(x-1, x+1) = 1$. هذا يقتضي أنه إما $x-1 = 1$ و $x+1 = p^n$ أو $x-1 = p^n$ و $x+1 = 1$. وفي الحالة الثانية لا يوجد أي حل.

إذاً $p^n + 1$ مربع كامل عندما $(p, n) = (2, 3), (3, 1)$ فقط.

48. ليكن p عدداً أولياً يُحقق شرط السؤال. إذاً توجد أعداد أولية $p_1 > p_2$ و $q_1 > q_2$ تُحقق

$$p = p_1 + p_2, \quad p = q_2 - q_1$$

بما أن $p_1 + p_2 > 2$ ، فإن p عدد فردي. هذا يقتضي أنه إما p_1 أو p_2 عدد زوجي وأنه إما q_1 أو q_2 عدد زوجي. لذا يُمكننا أن نفرض أن $p_1 = q_1 = 2$ ومن ثم يُصبح لدينا الآتي:

$$p = 2 + p_2, \quad p = q_2 - 2$$

نستنتج من ذلك أن الأعداد الثلاثة $p-2, p, p+2$ أعداد أولية. وهذا ممكن فقط إذا كان $p=5$ (الإثبات متروك للقارئ). إذاً العدد الأولي $p=5$ هو العدد الأولي الوحيد الذي يمكن كتابته كفرق وكمجموع عددين أوليين آخرين.

49. من خواص الأعداد الزوجية و الفردية نستنتج أنه واحد فقط من الأعداد p, q, r يجب أن يكون زوجياً. إذا كان $r=2$ فإن

$$2^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2)$$

وهذا مستحيل لأن $p^2 - pq + q^2$ عدد فردي و $p^2 - pq + q^2 = (p-q)^2 + pq > 1$ أما إذا كان $p=2$ فإن

$$2^3 = (r-q)(r^2 + rq + q^2)$$

وهذا أيضاً مستحيل لأن $r^2 + rq + q^2$ عدد فردي و $r^2 + rq + q^2 > 1$. نحصل على نفس الاستنتاج إذا كان $q=2$. إذاً لا توجد أعداد أولية تُحقق المعادلة $p^3 + q^3 = r^3$.

50. لنفرض أن المجموع المعطى عدد صحيح S :

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ليكن k أكبر عدد صحيح يحقق $2^k \leq n$ (بما أن $n > 1$ فإن $k \geq 1$). ضع $P = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2r+1)$ ، حيث $2r+1 \leq n$. (أي أن P يساوي حاصل ضرب الأعداد الفردية التي هي أقل من أو تساوي n). إذا كان S عدداً صحيحاً، فإن $2^{k-1} \cdot P \cdot S$ عدد صحيح أيضاً. لكن في المجموع $2^{k-1} \cdot P \cdot S$ ، جميع الحدود أعداد صحيحة ما عدا الحد $\frac{2^{k-1} \cdot P}{2^k}$ ، وهذا

تناقض واضح. إذا نستنتج من ذلك أن S عدد غير صحيح.

51. لنفرض أن المجموع المعطى عدد صحيح S :

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

ليكن k أكبر عدد صحيح يحقق $3^k \leq 2n-1$ (بما أن $n > 1$ فإن $k \geq 1$).
 ضع $P = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ (أي أن P يساوي حاصل ضرب الأعداد الفردية التي هي أقل من أو تساوي $2n-1$). إذا كان S عدداً صحيحاً، فإن $3^{k-2} \cdot P \cdot S$ عدد صحيح أيضاً. لكن في المجموع $3^{k-2} \cdot P \cdot S$ ، جميع الحدود أعداد صحيحة ما عدا الحد $\frac{3^{k-2} \cdot P}{3^k}$ ، وهذا تناقض واضح. إذا نستنتج من ذلك أن S عدد غير صحيح.

52. لنفرض أن $(n!)^2 + k = p^r$ ، حيث إن p عدد أولي و $r \geq 1$.
 بما أن $2 \leq k \leq n$ ، إذاً $k \mid n!$. هذا يعني أن $(n!)^2 + k = p^r$ و $k \mid (n!)^2 + k$ ومن ثم $k = p^t$ حيث $1 \leq t \leq r$. نلاحظ أيضاً أن $t \neq r$ وإلا سنحصل على $(n!)^2 + p^r = p^r$ أو $(n!)^2 = 0$ ، وهذا تناقض واضح. هذا يقتضي أن $1 \leq t < r$. حيث إن $(n!)^2 = p^r - k = p^t(p^{r-t} - 1)$ و $k = p^t \mid n!$ ، إذاً $p^{2t} \mid p^t(p^{r-t} - 1)$. بالتبسيط نحصل على $p^{r-t} - 1 \mid p^t$ ، وهذا تناقض واضح لأن $r \neq t$ و $t \geq 1$. بسبب هذا التناقض يكمل الإثبات.

53. لنفرض أنه يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث إن $a_{n_0} = 5$. من الواضح إذاً أن $n_0 > 2$. هذا يقتضي أن أكبر العوامل الأولية للعدد $P_{n_0} = 1 + a_1 a_2 \dots a_{n_0-1}$ يساوي 5، أي أن

$$P_{n_0} = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 1.$$

بما أن P_{n_0} عدد فردي (لأن $a_1 = 2$) فإن $\alpha = 0$. أيضاً بما أن P_{n_0} عدد لا يقبل القسمة على 3 (لأن $a_2 = 3$) فإن $\beta = 0$. نستنتج من ذلك أن

$$P_{n_0} = 5^\gamma, \quad \gamma \geq 1$$

هذا يُعطينا

$$a_1 a_2 \cdots a_{n_0-1} = 5^\gamma - 1 = (5-1)(5^{\gamma-1} + \cdots + 5 + 1)$$

أو ($a_1 = 2$)

$$a_2 \cdots a_{n_0-1} = 5^\gamma - 1 = 2(5^{\gamma-1} + \cdots + 5 + 1)$$

أي أن $a_2 \cdots a_{n_0-1}$ عدد زوجي وهذا مستحيل لأن $a_i \neq 2$ لجميع القيم $i \geq 2$ (وذلك بسبب أن P_i عدد فردي لجميع القيم $i \geq 2$) لذا نستنتج أن $a_n \neq 5$ لجميع القيم $n \geq 1$.

54. لنفرض أن \sqrt{n} عدد نسبي، أي أن

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b}$$

حيث a و $b \neq 0$ عددان صحيحان. نفرض أيضاً أن $(a, b) = 1$. بتربيع الطرفين نحصل على المساواة $a^2 = nb^2$. بما أن n ليس مربعاً كاملاً فإنه يوجد عدد أولي p وعدد صحيح $k \geq 0$ بحيث إن $n \parallel p^{2k+1}$. من المساواة $a^2 = nb^2$ نستنتج أن a^2 و $p \mid a^2$ ومن ثم $p \mid a$. لنكتب $a = p^r t$ حيث $r \geq 1$ و $(p, t) = 1$. حيث إن $(a, b) = 1$ فإن $p \nmid b$. إذاً من المساواة $a^2 = nb^2$ نستنتج أن $a^2 \parallel p^{2r}$ و $p^{2k+1} \parallel nb^2$ ، وهذا يناقض النظرية الأساسية للحساب (المساواة $a^2 = nb^2$ تُحتم على العدد الأولي p أن يكون مرفوعاً لنفس القوة في كلا الطرفين). هذا التناقض يقتضي أن \sqrt{n} عدد غير نسبي.

55. إذا كان $\log_b a$ عدداً نسياً، فإنه يوجد عددان صحيحان

موجبان m و n بحيث $\log_b a = m/n$. هذا يقتضي أن $a = b^{m/n}$ أو $a^n = b^m$. بما أن $a > 1$ فإنه يوجد عدد أولي p يقسم a . هذا يقتضي أن $p | b^m$ ومن ثم $p | b$. وهذا تناقض لأن $(a, b) = 1$. من ذلك نستنتج أن $\log_b a$ عدد غير نسبي.

56. نفرض أن $\sin 1$ عدد غير نسبي و لنكتب $\sin 1 = \frac{m}{n}$ حيث m و $n \neq 0$ عددان صحيحان. نستخدم المتسلسلة $\sin 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. ليكن $2l+1$ أصغر عدد صحيح فردي موجب أكبر من أو يساوي n . بضرب المتسلسلة السابقة بـ $(2l+1)!$ نحصل على الآتي:

$$(2l+1)! \frac{m}{n} = A_l + B_l$$

حيث

$$A_l = (2l+1)! \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$B_l = (2l+1)! \sum_{k=l+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$= \pm \frac{1}{(2l+2)(2l+3)} \mp \frac{1}{(2l+2)(2l+3)(2l+4)(2l+5)} \pm \dots$$

$$= \pm a_1 \mp a_2 \pm \dots$$

بما أن $(2l+1)! \frac{m}{n}$ و A_l عددان صحيحان، فلا بد أن يكون B_l عدداً صحيحاً أيضاً، وهذا مستحيل لأنه إما

$$0 < a_1 - a_2 < B_l < a_1 < 1$$

أو

$$-1 < -a_1 < B_l < -a_1 + a_2 < 0$$

أي أن B_1 ليس عدداً صحيحاً. هذا التناقض يثبت أن $\sin 1$ عدد غير نسبي.

57. حيث إن $k \mid (n, n+k)$ ، فإن المعادلة $nx + (n+k)y = k$ قابلة للحل. بملاحظة أن $x_0 = -1$ و $y_0 = 1$ يحققان المعادلة، إذاً جميع الحلول معطاة على النحو الآتي:

$$x = -1 + (n+k)t, y = 1 - nt$$

حيث t عدد صحيح.

58. نُكوّن المعادلة $\frac{x}{35} + \frac{y}{91} = \frac{1}{65}$ ، ومنها نحصل على المعادلة الخطية $91x + 35y = 49$ أو $13x + 5y = 7$. باستخدام خوارزمية القسمة نجد أن $x = 14, y = -35$ هو أحد الحلول. (الحلول الأخرى هي $x = 14 + 5t, y = -35 - 13t$ لأي عدد صحيح t) إذاً الكسران $\frac{14}{35}$ و $\frac{-35}{91}$ يحققان المطلوب.

59. بما أن $(153, 119) = 17$ ، فإن المعادلة الخطية المعطاة قابلة للحل إذا كان $17 \mid 1000 + m$. بملاحظة أن $1000 = 17(58) + 14$ ، نجد أن أصغر عدد صحيح موجب m يحقق المطلوب هو $m = 3$. بهذا العدد m ، المعادلة تصبح $9x + 7y = 59$. الحل العام لهذه المعادلة هو (x, y) عدد صحيح

$$x = 236 + 7t$$

$$y = -295 - 9t$$

60. بما أن $(a, b) = 1 \mid k$ فإن المعادلة $ax + by = k$ قابلة للحل.

ليكن (x_0, y_0) حلاً للمعادلة. إذاً جميع الحلول مُعطاة على النحو الآتي:

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at, \quad t \in \mathbb{Z}$$

لكي يتحقق الشرطان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ لابد أن نختار الأعداد الصحيحة t التي تُحقق الشرطين الآتين

$$x_0 + bt \geq 0, \quad y_0 - at \geq 0$$

هذا يقتضي أن t لابد أن تُحقق

$$\frac{-x_0}{b} \leq t \leq \frac{y_0}{a}$$

نستنتج من ذلك أنه إذا كان $b \mid x_0$ فإن عدد الحلول يساوي

$$\left\lfloor \frac{y_0}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-x_0}{b} \right\rfloor + 1$$

وإذا كان $b \nmid x_0$ فإن عدد الحلول يساوي

$$\left\lfloor \frac{y_0}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{-x_0}{b} \right\rfloor$$

61. حيث إن $(5, 22, 18) = 1$ يقسم 3، فإن المعادلة

$$5x + 22y + 18z = 3$$

قابلة للحل. نبدأ بكتابة x (لاحتوائه على أصغر معامل) بدلالة المتغيرين الآخرين

$$x = \frac{3 - 22y - 18z}{5} = -4y - 3z + \frac{3 - 2y - 3z}{5}$$

بما أن x عدد صحيح، إذاً لابد أن يكون $\frac{3 - 2y - 3z}{5}$ عدد صحيح، لنقل أنه t :

$$t = \frac{3 - 2y - 3z}{5}$$

نكتب الآن y (أيضاً لاحتوائه على أصغر معامل عند تجاهل الإشارة) بدلالة المتغيرين الآخرين

$$y = \frac{3-5t-3z}{2} = 1-2t-z + \frac{1-t-z}{2}$$

حيث إن y عدد صحيح، إذاً لابد أن يكون $\frac{1-t-z}{2}$ عدد صحيح، لنقل أنه u :

$$u = \frac{1-t-z}{2}$$

هذا يقتضي أن

$$z = 1-t-2u$$

$$y = -t + 3u$$

$$x = -3 + 8t - 6u$$

حيث t و u عدنان صحيحان، وهي تمثل حلول المعادلة الخطية المعطاة.

62. بما أن $(7, -9, 10, -11) = 1$ يقسم 23، إذاً المعادلة

$$7x - 9y + 10z - 11w = 23$$

قابلة للحل. باستخدام الطريقة المستخدمة في السؤال السابق نحصل على الحل الآتي:

$$x = 2 + 4t + u - v$$

$$y = -1 + 2t + 3u - 2v$$

$$z = -t + 2u$$

$$w = v$$

حيث t, u, v أعداد صحيحة.

63. بما أن المجموعة $\{c_i + d_j m_1 : 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2\}$

تحتوي على $m_1 m_2$ عدد فلايثبات أن المجموعة تُمثّل نظام رواسب تام قياس $m_1 m_2$ يكفي أن نُثبت أن أي عددين من هذه المجموعة غير متطابقين قياس $m_1 m_2$. لنفرض أن

$$c_i + d_j m_1 \equiv c_k + d_l m_1 \pmod{m_1 m_2}$$

هذا يقتضي أن $c_i + d_j m_1 \equiv c_k + d_l m_1 \pmod{m_1}$ أو $c_i \equiv c_k \pmod{m_1}$ ومن ثم $c_i = c_k$ لأن c_1, c_2, \dots, c_{m_1} تُمثّل نظام رواسب تام قياس m_1 . هذا يُعطينا التطابق

$$d_j m_1 \equiv d_l m_1 \pmod{m_1 m_2}$$

والذي بدوره يُعطينا $d_j \equiv d_l \pmod{m_2}$ ومن ثم $d_j = d_l$ لأن d_1, d_2, \dots, d_{m_2} تُمثّل نظام رواسب تام قياس m_2 . نستنتج من ذلك أن $c_i + d_j m_1 = c_k + d_l m_1$ أي أن أي عددين مُختلفين من المجموعة المعطاة لا يمكن أن يكونا متطابقين قياس $m_1 m_2$. إذاً المجموعة $\{c_i + d_j m_1 : 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2\}$ تُمثّل نظام تام قياس $m_1 m_2$.

64. إذا كان $n = 2$ فإن العددين $1 \cdot 2, 2 \cdot 3$ لا يُمثّلان نظام رواسب تام قياس 2 لأن $1 \cdot 2 \equiv 2 \cdot 3 \pmod{2}$. وإذا كان $n = 3$ فإن الأعداد $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4$ لا تُمثّل نظام رواسب تام قياس 3 لأن $2 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 4 \pmod{3}$. وفي حالة $n \geq 4$ فأيضاً الأعداد $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, (n-2) \cdot (n-1), (n-1) \cdot n, n \cdot (n+1)$ تُمثّل نظام رواسب تام قياس n لأن $(n-2) \cdot (n-1) \equiv n^2 - 3n + 2 \equiv 2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{n}$. نستنتج من ذلك أن الأعداد $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, n \cdot (n+1)$ لا تُمثّل نظام رواسب تام قياس أي عدد صحيح $n \geq 2$.

65. لاحظ أولاً أن $(a^3, p) = 1$ لجميع الأعداد $a = 1, 2, \dots, p-1$. بما أن المجموعة $\{1^3, 2^3, \dots, (p-1)^3\}$ تحتوي على $p-1$ عدد فإنه لإثبات أن المجموعة تُمثّل نظام رواسب مُختزّل قياس p يكفي أن نثبت أن أي عددين في المجموعة غير متطابقين قياس p . لنأخذ عددين a و b بحيث إن $1 \leq a, b \leq p-1$ و

$$a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$$

حيث إن $(3, p-1) = 1$ فإنه يوجد معكوس ضرب k ($1 \leq k \leq p-1$) قياس $p-1$ للعدد 3، أي أن $3k \equiv 1 \pmod{p-1}$ ، أو $3k = 1 + l(p-1)$ حيث $l > 0$ عدد صحيح. هذا يقتضي أن

$$a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p} \Rightarrow a^{1+l(p-1)} \equiv b^{1+l(p-1)} \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a \equiv b \pmod{p}$$

ومن ثم $a = b$ لأن الأعداد $1, 2, \dots, p-1$ تمثل نظام رواسب مختزل قياس p . هذا يثبت أن المجموعة $\{1^3, 2^3, \dots, (p-1)^3\}$ تمثل نظام رواسب مُختزّل قياس p .

عندما يكون $(3, p-1) \neq 1$ فالنتيجة يمكن أن لا تتحقق. على سبيل المثال عندما نأخذ $p = 7$ فإن $(3, 6) = 3 \neq 1$ والأعداد $1^3, 2^3, \dots, 6^3$ لا تُمثّل نظام رواسب مُختزّل قياس 7 لأن $1^3 \equiv 2^3 \pmod{7}$.

66. بإجراء الحسابات الآتية

$$7^2 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 7^{2^n} \equiv 1 \pmod{15}$$

$$8^2 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 8^4 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 8^{2^n} \equiv 1 \pmod{15}$$

$$9^2 \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow 9^4 \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow 9^{2^n} \equiv 6 \pmod{15}$$

نستنتج أن

$$4 \cdot 7^{2^n} + 5 \cdot 8^{2^n} + 6 \cdot 9^{2^n} \equiv 4 + 5 + 36 \equiv 0 \pmod{15}$$

$$\text{أي أن } 15 \mid 4 \cdot 7^{2^n} + 5 \cdot 8^{2^n} + 6 \cdot 9^{2^n}$$

67. بملاحظة أن $25 \equiv 4 \pmod{21}$ و

$$\begin{aligned} 4^{n+2} + 5^{2n+1} &= 16 \times 4^n + 5 \times 25^n \equiv 16 \times 4^n + 5 \times 4^n \\ &= 21 \times 4^n \equiv 0 \pmod{21} \end{aligned}$$

نستنتج أن $21 \mid 4^{n+2} + 5^{2n+1}$.

68. بملاحظة أن $36 \equiv 2 \pmod{34}$ و $2^5 \equiv -2 \pmod{34}$ نحصل

على

$$36^{50} \equiv 2^{50} = (2^5)^{10} \equiv (-2)^{10} = (2^5)^2 \equiv (-2)^2 = 4 \pmod{34}$$

وبملاحظة أن $37 \equiv 3 \pmod{34}$ و $3^5 \equiv 5 \pmod{34}$ و

$$5^3 \equiv 13 \pmod{34} \text{ نحصل على}$$

$$37^{50} \equiv 3^{50} \equiv 5^{10} \equiv 5(13)^3 \equiv -3(13)^2 \equiv -5(13) \equiv 3 \pmod{34}$$

هذا يقتضي أن $36^{50} + 37^{50} \equiv 4 + 3 \equiv 7 \pmod{34}$ ومن ثم فإن باقي

$$\text{قسمة } 36^{50} + 37^{50} \text{ على } 34 \text{ يساوي } 7.$$

69. حيث إن $a \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{9}$ ، فبتكعيب الطرفين

$$\text{وبالتبسيط، نحصل على } a^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod{9}.$$

70. لنفرض أن $9n + 5 = a^3 + b^3 + c^3$. بحساب المعادلة قياس 9

وباستخدام السؤال السابق، نحصل على الاحتمالات التالية

$$a^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{9}, \text{ والتي جميعها خاطئة. إذ لا يمكن كتابة أي}$$

عدد ذي الصيغة $9n + 5$ كمجموع ثلاثة أعداد مكعبة.

71. الأعداد الزوجية تُحقق التطابق $x \equiv 0 \pmod{2}$. الأعداد الفردية تُحقق التطابق $x \equiv 1, 3, 5, 7, 9, 11 \pmod{12}$. إذا كان $x \equiv 3, 9 \pmod{12}$ ، فإن $x \equiv 0 \pmod{3}$. وإذا كان $x \equiv 1, 5 \pmod{12}$ ، فإن $x \equiv 1 \pmod{4}$. وإذا كان $x \equiv 7 \pmod{12}$ ، فإن $x \equiv 1 \pmod{6}$. الاحتمال الأخير $x \equiv 11 \pmod{12}$ يبقى كما هو.

72. بإجراء الحسابات الآتية، نحصل على المطلوب:

$$3^5 = 27 \times 9 \equiv 10 \times 9 \equiv 5 \pmod{17}$$

$$3^{15} \equiv 5^3 \equiv 8 \times 5 \equiv 6 \pmod{17}$$

$$3^{30} \equiv 6^2 \equiv 2 \pmod{17}$$

73. لاحظ أولاً أن $10^n \equiv 1 \pmod{3}$. هذا يعني أنه يمكننا أن نكتب $10^n = 3k + 1$ ، حيث k عدد صحيح موجب. بالحسابات الآتية نحصل على المطلوب:

$$2^{10^n} = 2^{3k+1} = 8^k \times 2 \equiv 1^k \times 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

74. يمكننا استخدام الاستقراء الرياضي لإثبات المطلوب بسهولة. سوف نقوم باستخدام طريقة أخرى. لاحظ أولاً أن $5^n \equiv 0 \pmod{25}$ إذا كان $n \geq 2$. وحيث إن $5 \equiv 1 \pmod{4}$ فإن $5^n \equiv 1 \pmod{4}$ لجميع القيم $n \geq 2$. هذا يعطينا النظام الآتي:

$$5^n \equiv 0 \pmod{25}$$

$$5^n \equiv 1 \pmod{4}$$

بوضع $x = 5^n$ ومن ثم حل النظام بواسطة نظرية الباقي الصينية، نجد أن الحل هو $x \equiv 25 \pmod{100}$ ، أي أن $5^n \equiv 25 \pmod{100}$.

75. نقوم بحساب العددين $11!$ و $21!$ قياس 23. نحصل أولاً على

$$\begin{aligned} 11! &= 11 \times (10 \times 9) \times (8 \times 7) \times (6 \times 5) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) \\ &\equiv 11 \times (-2) \times (10) \times (7) \times (1) \\ &= (-22) \times (70) \\ &\equiv (1) \times (1) \\ &\equiv 1 \pmod{23} \end{aligned}$$

أيضاً نلاحظ ما يأتي:

$$\begin{aligned} 21! &= 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times \dots \times 20 \times 21 \\ &\equiv 11! \times (-11) \times (-10) \times (-9) \times \dots \times (-3) \times (-2) \\ &\equiv 11! \times 11! \\ &\equiv 1 \times 1 \\ &\equiv 1 \pmod{23} \end{aligned}$$

هذا يقتضي أن $21! \equiv 11! \pmod{23}$.

76. أي عدد أولي $p \geq 5$ يُحقق إحدى التطابقات الآتية

$p \equiv 1, 5, 7, 11 \pmod{12}$. بتربيع الطرفين نحصل على المطلوب:

$$\begin{aligned} p^2 &\equiv 1, 25, 49, 121 \pmod{12} \\ &\equiv 1, 1, 1, 1 \pmod{12} \\ &\equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

77. أولاً لاحظ أن $p \geq 2$ يقتضي— أن $p^2 + 2^p > 3$. إذا كان

$p = 2$ فإن $p^2 + 2^p = 8$ عدد غير أولي. نفرض الآن أن p عدد أولي

فردى. إذا كان $p \equiv 1 \pmod{3}$ فإن

$$p^2 + 2^p \equiv 1^2 + (-1)^p \equiv 0 \pmod{3}$$

ومن ثم $p^2 + 2^p$ عدد غير أولي. إذا كان $p \equiv 2 \pmod{3}$ فإن

$$p^2 + 2^p \equiv 2^2 + (-1)^p \equiv 0 \pmod{3}$$

ومن ثم $p^2 + 2^p$ عدد غير أولي. إذا كان $p \equiv 0 \pmod{3}$ فلا بد أن يكون $p = 3$ لأن p عدد أولي. في هذه الحالة $p^2 + 2^p = 9 + 8 = 17$ عدد أولي. إذاً يوجد عدد أولي وحيد هو $p = 3$ يجعل $p^2 + 2^p$ عدداً أولياً.

78. لنكتب

$$N = a_{2k+1}a_{2k} \cdots a_3a_2a_1a_0$$

$$= a_{2k+1}a_{2k} \times 100^k + \cdots + a_3a_2 \times 100 + a_1a_0$$

حيث $0 \leq a_i \leq 9$ لجميع القيم i . بما أن $100 \equiv 1 \pmod{99}$ ، فإن

$$N \equiv a_{2k+1}a_{2k} + \cdots + a_3a_2 + a_1a_0 \pmod{99}$$

أي أن N يقبل القسمة على 99 إذا وفقط إذا كان مجموع الأرقام المكوّنة للعدد N مأخوذةً منثنىً منثنىً، ومبتدئاً من خانة الآحاد، يقبل القسمة على 99. فعلى سبيل المثال

$$546312 \equiv 54 + 63 + 12 = 129 \equiv 30 \pmod{99}$$

$$396 \equiv 3 + 96 = 99 \equiv 0 \pmod{99}$$

أي أن $99 \mid 546312$ و $99 \nmid 396$.

79. نلاحظ أولاً أن $1000 = 27 \times 37 + 1 \equiv 1 \pmod{27}$. نأخذ

عدداً صحيحاً N ونقسم الأرقام المكوّنة له إلى مجموعات كل مجموعة

مؤلفة من ثلاثة أرقام ابتداءً من خانة الآحاد:

$$\begin{aligned} N &= a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k} \cdots a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \\ &= a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k} \times 1000^k + \cdots + a_5a_4a_3 \times 1000 + a_2a_1a_0 \end{aligned}$$

حيث $0 \leq a_i \leq 9$ لجميع القيم i . بما أن $1000 \equiv 1 \pmod{27}$ فإن

$$N \equiv a_{3k+2}a_{3k+1}a_{3k} + \cdots + a_5a_4a_3 + a_2a_1a_0 \pmod{27}$$

هذا يقتضي أن N يقبل القسمة على 27 إذا فقط إذا كان مجموع الأرقام المكوّنة للعدد N مأخوذاً على شكل مجموعات ثلاثية، ومبتدئاً من خانة الآحاد، يقبل القسمة على 27. فعلى سبيل المثال

$$6615 \equiv 6 + 615 = 621 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$573118 \equiv 573 + 118 = 691 \equiv 16 \pmod{27}$$

أي أن $27 \mid 6615$ و $27 \nmid 573118$.

80. ندرس الحالتين المحتملتين لقيمة n . إذا كان $n = 2k$ عدداً زوجياً فسوف نحصل على

$$4 \cdot 14^{2k} + 1 \equiv 4(-1)^{2k} + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

وإذا كان $n = 2k + 1$ عدداً فردياً فسوف نحصل على

$$4 \cdot 14^{2k+1} + 1 \equiv 1 \cdot (-1)^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

أي أن $5 \mid 4 \cdot 14^n + 1$ إذا كان n عدداً زوجياً و $3 \mid 4 \cdot 14^n + 1$ إذا كان n عدداً فردياً. هذا يقتضي أن أي عدد على الصورة $4 \cdot 14^n + 1$ هو عدد مؤلف.

81. نلاحظ أولاً أن العبارة صحيحة إذا كان $r = 1$. لذا نفرض أن

$r > 1$. إذا كان $p = 2$ فإن

$$\binom{2r}{2} - r = 2r(r-1)$$

ومن ثم $\binom{2r}{2} \equiv r \pmod{2}$. الآن نفرض أن $p > 2$. بما أن

$$(p-1)! \binom{rp}{p} = r(rp-1)(rp-2)\cdots(rp-(p-1))$$

و

$$(rp-1)(rp-2)\cdots(rp-(p-1)) \equiv (-1)(-2)\cdots(-(p-1)) \\ \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

إذاً $(p-1)! \binom{rp}{p} \equiv r \cdot (p-1)! \pmod{p}$. هذا يقتضي أن

$$\binom{rp}{p} \equiv r \pmod{p} \text{ لأن } (p, (p-1)!) = 1$$

82. بملاحظة أن

$$\binom{p^r}{k} = \frac{(p^r)!}{k!(p^r-k)!} = \frac{p^r \cdot (p^r-1)!}{k \cdot (k-1)!(p^r-k)!} = \binom{p^r-1}{k-1} \frac{p^r}{k}$$

يمكننا أن نكتب $k \binom{p^r}{k} = \binom{p^r-1}{k-1} p^r$. بما أن $1 \leq k \leq p^r-1$ ، إذاً

$(k, p^r) = p^t$ حيث أن القيم المحتملة للأُس t هي $0, 1, 2, \dots, r-1$.

هذا يقتضي أن $\binom{p^r-1}{k-1} p^{r-1} \mid k$ ومن ثم فالعدد $\frac{\binom{p^r-1}{k-1} p^{r-1}}{k}$ هو

عدد صحيح. نستنتج من ذلك أن

$$\binom{p^r}{k} = \binom{p^r-1}{k-1} \frac{p^{r-1}}{k} \times p \equiv 0 \pmod{p}$$

83. إذا كان $a \equiv 1 \pmod{m^k}$ فإنه يمكننا أن نكتب $a = 1 + m^k t$ ،

حيث t عدد صحيح. هذا يعطينا الآتي:

$$\begin{aligned} a^m &= (1 + m^k t)^m \\ &= 1 + \binom{m}{1} m^k t + \binom{m}{2} (m^k t)^2 + \dots + \binom{m}{m} (m^k t)^m \\ &\equiv 1 \pmod{m^{k+1}} \end{aligned}$$

84. حيث إنَّ $936 = 8 \times 9 \times 13$ و $(n, 936) = 1$ فإن
 $(n, 8) = (n, 9) = (n, 13) = 1$. باستخدام نتيجة 19 نحصل على التطابق

$$n^{13} \equiv n \pmod{13}$$

بملاحظة أن $\phi(9) = 6$ فباستخدام نظرية أويلر نحصل على
 $n^6 \equiv 1 \pmod{9}$. بتربيع الطرفين نحصل على $n^{12} \equiv 1 \pmod{9}$. بضرب
 الطرفين في n نحصل على التطابق

$$n^{13} \equiv n \pmod{9}$$

بنفس الطريقة نجد أن $n^4 = n^{\phi(8)} \equiv 1 \pmod{8}$. بتكعيب الطرفين ومن ثم
 ضرب الطرفين في n نحصل على التطابق

$$n^{13} \equiv n \pmod{8}$$

من التطابقات الثلاث أعلاه نستنتج أن $n^{13} \equiv n \pmod{[8,9,13]}$ ، أو
 $n^{13} \equiv n \pmod{936}$ ، أي أن $936 \mid n^{13} - n$.

85. لنفرض أن $19 \mid n^2 + 4$. إذاً $n^2 \equiv -4 \pmod{19}$. هذا يقتضي
 أن $(n, 19) = (-4, 19) = 1$ و $n^{18} \equiv -4^9 \pmod{19}$. وحيث إنَّ

$$4^9 \equiv (4^2)^4 \cdot 4 \equiv (-3)^4 \cdot 4 \equiv 5 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{19}$$

إذاً $n^{18} \equiv -1 \pmod{19}$ ، وهذا مستحيل لأنه يناقض نظرية فيرما)

19 | $n^2 + 4$ أن ذلك نستنتج من ذلك أن $n^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

86. لاحظ أولاً أن $a^n - a$ عدد زوجي. إذا $a^n \equiv a \pmod{2}$ نقوم الآن بإثبات أن $a^n \equiv a \pmod{3}$. إذا كان $3 \mid a$ فإن $a^n \equiv a \pmod{3}$. لنفرض أن $(a, 3) = 1$ ولنكتب $n = 2k + 1$ حيث $k \geq 0$ عدد صحيح. باستخدام نظرية فيرما، نجد أن $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. بالرفع إلى الأس k ومن ثم ضرب الطرفين بالعدد a نحصل على $a^n = a^{2k+1} \equiv a \pmod{3}$. إذاً $a^n \equiv a \pmod{3}$ لأي عدد صحيح a وأي عدد فردي n . نستنتج من ذلك أن $a^n \equiv a \pmod{[2,3]}$ ، أي أن $a^n \equiv a \pmod{6}$.

87. إذا كان $p \mid 1 + n + \dots + n^{p-2}$ ، فلا بد أن يكون $p \mid n$ (وإلا سوف نحصل على $p \mid 1$ ، وهذا تناقض). باستخدام نظرية فيرما يصبح لدينا $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ، أي أن $p \mid n^{p-1} - 1$ بما أن

$$n^{p-1} - 1 = (n-1)(1+n+\dots+n^{p-2}) \dots \dots (*)$$

فإننا نستنتج أنه إما $p \mid n - 1$ أو $p \mid 1 + n + \dots + n^{p-2}$. باستخدام السؤال رقم 31، نجد أن $(n-1, p-1) = \left(\frac{n^{p-1}-1}{n-1}, n-1 \right)$. نستنتج من ذلك أنه إذا كان $p \mid \frac{n^{p-1}-1}{n-1}$ ، فإن $p \mid n-1$ (وإلا سوف نحصل على $(n-1, p-1) \mid p-1$ ومن ثم $p \mid p-1$ ، وهذا تناقض). إذاً إذا كان $p \mid 1 + n + \dots + n^{p-2}$ ، فإن $n \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ والعكس أيضاً صحيح: إذا كان $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ، فإن $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (بواسطة نظرية فيرما). وإذا كان $n \not\equiv 1 \pmod{p}$ ، فإنه من (*) ينتج $p \mid 1 + n + \dots + n^{p-2}$. نستنتج من ذلك أن قيم n الصحيحة التي تحقق شرط السؤال هي $n \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$.

88. بما أن $p-2$ عدد فردي فإن $a^{p-2} \equiv -(p-a)^{p-2} \pmod{p}$ ،
أو $a^{p-2} + (p-a)^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن

$$\begin{aligned} & 1^{p-2} + 2^{p-2} + \dots + (p-1)^{p-2} \\ & \equiv [1^{p-2} + (p-1)^{p-2}] + \dots + \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} + \left(p - \frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \right] \pmod{p} \\ & \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

89. نقوم بحساب $1117^{2228^{3339}}$ قياس 10. لنضع $A = 2228^{3339}$.
لاحظ أولاً أن $1117 \equiv 7 \pmod{10}$ و $\phi(10) = 4$ و $A \equiv 0 \pmod{4}$ ،
أي $A = 4k$ ، حيث k عدد صحيح موجب. باستخدام نظرية أويلر
نحصل على $7^{\phi(10)} = 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$ ومن ثم

$$1117^{2228^{3339}} = 1117^A \equiv 7^{4k} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{10}$$

هذا يقتضي أن الرقم الموجود في منزلة الآحاد للعدد $1117^{2228^{3339}}$ يساوي 1.

90. لإيجاد الأرقام الموجودة في منزلتي الآحاد والعشرات للعدد
 $13^{14^{15}}$ نقوم بحساب هذا العدد قياس 100. بما أن $\phi(100) = 40$
فباستخدام نظرية أويلر نجد أن $13^{40} \equiv 1 \pmod{100}$. لنضع $A = 14^{15}$.
نحسب A قياس 5 و 8:

$$A = 14^{15} \equiv (-1)^{15} \equiv -1 \pmod{5}$$

$$A = 14^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -2 \pmod{8}$$

باستخدام نظرية الباقي الصينية نجد أن $A \equiv 24 \pmod{40}$ ، أي أن

$$A = 24 + 40k \text{ حيث } k \text{ عدد صحيح موجب. هذا يقتضي أن}$$

$$13^{14^{15}} = 13^A = 13^{24+40k} \equiv 13^{24} \pmod{100}$$

لكن

$$13^{24} = 169^{12} \equiv (-31)^{12} = 961^6 \equiv 61^6 = 3721^3 \equiv 21^3 \\ = 9261 \equiv 61 \pmod{100}$$

هذا يقتضي أن $13^{145} \equiv 61 \pmod{100}$ ومن ثم فإن الرقمين الموجودين في منزلتي الآحاد والعشرات للعدد 13^{145} هما 61.

91. المطلوب هو إيجاد عدد صحيح موجب b يحقق $0 \leq b < 1000$ و $3^{9997} \equiv b \pmod{1000}$. بما أن $\phi(1000) = 400$ ، إذاً باستخدام نظرية أويلر نحصل على $3^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$ ومن ثم $3^{10000} \equiv 1 \pmod{1000}$. أيضاً $3^{10000} \equiv 27b \pmod{1000}$. هذا يقتضي أن $27b \equiv 1 \pmod{1000}$. نقوم بحل هذا التطابق الخطي بتحويله إلى معادلة ديوفانتية خطية $27b + 1000k = 1$. باستخدام خوارزمية أقليدس نجد بسهولة أن $b \equiv 37 \pmod{1000}$. نستنتج من ذلك أن آخر ثلاثة أرقام للعدد 3^{9997} هي 037.

92. من فرض السؤال نستنتج أولاً أن $(n, 2) = 1$. لنفرض أن n عدد أولي. باستخدام نظرية فيرما نحصل على التطابق $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. بضرب التطابق المعطى $2^{n-2} \equiv 1 \pmod{n}$ بالعدد 2 نحصل على التطابق $2^{n-1} \equiv 2 \pmod{n}$ ومن ثم $1 \equiv 2 \pmod{n}$ ، أي أن $n \mid 1$ ، وهذا مستحيل لأن $n > 2$. نستنتج من ذلك أن n عدد مؤلف.

93. إذا كان $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ فإنه برفع طرفي التطابق إلى الأس $p+1$ نحصل على $2^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. الآن لنفرض أن $2^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. هذا يقتضي أن $1 - 2^{p^2-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$. نكون المتطابقة التالية:

$$2^{p^2-1} - 1 = 2^{(p-1)(p+1)} - 1 = (2^{p-1} - 1)(2^{p(p-1)} + \dots + 2^{2(p-1)} + 2^{p-1} + 1)$$

باستخدام نظرية فيرما نحصل على

$$\begin{aligned} 2^{p(p-1)} + \dots + 2^{2(p-1)} + 2^{p-1} + 1 &\equiv 1 + \dots + 1 + 1 + 1 \pmod{p} \\ &\equiv p + 1 \equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

أي أن $(2^{p(p-1)} + \dots + 2^{2(p-1)} + 2^{p-1} + 1, p) = 1$. الآن حيث إن $p^2 \mid 2^{p^2-1} - 1$ و $(2^{p(p-1)} + \dots + 2^{2(p-1)} + 2^{p-1} + 1, p^2) = 1$ فإن $p^2 \mid 2^{p^2-1} - 1$ ، أي أن $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ وبهذا يتم الإثبات.

94. حيث إن $\phi(2^n) = 2^{n-1}$ و $(2^n, 5) = 1$ فباستخدام نظرية أويلر نحصل على التطابق $5^{\phi(2^n)} \equiv 1 \pmod{2^n}$ ، أي $5^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{2^n}$. هذا يقتضي أن $5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n a_n$ حيث a_n عدد صحيح موجب .

95. بواسطة نظرية ولسون $p \mid (p-1)! + 1$ وبملاحظة أن $k \mid (p-1)! + 1$ لجميع القيم $2 \leq k \leq p-1$ ، نستنتج أن $(p!, (p-1)! + 1) = p$.

96. التطابق $(2n-3)! \equiv 0 \pmod{2n}$ مُتحقق عندما $n = 3$. لنفرض أن $n > 3$. إذاً $2n-3 > 2$ و $2n-3 > n$ (لأن $n > 3$) . هذا يعني أن العددين 2 و n يظهران كحدّين في المضروب $(2n-3)!$ ، أي أن $(2n-3)! \equiv 0 \pmod{2n}$ ومن ثم $(2n-3)! \equiv 0 \pmod{2n}$.

97. نستخدم نظرية ولسون: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. نُعيد كتابة التطابق السابق على النحو الآتي:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-k) \cdot (p-k+1) \cdot (p-k+2) \cdots$$

$$(p-k+k-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

بإيجاد قيمة الحدود الأخيرة قياس p ، نحصل على

$$(p-k)! \cdot (-(k-1)) \cdot (-(k-2)) \cdots (-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

وبالتبسيط يصبح لدينا

$$(p-k)! \cdot (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

وبالقسمة على $(-1)^{k-1}$ نحصل على المطلوب

$$(p-k)! \cdot (k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

98. بأخذ $n = p - 4$ ، حيث $p \geq 5$ عدد أولي، نجد أن

$(n+3)! + 1 = (p-1)! + 1$ يقبل القسمة على p وذلك باستخدام نظرية ولسون.

99. بأخذ $n = p - 1$ ، حيث $p \geq 3$ عدد أولي، وباستخدام نظرية

فيرما، نجد أن

$$n \times 2^n + 1 = (p-1) \times 2^{p-1} + 1 \equiv (-1) \times 1 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

أي أن p يقسم $n \times 2^n + 1$.

100. نلاحظ أولاً أن المعادلة $(p-1)! + 1 = p^k$ مُتحققة في

الحالات التالية $(p, k) = (2, 1), (3, 1), (5, 2)$. لذا نفرض فيما يلي أن

$p > 5$. بكتابة المعادلة على الشكل $(p-1)! = p^k - 1$ وبالقسمة على

$p-1$ نحصل على المعادلة الآتية:

$$(p-2)! = p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + p + 1$$

نُعيد كتابة المعادلة السابقة على الصورة الآتية:

$$(p-2)! = (p^{k-1} - 1) + (p^{k-2} - 1) + \dots + (p-1) + k$$

بما أن $p > 5$ فإن $(p-2)! \equiv -1 \pmod{p}$ (مثال 24). أيضاً $p-1 \mid p^i - 1$ لجميع قيم $1 \leq i \leq k-1$. هذا يقتضي أن $p-1 \mid k$ ومن ثم $k \geq p-1$. لكن مثل هذه القيمة k لن تُحقق المعادلة $p^k = (p-1)! + 1$ وذلك لأن $p^k = (p-1)! + 1 < p^{p-2} + 1$ أو $p^k < (p-1)! + 1 < p^{p-2} + 1$ وهذا مستحيل. إذاً المعادلة $p^k = (p-1)! + 1$ غير متحققة إذا كان $p > 5$. ملاحظة: استخدمنا أعلاه العلاقة التالية:

$$(p-1)! = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) < \underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{p-2} = p^{p-2}$$

101. من مُعطى السؤال نجد أن

$$a = (p-1)! \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} \right] = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k}$$

بما أن $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ و $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ حيث $1 \leq k \leq p-1$ نستنتج أن $(p-1)! \equiv -k^{p-1} \pmod{p}$. لكن $(k, p) = 1$. إذاً

$$\frac{(p-1)!}{k} \equiv -k^{p-2} \pmod{p}$$

هذا يقتضي أن

$$a = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} -k^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

حيث إن التطابق الأخير ناتج من سؤال رقم 88.

102. نريد أن نُثبت أن $3^{120} \equiv 1 \pmod{121}$. بما أن

$$\phi(121) = \phi(11^2) = 11(11-1) = 110$$

فباستخدام نظرية أويلر نحصل

على $3^{110} \equiv 1 \pmod{121}$ أيضاً من العلاقة
 $3^{10} \equiv 1 \pmod{121}$ نستنتج أن $3^5 = 243 = 121 \times 2 + 1 \equiv 1 \pmod{121}$
بضرب التطابقين السابقين نحصل على $3^{120} \equiv 1 \pmod{121}$ ، أي أن 121
عدد شبه أولي للأساس 3.

103. نريد أن نثبت أن $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. نلاحظ أولاً مايلي:

$$n-1 = \frac{2^{2^p} - 1}{3} - 1 = \frac{4(2^{2^{p-2}} - 1)}{3} = \frac{4(2^{p-1} - 1)(2^{p-1} + 1)}{3}$$

بما أن $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (نظرية فيرما) و $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{3}$ (لأن $p-1$ عدد زوجي)، فإن $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{3p}$ (لأن $(3, p) = 1$). هذا يقتضي أن
 $3p \mid 2^{p-1} - 1$ ومن ثم $4p \mid n-1$ (باستخدام المعادلة أعلاه) أو
 $2p \mid n-1$. لكن إذا كان $2p \mid n-1$ فإن $2p \mid 2^{2^p} - 1$ بما أن
 $3n = 2^{2^p} - 1$ فإن $3n \mid 2^{n-1} - 1$ ومن ثم $n \mid 2^{n-1} - 1$ ، أي أن
 $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ وهو المطلوب.

104. حيث إن $p \neq 3$ فإن $(3, 5p) = 1$. نريد أن نثبت أن

$$3^{5^{p-1}} \equiv 1 \pmod{5p}$$

$$3^9 \equiv 1 \pmod{10} \quad \text{أي أن } 3^9 = 3 \times 3^4 \times 3^4 \equiv 3 \times 1 \times 1 \equiv 3 \pmod{10}$$

ومن ثم فإن العدد 10 ليس عدداً شبه أولي للأساس 3.

نأخذ الآن الحالة $p = 5$. باستخدام نظرية أويلر نجد أن

$$3^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25}, \text{ أي أن } 3^{20} \equiv 1 \pmod{25}. \text{ هذا يقتضي أن}$$

$$3^{24} = 3^4 \times 3^{20} \equiv 6 \times 1 = 6 \pmod{25}, \text{ أي أن } 25 \text{ ليس عدداً شبه أولي}$$

للأساس 3.

الآن نفرض أن $p > 5$. أيضاً باستخدام نظرية أويلر نجد أن

بضرب طرفي $3^{4(p-1)} \equiv 1 \pmod{5p}$ ، أي أن $3^{4(p-1)} \equiv 1 \pmod{5p}$.
التطابق السابق بالعدد 3^{p+3} نحصل على التطابق

$$3^{5p-1} \equiv 3^{p+3} \pmod{5p}$$

لإكمال الإثبات نُثبت أن $3^{p+3} \not\equiv 1 \pmod{5p}$: إذا كان $3^{p+3} \equiv 1 \pmod{5p}$ فإن $3^{p+3} \equiv 1 \pmod{p}$ ومن ثم (باستخدام نتيجة 19) $3 \times 3^3 \equiv 1 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن $p \mid 80 = 2^4 \times 5$ ومن ثم $p = 2$ أو $p = 5$ وهذا تناقض لأن $p > 5$. إذاً $3^{p+3} \not\equiv 1 \pmod{5p}$ ومن ثم

$$3^{5p-1} \not\equiv 1 \pmod{5p}$$

أي أن العدد $5p$ ليس عدداً شبه أولي للأساس 3.

105. لكي نُثبت أن p^2 ليس عدداً كارمايكيالياً نحتاج أن نجد عدداً صحيحاً a يُحقق $(a, p^2) = 1$ و $a^{p^2-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. نأخذ العدد $a = p + 1$. من الواضح أن $(p + 1, p^2) = 1$. أيضاً من العلاقة

$$(p + 1)^{p^2-1} - 1 = \sum_{i=0}^{p^2-1} \binom{p^2-1}{i} p^i - 1 = -p + p^3 + \sum_{i=2}^{p^2-1} \binom{p^2-1}{i} p^i$$

نلاحظ أن جميع الحدود في الطرف الأيمن تقبل القسمة على p^2 ماعدا الحد الأول. نستنتج من ذلك أن $(p + 1)^{p^2-1} - 1 \equiv -p \pmod{p^2}$ ، أي أن $(p + 1)^{p^2-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. هذا يُثبت أن p^2 ليس عدداً كارمايكيالياً.

106. بما أن $(2, p) = 1$ فإنه يوجد حل وحيد للتطابق

$$2x \equiv 1 \pmod{p}$$

$$2x \equiv 1 \equiv p + 1 \pmod{p}$$

وبملاحظة أن $p + 1$ عدد زوجي فإننا نحصل على الحل

المعكوس الضربي قياس p للعدد 2 هو العدد $\frac{p+1}{2}$. (لاحظ أن $1 < \frac{p+1}{2} < p$ من ذلك نستنتج أن $x \equiv \frac{p+1}{2} \pmod{p}$).

107. السؤال يُكافئ إيجاد أصغر عدد صحيح موجب يُحقق النظام

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 5 \pmod{6}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7}$$

التطابق الأول يقتضي أن $x = 4 + 5k$. بالتعويض في التطابق الثاني ثم حله نجد أن $k = 5 + 6l$. بالتعويض في التطابق الثالث ثم حله نجد أن $l = 6 + 7t$. هذا يقتضي أن

$$x = 4 + 5k = 29 + 30l = 209 + 210t$$

حيث t عدد صحيح. إذاً أصغر عدد صحيح موجب يُحقق السؤال هو $x = 209$ (عندما $t = 0$).

108. نُكوّن نظام التطابقات الآتي:

$$x \equiv 0 \pmod{p_1}$$

$$x + 1 \equiv 0 \pmod{p_2^2}$$

$$x + 2 \equiv 0 \pmod{p_3^3}$$

⋮

$$x + r - 1 \equiv 0 \pmod{p_r^r}$$

حيث إن الأعداد p_1, p_2^2, \dots, p_r^r أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى، فإنه، باستخدام نظرية الباقي الصينية، يوجد للنظام أعلاه حل وحيد N_0 قياس $P = p_1 p_2^2 \cdots p_r^r$. لذا فالأعداد المطلوبة هي $N \equiv N_0 \pmod{p_1 p_2^2 \cdots p_r^r}$.

109. نلاحظ أولاً أن $123 = 3 \times 41$. بما أن $3 \mid 123$ و $3 \mid 312$ ، فإن $A = (231^{132} + 312^{213})^{321}$ يقبل القسمة على 3، أي أن

$$A \equiv 0 \pmod{3} \dots \dots \dots (1)$$

بما أن $231 \equiv 26 \pmod{41}$ و $312 \equiv 25 \pmod{41}$ ، إذاً

$$A \equiv (26^{132} + 25^{213})^{321} \pmod{41}$$

باستخدام نظرية فيرما نحصل على $26^{40} \equiv 1 \pmod{41}$. هذا يعطينا $26^{120} \equiv 1 \pmod{41}$ ومن ثم $26^{132} \equiv 26^{12} \pmod{41}$. لكن $26^{12} \equiv 20^6 \equiv 31^3 \equiv 25 \pmod{41}$. إذاً $26^{132} \equiv 25 \pmod{41}$.

أيضاً باستخدام نظرية فيرما نحصل على $25^{40} \equiv 1 \pmod{41}$. هذا يعطينا $25^{200} \equiv 1 \pmod{41}$ ومن ثم $25^{213} \equiv 25^{13} \pmod{41}$. لكن $25^{13} \equiv 25(10)^6 \equiv 25(10) \equiv 4 \pmod{41}$. إذاً $25^{213} \equiv 4 \pmod{41}$. نستنتج من ذلك أن

$$A \equiv (25 + 4)^{321} \equiv 29^{321} \pmod{41}$$

باستخدام نظرية فيرما نحصل على $29^{40} \equiv 1 \pmod{41}$. أي أن $29^{321} = 29 \times (29^{40})^8 \equiv 29 \times 1 \equiv 29 \pmod{41}$

$$A \equiv 29 \pmod{41} \dots \dots \dots (2)$$

باستخدام نظرية الباقي الصينية نستنتج من (1) و (2) أن $A \equiv 111 \pmod{123}$. إذاً باقي قسمة A على 123 يساوي 111.

110. لنضع $x = 4^{1111}$. لاحظ أولاً أن $1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$. نجد بسهولة أن

$$x \equiv 1 \equiv 4 \pmod{3}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{11}$$

هذا يقتضي أن $x \equiv 4 \pmod{[3,5,7,11]}$ أو $x \equiv 4 \pmod{1155}$ ومن ثم فإن باقي قسمة 4^{111} على 1155 يساوي 4.

111. لنكتب $(a,b)=d$. إذا التتابع $ax \equiv 0 \pmod{b}$ قابل للحل وعدد حلوله يساوي d . نستنتج من ذلك أن عدد الأعداد الموجودة في المجموعة $\{a, 2a, 3a, \dots, ba\}$ التي تقبل القسمة على b يساوي $(a,b)=d$.

112. بملاحظة أن $143 = 11 \times 13$ ، نستنتج أن التتابع $17x \equiv 2 \pmod{143}$ يكافئ النظام

$$\begin{cases} 17x \equiv 2 \pmod{11} \\ 17x \equiv 2 \pmod{13} \end{cases}$$

حل التتابع الأول هو $x \equiv 4 \pmod{11}$ وحل التتابع الثاني هو $x \equiv 7 \pmod{13}$. بتكوين النظام

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 7 \pmod{13} \end{cases}$$

نجد أن الحل، باستخدام نظرية الباقي الصينية، هو $x \equiv 59 \pmod{143}$.

113. حيث إن $24 = 3 \times 8$ ، فإن التتابع $x^3 + 2x^2 - x - 2 \equiv 0 \pmod{24}$ يكافئ النظام

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - x - 2 \equiv 0 \pmod{3} \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}$$

يوجد حلان للتطابق الأول هما $x \equiv -1, 1 \pmod{3}$ وثلاثة حلول للتطابق الثاني هي $x \equiv -2, -1, 1 \pmod{8}$. هذه الحلول تعطينا ستة أنظمة خطية:

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3}, x \equiv -2 \pmod{8} \\ x \equiv -1 \pmod{3}, x \equiv -1 \pmod{8} \\ x \equiv -1 \pmod{3}, x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv -2 \pmod{8} \\ x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv -1 \pmod{8} \\ x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$$

حلول هذه الأنظمة الخطية هي:

$$x \equiv 1, 7, 14, 17, 22, 23 \pmod{24}$$

وهي نفسها حلول التطابق المعطى.

114. حيث إن $95 = 5 \times 19$ ، فإن التطابق

$$2x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{95}$$

$$\begin{cases} 2x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5} \\ 2x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{19} \end{cases}$$

بما أنه لا يوجد حل للتطابق الأول في النظام أعلاه، إذاً لا يوجد أي حل للتطابق $2x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{95}$.

115. في النظام

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ 4x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

حل التطابق الأول هو $x \equiv 1 \pmod{3}$ ، بينما للتطابق الثاني الحلان $x \equiv 3, 8 \pmod{10}$. نستخدم هذه الحلول لتكوين نظامين خطيين:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 8 \pmod{10} \end{cases}$$

حل النظام الأول هو $x \equiv 13 \pmod{30}$ و حل النظام الثاني هو $x \equiv 28 \pmod{30}$. إذاً للنظام المعطى حلان هما $x \equiv 13, 28 \pmod{30}$.

116. لاحظ أن أي حل للتطابق

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{169} \dots\dots(1)$$

هو أيضاً حل للتطابق

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13} \dots\dots(2)$$

حلول التطابق (2) هي $x \equiv -5 \pmod{13}$ و $x \equiv 5 \pmod{13}$. هذا يقتضي أن أي حل للتطابق (1) يجب أن يكون على إحدى الصورتين الآتيتين

$$\begin{cases} x = -5 + 13t \\ x = 5 + 13u \end{cases}$$

حيث $t, u \in \mathbb{Z}$. بتعويض هذين الحلين في التطابق (1) نحصل على التطابقين الخطيين الآتيين

$$\begin{cases} 26 - 130t \equiv 0 \pmod{169} \\ 26 + 130u \equiv 0 \pmod{169} \end{cases}$$

بالقسمة على 13 نحصل على

$$\begin{cases} 2-10t \equiv 0 \pmod{13} \\ 2+10u \equiv 0 \pmod{13} \end{cases}$$

والتي حلولهما على التوالي هي $t \equiv 8 \pmod{13}$ و $u \equiv 5 \pmod{13}$ ، أي أن

$$\begin{cases} t = 8 + 13k \\ u = 5 + 13l \end{cases}$$

حيث $k, l \in \mathbb{Z}$. هذا يقتضي أن

$$\begin{cases} x = 99 + 169k \\ x = 70 + 169l \end{cases}$$

ومن ثم فإن حلول التطابق (1) هي $x \equiv 99 \pmod{169}$ و $x \equiv 70 \pmod{169}$.

117. لاحظ أولاً أن $x^7 \equiv x \pmod{7}$ (نتيجة 19). هذا يقتضي أن $x^{15} \equiv x^3 \pmod{7}$. إذاً التطابق $x^{15} - 2x - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ يكافئ التطابق $x^3 - 2x - 4 \equiv 0 \pmod{7}$ الذي له الحل الوحيد $x \equiv 2 \pmod{7}$.

118. حيث إن $a^p \equiv a \pmod{p}$ لجميع الأعداد الصحيحة a (نتيجة 19)، إذاً للتطابق $x^p - x \equiv 0 \pmod{p}$ عدد p من الحلول هي $x \equiv 0, 1, 2, \dots, p-1 \pmod{p}$.

119. نبدأ الحل بملاحظة أن $x^p \equiv x \pmod{p}$ لأي عدد صحيح x (نتيجة 19). برفع طرفي التطابق إلى الأس p نجد أن $x^{p^2} \equiv x^p \equiv x \pmod{p}$. برفع طرفي التطابق السابق إلى الأس p نحصل على التطابق $x^{p^3} \equiv x^p \equiv x \pmod{p}$. بتكرار هذه العملية نجد أن

للتطابق $x \equiv a \pmod{p}$ ، أي أن حل التطابق المعطى هو $x \equiv a \pmod{p}$. هذا يقتضي أن التطابق $x^p \equiv a \pmod{p}$ مكافئ

120. لنكتب كثيرة الحدود المُعطاة في السؤال على الشكل التالي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $n \geq 1$ و المعاملات a_0, a_1, \dots, a_n أعداد صحيحة. إذا كان $a_0 = 0$ ، فإن التطابق $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل لأي عدد أولي p (أحد الحلول هو $x \equiv 0 \pmod{p}$). لذا لنفرض أن $a_0 \neq 0$. لنفرض الآن أن التطابق $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل لعدد محدود فقط من الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_r . لنُعرف العدد $b = a_0^2 p_1 p_2 \dots p_r$. هذا يُعطينا

$$f(b) = a_0(1+B)$$

حيث

$B = a_1 a_0 (p_1 \dots p_r) + a_2 a_0^3 (p_1 \dots p_r)^2 + \dots + a_n a_0^{2n-1} (p_1 \dots p_r)^n$
بإمكاننا أن نختار عدداً أولياً q بحيث $q \mid 1+B$ و $q \nmid a_0$ (لأن $(a_0, 1+B) = 1$). هذا يقتضي أولاً أن التطابق

$$f(x) \equiv 0 \pmod{q}$$

قابل للحل (أحد الحلول هو $x \equiv b \pmod{q}$)، وثانياً $q \neq p_i$ لجميع القيم $1 \leq i \leq r$ (لأن $q \mid 1+B$ و $q = p_i$ لإحدى القيم $1 \leq i \leq r$ يقتضي أن $q \mid 1$ وهذا تناقض). هذا يُناقض ما افترضناه من أن التطابق $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل فقط للأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_r . من هذا التناقض نستنتج أن التطابق $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل لعدد لانهائي من الأعداد الأولية p .

121. لاحظ أولاً (من حل مثال 35) أن

$$F_n - 2 = F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1}$$

بإضافة 3 للطرفين وملاحظة أن $F_0 = 3$ نجد أن

$$F_n + 1 = F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1} + 3 = 3(F_1 F_2 \cdots F_{n-1} + 1)$$

بما أن $F_1 F_2 \cdots F_{n-1} + 1$ عدد زوجي، نستنتج أن $F_n + 1 = 6k$ ومن ثم $F_n = 6k - 1$.

122. من مثال 36، نستنتج أن عدد الخانات العشرية لعدد فيرما $F_n = 2^{2^n} + 1$ يساوي عدد الخانات العشرية للعدد $F_n - 1 = 2^{2^n}$. إذاً عدد الخانات العشرية لعدد فيرما F_{21} يساوي $631306 + 1 = \lceil \log_{10} 2^{2^{21}} \rceil + 1$.

123. إذا كان $n \geq 2$ فإن العدد الموجود في خانة الأحاد لعدد فيرما $F_n = 2^{2^n} + 1$ يساوي 7 (مثال 36). أيضاً $F_0 = 3$ و $F_1 = 5$. نستنتج من ذلك أن عدد فيرما لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً (لأن الأعداد المحتملة التي يمكن أن توجد في خانة الأحاد للمربع الكامل هي 0, 1, 4, 5, 6, 9) ومن ثم لا يمكن أن يساوي عدداً مرفوعاً لأسٍ زوجي.

لنفرض الآن أن $F_n = x^m$ حيث m و $x > 1$ عددان فرديان. إذاً

$$2^{2^n} = x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)$$

إذا كان $m > 1$ فمن المعادلة أعلاه نستنتج أن العدد الفردي $x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1$ يقسم العدد 2^{2^n} وهذا مستحيل. إذاً لابد أن يكون $m = 1$. هذا يعني أنه في كلتا الحالتين عدد فيرما لا يساوي قوة لأي عددٍ صحيح.

124. بما أن $F_n = 2^{2^n} + 1$ عدد فردي، فإنه إذا كان يمكن كتابته كمجموع عددين أوليين فلا بد أن يكون أحد هذين العددين العدد الأولي 2 ومن ثم فالعدد الآخر هو $F_n - 2$. لكن

$$F_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$$

عدد مؤلف لأن $2^{2^{n-1}} - 1 \geq 3$ إذا كان $n \geq 2$. إذاً عدد فيرما F_n لا يمكن أن يُكتب كمجموع عددين أوليين عندما يكون $n \geq 2$.

125. بما أن $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{F_n}$ ، فإنه برفع الطرفين إلى الأس $2^{2^{2^n}}$ نحصل على $2^{F_n} \equiv 1 \pmod{F_n}$ ، أي أن F_n عدد شبه أولي للأساس 2.

126. نريد أن نثبت أن التطابق $2^{2^x} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل لعدد لانهائي من الأعداد الأولية p . سوف نقوم بإنشاء عدد لانهائي من الأعداد الأولية التي تُحقق ذلك. من مثال 35 لدينا $(F_n, F_m) = 1$ لأي عددين صحيحين موجبين $n \neq m$.

ليكن p_1 عدداً أولياً يقسم F_1 .

ليكن p_2 عدداً أولياً يقسم F_2 . بما أن $(F_1, F_2) = 1$ فإن $p_2 \neq p_1$.

ليكن p_3 عدداً أولياً يقسم F_3 . بما أن $(F_3, F_1) = (F_3, F_2) = 1$ فإن $p_3 \neq p_1$ و $p_3 \neq p_2$.

وهكذا إذا كان p_k عدداً أولياً يقسم F_k فإن $p_k \neq p_{k-1}, \dots, p_2, p_1$ لأن $(F_k, F_j) = 1$ للقيم $j = 1, 2, \dots, k-1$.

هذا يُعطينا متتالية لانهائية من الأعداد الأولية المختلفة $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ التي تُحقق $F_n \mid p_n$ لجميع القيم $n \geq 1$. هذا يقتضي أنه لأي $n \geq 1$ فإن التطابق $2^{2^x} + 1 \equiv 0 \pmod{p_n}$ يوجد له حل هو $x = n$ ، وبهذا يتم الإثبات.

127. إذا كان $M_n = 2^n - 1$ ، $n > 2$ ، عدداً أولياً، فإن n عدد أولي فردي. هذا يقتضي أن

$$M_n = 2^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv -2 \pmod{3}$$

ومنه نستنتج أن $3 \mid M_n + 2$ لكن عندما تكون $n > 2$ ، فإن $M_n + 2 \geq 9$. هذا يقتضي أن $M_n + 2$ عدد مؤلف.

128. المطلوب هو إثبات أن $2^{M_n-1} \equiv 1 \pmod{M_n}$. بما أن n عدد شبه أولي للأساس 2 فإن $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. هذا يقتضي أن $2^{n-1} - 1 = nk$ حيث k عدد صحيح موجب. لاحظ ما يأتي:

$$2^{M_n-1} - 1 = 2^{2^n-2} - 1 = 2^{2nk} - 1 = (2^n)^{2k} - 1$$

حيث إن $(2^n)^{2k} - 1 \mid M_n = 2^n - 1$ ، إذاً $2^{M_n-1} - 1 \mid M_n$ ، أي أن $2^{M_n-1} \equiv 1 \pmod{M_n}$.

129. إذا كان p عدداً أولياً فإنه إما M_p عدد أولي أو عدد شبه أولي للأساس 2 (مثال 39). في كلتا الحالتين نحصل على التطابق

$$2^{M_p-1} \equiv 1 \pmod{M_p}$$

بضرب التطابق بالعدد 4 ومن ثم إضافة العدد 1 للطرفين نحصل على التطابق

$$F_p \equiv 5 \pmod{M_p}$$

لكن حيث إن $F_1 = 5$ و $(F_1, F_p) = 1$ ، إذاً $(F_p, M_p) = 1$.

130. نريد إيجاد عددين صحيحين $n \geq 0$ و $k > 1$ يحققان المعادلة

$$F_n = M_k$$

$$2^{2^n} + 1 = 2^k - 1$$

لنفرض أولاً أن $n \geq 1$. بما أن $2^{2^n} + 1 \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ و $2^{2^n} + 1 \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ و $2^k - 1 \equiv (-1)^k - 1 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ اعتماداً على كون k زوجي أو فردي، إذاً $2^{2^n} + 1 \not\equiv 2^k - 1 \pmod{3}$ ومن ثم فإن $2^{2^n} + 1 \neq 2^k - 1$ عندما $n \geq 1$. بقي أن نختبر القيمة $n = 0$. في هذه الحالة نجد أن $2^{2^0} + 1 = 2^2 - 1$ ومن ثم $k = 2$ ، أي أن $(n, k) = (0, 2)$ هو الحل الوحيد للمعادلة أعلاه. هذا يقتضي أن العدد الذي هو معاً عدد فيرما و عدد ميرسان هو العدد $2^{2^0} + 1 = 2^2 - 1 = 3$ فقط.

131. من مُعطى السؤال نجد أن $a^h \equiv 1 \pmod{p}$ ، أي أن

$$p \mid a^h - 1 = (a-1)(a^{h-1} + a^{h-2} + \dots + a + 1)$$

هذا بدوره يقتضي أنه إما $p \mid a-1$ أو $p \mid a^{h-1} + a^{h-2} + \dots + a + 1$. لكن بما أن $h > 1$ فإن $p \nmid a-1$. هذا يقتضي أن $p \mid a^{h-1} + a^{h-2} + \dots + a + 1$ ، وهو المطلوب.

132. لنكتب $\text{ord}_{F_n}(2) = h$ بما أن $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{F_n}$ فإن $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) = F_n(2^{2^n} - 1)$. هذا يقتضي أن $h \mid 2^{n+1}$ ومن ثم $h = 2^j$ حيث j عدد صحيح يُحقق $0 \leq j \leq n+1$. لنفرض أن $j \leq n$. هذا يعني أن $2^{2^j} \equiv 1 \pmod{F_n}$ ومن ثم $F_j - 2 \leq F_n - 2 < F_n$ ، وهذا مستحيل لأن $F_n \mid 2^{2^j} - 1 = F_j - 2$. نستنتج من ذلك أن $j = n+1$ ، أي أن $h = 2^{n+1}$ و $\text{ord}_{F_n}(2) = 2^{n+1}$.

133. لنضع $\text{ord}_{[m,n]}(a) = t$. نريد أن نُثبت أن $t = [h, k]$ بما أن $a^t \equiv 1 \pmod{[m, n]}$ فإننا نحصل على التطابقين

$$a' \equiv 1 \pmod{m}; a' \equiv 1 \pmod{n}$$

وهذا بدوره يقتضي أن $\text{ord}_n(a) = k \mid t$ و $\text{ord}_m(a) = h \mid t$ نستنتج من ذلك أن $t \mid [h, k]$.

أيضاً بملاحظة أن $h \mid [h, k]$ و $k \mid [h, k]$ فإننا نحصل على التتباقيين

$$\begin{cases} a^h \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow a^{[h,k]} \equiv 1 \pmod{m} \\ a^k \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow a^{[h,k]} \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}$$

هذا يقتضي أن $a^{[h,k]} \equiv 1 \pmod{[m, n]}$ ومن ثم $t \mid [h, k]$. الآن حيث إن t و $[h, k]$ عددان صحيحان موجبان و $t \mid [h, k]$ و $[h, k] \mid t$ فإننا نحصل على المساواة $t = [h, k]$ ، وهو المطلوب.

134. العدد المطلوب هو 2. هذا يتضح مباشرة من ملاحظة أن $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$ و $2^m \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$ لأي عدد موجب m أقل من n وذلك لأن $2^n - 1 \mid 2^m - 1$ عندما $m < n$.

135. لنفرض أن $q \mid a^p - 1$ ، أي أن $a^p \equiv 1 \pmod{q}$. لنضع $\text{ord}_q(a) = h$. هذا يقتضي أن $h \mid p$ ومنه نستنتج أنه إما $h = 1$ أو $h = p$. إذا كان $h = 1$ فإن $a \equiv 1 \pmod{q}$ ومن ثم $q \mid a - 1$. أما إذا كان $h = p$ فإن $h \mid \phi(q) = q - 1$ ومن ثم $p = h \mid q - 1 = pl$ ، حيث l عدد صحيح موجب. بما أن p و q عددان فرديان فلا بد أن يكون l عدداً زوجياً، $l = 2k$ ، حيث k عدد صحيح موجب. هذا يقتضي أن $q = 2kp + 1$.

136. بما أن g جذر بدائي قياس p فإن الأعداد

$g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$ تمثل نظام رواسب مُختَزَل قياس p (نظرية 26).
أيضاً الأعداد $1, 2, 3, \dots, p-1$ تمثل نظام رواسب مُختَزَل قياس p . هذا
يقضي أن كل عدد من الأعداد $g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$ يُطابق قياس p عدداً
واحداً فقط من الأعداد $1, 2, 3, \dots, p-1$. نستنتج من ذلك أن

$$g + g^2 + g^3 + \dots + g^{p-1} \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) \pmod{p}$$

لكن

$$1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) = \frac{(p-1)}{2} \cdot p \equiv 0 \pmod{p}$$

إذاً نستنتج أن

$$g + g^2 + g^3 + \dots + g^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

137. لنأخذ عدداً صحيحاً a بحيث يكون $(a, pq) = 1$. سوف
نقوم بإثبات أن $\text{ord}_{pq}(a) \neq \phi(pq)$. هذا سوف يُثبت أنه لا يوجد جذر
بدائي قياس pq . بما أن $(a, pq) = 1$ فإن $(a, p) = (a, q) = 1$. باستخدام
نظرية فيرما نحصل على التطابقين الآتيين:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$$

برفع التطابق الأول إلى الأس $(q-1)/2$ والثاني إلى الأس $(p-1)/2$
نحصل على الآتي:

$$a^{(p-1)(q-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}, \quad a^{(q-1)(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{q}$$

لأن $(p, q) = 1$ ، إذاً $a^{(p-1)(q-1)/2} \equiv 1 \pmod{pq}$ أي
 $a^{\phi(pq)/2} \equiv 1 \pmod{pq}$. من ذلك نستنتج أن
 $\text{ord}_{pq}(a) \leq \phi(pq)/2 < \phi(pq)$ ومن ثم $\text{ord}_{pq}(a) \neq \phi(pq)$.

138. بما أن 2 جذر بدائي قياس 13 فإن الأعداد $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$ تمثل نظام رواسب مُتخزَل قياس 13. إذا كان $x^9 \equiv 12 \pmod{13}$ فإن $(x^9, 13) = (12, 13) = 1$ ومن ثم $(x, 13) = 1$. هذا يقتضي أن $x \equiv 2^i \pmod{13}$ ، حيث i عدد صحيح يُحقق $1 \leq i \leq 12$. أيضاً نلاحظ أن $12 \equiv 2^6 \pmod{13}$. الآن يمكن أن نكتب التطابق $x^9 \equiv 12 \pmod{13}$ على الشكل $2^{9i} \equiv 2^6 \pmod{13}$. هذا يقتضي أن $9i \equiv 6 \pmod{12}$. حلول هذا التطابق الخطي هي $i \equiv 2, 6, 10 \pmod{12}$ ومن ثم فإن حلول التطابق $x^9 \equiv 12 \pmod{13}$ هي $x \equiv 2^2, 2^6, 2^{10} \equiv 4, 12, 10 \pmod{13}$.

139. نفرض أولاً أن $p-1 \mid n$. هذا يقتضي أن $n = (p-1)k$ ، حيث k عدد صحيح موجب. باستخدام نظرية فيرمان نجد أن $i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ لجميع الأعداد $1 \leq i \leq p-1$. برفع طرفي التطابق إلى الأس k نحصل على التطابق $i^n \equiv 1 \pmod{p}$ لجميع الأعداد $1 \leq i \leq p-1$. نستنتج من ذلك أن

$$S_n(p) = 1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n \\ \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

نفرض ثانياً أن $p-1 \nmid n$. نأخذ جذراً بدائياً g قياس p . الأعداد $1, g, g^2, \dots, g^{p-2}$ تمثل نظام رواسب مُتخزَل قياس p (نظرية 26). بملاحظة أن الأعداد $1, 2, 3, \dots, p-1$ تُمثل نظام رواسب مُتخزَل قياس p نستنتج أن

$$S_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (p-1)^n \\ \equiv 1 + g^n + g^{2n} + \dots + g^{(p-2)n} \pmod{p}$$

حيث إن $p-1 \nmid n$ فإن $g^n - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ (لو كان $g^n \equiv 1 \pmod{p}$ فإن $p-1 \mid n$ وهذا يُخالف الفرض $\text{ord}_p(g) = p-1 \mid n$ وهذا يُخالف الفرض

التطابق $(p-1 | n)$ بضرب طرفي التطابق السابق بالعدد $g^n - 1$ نحصل على

$$(g^n - 1)S_n(p) \equiv g^{(p-1)n} - 1 \\ \equiv 0 \pmod{p}$$

بما أن $(g^n - 1)S_n(p) \equiv 0 \pmod{p}$ و $p | g^n - 1$ فإن $p | S_n(p)$ ، أي أن $S_n(p) \equiv 0 \pmod{p}$.

140. لإثبات أن $N = pq$ ، حيث إن $p < q$ عدنان أوليان فرديان، ليس عدداً كارمايكيلياً، نقوم بإيجاد عدد صحيح a يُحقق $(a, N) = 1$ و $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$.

ليكن g_1 جذراً بدائياً قياس p و g_2 جذراً بدائياً قياس q ، أي أن $\text{ord}_p(g_1) = p - 1$ و $\text{ord}_q(g_2) = q - 1$. باستخدام نظرية الباقي الصينية يوجد عدد صحيح a يُحقق التطابقين

$$a \equiv g_1 \pmod{p}, \quad a \equiv g_2 \pmod{q}$$

لنضع $h = \text{ord}_N(a)$. إذاً $a^h \equiv 1 \pmod{N}$ ومنه $(a, N) = 1$. هذا يقتضي أن $a^h \equiv 1 \pmod{q}$ بما أن $a \equiv g_2 \pmod{q}$ فإننا نستنتج أن $g_2^h \equiv 1 \pmod{q}$ ومن ثم $q - 1 | h$.

الآن لنفرض أن $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$. هذا يقتضي أن $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{q}$ بما أن $a \equiv g_2 \pmod{q}$ فإننا نستنتج أن $g_2^{N-1} \equiv 1 \pmod{q}$ ومن ثم $q - 1 | N - 1 = pq - 1 = q(p - 1) + (q - 1)$ بما أن $q - 1 | q(p - 1) + (q - 1)$ ومن ثم $q - 1 | q - 1$ فإننا نستنتج أن $q - 1 | p - 1$ ومن ثم $q - 1 \leq p - 1$ وهذا مستحيل لأن $p < q$. إذاً $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$ ومن ثم فإن $N = pq$ ليس عدداً كارمايكيلياً.

141. لنضع $\text{ord}_{p^2}(a) = t$. ندرس حالتين فيما يتعلق بقيمة $\text{ord}_p(a) = h$.

الحالة الأولى: $h > 1$. حيث إن $\text{ord}_p(a) = h$ فإن $a^h \equiv 1 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن $a^h = 1 + kp$ حيث k عدد صحيح. باستخدام نظرية ذات الحدين نستنتج أن

$$a^{hp} = (1 + kp)^p \equiv 1 \pmod{p^2}$$

ومن ثم $hp \mid t$. هذا يؤدي إلى الاحتمالات التالية لقيم t :

$$t = 1, h, p, hp, r, rp \quad (r \mid h, 1 < r < h)$$

إذا كان $t = 1$ فإن $a^1 \equiv 1 \pmod{p^2}$ يقتضي أن $a \equiv 1 \pmod{p}$ وهذا مستحيل لأن $h > 1$. إذا كان $t = p$ فإن $a^p \equiv 1 \pmod{p^2}$ يقتضي أن $a^p \equiv 1 \pmod{p}$ ومن ثم $a \equiv 1 \pmod{p}$ وهذا مستحيل لأن $h > 1$. إذا كان $t = r$ فإن $a^r \equiv 1 \pmod{p^2}$ يقتضي أن $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ وهذا مستحيل لأن $r < h$. إذا كان $t = rp$ فإن $a^{rp} \equiv 1 \pmod{p^2}$ يقتضي أن $a^{rp} \equiv 1 \pmod{p}$ ومن ثم $a^r \equiv 1 \pmod{p}$ (لأن $a^p \equiv a \pmod{p}$) وهذا مستحيل لأن $r < h$. نستنتج من ذلك أن $t = h$ أو $t = hp$.

الحالة الثانية: $h = 1$. حيث إن $\text{ord}_p(a) = 1$ فإن $a \equiv 1 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن $a = 1 + kp$ حيث k عدد صحيح. عند كتابة $k = l + sp$ حيث $0 \leq l \leq p - 1$ ونحصر على $a = 1 + lp + sp^2 \equiv 1 + lp \pmod{p^2}$ ومنه (باستخدام نظرية ذات الحدين)

$$a^p \equiv (1 + lp)^p \equiv 1 \pmod{p^2}$$

هذا يقتضي أن $p \mid t$ ومن ثم $t = 1$ أو $t = p$.

إذاً في كلتا الحالتين $\text{ord}_{p^2}(a) = t = hp$ أو $\text{ord}_{p^2}(a) = t = h$.

142. لاحظ أولاً أنه من مُعطى السؤال نستنتج أن $(a, m) = 1$ وأن التوافق $x^2 \equiv a \pmod{m}$ قابل للحل، أي أنه يوجد عدد صحيح x_0 بحيث $x_0^2 \equiv a \pmod{m}$. بما أن $(a, m) = 1$ ، فإن $(x_0, m) = 1$. باستخدام نظرية أويلر، نحصل على $x_0^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. بما أن $x_0^2 \equiv a \pmod{m}$ فإن

$$a^{\phi(m)/2} \equiv x_0^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

وهو المطلوب.

143. إذا كان $p \equiv 3 \pmod{8}$ فإن $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. حيث إن $\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{(p-1)/2} \pmod{p}$ فإن $2^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$ ، أي أن $p \mid 2^{(p-1)/2} + 1$.

144. من العلاقة $1 = \left(\frac{-5}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{5}{p}\right)$ نستنتج أنه إما $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ و $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$ أو $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ و $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$. في الحالة الأولى p يجب أن يُحقق $p \equiv 1, 4 \pmod{5}$ و $p \equiv 1 \pmod{4}$ ، وفي الحالة الثانية p يجب أن يُحقق $p \equiv 2, 3 \pmod{5}$ و $p \equiv 3 \pmod{5}$ (نظرية 29، فقرة 5 و مثال 48). باستخدام نظرية الباقي الصينية نجد أن $\left(\frac{-5}{p}\right) = 1$ إذا وفقط إذا كان $p \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}$.

145. باستخدام قانون جاوس للمقلوبية نجد أن

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{6p+1}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{6p+1}{2}} \left(\frac{6p+1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

146. لنفرض $p = 4^n + 1$. نلاحظ أن $p \equiv 1 \pmod{4}$ و $p \equiv 1^n + 1 \equiv 2 \pmod{3}$. الإثبات ينتج من الحسابات الآتية:

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{3}{p}\right) = 1 \cdot \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

147. إذا كان $p = 4n + 1$ وكان $q \mid n$ ، فإن $p \equiv 1 \pmod{q}$. باستخدام قانون جاوس للمقلوبية نستنتج أن

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{1}{q}\right) = 1$$

148. لنفرض أن q عدد مؤلف، أي أن $q = ab$ حيث $1 < a < b < q$ ($a \neq b$) وإلا سوف يكون $q = a^2$ راسباً تربيعياً. الآن بما أن

$$-1 = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$$

فإنه إما $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ أو $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$ ، أي أن a أو b سيكون راسباً غير تربيعي قياس p وكلاهما أقل من q ، وهذا يناقض كون q هو أصغر راسب غير تربيعي موجب قياس p . هذا التناقض يُثبت أن q عدد أولي.

149. حيث إن $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ فإن $n^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$. بملاحظة أن

$$(n^{k+1})^2 = n \cdot n^{2k+1} = n \cdot n^{(p-1)/2} \equiv n \cdot 1 \equiv n \pmod{p}$$

نستنتج أن $x \equiv n^{k+1} \pmod{p}$ هو حلٌ للتطابق $x^2 \equiv n \pmod{p}$.

150. إذا كان $p > 3$ عدداً أولياً بحيث $p \mid n^2 - 6n + 90$ لعدد صحيح n فإن $n^2 - 6n + 90 \equiv 0 \pmod{p}$ ، أو $(n-3)^2 \equiv -81 \pmod{p}$. بما أن $(p, 81) = 1$ فإن $(p, (n-3)^2) = 1$. هذا يقتضي أن

$$1 = \left(\frac{(n-3)^2}{p} \right) = \left(\frac{-81}{p} \right) = \left(\frac{-1}{p} \right) \left(\frac{81}{p} \right) = \left(\frac{-1}{p} \right)$$

ومن ثم $p \equiv 1 \pmod{4}$ (ملحوظة 1 لنظرية 29) وهو المطلوب.

151. إذا كان $\left(\frac{3}{p} \right) = 1$ أو $\left(\frac{5}{p} \right) = 1$ ، فإن $x^2 - 3 \equiv 0 \pmod{p}$ أو $x^2 - 5 \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل. هذا بدوره يقتضي أن التطابق $(x^2 - 3)(x^2 - 5)(x^2 - 15) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل.

أمّا إذا كان $\left(\frac{3}{p} \right) = -1$ و $\left(\frac{5}{p} \right) = -1$ ، فإن $\left(\frac{15}{p} \right) = \left(\frac{3}{p} \right) \left(\frac{5}{p} \right) = 1$ ومن ثم فإن التطابق $x^2 - 15 \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل. هذا أيضاً يقتضي أن التطابق $(x^2 - 3)(x^2 - 5)(x^2 - 15) \equiv 0 \pmod{p}$ قابل للحل.

152. نُثبت أنه لأي عدد صحيح $m \geq 2$ يوجد عدد أولي $p \equiv 4 \pmod{5}$ أكبر من m . هذا سوف يُثبت وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $5n + 4$.

ليكن $m \geq 2$ عدداً صحيحاً. لنضع $A = 5(m!)^2 - 1$. إذا كان $p > 2$ عدداً أولياً بحيث إن $p \mid A$ فإن $p \neq 5$ و $p > m$ (وإلا سوف نحصل على $p \mid 1$ وهذا تناقض واضح). نستنتج من ذلك أن

$(p, 5(m!)^2) = 1$. أيضاً بما أن $p \mid A$ فإن $p \mid 5(m!)^2 \equiv 1 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن

$$1 = \left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{5(m!)^2}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right) \left(\frac{(m!)^2}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right)$$

ومن ثم $p \equiv 1, 4 \pmod{5}$ (مثال 48). بملاحظة أن $A \equiv 4 \pmod{5}$ نستنتج أن القواسم الأولية للعدد A لا يمكن أن تكون جميعها على الشكل $5k + 1$ (وإلا فإن A سوف يأخذ نفس الشكل، وهذا تناقض). إذاً لا بد أن يكون أحد القواسم الأولية للعدد A يحقق $p \equiv 4 \pmod{5}$ وهو ما نُریده. بهذا يتم الإثبات.

153. نفرض أنه يوجد عدد منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $8n + 7$. لتكن هذه الأعداد الأولية p_1, p_2, \dots, p_r . نقوم بإثبات وجود عدد أولي p صورته العامة $8n + 7$ مختلف عن p_1, p_2, \dots, p_r . هذا التناقض يقتضي وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $8n + 7$.

لنعرف العدد $A = (4p_1p_2 \dots p_r)^2 - 2$. إذاً A عدد زوجي و $A \equiv -2 \pmod{8}$. في الحقيقة $2 \parallel A$. ليكن p عدداً أولياً فردياً بحيث $p \mid A$. هذا يقتضي أن $p \neq p_i$ لجميع القيم $1 \leq i \leq r$ ، وإلا سوف نحصل على $p \mid 2$ وهذا مستحيل. من ذلك نستنتج أن $(p, 4p_1p_2 \dots p_r) = 1$. أيضاً بما أن $p \mid A$ فإن $(p, 4p_1p_2 \dots p_r)^2 \equiv 2 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن

$$1 = \left(\frac{(4p_1p_2 \dots p_r)^2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)$$

ومن ثم $p \equiv 1, 7 \pmod{8}$. إذا كانت $8n + 1$ هي الصورة العامة لجميع

الأعداد الأولية الفردية التي تقسم A فإن $A = 2(8k + 1) \equiv 2 \pmod{8}$ وهذا تناقض واضح. إذاً لا بد أن يوجد عدد أولي $p \equiv 7 \pmod{8}$ يقسم A بهذا يتم الإثبات.

154. نرض أولاً أن $2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$ وأن $2p+1 = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. هذا يقتضي أن $p \mid \text{ord}_{2p+1} 2$ ومن ثم إما $\text{ord}_{2p+1} 2 = p$ أو $\text{ord}_{2p+1} 2 = 1$ لكن بما أن $2 \not\equiv 1 \pmod{2p+1}$ فإن $\text{ord}_{2p+1} 2 = p$. أيضاً من التطابق $2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$ نستنتج أن $p = \text{ord}_{2p+1} 2 \mid \phi(2p+1)$ ، أي أن

$$p \mid \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i - 1} (p_i - 1)$$

هذا يقتضي أنه يوجد i ، حيث $1 \leq i \leq r$ ، يُحقق $p \mid p_i - 1$.

لنكتب $2p+1 = p_i n$ حيث $n \geq 1$ عدد صحيح. نلاحظ أن $n \neq 2$ وإلا سوف يصبح لدينا 211 وهذا مستحيل. إذا كان $n > 2$ فإن $2p+1 = p_i n > 2p_i$ يقتضي أن $p_i - 1 > \frac{1}{2} p_i$ ومن ثم $p > p_i - 1$ ، وهذا يناقض ما أثبتناه أعلاه. إذاً نستنتج أنه لا بد أن يكون $n = 1$ ومن ثم $2p+1 = p_i$ ، أي أن $2p+1$ عدد أولي.

أما العكس، فإذا كان $2p+1$ عدداً أولياً و $p = 4k + 3$ ، فإن $2p+1 = 8k+7 \equiv 7 \pmod{8}$. هذا يقتضي أن $\left(\frac{2}{2p+1}\right) = 1$ ومن ثم $2^{\frac{2p+1-1}{2}} \equiv 1 \pmod{2p+1}$ ، أي أن $2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$ ، وهو المطلوب.

155. حيث إن g جذر بدائي قياس p ، فإن $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. هذا يقتضي أن

$$g^{p-1} - 1 = (g^{(p-1)/2} - 1)(g^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

ومن ثم إما $g^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ أو $g^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$. الاحتمال الثاني غير ممكن لأن g جذر بدائي قياس p . لذا نحصل على $g^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$ الآن حيث إن $\left(\frac{g}{p}\right) \pmod{p}$ إذاً، $\left(\frac{g}{p}\right) \equiv -1 \pmod{p}$ وبسبب أن $\left(\frac{g}{p}\right) = \pm 1$ و p عدد أولي فردي، نستنتج أن $\left(\frac{g}{p}\right) = -1$ ، أي أن g راسب غير تربيعي قياس p .

156. لنرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A|$. لتكن S هي مجموعة الرواسب غير التربيعية قياس p و T هي مجموعة الجذور البدائية قياس p . السؤال السابق يقتضي أن $T \subseteq S$. نعرف أيضاً أن $|S| = \frac{p-1}{2}$ و $|T| = \phi(p-1)$.

إذا كان عكس السؤال السابق صحيح فإن هذا يقتضي أن $S \subseteq T$ ومن ثم $S = T$. هذا يعني أن $\frac{p-1}{2} = \phi(p-1)$ ، وهذا صحيح إذا و فقط إذا كان $p-1 = 2^k$ ، أي $p = 2^k + 1$ ، حيث k عدد صحيح موجب. (مثال 21)

إذا كان $p = 2^k + 1$ فإن $|S| = \frac{p-1}{2} = 2^{k-1}$ و $|T| = \phi(p-1) = \phi(2^k) = 2^{k-1}$. هذا يقتضي أن $|S| = |T|$. بما أن $T \subseteq S$ إذاً لابد أن يكون $T = S$ ، أي أن كل راسب غير تربيعي قياس p هو جذر بدائي قياس p .

157. ليكن عدد فيرما $F_n = 2^{2^n} + 1$ ، $n \geq 1$ ، عدداً أولياً. نلاحظ أولاً أن $F_n \equiv 1 \pmod{4}$ و $F_n \equiv 2 \pmod{3}$. باستخدام قانون جاوس

للمقلوبية نحصل على

$$\left(\frac{3}{F_n}\right) = \left(\frac{F_n}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

أي أن 3 راسب غير تربيعي قياس F_n . باستخدام السؤال السابق نستنتج أن 3 جذر بدائي قياس F_n .

158. لاحظ أن $p = 2q + 1$. نلاحظ أيضاً ما يأتي:

- أي جذر بدائي قياس p هو راسب غير تربيعي قياس p (سؤال رقم 155)

- العدد 2 هو راسب غير تربيعي قياس p لأن $p \equiv 3 \pmod{8}$ (ملحوظة 2 لنظرية 29)

- يوجد $q = \frac{p-1}{2}$ راسب غير تربيعي قياس p (نظرية 28) و $\phi(p-1) = q-1$ جذر بدائي قياس p (نظرية 27)

- $p-1$ راسب غير تربيعي قياس p (لأن $p-1 \equiv -1 \pmod{p}$) و $p \equiv 3 \pmod{4}$ وليس جذراً بدائياً قياس p (لأن رتبته 2 وليس $p-1$)

نستنتج من هذه الملاحظات أن كل الرواسب غير التربيعية قياس p (باستثناء $p-1$) هي جذور بدائية قياس p . فحيث إن 2 راسب غير تربيعي قياس p فإن 2 جذر بدائي قياس p .

159. بتقسيم n على m نحصل على

$$n = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

من ذلك نستنتج أن

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r}{m} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{m} \right\rfloor = q$$

وأيضاً

$$\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor q + \frac{r-1}{m} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r-1}{m} \right\rfloor = \begin{cases} q, & 1 \leq r < m \\ q-1, & r=0 \end{cases}$$

هذا يقتضي أن

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & m \mid n \\ 0, & m \nmid n \end{cases}$$

160. باستخدام خواص دالة الصحيح $\lfloor x \rfloor$ نجد أن

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

$$\text{و } n(x-1) < n \lfloor x \rfloor \leq nx \text{ أو}$$

$$-nx \leq -n \lfloor x \rfloor < -n(x-1)$$

بجمع المتباينات أعلاه نحصل على

$$-1 < \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor < n$$

$$\text{حيث إن } \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor \text{ عدد صحيح، إذاً}$$

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor - n \lfloor x \rfloor \leq n-1$$

161. بملاحظة أن

$$3^{2n} \leq 3^{2n} + 3^n + 3 < 3^{2n} + 2 \times 3^n + 1 = (3^n + 1)^2$$

نجد أن

$$3^n \leq \sqrt{3^{2n} + 3^n + 3} < 3^n + 1$$

هذا يقتضي أن $\left\lfloor \sqrt{3^{2n} + 3^n + 3} \right\rfloor = 3^n$.

162. إذا كان $i = 1$ فإن $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p}{1} \right\rfloor}{p/1} \right\rfloor = 1$. الآن لنفرض أن

$1 < i \leq p-1$. بما أن $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ ، حيث $\lfloor x \rfloor = x$ إذا فقط إذا كان x عدداً صحيحاً، و p/i ليس عدداً صحيحاً، إذاً

$$\frac{p}{i} - 1 < \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor < \frac{p}{i}$$

بالتقسيم على p/i نحصل على

$$0 < 1 - \frac{i}{p} < \frac{\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor}{p/i} < 1$$

ومن ثم $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor}{p/i} \right\rfloor = 0$. هذا يقتضي أن $\sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor}{p/i} \right\rfloor = 1$.

163. نبدأ الحل بذكر ملحوظتين:

• $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ و $\lfloor x \rfloor = x$ إذا فقط إذا كان x عدداً صحيحاً.

• بواسطة نظرية ويلسون، $n!+1 \mid n+1$ إذا فقط إذا كان $n+1$ عدداً أولياً.

لاحظ أن

$$\frac{n!+1}{n+1} - 1 < \left\lfloor \frac{n!+1}{n+1} \right\rfloor \leq \frac{n!+1}{n+1}$$

حيث إن المساواة تتحقق إذا و فقط إذا كان $n+1$ عدداً أولياً. بضرب الحدود بالمقدار $n+1$ ، نحصل على

$$n! - n < \left\lfloor \frac{n!+1}{n+1} \right\rfloor (n+1) \leq n!+1$$

ب طرح $n! - n$ من جميع الحدود ومن ثم التقسيم على $n+1$ ، نحصل على

$$0 < \left\lfloor \frac{n!+1}{n+1} \right\rfloor - \left(\frac{n! - n}{n+1} \right) \leq 1$$

حيث إن المساواة تتحقق إذا و فقط إذا كان $n+1$ عدداً أولياً. لنضع

$$A(n) = \left\lfloor \frac{n!+1}{n+1} \right\rfloor - \left(\frac{n! - n}{n+1} \right)$$

إذا $\llbracket A(n) \rrbracket = 1$ إذا كان $n+1$ عدداً أولياً و $\llbracket A(n) \rrbracket = 0$ إذا كان $n+1$ عدداً غير أولي. بما أن

$$f(n) = (n-1) \cdot \llbracket A(n) \rrbracket + 2$$

إذا $f(n) = n+1$ إذا كان $n+1$ عدداً أولياً و $f(n) = 2$ إذا كان $n+1$ عدداً غير أولي، أي أنه في جميع الحالات $f(n)$ عدد أولي.

164. أي عدد حقيقي $\alpha > 0$ يقع بين قوتين لعددين صحيحين

متتالين:

$$m^k \leq \alpha < (m+1)^k$$

حيث $m \geq 0$ عدد صحيح. بما أن $0 \leq \alpha - \llbracket \alpha \rrbracket < 1$ و

$$(m+1)^k - m^k \geq 1$$

$$m^k \leq \llbracket \alpha \rrbracket \leq \alpha < (m+1)^k$$

هذا يقتضي أن $m + 1 > \sqrt[k]{\alpha} \geq \sqrt[k]{\lceil \alpha \rceil} \geq m$ ومن ثم $\lceil \sqrt[k]{\alpha} \rceil = m = \lceil \sqrt[k]{\lceil \alpha \rceil} \rceil$.

165. لاحظ أولاً أن $\lceil \alpha \rceil = 0$ ومن ثم فالصفر ينتمي إلى المجموعة المعطاة. ليكن n عدداً صحيحاً موجباً. العدد n يقع بين مضاعفين متتاليين للعدد α :

$$(m-1)\alpha < n \leq m\alpha$$

حيث $m > 1$ عدد صحيح. بما أن $0 < \alpha < 1$ ، فإن $-\alpha > -1$. هذا يقتضي أن $m\alpha - 1 < n \leq m\alpha$ ، أو $n \leq m\alpha < n + 1$. نستنتج من ذلك أن $\lceil m\alpha \rceil = n$.

166. ليكن k أكبر عدد صحيح يُحقق $5^k \leq n < 5^{k+1}$. إذاً

$$e_5 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor$$

حيث إن $2^{2k} = 4^k > 5^k \geq n$ و $\lfloor n/5^i \rfloor \geq \lfloor n/2^i \rfloor$ (لأن $n/2^i \geq n/5^i$ لأي $i \geq 1$) نستنتج أن

$$e_2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lfloor n/2^i \rfloor \geq \sum_{i=1}^{2k} \lfloor n/2^i \rfloor > \sum_{i=1}^k \lfloor n/2^i \rfloor \geq \sum_{i=1}^k \lfloor n/5^i \rfloor = e_5$$

أي أن $e_2 > e_5$.

167. إذا كان $(n, 12) = 1$ فإن $(n, 3) = 1 = (n, 2)$. عدد الأعداد

الأقل من أو تساوي 1000 والتي تقبل القسمة على 2 تساوي

$$\left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500 \text{ والتي تقبل القسمة على 3 تساوي } \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

والتي تقبل القسمة على 2 و 3 معاً تساوي $\left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$. إذاً فالعدد

$$\text{المطلوب يساوي } 333 + 166 - 333 - 500 = 1000.$$

168. باستخدام نظرية ذات الحدين يمكننا أن نكتب (لقيم $n \geq 1$)

$$(3+2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k = a_n + b_n \sqrt{2},$$

$$(3-2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} (-2\sqrt{2})^k = a_n - b_n \sqrt{2}$$

حيث a_n و b_n أعداد صحيحة. (قيمة b_n ناتجة من الحدود التي فيها k عدد فردي.) بضرِب المعادلتين السابقتين نحصل على

$$a_n^2 - 2b_n^2 = 1$$

نقوم بإجراء الحسابات التالية:

$$\begin{aligned} \left\lfloor (3+2\sqrt{2})^n \right\rfloor &= \left\lfloor a_n + b_n \sqrt{2} \right\rfloor = \left\lfloor a_n + \sqrt{2b_n^2} \right\rfloor = \left\lfloor a_n + \sqrt{a_n^2 - 1} \right\rfloor \\ &= a_n + \left\lfloor \sqrt{a_n^2 - 1} \right\rfloor = a_n + (a_n - 1) = 2a_n - 1 \end{aligned}$$

إذاً فالمقدار $\left\lfloor (3+2\sqrt{2})^n \right\rfloor$ عدد فردي.

ملحوظة: حيث إن $a_n^2 - 1 < a_n^2 \leq (a_n - 1)^2$ ، إذاً

$$\left\lfloor \sqrt{a_n^2 - 1} \right\rfloor = a_n - 1$$

169. بما أن الأعداد $0, 1, 2, \dots, m-1$ تمثل نظام رواسب تام قياس

m و $(a, m) = 1$ فإن الأعداد

$$b, a+b, 2a+b, \dots, (m-1)a+b$$

تمثل أيضاً نظام رواسب تام قياس m . عند قسمة هذه الأعداد على m نحصل على

$$ai + b = \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor m + r_i, \quad 0 \leq i \leq m-1$$

حيث إنَّ البواقي r_i تأخذ جميع القيم $0, 1, 2, \dots, m-1$ ، لكن ربما بترتيب مُختلف. بجمع المعادلات السابقة نحصل على

$$\sum_{i=0}^{m-1} (ai + b) = \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor m + \sum_{i=0}^{m-1} r_i$$

بالتبسيط وبملاحظة أن $\sum_{i=0}^{m-1} i = \sum_{i=0}^{m-1} r_i$ نحصل على الآتي:

$$a \sum_{i=0}^{m-1} i + \sum_{i=0}^{m-1} b = m \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{m-1} r_i,$$

$$(a-1) \sum_{i=0}^{m-1} i + bm = m \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor,$$

$$(a-1) \cdot \frac{(m-1)m}{2} + bm = m \sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor$$

بالتقسيم على m نحصل على المطلوب:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{ai + b}{m} \right\rfloor = \frac{(a-1)(m-1)}{2} + b$$

170. نقسم الفترة $0 \leq x < 1$ إلى n جزءاً بحيث يكون طول كل

جزء $\frac{1}{n}$ ومن ثم ندرس الحالات المحتملة لقيم x :

$$\frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

إذا كان $i = 1$ (أي أن $0 \leq x < \frac{1}{n}$) فإن

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n} \right] = \left[x + \frac{2}{n} \right] = \dots = \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = 0 = [nx]$$

وإذا كان $2 \leq i \leq n$ و $\frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}$ ، فإن

$$[nx] = i - 1 \text{ ومن ثم } i - 1 \leq nx < i.$$

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n} \right] = \left[x + \frac{2}{n} \right] = \dots = \left[x + \frac{n-i}{n} \right] = 0 \text{ هذا يعطينا } 0$$

$$\left[x + \frac{n-(i-1)}{n} \right] = \left[x + \frac{n-(i-2)}{n} \right] = \dots = \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = 1$$

أي أن

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = i - 1 = [nx]$$

وبهذا يتم المطلوب.

171. لاحظ أولاً أنه إذا كان $k = 2l + 1 \geq 1$ عدداً فردياً فإن

$$\left[\frac{k}{2} \right] = \left[\frac{2l+1}{2} \right] = \left[l + \frac{1}{2} \right] = l = \frac{k-1}{2}$$

الآن إذا كان n عدداً زوجياً فإن

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{2} \right] &= \left[\frac{1}{2} \right] + \left(1 + \left[\frac{3}{2} \right] \right) + \left(2 + \left[\frac{5}{2} \right] \right) + \dots + \left(\frac{n-2}{2} + \left[\frac{n-1}{2} \right] \right) + \frac{n}{2} \\ &= 2 \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-2}{2} \right) + \frac{n}{2} \\ &= \frac{n^2}{4} = \left[\frac{n^2}{4} \right] \end{aligned}$$

أما إذا كان n عدداً فردياً فإن

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\frac{k}{2} \right] &= \left[\frac{1}{2} \right] + \left(1 + \left[\frac{3}{2} \right] \right) + \left(2 + \left[\frac{5}{2} \right] \right) + \dots + \left(\frac{n-1}{2} + \left[\frac{n}{2} \right] \right) \\ &= 2 \left(1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} \right) \\ &= \frac{n^2-1}{4} = \left[\frac{n^2}{4} \right] \end{aligned}$$

إذاً $\sum_{k=1}^n \llbracket k/2 \rrbracket = \llbracket n^2/4 \rrbracket$ لجميع الأعداد الطبيعية n .

172. لنرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A|$. لاحظ أنه إذا كان $(i, n) = d$ ، فإنه يمكننا أن نكتب $i = jd$ و $n = md$ ، حيث j و m عددان صحيحان يحققان $(j, m) = 1$. بهذه الملاحظة يصبح لدينا الآتي:

$$\begin{aligned} |\{i : 1 \leq i \leq n, (i, n) = d\}| &= |\{jd : 1 \leq jd \leq md, (jd, md) = d\}| \\ &= |\{jd : 1 \leq j \leq m, (j, m) = 1\}| \\ &= \phi(m) \\ &= \phi\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

173. نرتب الأعداد $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots, p^k \cdot (p^k + 1)$ على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, (p-1) \cdot p, p \cdot (p+1) \\ &(p+1) \cdot (p+2), \dots, (2p-1) \cdot 2p, 2p \cdot (2p+1) \\ &\vdots \\ &((i-1)p+1) \cdot ((i-1)p+2), \dots, (ip-1) \cdot ip, ip \cdot (ip+1) \\ &\vdots \\ &((p^{k-1}-1)p+1) \cdot ((p^{k-1}-1)p+2), \dots, (p^k-1) \cdot p^k, p^k \cdot (p^k+1) \end{aligned}$$

نلاحظ أن جميع الأعداد لا تقبل القسمة على p ماعدا آخر عددين في كل صف. وحيث إن عدد الصفوف يساوي p^{k-1} صفاً، فإن عدد الأعداد الأولية نسبياً مع p في المجموعة أعلاه يساوي $p^k - 2p^{k-1}$ ، أو $p^{k-1}(p-2)$.

174. الأعداد $n = 19^k$ ، حيث $k \geq 1$ ، تحقق المطلوب لأن

$$\phi(n) = 19^{k-1}(19-1) = 19^{k-1} \times 2 \times 9$$

175. إذا كان n يقبل القسمة على عددين أوليين فرديين مختلفين فإن $4 \mid \phi(n)$ ومن ثم $\phi(n) \neq 6$. وإذا كان $n = 2^\alpha$ ، $\alpha \geq 1$ ، فإن $\phi(n) = 2^{\alpha-1} \neq 6$. أيضاً إذا كان $n = 2^\alpha \cdot p^\beta$ ، حيث p عدد أولي فردي و $\alpha \geq 2$ و $\beta \geq 1$ فإن $4 \mid \phi(n)$ ومن ثم $\phi(n) \neq 6$. نستنتج من ذلك أن n يمكن أن تأخذ إحدى الصيغتين الآتيتين

$$n = p^\beta, \quad n = 2p^\beta, \quad \beta \geq 1$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة $\phi(n) = 6$ تكافئ المعادلة التالية

$$p^{\beta-1}(p-1) = 2 \cdot 3$$

إذا كان $p > 7$ فإن $p-1 > 6$ ومن ثم $p^{\beta-1}(p-1) \neq 6$. إذا فالقيم المحتملة للعدد الأولي الفردي p هي 3 أو 5 أو 7. نجد بسهولة أن الحلول هي $(7, 1)$ ، $(3, 2)$ و هذه تُعطينا الحلول الأربعة

$$n = 3^2, 2 \cdot 3^2, 7, 2 \cdot 7 \\ = 9, 18, 7, 14$$

للمعادلة $\phi(n) = 6$.

176. إذا كان n يقبل القسمة على عددين أوليين فرديين مختلفين فإن $4 \mid \phi(n)$ ومن ثم $\phi(n) \neq 2 \times 7^m$. وإذا كان $n = 2^\alpha$ ، $\alpha \geq 1$ ، فإن $\phi(n) = 2^{\alpha-1} \neq 2 \times 7^m$. أيضاً إذا كان $n = 2^\alpha \cdot p^\beta$ ، حيث p عدد أولي فردي و $\alpha \geq 2$ و $\beta \geq 1$ فإن $4 \mid \phi(n)$ ومن ثم $\phi(n) \neq 2 \times 7^m$. نستنتج من ذلك أن n يمكن أن تأخذ إحدى الصيغتين الآتيتين

$$n = p^\beta, \quad n = 2p^\beta, \quad \beta \geq 1$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة $\phi(n) = 2 \times 7^m$ تكافئ المعادلة الآتية

$$p^{\beta-1}(p-1) = 2 \times 7^m$$

نثبت الآن أنه لا يوجد أي حل للمعادلة السابقة.

إذا كان $\beta = 1$ فسوف نحصل على $p = 1 + 2 \times 7^m$ وهذا مُستحيل لأن $1 + 2 \times 7^m$ ليس عدداً أولياً (لأن $1 + 2 \times 7^m \equiv 1 + 2 \times 1^m \equiv 3 \equiv 0 \pmod{3}$).

إذا كان $\beta \geq 2$ فإن المعادلة $p^{\beta-1}(p-1) = 2 \times 7^m$ تقتضي أن $p \mid 2 \times 7^m$ ومن ثم $p = 7$ لأن p عدد أولي فردي. هذا يُعطينا $7^{\beta-1} \times 6 = 2 \times 7^m$ ومن ثم $3 \mid 7^m$ وهذا مُستحيل.

نستنتج من ذلك كله أنه لا يوجد أي حل للمعادلة $\phi(n) = 2 \times 7^m$ لأي عدد صحيح $m \geq 1$.

177. المعادلة $\phi(n) = \frac{2}{7}n$ تقتضي أن $7\phi(n) = 2n$ ومن ثم $7 \mid 2n$. بما أن $(7, 2) = 1$ فإن $7 \mid n$. لذا يمكن أن نكتب

$$n = 7^\gamma \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \quad \gamma \geq 1, \quad \alpha_i \geq 1, \quad p_i \neq 7, \quad 1 \leq i \leq r$$

بالتعويض في المعادلة $\phi(n) = \frac{2}{7}n$ نحصل على المعادلة

$$7^{\gamma-1}(7-1) \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) = 7^{\gamma-1} \times 2 \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

أو بالتبسيط

$$3 \prod_{i=1}^r (p_i - 1) = \prod_{i=1}^r p_i$$

هذا يقتضي أن $\prod_{i=1}^r p_i$ $3 \mid$ ومن ثم $p_i = 3$ لعددٍ ما i ، حيث $1 \leq i \leq r$.
للتبسيط يمكن أن نأخذ $p_1 = 3$. بالتعويض في المعادلة السابقة عن القيمة
 $p_1 = 3$ نحصل على المعادلة

$$2 \prod_{i=2}^r (p_i - 1) = \prod_{i=2}^r p_i$$

هذا بدوره يقتضي- أن $\prod_{i=2}^r p_i$ $2 \mid$ ومن ثم $p_i = 2$ لعددٍ ما i ، حيث
 $2 \leq i \leq r$. للتبسيط يمكن أن نأخذ $p_2 = 2$. بالتعويض في المعادلة
السابقة نحصل على المعادلة

$$\prod_{i=3}^r (p_i - 1) = \prod_{i=3}^r p_i$$

نلاحظ الآن من المعادلة السابقة أنه إذا كان n يقبل القسمة على عدد
أولي مُختلفٍ عن الأعداد الأولية 2, 3, 7 فإننا سوف نحصل على المساواة
المستحيلة $\prod_{i=3}^r (p_i - 1) = \prod_{i=3}^r p_i$ (فردى = زوجي). نستنتج من ذلك أن
 n لا يمكن أن يقبل القسمة على أعداد أولية مُختلفة عن الأعداد 2, 3, 7.
أي أن n يجب أن تأخذ الصيغة $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma$. أيضاً نجد بسهولة أنه
إذا كان $n = 2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma$ فإن $\phi(n) = \frac{2}{7}n$.

178. لنفرض وجود عددٍ منتهٍ من الأعداد الأولية. ليكن P هو
حاصل ضرب هذه الأعداد الأولية. نجد أولاً أن $\phi(P) = 1$ لأن أي عدد
أقل من P إما أن يكون عدداً أولياً أو حاصل ضرب أعداد أولية.
باستخدام القانون المعطى، نحصل على الآتي:

$$1 = \phi(P) = P \prod_{p \mid P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p \mid P} (p - 1)$$

هذا التناقض الواضح يثبت وجود عدد لا منتهٍ من الأعداد الأولية.

179. لنفرض أنه يوجد عدد أولي p و عدد صحيح $t \geq 2$ بحيث $p' \mid n$ (وبالضرب) $p^2 \mid n$ و $p^{t+1} \mid n$. إذا $p \mid \phi(n)$ ، أي أن $p \mid \phi(n)$ ، لكن $p \mid n-1$ (لأن $(n, n-1) = 1$ و $p \mid n$). هذا يقتضي أن $p \mid n-1$. هذا التناقض يكمل الإثبات.

180. لاحظ أولاً أنه إذا كان $p \mid n$ فإن $p \leq n$ ومن ثم $\left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. هذا يقتضي الآتي:

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\omega(n)}$$

181. لاحظ أولاً أن

$$\begin{aligned} n \geq 2 \quad \phi(n^2) &= n^2 \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\phi(n) \quad \bullet \\ n > 1 \quad \phi(n) &\leq n-1 \quad \bullet \end{aligned}$$

هذا يقتضي أن

$$\begin{aligned} \phi(n^2) + \phi((n+1)^2) &= n\phi(n) + (n+1)\phi(n+1) \\ &\leq n(n-1) + (n+1)n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

182. بسبب وجود عدد لانهائي من الأعداد الأولية ذات الصيغة العامة $4k+1$ ، إذا فالقيم $n = p = 4k+1$ تحقق الشرط المطلوب:

$$\begin{aligned} \phi(n+1) &= \phi(4k+2) = \phi(2)\phi(2k+1) \\ &= \phi(2k+1) \leq 2k < 4k = \phi(n) \end{aligned}$$

183. حيث إن $\sigma(x) > x$ ، فإن أي حل x للمعادلة $\sigma(x) = n$ يجب أن يحقق $x < n$ ، ومن ثم فعدد الحلول للمعادلة المعطاة هو عدد محدود.

184. نكتب أولاً المعادلة على الصيغة: $\sigma(n) - n - 1 = 4$

إذا كانت n تقبل القسمة على عددين أوليين مختلفين p و q فإن

$$4 = \sigma(n) - n - 1 \geq p + q$$

وهذا مستحيل لأن $p + q \geq 2 + 3 = 5$. من ذلك نستنتج أن n لابد أن تكون على الصيغة $n = p^\alpha$ حيث p عدد أولي و $\alpha \geq 1$. بسهولة نجد أنه في حالتي $\alpha = 1$ و $\alpha = 2$ فإن $n = p^\alpha$ لا تحقق المعادلة المعطاة. إذا كانت $\alpha \geq 3$ فإن

$$4 = \sigma(n) - n - 1 \geq p + p^2$$

وهذا مستحيل لأن $p + p^2 \geq 2 + 2^2 = 6$. إذاً لا يوجد للمعادلة المعطاة أي حل.

185. بملاحظة أن $d \mid n$ إذا و فقط إذا $(n/d) \mid n$ ، نستنتج ما يلي:

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d = \sum_{d \mid n} \frac{n}{d} = n \sum_{d \mid n} \frac{1}{d} \leq n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

بالقسمة على n نحصل على المطلوب.

186. عند كتابة $n = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}$ ، وباستخدام قانون $\sigma(n)$ نحصل

على الآتي:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \prod_{i=1}^t \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^t (1 + p_i + \dots + p_i^{k_i}) \\ &= \prod_{i=1}^t p_i^{k_i} \left(\frac{1}{p_i^{k_i}} + \frac{1}{p_i^{k_i-1}} + \dots + 1 \right) \\ &= n \prod_{i=1}^t \left(\frac{1}{p_i^{k_i}} + \frac{1}{p_i^{k_i-1}} + \dots + 1 \right) \geq n \prod_{i=1}^t \left(1 + \frac{1}{p_i} \right)\end{aligned}$$

بالقسمة على n يكمل الإثبات.

187. إذا كان n عدداً مؤلفاً فإنه يوجد عدد d يقسم n بحيث أن $1 < d < n$. هذا يقضي أن $\frac{n}{d}$ أيضاً يقسم n و $1 < \frac{n}{d} < n$. بملاحظة أنه إما d أو $\frac{n}{d}$ أكبر من أو يساوي \sqrt{n} (إذا كان $d \leq \sqrt{n}$ فإن $\frac{n}{d} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$) فإننا نستنتج أن $\frac{n}{d} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. $\sigma(n) > n + d + \frac{n}{d} > n + \sqrt{n}$.

188. لنضع $m = 3n + 2$. لأي قاسم موجب d للعدد m يوجد قاسم موجب e للعدد m بحيث يكون $m = de$. إذا كان $d \equiv 1 \pmod{3}$ فإن $e \equiv 2 \pmod{3}$ (لأن $m \equiv 2 \pmod{3}$) وإذا كان $d \equiv 2 \pmod{3}$ فإن $e \equiv 1 \pmod{3}$ (لأن $m \equiv 2 \pmod{3}$) في كلتا الحالتين $d + e \equiv 0 \pmod{3}$. بملاحظة أن

$$2\sigma(m) = \sum_{d|m} d + \sum_{e|m} e = \sum_{(d,e), de=m} (d+e) \equiv 0 \pmod{3}$$

حيث أن المجموع الأخير يجري على جميع الأزواج المرتبة (d, e) التي تُحقق $d > 0$ و $e > 0$ و $de = m$ ، نستنتج من ذلك أن $3 | 2\sigma(m)$. بما أن $(3, 2) = 1$ فإن $3 | \sigma(m)$ ، أي أن $3 | \sigma(3n + 2)$.

189. لتكن $n_1, n_2, \dots, n_{\tau(n)}$ القواسم الموجبة للعدد n . إذا الأعداد $kn_1, kn_2, \dots, kn_{\tau(n)}$ هي قواسم للعدد kn وجميعها أكبر من 1. من ذلك نستنتج أن

$$\sigma(kn) \geq kn_1 + kn_2 + \dots + kn_{\tau(n)} + 1 = k\sigma(n) + 1$$

بالقسمة على kn نحصل على المطلوب:

$$\frac{\sigma(kn)}{kn} \geq \frac{\sigma(n)}{n} + \frac{1}{kn} > \frac{\sigma(n)}{n}$$

190. بما أن $\tau(n) = 30 = 2 \times 3 \times 5 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$ ، فإنه يمكننا أن نستنتج من القانون العام للدالة $\tau(n)$ أن الصيغ الممكنة للعدد n هي

$$n = p^{29}, pq^2r^4, pq^{14}, p^2q^9, p^4q^5$$

حيث إن p, q, r أعداد أولية. للحصول على أصغر قيمة للعدد n ، فإن القيم المحتملة للأعداد الأولية p, q, r لا بد أن تكون 2, 3, 5 (أصغر الأعداد الأولية). بتعويض القيم الممكنة للأعداد الأولية p, q, r في الأعداد n أعلاه، نجد أن أصغر الحلول هو

$$.n = pq^2r^4 = 5 \times 3^2 \times 2^4 = 720$$

191. بما أن $\tau(n) = 4 = 2 \times 2$ فإنه إما $n = p^3$ أو $n = pq$ حيث p و q عددان أوليان. إذا كان $n = p^3$ فإن $\sigma(n) = 72$ يقتضي أن

$$1 + p + p^2 + p^3 = 72 \Rightarrow p^3 < 72 \Rightarrow p = 2, 3$$

أي أن $n = 8, 27$ و كلا العددين لا يُحقق المعادلة $\sigma(n) = 72$. الآن لنفرض أن $n = pq$ و $p < q$. المعادلة $\sigma(n) = 72$ تقتضي أن

$$(1+p)(1+q) = 72$$

بما أن $72 = 1 \times 72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 8 \times 9$ فإننا نحصل على احتمالين يؤديان إلى حلين هما

$$\begin{cases} 1+p = 3, 1+q = 24 \\ 1+p = 4, 1+q = 18 \end{cases}$$

أي أن $p = 2$ و $q = 23$ ومن ثم $n = pq = 46$ و $p = 3$ و $q = 17$ ومن ثم $n = pq = 51$. إذاً يوجد عدداً طبيعيين يُحققان المعادلتين $\tau(n) = 4$ و $\sigma(n) = 72$ معاً هما $n = 46$ و $n = 51$.

192. حيث إن $4k + 1$ و $6k + 1$ عددين أوليين فإن

$$\tau(4k + 1) = 2 \text{ و } \tau(6k + 1) = 2. \text{ بإجراء الحسابات الآتية}$$

$$\tau(12k + 2) = \tau(2(6k + 1)) = \tau(2)\tau(6k + 1) = 2 \times 2 = 4$$

$$\tau(12k + 3) = \tau(3(4k + 1)) = \tau(3)\tau(4k + 1) = 2 \times 2 = 4$$

نستنتج أن $\tau(12k + 2) = \tau(12k + 3)$.

193. إذا كان $n = ab$ فإنه إما $a \leq \sqrt{n}$ أو $b \leq \sqrt{n}$. هذا يعني أنه

لأي عدد n يوجد قاسم أقل من أو يساوي \sqrt{n} . هذا يقتضي أن العدد الممكن لقواسم n والتي هي أقل من أو يساوي \sqrt{n} هو أقل من أو يساوي \sqrt{n} . بالملاحظة المعطاة أعلاه، يقابل أي قاسم أقل من أو يساوي \sqrt{n} قاسم آخر أكبر من أو يساوي \sqrt{n} . نستنتج من ذلك أن $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

194. لتأخذ عدداً أولياً p . إذا كان n عدداً زوجياً فإنه يمكننا أن

نكتب

$$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \tau(p^{\frac{n}{2}-1}) + \tau(p^{\frac{n}{2}-1})$$

وإذا كان $n > 1$ عدداً فردياً فإنه يمكننا أن نكتب

$$n = \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = \tau(p^{\frac{n-1}{2}}) + \tau(p^{\frac{n-3}{2}})$$

195. إذا كان $n = \underbrace{1111 \dots 11}_{2010}$ فإن $3 \mid n$ و $3^2 \mid n$. هذا يقتضي - أن $\tau(3) \mid \tau(n)$. حيث إن $\tau(3) = 2$ ، إذاً $\tau(n)$ عدد زوجي.

196. من ضمن أي أربعة أعداد صحيحة موجبة $n, n+1, n+2, n+3$ لا بد أن يكون أحدها قابلاً للقسمة على 4. فلو فرضنا على سبيل المثال أن $4 \mid n$ فإنه إما أن يكون $n = 4$ أو $n = 4k$ ، حيث $k > 1$ عدد صحيح. إذا كان $n = 4$ فإن $\tau(n) = 3$ ، وإذا كان $n = 4k$ فإن الأعداد $1, 2, 4, k, 2k, 4k$ هي قواسم للعدد n ومن ثم فإن $\tau(n) > 4$. إذاً في كلتا الحالتين $\tau(n) \neq 4$ ومن ثم فإننا نستنتج أنه لا يوجد عدد صحيح $n \geq 1$ يُحقق المعادلة $\tau(n) = \tau(n+1) = \tau(n+2) = \tau(n+3) = 4$.

197. لنكتب $n = p^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ ، حيث p هو أصغر عدد أولي يقسم n . هذا يعطي $\omega(n) = r$. لأن

$$n \geq p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \dots p^{\alpha_r} \geq p^r = p^{\omega(n)}$$

إذاً بأخذ اللوغاريثم للطرفين نحصل على المطلوب.

198. بملاحظة أولاً أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية ذات الصيغة العامة $6k + 1$ ، إذاً فالقيم $n = 6k$ تحقق الشرط المطلوب: $\omega(n) = \omega(6k) \geq \omega(6) = 2$ و $\omega(n+1) = \omega(6k+1) = 1$

199. لنفرض أن $\omega(2^n - 1) \geq n$. هذا يقتضي أن $2^n - 1$ يقبل القسمة على الأقل على عدد n من الأعداد الأولية الفردية، ولتكن p_1, p_2, \dots, p_n . نستنتج من ذلك أن

$$2^n - 1 \geq p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n > 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$$

وهذا مُستحيل. إذًا $n < \omega(2^n - 1)$.

200. الإثبات يتم بملاحظة أنه لأي عدد n ، أحد الأعداد $n, n+2, n+5, n+7$ يقبل القسمة على 4. وإثبات ذلك يتم بدراسة الصيغ الممكنة للعدد n وهي $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$.

201. لاحظ أولاً أنه بما أن n عدد فردي، فإن $a+b$ يقسم $c^m = a^n + b^n$. هذا يقتضي أن أي عدد أولي يقسم $a+b$ سوف يقسم أيضاً c^m ومن ثم يقسم c . الآن لنفرض أن $\mu(a+b) \neq 0$. هذا يعني أن جميع الأعداد الأولية التي تقسم $a+b$ مرفوعة للأس 1. باستخدام الملاحظة السابقة، نستنتج أن $a+b$ يقسم c وهذا بدوره يقتضي أن $a+b \leq c$. لكن هذا مستحيل لأن $c < a+b$ (لأن $c^n < c^m = a^n + b^n < (a+b)^n$). هذا التناقض يقتضي أن $\mu(a+b) = 0$.

202. لنضع $F(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \omega(d)$. حيث إن $\mu(n)$ و $\omega(n)$ دالتان ضربيتان فإن $\mu(n) \omega(n)$ دالة ضربية ومن ثم $F(n)$ دالة ضربية أيضاً (نظرية 35). لذا نحسب أولاً $F(p^k)$ حيث p عدد أولي و $k \geq 1$ عدد صحيح:

$$F(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) \omega(d) = \sum_{i=0}^k \mu(p^i) \omega(p^i) = 1 - 1 = 0$$

الآن إذا كان $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ فإن

$$F(n) = \prod_{i=1}^r F(p_i^{k_i}) = \prod_{i=1}^r 0 = 0$$

أي أن $\sum_{d|n} \mu(d)\omega(d) = 0$.

203. لنضع $F(n) = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}$. حيث إن μ و ϕ دالتان ضربيتان فإن $\frac{\mu^2}{\phi}$ دالة ضربية ومن ثم F أيضاً دالة ضربية (نظرية 35). لذا نحسب أولاً $F(p^k)$ حيث p عدد أولي و $k \geq 1$ عدد صحيح:

$$F(p^k) = \sum_{d|p^k} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \sum_{i=0}^k \frac{\mu^2(p^i)}{\phi(p^i)} = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

الآن إذا كان $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ فإن

$$F(n) = \prod_{i=1}^r F(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^r \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}$$

$$= \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{n}{\phi(n)}$$

أي أن $\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}$ وبهذا يتم الإثبات.

204. إذا كان $n = p^\alpha$ حيث p عدد أولي و $\alpha \geq 1$ عدد صحيح،

فإن

$$\phi(p^\alpha)\sigma(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1) \cdot \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} = p^{2\alpha} - p^{\alpha-1} < p^{2\alpha}$$

حيث إن ϕ و σ دالتان ضربيتان فإنه بكتابة $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ ، نحصل على

المطلوب:

$$\phi(n)\sigma(n) = \prod_{i=1}^r \phi(p_i^{\alpha_i})\sigma(p_i^{\alpha_i}) < \prod_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i} = n^2$$

205. مجموعة قواسم جميع الأعداد $1, 2, 3, \dots, n$ هي $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. نقوم الآن بحساب عدد المرات التي تم حساب كل قاسم في المجموع

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(n)$$

القاسم 1 يقسم جميع الأعداد، ومن ثم فإن عدد المرات التي تم حساب القاسم 1 في المجموع أعلاه يساوي $\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor = n$.

القاسم 2 يقسم جميع الأعداد الزوجية الموجودة من ضمن الأعداد $1, 2, 3, \dots, n$ ، ومن ثم فإن عدد المرات التي تم حساب القاسم 2 في المجموع أعلاه يساوي $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

القاسم 3 يقسم جميع مضاعفات العدد 3 الموجودة من ضمن الأعداد $1, 2, 3, \dots, n$ ، ومن ثم فإن عدد المرات التي تم حساب القاسم 3 في المجموع أعلاه يساوي $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. وهكذا حتى نصل إلى القاسم n ، حيث إن عدد المرات التي تم حسابه في المجموع أعلاه يساوي $\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 1$. إذاً

نحصل على

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

206. نبدأ الحل بالملاحظة التالية: إذا كان $(m, n) = 1$ و $d^2 \mid mn$

فإنه يوجد عدداً صحيحان موجبان وحيدان d_1 و d_2 بحيث يكون $d_1^2 \mid m$ و $d_2^2 \mid n$ و $d = d_1 d_2$ و $(d_1, d_2) = 1$. نترك إثبات ذلك للقارئ. الآن نأخذ عددين صحيحين موجبين m و n يُحقِّقان $(m, n) = 1$ ونريد أن نُثبت أن

$$G(mn) = G(m)G(n)$$

باستخدام الملحوظة أعلاه نقوم بإجراء الآتي:

$$\begin{aligned} G(mn) &= \sum_{d^2 \mid mn} f(d) \\ &= \sum_{\substack{d_1^2 \mid m \\ d_2^2 \mid n}} f(d_1 d_2) = \sum_{\substack{d_1^2 \mid m \\ d_2^2 \mid n}} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_2^2 \mid n} \left(\sum_{d_1^2 \mid m} f(d_1) \right) f(d_2) \\ &= \left[\sum_{d_1^2 \mid m} f(d_1) \right] \sum_{d_2^2 \mid n} f(d_2) = G(m)G(n) \end{aligned}$$

هذا يُثبت أن G دالة ضربية.

207. إذا كان n عدداً تاماً فإن $\sigma(n) = 2n$. باستخدام السؤال رقم 189 نحصل على العلاقة $\sigma(kn) > k\sigma(n)$. لذا نستنتج أن

$$\sigma(kn) > k\sigma(n) = k(2n) = 2kn$$

ومن ثم فإن العدد nk عددٌ زائد.

208. نُريد أن نُثبت أن $\sigma(2^k \times 11) > 2 \times (2^k \times 11)$. لاحظ أن

$$\begin{aligned} \sigma(2^k \times 11) &= \sigma(2^k) \sigma(11) = (2^{k+1} - 1) \times (1 + 11) \\ &= 2^{k+1} \times 11 + 2^{k+1} - 12 > 2^{k+1} \times 11 \end{aligned}$$

حيث إنَّ المتباينة صحيحة لأن $2^{k+1} - 12 > 0$ وذلك لأن $k \geq 3$. من ذلك نستنتج أن العدد $2^k \times 11$ عددٌ زائد لجميع الأعداد الصحيحة $k \geq 3$.

209. مُعطى السؤال يقتضي- أن $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ حيث p و $2^p - 1$ عددان أوليان فرديان. بما أن p عدد فردي، فإن $3 \mid 2^{p-1} - 1$ ومن ثم $2^{p-1} = 3k + 1$ ، حيث k عدد صحيح موجب. بالضرب في 2 نحصل على $2^p = 6k + 2$. بالحساب قياس 9 نحصل على المطلوب:

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) = (3k + 1)(6k + 1) = 18k^2 + 9k + 1 \equiv 1 \pmod{9}$$

210. بحساب قيمة $\sigma(p^k q^l)$ نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} \sigma(p^k q^l) &= \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \times \frac{q^{l+1} - 1}{q - 1} = \frac{p^{k+1}(1 - p^{-(k+1)})}{p(1 - p^{-1})} \times \frac{q^{l+1}(1 - q^{-(l+1)})}{q(1 - q^{-1})} \\ &= p^k q^l \times \frac{1 - p^{-(k+1)}}{1 - p^{-1}} \times \frac{1 - q^{-(l+1)}}{1 - q^{-1}} \end{aligned}$$

بما أن $2 < p < q$ فإن $p \geq 3$ و $q \geq 5$. هذا بدوره يعطينا التالي:

$$1 - p^{-(k+1)} < 1, 1 - q^{-(l+1)} < 1$$

$$p \geq 3 \Rightarrow p^{-1} \leq 3^{-1} \Rightarrow 1 - p^{-1} \geq 1 - 3^{-1} \Rightarrow \frac{1}{1 - p^{-1}} \leq \frac{3}{2}$$

$$q \geq 5 \Rightarrow q^{-1} \leq 5^{-1} \Rightarrow 1 - q^{-1} \geq 1 - 5^{-1} \Rightarrow \frac{1}{1 - q^{-1}} \leq \frac{5}{4}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\sigma(p^k q^l) \leq \frac{15}{8} p^k q^l < 2p^k q^l$$

ومن ثم فإن العدد $p^k q^l$ عدد ناقص.

211. من السؤال السابق نستنتج أنه لكي يكون $n = p^2q$ عدداً تاماً فلا بد أن يكون $p = 2$ أو $q = 2$ ، أي أن n عدد تام زوجي. هذا يقتضي-
أن

$$p^2q = 2^{r-1}(2^r - 1)$$

حيث إن r و $2^r - 1$ عددان أوليان. إذا كان $p = 2$ فإن $2^2q = 2^{r-1}(2^r - 1)$ يقتضي أن $r = 3$ و $q = 7$ ، أي أن $n = 2^2 \times 7 = 28$. وإذا كان $q = 2$ فإن $p^2 \times 2 = 2^{r-1}(2^r - 1)$ يقتضي أن $r = 2$ ومن ثم $p^2 = 5$ وهذا مستحيل.

إذا العدد 28 هو العدد التام الوحيد الذي يمكن كتابته على الصيغة العامة p^2q حيث $p \neq q$ عددان أوليان.

212. نريد أن نثبت أن $\sigma(2p(2p+1)) < 2 \times 2p(2p+1)$ إذا كان $p > 3$ و $2p+1$ عددين أوليين. حيث إن

$$\begin{aligned} \sigma(2p(2p+1)) &= \sigma(2)\sigma(p)\sigma(2p+1) \\ &= 3(p+1)(2p+2) = 6(p+1)^2 \end{aligned}$$

فإن الإثبات سوف يتم إذا أثبتنا أن $6(p+1)^2 < 2 \times 2p(2p+1)$. لكن هذه المتباينة مكافئة للمتباينة $3 < p^2 - 4p$ وهي متباينة صحيحة لأن $p \geq 5$: $p^2 - 4p = p(p-4) > 3 \times 1 = 3$. من ذلك نستنتج أن العدد $2p(2p+1)$ عدد ناقص.

213. إذا كان $q = 2$ ، فإن العدد $q(q+1) = 6$ عدد تام. لنفرض الآن أن $q > 2$ عدد أولي. إذا كان $q(q+1)$ عدداً تاماً، فبما أنه عدد زوجي فإنه يوجد عدد أولي p بحيث أن $2^p - 1$ عدد أولي و

$$q(q+1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

هذا يقتضي أن $q = 2^p - 1$ و $q + 1 = 2^{p-1}$ ومن ثم $2^{p-1} = 2^p$ أو $2 = 1$ وهذا مستحيل. إذاً يوجد عدد أولي وحيد هو $q = 2$ يجعل العدد $q(q+1)$ عدداً تاماً.

214. لنفرض أن العدد $n = pqr$ عدد تام، أي أن $\sigma(n) = 2n$ ،

أو

$$(p+1)(q+1)(r+1) = 2pqr$$

إذا كانت الأعداد p و q و r جميعها فردية فإن المعادلة أعلاه غير ممكنة التحقق لأنه في هذه الحالة $2 \parallel 2pqr$ بينما $8 \mid (p+1)(q+1)(r+1)$. إذاً لا بد أن يكون أحد الأعداد p أو q أو r عدداً زوجياً. لنفرض أن $p = 2$. في هذه الحالة المعادلة أعلاه تصبح

$$3(q+1)(r+1) = 4qr$$

هذا يقتضي أن $3 \mid qr$ ومن ثم $q = 3$ أو $r = 3$ لأن q و r عددان أوليان. في كلتا الحالتين، عند التعويض في المعادلة السابقة ومن ثم التبسيط نحصل على $1 = 0$ وهذا مستحيل. هذا يُثبت أن العدد $n = pqr$ ليس عدداً تاماً.

215. من مُعطى السؤال يمكن أن نكتب

$$P = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

$$Q = 2^{q-1}(2^q - 1)$$

حيث p و q عددان أوليان. الشرط $6 < P < Q$ يقتضي - أن $2 < p < q$ ، أي أن p و q عددان أوليان فرديان ومن ثم $q - p \geq 2$. هذا يقتضي - أن

$$2^q \geq 4 \times 2^p \text{ أو } 2^{q-p} \geq 4$$

نستنتج من ذلك أن $2^q - 1 \geq 4 \times 2^p - 1$ لكن حيث إنَّ
 $4 \times 2^p - 1 > 4(2^p - 1)$ إذاً نحصل على $2^q - 1 > 4(2^p - 1)$ أو

$$\frac{2^q - 1}{2^p - 1} > 4$$

الآن

$$\frac{Q}{P} = 2^{q-p} \times \frac{2^q - 1}{2^p - 1} > 4 \times 4$$

ومنه نحصل على $Q > 16P$ وهو المطلوب.

216. إذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغورس بدائي فإن

$$x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$$

حيث r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخر زوجي، و
 $r > s$ و $(r, s) = 1$. هذا يقتضي أن $r^2 - s^2$ و $r^2 + s^2$ عددان فرديان
 ومن ثم $x \neq 8$ و $z \neq 8$. يبقى احتمال واحد هو $y = 2rs = 8$ ، أي أن
 $rs = 4$. بسبب الشروط التي يحققها r و s نستنتج أنه لا بد أن يكون
 $r = 4$ و $s = 1$. هذا يُعطينا الثلاثي $(x, y, z) = (15, 8, 17)$ وهو
 الثلاثي الوحيد الذي يُحقِّق شرط السؤال.

217. أضلاع مثلث قائم الزاوية المطلوب معطاة كثلاثية فيثاغورس

(x, y, z) . مساحة هذا المثلث A تساوي $A = \frac{1}{2}xy$. حيث إنَّ
 $A = 30$ ، إذاً يُصبح لدينا المعادلة $xy = 60$. لهذه المعادلة 12 حلاً:

$$(x, y) = (1, 60), (2, 30), (3, 20), (4, 15), (5, 12), (6, 10),$$

$$(60, 1), (30, 2), (20, 3), (15, 4), (12, 5), (10, 6)$$

الحل الوحيد الذي يُعطينا مثلثاً قائم الزاوية هو $(x, y) = (5, 12)$ لأن y عدد زوجي. بما أن $5^2 + 12^2 = 13^2$ ، إذاً يوجد مثلث واحد يُحقِّق السؤال وهو المثلث الذي أضلاعه هي $(x, y, z) = (5, 12, 13)$.

218. أضلاع مثلث قائم الزاوية المطلوب يُكوّن ثلاثية فيثاغورس

$$(x, y, z)$$

$$x = k(r^2 - s^2)$$

$$y = 2krs$$

$$z = k(r^2 + s^2)$$

حيث k عدد صحيح موجب، و r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخر زوجي، و $r > s$ ، و $(r, s) = 1$. بما أن قيمة المحيط تساوي 30، فإن $x + y + z = 30$ ، أي

$$kr(r + s) = 15$$

هذا يقتضي أن $15 \mid k$ ومن ثم $k = 1, 3, 5, 15$.

في حالة $k = 1$ يصبح لدينا المعادلة $r(r + s) = 15$ والتي حلوها هي

$$(r, s) = (1, 14), (3, 2), (5, -2), (15, -14)$$

لكن بملاحظة الشروط التي تحققها r و s نجد أن حل المعادلة $r(r + s) = 15$ هو $(r, s) = (3, 2)$ فقط. هذا بدوره يُنتج الحل $(x, y, z) = (5, 12, 13)$.

بطريقة مُشابهة نجد أنه في الحالات $k = 3, 5, 15$ لا ينتج أي ثلاثي يُحقِّق شرط السؤال. إذاً المثلث المطلوب والذي يُحقِّق شرط السؤال هو

المثلث ذو الثلاثية $(x, y, z) = (5, 12, 13)$.

219. أضلاع مثلث قائم الزاوية المطلوب يُكون ثلاثية فيثاغورس (x, y, z) :

$$x = k(r^2 - s^2)$$

$$y = 2krs$$

$$z = k(r^2 + s^2)$$

حيث k عدد صحيح موجب، و r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخر زوجي، و $r > s$ ، و $(r, s) = 1$. إذا كانت قيمة المساحة تساوي قيمة المحيط، فإن $\frac{1}{2}xy = x + y + z$ ، أو

$$ks(r - s) = 2$$

هذا يقتضي أن $2 \mid k$ ومن ثم $k = 1$ أو $k = 2$. إذا كان $k = 1$ فالمعادلة أعلاه تصبح $s(r - s) = 2$ وحلها هو $(r, s) = (3, 2)$. هذا يعطي الثلاثية $(x, y, z) = (5, 12, 13)$. وإذا كان $k = 2$ فالمعادلة أعلاه تصبح $s(r - s) = 1$ وحلها $(r, s) = (2, 1)$. هذا يعطي الثلاثية $(x, y, z) = (6, 8, 10)$. إذاً يوجد مثلثان يُحققان شرط السؤال وهما معطيان بالثلاثيتين $(6, 8, 10)$, $(5, 12, 13)$.

220. لا يوجد أي مثلث قائم الزاوية يُحقق شرط السؤال لأنه إذا كانت ثلاثية فيثاغورس (x, y, z) تمثل أضلاع مثل هذا المثلث، فإن $\sin 60^\circ = x/z$ أو $\sin 60^\circ = y/z$ وكلا القيمتين x/z و y/z يُمثلان عددين نسبيين، بينما $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ عدد غير نسبي.

221. بملاحظة أن

$$M_n = 2^n - 1 = (2^{n-1})^2 - (2^{n-1} - 1)^2$$

فإنه بأخذ $r = 2^{n-1}$ و $s = 2^{n-1} - 1$ في نظرية 39 نحصل على مثلثفيثاغورس بدائي (x, y, z) حيث

$$x = M_n$$

$$y = 2^n M_{n-1}$$

$$z = 2^{2^{n-1}} - M_n$$

222. إذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغورس يُحقق $y = kx$ ، حيث $k > 0$ ، فإن المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ سوف تُصبح $x^2(1+k^2) = z^2$ منالنظرية الأساسية للحساب (نظرية 11) نستنتج أنه لا بد أن يكون $1+k^2$ مربعاً كاملاً، أي أن يوجد عدد صحيح موجب l يُحقق $1+k^2 = l^2$ ، أيأن $1 = (l-k)(l+k)$. بما أن $l > 0$ و $k > 0$ فإننا نحصل على $l+k=1$ و $l-k=1$ ومن ثم $l=1$ و $k=0$ وهذا مستحيل لأن $k > 0$. إذاً لا يوجد أي ثلاثي فيثاغورس يُحقق شرط السؤال.223. إذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغورس بدائي فإن

$$x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$$

حيث r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخرزوجي، و $r > s > 0$ و $(r, s) = 1$. نريد x مربعاً كاملاً، أي $x = t^2$ حيث $t > 0$ عدد صحيح. هذا يُنتج المعادلة $t^2 = r^2 - s^2$ ، أو

$$t^2 + s^2 = r^2$$

هذا يقتضي أن (لاحظ أنه بيا أن x عدد فردي فإن t عدد فردي)

$$t = m^2 - n^2, s = 2mn, r = m^2 + n^2$$

حيث m و n عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخر زوجي، و $m > n > 0$ و $(m, n) = 1$. نستنتج من ذلك أن الثلاثيات (x, y, z) المطلوبة هي

$$\begin{cases} x = (m^2 - n^2)^2 \\ y = 4mn(m^2 + n^2) \\ z = m^4 + 6m^2n^2 + n^4 \end{cases}$$

224. إذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغورس بدائي فإن

$$x = r^2 - s^2$$

$$y = 2rs$$

$$z = r^2 + s^2$$

حيث r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي والآخر زوجي و $r > s$ و $(r, s) = 1$. إذا كان $z = y + 9$ فإن $r^2 + s^2 = 2rs + 9$. هذا يقتضي أن $(r - s)^2 = 9$ ومنه $r = s \pm 3$. بما أن $r > s > 0$ فإن $r = s + 3$. وبما أن $(r, s) = 1$ فلا بد أن يكون $(s, 3) = 1$ ، وذلك بدراسة الحالات المحتملة لقيمة s : $s = 3k, 3k + 1, 3k + 2$. إذاً ثلاثيات فيثاغورس البداية (x, y, z) التي تُحقق شرط السؤال معطاة على النحو الآتي:

$$x = 6s + 9$$

$$y = 2s^2 + 6s$$

$$z = 2s^2 + 6s + 9$$

حيث $s > 0$ و $(s, 3) = 1$.

225. نلاحظ من المعادلة $x^2 + y^2 = 4z^2$ مبدئياً أنه إذا كان $x = 2k + 1$ و $y = 2l + 1$ عددين فرديين فإن $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ومن ثم $x^2 + y^2 \neq 4z^2$. أيضاً لا يمكن أن يكون أحد المقدارين x أو y فردياً و الآخر زوجياً وإلا سوف نحصل المساواة المستحيلة (زوجي = فردي). إذاً لابد أن يكون x و y عددين زوجيين، ولنكتب $x = 2x_1$ و $y = 2y_1$. بالتعويض في المعادلة $x^2 + y^2 = 4z^2$ نحصل على المعادلة

$$x_1^2 + y_1^2 = z^2$$

نستنتج أن (نتيجة 40)

$$x_1 = k(r^2 - s^2), y_1 = 2krs, z = k(r^2 + s^2)$$

ومن ثم

$$x = 2k(r^2 - s^2), y = 4krs, z = k(r^2 + s^2)$$

حيث $k > 0$ عدد صحيح و r و s عددان صحيحان موجبان أحدهما فردي و الآخر زوجي، و $r > s > 0$ و $(r, s) = 1$.

226. نلاحظ أولاً أنه إذا كان d يقسم أي عددين من الأعداد x, y, z فإنه يقسم العدد الثالث: (مثلاً، إذا كان $d \mid x$ و $d \mid z$ فإن $d \mid x^2$ و $d \mid z^2$ ومن ثم $d^2 \mid 3y^2$. باستخدام مثال 8، نجد أن $d \mid y$.) نستنتج من ذلك أن $(x, y, z) = (x, z) = (y, z) = (x, y)$. بحذف العوامل المشتركة، يمكن أن نفرض أن

$$(x, y) = (x, z) = (y, z) = (x, y, z) = 1$$

ثانياً: x عدد فردي و أحد العددين y و z عدد فردي والآخر عدد زوجي: إذا كان x عدداً زوجياً، فلا بد أن يكون y و z عددين فرديين (لأن $(x, y) = (x, z) = 1$). بحساب المعادلة $x^2 + 3y^2 = z^2$ قياس 4 نحصل على $0 + 3(1) \equiv 1 \pmod{4}$ ، وهذا مستحيل. إذاً لا بد أن يكون x عدداً فردياً ومن ثم أحد العددين y و z عدد فردي والآخر عدد زوجي.

الآن لنكتب المعادلة على الصورة

$$3y^2 = (z - x)(z + x) \dots \dots \dots (*)$$

ولنضع $g = (z - x, z + x)$. إذاً $g \mid z - x$ و $g \mid z + x$ يقتضي — $g \mid 2x$ و $g \mid 2z$ ومن ثم $g \mid 2(x, z) = 2$ أي أنه إما $g = 1$ أو $g = 2$.

الحالة الأولى: $g = 1$. في هذه الحالة x عدد فردي و z عدد زوجي و y عدد فردي. من المعادلة (*) نحصل على إما

$$z - x = 3a^2, \quad z + x = b^2$$

أو

$$z - x = b^2, \quad z + x = 3a^2$$

وهذا يعطينا على التوالي الحلين $(x, y, z) = \left(\frac{\pm(b^2 - 3a^2)}{2}, ab, \frac{b^2 + 3a^2}{2} \right)$. بما أن $x > 0$ فإنه يمكننا أن ننظر لهذين الحلين كحلٍ واحد هو $(x, y, z) = \left(\frac{|b^2 - 3a^2|}{2}, ab, \frac{b^2 + 3a^2}{2} \right)$ حيث a و b عددان فرديان

$$. (3a, b) = 1 \text{ و}$$

الحالة الثانية: $g = 2$. في هذه الحالة x عدد فردي و z عدد فردي و y عدد زوجي. نكتب المعادلة (*) على الصورة

$$3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{z-x}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

حيث إن $((z-x)/2, (z+x)/2) = 1$ ، فعند اتباع نفس الخطوات أعلاه، نحصل على الحل $(x, y, z) = (b^2 - 3a^2, 2ab, b^2 + 3a^2)$ حيث a و b عددان أحدهما فردي والآخر زوجي و $(3a, b) = 1$.

227. نفرض أنه يوجد حلٌ صحيحٌ موجب (x_0, y_0, z_0) للمعادلة $3x^2 + 7y^2 = z^2$. كما في السؤال السابق يمكن أن نفرض أنه لا يوجد أي عامل مشترك أكبر من الواحد لأي من الأعداد x_0 و y_0 و z_0 ، أي أن

$$(x_0, y_0) = (x_0, z_0) = (y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) = 1$$

هذا يقتضي أن $(x_0, 7) = (z_0, 7) = 1$. الآن بما أن $3x_0^2 + 7y_0^2 = z_0^2$ فإن $3x_0^2 \equiv z_0^2 \pmod{7}$. هذا يقتضي أن

$$1 = \left(\frac{z_0^2}{7}\right) = \left(\frac{3x_0^2}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{x_0^2}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)$$

وهذا مستحيل لأن

$$\left(\frac{3}{7}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{7-1}{2}} \left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

نستتج من ذلك أنه لا توجد حلول صحيحة موجبة للمعادلة $3x^2 + 7y^2 = z^2$

228. نلاحظ أولاً أنه إذا كان $y = 1$ فإن x ممكن أن تكون أي عدد صحيح موجب، أي أن $(n, 1) = (x, y)$ ، حيث n عدد صحيح موجب،
 تُمثّل حلولاً للمعادلة $x^y = xy$.

الآن نفرض أن $y \neq 1$ ، أي أن $y \geq 2$. ليكن p عدداً أولياً.

إذا كان $p \mid y$ فإن $p \mid x$ (لأن $x^y = xy$).

إذا كان $p \mid x$ فإن $p \mid y$: لنفرض أن $x = p^t x_1$ حيث $t \geq 1$ عدد صحيح. هذا يقتضي - أن $x = p^t x_1$ حيث $(p, x_1) = 1$. بالتعويض في المعادلة $x^y = xy$ نحصل على $p^{t(y-1)} x_1^{y-1} = y$ أو $p^{t(y-1)} x_1^{y-1} = p^t x_1 y$ من ثم $p \mid y$ لأن $t \geq 1$ و $y - 1 \geq 1$.

نستنتج من ذلك أن x و y لهما نفس العوامل الأولية:

$$x = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \quad y = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}, \quad \alpha_i \geq 1, \beta_i \geq 1$$

بالتعويض في المعادلة $x^y = xy$ نحصل على $\alpha_i y = \alpha_i + \beta_i$ أو

$$\alpha_i (y - 1) = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq r$$

الآن إذا كان $y - 1 \neq 1$ (أي أن $y \geq 3$) فإن $y - 1 \leq \beta_i$ ومن ثم نحصل على

$$y = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \geq \prod_{i=1}^r 2^{y-1} = 2^{r(y-1)} \geq 2^{y-1} > y$$

وهذا تناقض واضح. (لاحظ أنه بما أن $y - 1 \neq 1$ فإن $y > 1 + (y - 1) + \dots + 1 = 2^{y-1}$). إذاً لا بد أن يكون $y - 1 = 1$ ومن ثم $y = 2$. هذا يُعطينا المعادلة $x^2 = 2x$ ومن ثم $x = 2$ (لأن $x > 0$).

نستنتج من ذلك أن الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x^y = xy$ هي $(x, y) = (n, 1), (2, 2)$ حيث n عدد صحيح موجب.

229. إذا كان $n \leq 5$ فإن المعادلة $(n-1)! + 1 = n^2$ متحققة عندما $n = 5$. لنفرض أن $n \geq 6$. لنكتب المعادلة على الشكل $(n-1)! = n^2 - 1$. بالتبسيط نحصل على $(n-2)! = n+1$. لكن بما أن $n \geq 6$ فإن $(n-2)! > 2(n-2) > n+1$. هذا يقتضي أن المعادلة $(n-1)! + 1 = n^2$ غير متحققة للقيم $n \geq 6$. إذاً للمعادلة المعطاة حل وحيد هو $n = 5$.

230. بفرض وجود عددين صحيحين موجبين c و d يقسمان b و $c + d \equiv 0 \pmod{a}$ يمكننا أن نكتب $b = dd'$ و $b = cc'$ حيث $c + d = ka$ هذا يعطينا

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} = \frac{c+d}{kb} = \frac{1}{kc'} + \frac{1}{kd'}$$

ومنه نستنتج أن $(x, y) = (kc', kd')$ هو حل للمعادلة المعطاة.

الآن نفرض أن المعادلة المعطاة قابلة للحل وليكن (x, y) هو أحد الحلول الصحيحة الموجبة. نكتب المعادلة على الصورة

$$axy = b(x + y)$$

لنضع $(x, y) = g$. إذاً $x = cg$ و $y = dg$ حيث c و d عددان صحيحان موجبان و $(c, d) = 1$. المعادلة السابقة تصبح

$$agdc = b(c + d)$$

حيث إن $(c, d) = 1$ فإن $(c, c + d) = 1$ ومنه نستنتج من المعادلة السابقة أن $c \mid b$ وبطريقة مشابهة يصبح لدينا $d \mid a$ أيضاً. وحيث إن $(a, b) = 1$ فإن a يقسم $c + d$ ، أي أن $c + d \equiv 0 \pmod{a}$.

231. نلاحظ أولاً أن x و y لا يمكن أن يكون كلاهما سالباً. نبدأ

بافتراض $|x| \leq |y|$. المعادلة يمكن كتابتها على الشكل

$$6x + 6y = 5xy \dots\dots\dots(*)$$

هذا يقتضي أن

$$|5xy| = |6x + 6y| \leq |6x| + |6y| \leq 12y$$

ومن ثم $|x| \leq 12/5$ (لأن $y \neq 0$). إذاً $x = \pm 1, \pm 2$. بتعويض هذه القيم في المعادلة (*) نحصل على الحلول $(x, y) = (1, -6), (2, 3)$. وبنفس الطريقة، عند افتراض $|y| \leq |x|$ ، نحصل على الحلول $(x, y) = (-6, 1), (3, 2)$. إذاً حلول المعادلة المعطاة هي

$$(x, y) = (1, -6), (-6, 1), (2, 3), (3, 2)$$

232. من المعادلة $x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy = xyz - 1$ نستنتج

أن $xy \mid 1$ ومن ثم

$$(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلة الأصلية نحصل على القيمة المقابلة للمتغير z . الحلول هي

$$(x, y, z) = (1, 1, 5), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

233. من المعادلة $2xy + 3y^2 = 24$ نستنتج أن y عدد زوجي.
بكتابة $y = 2w$ ، المعادلة تصبح

$$xw + 3w^2 = 6$$

هذا يقتضي أن $w \mid 6$ ومن ثم $w = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على التوالي $x = \pm 3, \mp 3, \mp 7, \mp 17$. بما أن $y = 2w$ ، إذاً للمعادلة الأصلية ثمانية حلول هي

$$(x, y) = (\pm 3, \pm 2), (\mp 3, \pm 4), (\mp 7, \pm 6), (\mp 17, \pm 12)$$

234. إذا كان $n \leq 3$ نجد بسهولة أن $(n, m) = (2, 1)$ هو الحل الوحيد للمعادلة

$$1! + 2! + 3! + \dots + n! = m^2 + 2$$

لنفرض الآن أن $n \geq 4$. بحساب المعادلة قياس 4 نحصل على التطابق

$$1! + 2! + 3! \equiv m^2 + 2 \pmod{4}$$

أو بالتبسيط $m^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ، وهو تطابق غير قابل للحل. هذا يعني أنه لا يوجد حل للمعادلة المعطاة عندما $n \geq 4$. نستنتج أن $(n, m) = (2, 1)$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

235. إذا كانت المعادلة المعطاة قابلة للحل، فإن التطابق

$$x^6 + 3 \equiv y^3 + z^3 \pmod{7}$$

قابل أيضاً للحل. بما أن $a^3 \equiv 0, 1, -1 \pmod{7}$ وبواسطة نظرية فيرما نلاحظ أن $x^6 \equiv 0, 1 \pmod{7}$ و $y^3 + z^3 \equiv 0, 1, 2, -1, -2 \pmod{7}$

بدراسة جميع الاحتمالات، نلاحظ أن $x^6 + 3 \equiv 3, 4 \pmod{7}$.
 هذا يعني أنه لا توجد حلول صحيحة للمعادلة $x^6 + 3 = y^3 + z^3$.

236. بحساب المعادلة $2x^3 + x^2 + 5y + 7 = 0$ قياس 5 نحصل على التطابق $2x^3 + x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ والذي يوجد له حلان هما $x \equiv 1 \pmod{5}$ و $x \equiv -2 \pmod{5}$. عند كتابة الحلين على الصورة $x = 1 + 5t$ و $x = -2 + 5t$ ومن ثم التعويض عن x في المعادلة الأصلية نحصل على قيمة y . الحلول معطاة كالتالي:

$$(x, y) = (1 + 5t, -50t^3 - 35t^2 - 8t - 2),$$

$$(-2 + 5t, -50t^3 + 55t^2 - 20t + 1)$$

حيث t عدد صحيح.

237. نضرب أولاً طرفي المعادلة $4x^4 - 2 = y(y + 1)$ بالعدد 4، ثم نقوم بإكمال المربع في المتغير y لنحصل على المعادلة $16x^4 - 7 = (2y + 1)^2$ ، والتي يمكن كتابتها على الصورة $(4x^2)^2 - (2y + 1)^2 = 7$. بالتحليل يصبح لدينا $(4x^2 - 2y - 1)(4x^2 + 2y + 1) = 7$. هذا بدوره يعطينا الاحتمالات الآتية:

$$\begin{cases} 4x^2 - 2y - 1 = \pm 1, \pm 7 \\ 4x^2 + 2y + 1 = \pm 7, \pm 1 \end{cases}$$

بحل الأنظمة أعلاه، نجد أن $(x, y) = (1, 1), (1, -2), (-1, 1), (-1, -2)$ هي الحلول الوحيدة للمعادلة $4x^4 - 2 = y(y + 1)$.

238. بضرب طرفي المعادلة $x + y = x^2 + y^2$ بالعدد 4، ومن ثم إكمال المربع في المتغيرين x و y نحصل على المعادلة $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2$. هذا يعطينا الاحتمالات الآتية:

$$\begin{cases} 2x - 1 = \pm 1, \pm 1 \\ 2y - 1 = \pm 1, \mp 1 \end{cases}$$

ينتج من ذلك الحلول الأربعة:

$$(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$$

239. بضرب المعادلة $2xy + 5x + 7y = 3$ بالعدد 2 ومن ثم إضافة 35 للطرفين نحصل على المعادلة

$$4xy + 10x + 14y + 35 = 41$$

بالتحليل يصبح لدينا المعادلة $(2x + 7)(2y + 5) = 41$ ومن ثم

$$\begin{cases} 2x + 7 = \pm 1, \pm 41 \\ 2y + 5 = \pm 41, \pm 1 \end{cases}$$

هذا يعطينا الحلول:

$$(x, y) = (-3, 18), (-4, -23), (17, -2), (-24, -3)$$

240. نبدأ الحل بافتراض أن $x \leq y \leq z \leq w$ (لأن تغيير ترتيب المتغيرات لن يغير من جوهر المعادلة الأصلية). إذا كان $x = 1$ فإن المعادلة تصبح $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} = 0$ ، وهذا مستحيل. إذاً لا بد أن يكون $x \geq 2$ ، ومن ثم $y \geq 2$ و $z \geq 2$ و $w \geq 2$. لكن إذا كان $w \geq 3$ فسوف يصبح

لدينا

$$1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{31}{36} < 1$$

وهذا مستحيل. إذاً لا بد أن يكون $w \leq 2$. هذا يقتضي أن

$$2 \leq x \leq y \leq z \leq w \leq 2$$

ومن هنا نستنتج أن $x = y = z = w = 2$ ، أي أن $(x, y, z, w) = (2, 2, 2, 2)$ هو الحل الوحيد للمعادلة المعطاة.

241. نبدأ الحل بفرض أن $x \leq y$. بما أن $x! + y! = z!$ فإن $z > y!$ ومن ثم $z > y$. هذا يقتضي أن $z \geq y + 1$ ومن ثم

$$z! \geq (y + 1)!$$

أيضاً بما أن $x \leq y$ فإن

$$z! = x! + y! \leq y! + y! = 2(y!)$$

من المتباينتين السابقتين نستنتج أن $(y + 1)! \leq 2(y!)$. هذا يقتضي أن $y + 1 \leq 2$ ومن ثم $y = 1$ لأن y عدد صحيح موجب. بسبب الفرض $x \leq y$ نستنتج أن $x = 1$. هذا يقتضي أن $z = 2$.

عندما نفرض أن $y \leq x$ فإننا سوف نحصل على نفس الحل. إذاً للمعادلة المعطاة حلٌ وحيد هو $(x, y, z) = (1, 1, 2)$.

242. بما أن المتغيرات n, x, y, z هي أعداد صحيحة موجبة فنستنتج من المعادلة $n^x + n^y = n^z$ أن n عدد زوجي (وإلا فسوف نحصل على عدد فردي = عدد زوجي). أيضاً بما أن $n^z > n^y$ و $n^z > n^x$

فإن $z > x$ و $z > y$. لأن استبدال موقع المتغيرين x و y ببعضهما لن يغير من جوهر المعادلة، فيمكننا أن نفرض أن $x \leq y$. هذا يقتضي—أن $n^z = n^x + n^y \leq n^y + n^y = 2n^y$ أو $n^{z-y} \leq 2$. نستنتج من ذلك أنه إما $n^{z-y} = 1$ أو $n^{z-y} = 2$. الحالة الأولى تقتضي—أن $n = 1$ وهذا مُستحيل. الحالة الثانية تقتضي—أن $n = 2$ و $z - y = 1$. هذا يُعطينا $2^x + 2^y = 2^{y+1}$ ، أو $2^x = 2^{y+1} - 2^y = 2^y$ ومن ثم $x = y$. إذاً حلول المعادلة هي $(n, x, y, z) = (2, t, t, t + 1)$ حيث t عدد صحيح موجب.

243. لاحظ أولاً أن $3^2 + 4^2 = 5^2$. لنفرض أن $n \geq 3$. في هذه

الحالة نحصل على الآتي:

$$5^n = 5^2 \times 5^{n-2} = (3^2 + 4^2) \times 5^{n-2} = 3^2 \times 5^{n-2} + 4^2 \times 5^{n-2} \\ > 3^2 \times 3^{n-2} + 4^2 \times 4^{n-2} = 3^n + 4^n$$

أي أن $3^n + 4^n \neq 5^n$ إذا كان $n \geq 3$. نستنتج من ذلك أن المعادلة $3^n + 4^n = 5^n$ ليس لها أي حلٍ صحيح $n \geq 3$.

244. لنفرض أولاً أن $x \geq 3$. بحساب المعادلة $2^x - 3^y = -7$

قياس 8 نحصل على التطابق $3^y \equiv 7 \pmod{8}$ وهو غير قابل للحل لأن $3^m \equiv 1, 5 \pmod{8}$ لأي عدد صحيح موجب m . إذاً لا توجد حلول للمعادلة إذا كان $x \geq 3$. بدراسة القيم $x = 1$ و $x = 2$ نجد أن الحل الوحيد للمعادلة المعطاة هو $(x, y) = (1, 2)$.

245. إذا كان $x = 0$ أو $y = 0$ نحصل على حلٍ وحيد هو

$(x, y) = (3, 0)$ للمعادلة $2^x - 3^y = 7$. لنفرض أن $x \geq 1$ و $y \geq 1$.

بحساب المعادلة قياس 3 نحصل على التطابق $2^x \equiv 1 \pmod{3}$ ومنه

نستنتج أن x عدد زوجي ($x \geq 2$). وبحساب المعادلة قياس 4 نحصل على التطابق $(-1)^y \equiv 1 \pmod{4}$ ومنه نستنتج أن y عدد زوجي. هذا يُمكننا من كتابة المعادلة على الشكل الآتي:

$$(2^{x/2} - 3^{y/2})(2^{x/2} + 3^{y/2}) = 7$$

حيث إن العدد 7 عدد أولي و $2^{x/2} + 3^{y/2} > 1$ ، إذًا نحصل على المعادلة

$$2^{x/2} - 3^{y/2} = 1$$

باستخدام مثال 68 نجد أن $x/2 = 2$ و $y/2 = 1$ ، أي أن $x = 4$ و $y = 2$. إذًا يوجد للمعادلة المعطاة حلان هما $(x, y) = (3, 0)$ ، $(4, 2)$.

246. إذا كان $n = 1$ فإن $(n, x, m) = (1, 1, t)$ ، حيث t عدد صحيح موجب، هو حل للمعادلة

$$2^n - x^m = 1$$

أيضاً إذا كان $m = 1$ فإن $(n, x, m) = (t, 2^t - 1, 1)$ ، حيث t عدد صحيح موجب، هو حل للمعادلة المعطاة. لنفرض الآن أنه توجد حلول صحيحة عندما $n > 1$ و $m > 1$. بحساب المعادلة أعلاه قياس 4، نستنتج أن التطابق $x^m \equiv 3 \pmod{4}$ قابل للحل. في هذه الحالة لابد أن يكون x عدداً فردياً. لنكتب $x = 2a + 1$. بملاحظة أن

$$(2a + 1)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (2a)^j \equiv 1 + 2ma \pmod{4}$$

نستنتج أن $x^m \equiv 3 \pmod{4}$ إذا فقط إذا كان $1 + 2ma \equiv 3 \pmod{4}$ ، أي أن $ma \equiv 1 \pmod{2}$. هذا يقتضي أن m عدد فردي. بكتابة المعادلة

الأصلية على الصورة

$$2^n = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \dots - x + 1)$$

ينتج لدينا تناقض لأن $x^{m-1} - x^{m-2} + \dots - x + 1$ عدد فردي (لأن x و m عددين فرديين) لا يساوي 1. إذاً لا توجد حلول صحيحة للمعادلة المعطاة عندما $n > 1$ و $m > 1$. لذا فالحلول الوحيدة للمعادلة هي $(n, x, m) = (1, 1, t), (t, 2^t - 1, 1)$ حيث t عدد صحيح موجب.

247. إذا كان x عدداً زوجياً فـ

هذا $2^x + 5^y \equiv 1 + (-1)^y \pmod{3}$ ، بينما $19^z \equiv 1^z \equiv 1 \pmod{3}$. هذا يعني أنه ليس للمعادلة $2^x + 5^y = 19^z$ حلاً إذا كان x عدداً زوجياً.

إذا كان $x = 2n + 1$ عدداً فردياً فـ

ببساطة $2^x + 5^y = 2 \times 4^n + 5^y \equiv 2 \times (-1)^n \pmod{5}$ ، بينما $19^z \equiv (-1)^z \pmod{5}$. هذا يعني أن $2^x + 5^y \equiv 19^z \pmod{5}$ ومن ثم فالمعادلة $2^x + 5^y = 19^z$ ليس لها أي حل إذا كان x عدداً فردياً. نستنتج من ذلك أن المعادلة $2^x + 5^y = 19^z$ ليس لها أي حل صحيح موجب.

248. لنفرض أن (x_0, y_0) هو حل للمعادلة $y^2 = x^3 - 3$. إذا

كان x_0 عدداً زوجياً فسوف نحصل على التطابق $y_0^2 \equiv 0 - 3 \equiv 5 \pmod{8}$ وهذا مستحيل لأن $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ لأي عدد صحيح a . إذاً لا بُد أن يكون x_0 عدداً فردياً، أي أنه إما $x_0 \equiv 1 \pmod{4}$ أو $x_0 \equiv 3 \pmod{4}$.

لنفرض أن $x_0 \equiv 1 \pmod{4}$. لنكتب المعادلة على الشكل الآتي:

$$y_0^2 + 4 = x_0^3 + 1 = (x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 + 1)$$

بما أن $x_0 \equiv 1 \pmod{4}$ فإن $x_0 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ ، أي أن $2 \parallel x_0 + 1$. هذا يقتضي أن $2 \parallel x_0^3 + 1$ لأن $x_0^2 - x_0 + 1$ عدد فردي. لكن $4 \mid y_0^2 + 4$ (لأن y_0 عدد زوجي إذا كان x_0 فردي). هذا التناقض يُثبت أن $x_0 \not\equiv 1 \pmod{4}$.

إذا كان $x_0 \equiv 3 \pmod{4}$ فإن $x_0^2 - x_0 + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ ومن ثم فإن المقدار $x_0^2 - x_0 + 1$ يقبل القسمة على عدد أولي p يُحقق $p \equiv 3 \pmod{4}$. هذا يقتضي — أن $y_0^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ ، أي أن $y_0^2 \equiv -4 \pmod{p}$. هذا يُعطينا

$$1 = \left(\frac{y_0^2}{p} \right) = \left(\frac{-4}{p} \right) = \left(\frac{-1}{p} \right) \left(\frac{4}{p} \right) = (-1)(1) = -1$$

وهذا مستحيل. إذاً لا يوجد أي حل صحيح للمعادلة المعطاة.

249. لنفرض أن (x_0, y_0) هو حل للمعادلة $y^2 = x^3 - 12$. إذا كان x_0 عدداً زوجياً فإن y_0 عدد زوجي أيضاً. بكتابة $x_0 = 2x_1$ و $y_0 = 2y_1$ وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على المعادلة $y_1^2 = 2x_1^3 - 3$. هذا يقتضي أن y_1 عدد فردي ومن ثم x_1 عدد زوجي ($y_1 = 2k + 1$ يقتضي — أن $2x_1^3 = y_1^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4$ أو $2x_1^3 = y_1^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4$ أي أن $x_1^3 = 2k^2 + 2k + 2$). بحساب المعادلة $y_1^2 = 2x_1^3 - 3$ قياس 8 نحصل على $1 \equiv 0 - 3 \pmod{8}$ وهذا مستحيل. نفرض الآن أن x_0 عدد فردي. هذا يقتضي أن y_0 عدد فردي أيضاً. لنكتب المعادلة المعطاة على الصورة

$$y_0^2 + 4 = x_0^3 - 8 = (x_0 - 2)(x_0^2 + 2x_0 + 4)$$

بما أن $x_0 = 2k + 1$ فإن $x_0^2 + 2x_0 + 4 = 4t + 3$. هذا يقتضي— أن $x_0^2 + 2x_0 + 4$ يقبل القسمة على عدد أولي p يُحقق $p \equiv 3 \pmod{4}$. هذا يقتضي أن $y_0^2 + 4 \equiv 0 \pmod{4}$ وهذا مستحيل (كما في السؤال السابق). نستنتج من ذلك أنه لا يوجد أي حل صحيح للمعادلة المعطاة.

250. لنفرض أن (x, y) هو حلٌ صحيحٌ للمعادلة $y^2 = x^3 + 16$. إذا كان y عدداً فردياً فإن $(y - 4, y + 4) = 1$. بكتابة المعادلة على الصورة

$$(y - 4)(y + 4) = x^3$$

نستنتج أنه يوجد عددان صحيحان a و b يُحققان

$$y - 4 = a^3, \quad y + 4 = b^3$$

هذا يقتضي أن $b^3 - a^3 = 8$ والتي ليس لها حلول صحيحة (باستخدام طريقة التحليل). إذاً y لا يمكن أن يكون عدداً فردياً.

لنفرض أن y عدد زوجي. هذا يقتضي أن x عدد زوجي أيضاً. بكتابة $y = 2y_1$ و $x = 2x_1$ ومن ثم التعويض في المعادلة الأصلية نحصل على المعادلة $y_1^2 = 2x_1^3 + 4$. هذا يقتضي أن y_1 عدد زوجي، وليكن $y_1 = 2y_2$. بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة $2y_2^2 = x_1^3 + 2$ ومن ثم x_1 عدد زوجي، وليكن $x_1 = 2x_2$. بالتعويض نحصل على المعادلة $y_2^2 = 4x_2^3 + 1$. هذا يقتضي— أن y_2 عدد فردي، وليكن $y_2 = 2y_3 + 1$. هذا يؤدي إلى المعادلة $4y_3^2 + 4y_3 + 1 = 4x_2^3 + 1$ أو

$$y_3(y_3 + 1) = x_2^3$$

حيث إنَّ $(y_3, y_3 + 1) = 1$ فإنه يوجد عددان صحيحان c و d يُحققان

$$y_3 = c^3, \quad y_3 + 1 = d^3$$

هذا يعطي المعادلة $d^3 - c^3 = 1$ والتي لها حلان هما $(c, d) = (0, 1), (-1, 0)$ ، باستخدام طريقة التحليل. هذا يقتضي الآتي:

$$c = 0 \Rightarrow y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 0$$

$$c = -1 \Rightarrow y_3 = -1 \Rightarrow y_2 = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = 0$$

أي أن للمعادلة $y^2 = x^3 + 16$ حلين صحيحين هما $(x, y) = (0, -4), (0, 4)$.

obeikandi.com

كشاف مواضيع المسائل

قابلية القسمة 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12، 13، 14،

17، 18، 25، 33، 43، 66، 67، 72، 111

القاسم المشترك الأكبر 15، 16، 19، 20، 21، 22، 23، 24، 26، 27،

28، 29، 30، 31، 42، 95، 129

المضاعف المشترك الأصغر 26، 27، 28

الأعداد الأولية 32، 33، 34، 39، 45، 46، 47، 48، 49، 52، 76،

77، 100، 163

غير منتهية 35، 36، 37، 152، 153، 178

الأعداد المؤلفة 38، 40، 41، 44، 80، 92، 98، 99

المعادلات الديوفانتية الخطية 57، 58، 59، 60، 61، 62

التطابقات

حسابات مع 66، 67، 68، 69، 70، 71، 72، 73، 74، 75،

76، 81، 82، 83، 86، 89، 90، 91، 96، 109، 110

أنظمة (تام، مُختَزَل) 63، 64، 65

الخطية 106، 107، 108، 112

حلول 113، 114، 115، 116، 117، 118، 119، 120،

126، 138، 151

اختبارات قابلية القسمة 78، 79

نظريتا فيرما وأويلر 84، 85، 87، 88، 92، 93، 94، 99

- نظرية ولسون 95، 97، 98، 101
- أعداد فيرما 121، 122، 123، 124، 125، 126، 129، 130، 132،
157
- أعداد مرسان 127، 128، 129، 130، 134، 221
- عدد غير نسبي 54، 55، 56
- عدد واحدي 41، 42، 43، 195
- عدد شبه أولي 102، 103، 104
- عدد كارمايكل 105، 140
- رتبة الأعداد 131، 132، 133، 134، 135، 141
- الجزور البدائية 136، 137، 138، 139، 140، 149، 156، 157، 158
- الرواسب التربيعية 142، 143، 144، 145، 146، 147، 148،
149، 150، 151، 154، 155، 156، 158
- الدوال العددية الضربية 202، 203، 204، 206
- دالة الصحيح $\llbracket x \rrbracket$ 159، 160، 161، 162، 163، 164، 165،
166، 167، 168، 169، 170، 171، 205
- الدالة ϕ 172، 173، 174، 175، 176، 177، 178، 179، 180،
181، 182
- الدالة σ 183، 184، 185، 186، 187، 188، 189، 191
- الدالة τ 190، 191، 192، 193، 194، 195، 196، 205
- الدالة ω 197، 198، 199

الدالة μ 200، 201

الأعداد التامة 209، 211، 213، 214، 215

الأعداد الناقصة 210، 212

الأعداد الزائدة 207، 208

مُثلثات فيثاغورس 216، 217، 218، 219، 220، 221، 222،

223، 224

المعادلات الديوفانتية 225، 226، 227، 228، 229، 230، 231،

232، 233، 234، 235، 236، 237، 238، 240، 241، 242،

243، 244، 245، 246، 247، 248، 249، 250

obeikandi.com

الأعداد الأولية الأقل من 5000

2	109	269	439	617	811	1009	1201
3	113	271	443	619	821	1013	1213
5	127	277	449	631	823	1019	1217
7	131	281	457	641	827	1021	1223
11	137	283	461	643	829	1031	1229
13	139	293	463	647	839	1033	1231
17	149	307	467	653	853	1039	1237
19	151	311	479	659	857	1049	1249
23	157	313	487	661	859	1051	1259
29	163	317	491	673	863	1061	1277
31	167	331	499	677	877	1063	1279
37	173	337	503	683	881	1069	1283
41	179	347	509	691	883	1087	1289
43	181	349	521	701	887	1091	1291
47	191	353	523	709	907	1093	1297
53	193	359	541	719	911	1097	1301
59	197	367	547	727	919	1103	1303
61	199	373	557	733	929	1109	1307
67	211	379	563	739	937	1117	1319
71	223	383	569	743	941	1123	1321
73	227	389	571	751	947	1129	1327
79	229	397	577	757	953	1151	1361
83	233	401	587	761	967	1153	1367
89	239	409	593	769	971	1163	1373
97	241	419	599	773	977	1171	1381
101	251	421	601	787	983	1181	1399
103	257	431	607	797	991	1187	1409
107	263	433	613	809	997	1193	1423

1427	1619	1873	2111	2351	2609	2801	3049
1429	1621	1877	2113	2357	2617	2803	3061
1433	1627	1879	2129	2371	2621	2819	3067
1439	1637	1889	2131	2377	2633	2833	3079
1447	1657	1901	2137	2381	2647	2837	3083
1451	1663	1907	2141	2383	2657	2843	3089
1453	1667	1913	2143	2389	2659	2851	3109
1459	1669	1931	2153	2393	2663	2857	3119
1471	1693	1933	2161	2399	2671	2861	3121
1481	1697	1949	2179	2411	2671	2861	3121
1483	1699	1951	2203	2417	2677	2879	3137
1487	1709	1973	2207	2423	2683	2887	3163
1489	1721	1979	2213	2437	2687	2897	3167
1493	1723	1987	2221	2441	2689	2903	3169
1499	1733	1993	2237	2447	2693	2909	3181
1511	1741	1997	2239	2459	2699	2917	3187
1523	1747	1999	2243	2467	2707	2927	3191
1531	1753	2003	2251	2473	2711	2939	3203
1543	1759	2011	2267	2477	2713	2953	3209
1549	1777	2017	2269	2503	2719	2957	3217
1553	1783	2027	2273	2521	2729	2963	3221
1559	1787	2029	2281	2521	2729	2963	3221
1567	1789	2039	2287	2531	2731	2969	3229
1571	1801	2053	2293	2539	2741	2971	3251
1579	1811	2063	2297	2543	2749	2999	3253
1583	1823	2069	2309	2549	2753	3001	3257
1597	1831	2081	2311	2551	2767	3011	3259
1601	1847	2083	2333	2557	2777	3019	3271
1607	1861	2087	2339	2579	2789	3023	3299
1609	1867	2089	2341	2591	2791	3037	3301
1613	1871	2099	2347	2593	2797	3041	3307

3313	3527	3709	3923	4139	4363	4597	4813
3319	3529	3719	3929	4153	4373	4603	4817
3323	3533	3727	3931	4157	4391	4621	4831
3329	3539	3733	3943	4159	4397	4637	4861
3331	3541	3739	3947	4177	4409	4639	4871
3343	3547	3761	3967	4201	4421	4643	4877
3347	3557	3767	3989	4211	4423	4649	4889
3359	3559	3769	4001	4217	4441	4651	4903
3361	3571	3779	4003	4219	4447	4657	4909
3371	3581	3793	4007	4229	4451	4663	4919
3373	3583	3797	4013	4231	4457	4673	4931
3389	3593	3803	4019	4241	4463	4679	4933
3391	3607	3821	4021	4243	4481	4691	4937
3407	3613	3823	4027	4253	4483	4703	4943
3413	3617	3833	4049	4259	4493	4721	4951
3433	3623	3847	4051	4261	4507	4723	4957
3449	3631	3851	4057	4271	4513	4729	4967
3457	3637	3853	4073	4273	4517	4733	4969
3461	3643	3863	4079	4283	4519	4751	4973
3463	3659	3877	4091	4289	4523	4759	4987
3467	3671	3881	4093	4297	4547	4783	4993
3469	3673	3889	4099	4327	4549	4787	4999
3491	3677	3907	4111	4337	4561	4789	
3499	3691	3911	4127	4339	4567	4793	
3511	3697	3917	4129	4349	4583	4799	
3517	3701	3919	4133	4357	4591	4801	

obeikandi.com

المراجع

المراجع العربية

[1] مقدمة في نظرية الأعداد، د. فوزي الذكرير و د. معروف سمحان، الطبعة الثانية، دار الخريجي للنشر و التوزيع، الرياض، 1422 هـ.

المراجع الأجنبية

- [2] Adams, W.W. and Goldstein, L. J., Introduction to Number Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [3] Andrews, George E., Number Theory, Dover Publications, New York, 1994.
- [4] Burton, David M., Elementary Number Theory, 6th edition, McGraw-Hill, New York, 2007.
- [5] Davenport, H., The Higher Arithmetic, 7th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [6] Dudley, Underwood, Elementary Number Theory, W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1969.
- [7] Elliot, D. D., A Prime-Generating Function, The Two-Year College Math. Journal, 14 (1983), 57.
- [8] Gibling, Peter, Primes and Programming, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [9] Gioia, Anthony A., The Theory of Numbers: An Introduction, Dover Publications, New York, 2001.
- [10] Gross, Oliver, On the Elementary Approach to Diophantine Equations, Math. Magazine, 34 (1961), 259-267.

- [11] Guy, Richard K., Unsolved Problems in Number Theory, 2nd edition, Springer, New York, 1994.
- [12] Herman, J., Kucera, R., and Simsa, J., Equations and Inequalities, Springer, New York, 2000.
- [13] Jones, Burton W., The Theory of Numbers, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
- [14] Krizik, M., Luca, F., and Somer, L., 17 Lectures on Fermat Numbers, Springer, New York, 2001.
- [15] Kumanduri, R. and Romero C., Number Theory with Computer Applications, Prentice-Hall, New Jersey, 1998.
- [16] LeVeque, Williams J., Fundamentals of Number Theory, Dover Publications, Inc., New York, 1996.
- [17] Mollin, Richard A., Fundamental Number Theory with Applications, CRC Press, Boca Raton, 1998.
- [18] Nagell, Trygve, Introduction to Number Theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1981.
- [19] Narkiewicz, W., The Development of Prime Number Theory, Springer, Berlin, 2000.
- [20] Nathanson, Melvyn B., Elementary Methods in Number Theory, GTM 195, Springer, New York, 2000.
- [21] Niven, I., Zuckerman, H., and Montgomery, H., An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edition, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [22] Ore, Oystein, Number Theory and its History, Dover Publications, New York, 1988.
- [23] Redmond, Don, Number Theory: An Introduction, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [24] Roberts, Joe, Elementary Number Theory: A Problem Oriented Approach, MIT Press, Cambridge, 1977.
- [25] Ribenboim, Paulo, Fermat's Last Theorem for Amateurs, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [26] Shapiro, Harold N., Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [27] Shockley, James, Introduction to Number Theory, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1967.

- [28] Stark, Harold M., An Introduction to Number Theory, MIT Press, Cambridge, 10th printing, 1998.
- [29] Stewart, B. M., Theory of Numbers, 2nd edition, Macmillan Company, New York, 1964.
- [30] Tattersall, James T., Elementary Number Theory in Nine Chapters, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [31] Uspencky, J. V. and Heaslet, M., Elementary Number Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1939.
- [32] Vinogradov, I. M., An Introduction to the Theory of Numbers, Pergamon Press, New York, 1955.
- [33] Williams, Kenneth S. and Hardy, Kenneth, The Red Book of Mathematical Problems, Dover Publications, New York, 1996.