Σ

p^{2}

p

الفصل الثاني

$$x^{2} + 2x = 3^{n}$$

المسائل

قسمة الأعداد الصحيحة، الأعداد الأولية

1. ليكن $r \geq 2$ عدداً صحيحاً. أثبت أنه إذا كان $r \mid a-1$ و $r \mid b-1$ و $r \mid c-1$ فإن $r \mid abc-1$.

2. جِد جميع قيم n بحيث $4 \mid n(n^2+3)$.

3. أثبت أنه إذا كان $5 \mid 3n-1$ فإن $25 \mid 3n^3 - n^2 + 3n - 1$.

4. إذا كان m و n عددين صحيحين، فأثبت أن $17 \mid 3n+7m$ إذا وفقط إذا $17 \mid 5n+6m$.

5. أثبت أن $45 \mid 6^{45} + 7^{45} + 8^{45} + 9^{45}$.

6. أثبت أن $36 \mid 7^n - 6n - 1$.

7. أثبت أن $504 \mid (n^3-1)n^3(n^3+1)$ لجميع الأعداد الصحيحة n. (ملحوظة: $504 = 7 \times 8 \times 9$).

8. ليكن a و b عددين صحيحين موجبين بحيث $(a,b)=1$. إذا كان α عدداً حقيقياً بحيث إن $a\alpha$ و $b\alpha$ عددان صحيحان، فأثبت أن α عدد صحيح.

9. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة a، b، c بحيث إن $a<b<c$ وإن أي عدد يقسم مجموع العددين الآخرين.

10. أثبت أن $19 \mid n^3 + 2n^2 + n + 1$ لعدد غير منتهٍ من الأعداد الصحيحة n.

11. أثبت أن $(n-1)^2 \mid n^{n-1} - 1$ لأي عدد صحيح $n > 1$.

12. أثبت أن $2^n \mid (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)$ لأي عدد صحيح $n \geq 1$.

13. أثبت أن $n+1 \mid \binom{2n}{n}$.

14. إذا كان $n \geq 1$ و $k \geq 1$ عددين صحيحين، فأثبت أن $k \mid \binom{kn}{n}$.

15. ليكن a و b عددين صحيحين و $g=(a,b)$. إذا كان x و y عددين صحيحين يحققان $g=(a,b)=ax+by$، فأثبت أن $(x,y)=1$.

16. لتكن a و b و c و d أعداداً صحيحة موجبة بحيث إن $b \neq d$. أثبت أنه إذا كان $(a,b)=(c,d)=1$ فإن العدد $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ليس عدداً صحيحاً.

17. ليكن p عدداً أولياً و $n \geq 1$ و a و b أعداداً صحيحة. أثبت أنه إذا كان $p^n \mid ab$ و $p \nmid (a,b)$، فإن $p^n \mid a$ أو $p^n \mid b$.

18. إذا كان $a \mid c$ و $b \mid c$ و $(a,b)=g$ فأثبت أن $ab \mid gc$.

19. ليكن k عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أنه إذا كان $(n,n+k)=1$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة، فإن $k=1$.

20. أثبت أن $(n^2+n+5,3)=1$، حيث n عدد صحيح.

21. جِد قيمة (n^2+n+1,n^3+n+1) حيث n عدد صحيح.

22. أثبت أن الكسر $\frac{28n+9}{40n+13}$ هو كسر في أبسط صورة لجميع القيم الصحيحة الموجبة n.

23. أثبت أن $(2(n!)+1,5(n!)+1)=1$ لجميع الأعداد الصحيحة $n>1$.

24. إذا كان $(a,b)=1$ فأثبت أن $(a+b,a-b,ab)=1$.

25. ليكن p عدداً أولياً و $(p,ab)=1$. أثبت أنه إذا كان $p^{k+1} | ap^k + bp^t$ فإن $k=t$ و $p | a+b$.

26. ليكن a و b عددين صحيحين موجبين. متى تتحقق المساواة $(a,b)=[a,b]$؟

27. أثبت أن $(a+b,[a,b])=(a,b)$ لأي عددين صحيحين موجبين a و b.

28. أثبت أن $([a,b],[a,c],[b,c])=[(a,b),(a,c),(b,c)]$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة a و b و c.

29. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة x و y التي تُحقق $(x,y)=7$ و $x+8y=245$.

30. ليكن m و n عددين صحيحين موجبين وليكن m عدداً فردياً. جِد قيمة $(2^m-1,2^n+1)$.

31. ليكن $n>1$، $a\neq 0$ و $b\neq 0$. أثبت أنه إذا كان $(a,b)=1$، فإن

$$\left(\frac{a^n-b^n}{a-b},a-b\right)=(n,a-b)$$

32. أثبت أنه إذا كان $a>1$ هو أصغر القواسم الموجبة للعدد n، فإن a عددٌ أولي.

33. أثبت أنه إذا كان p و $p+2$ عددين أوليين، حيث $p>3$، فإن $6 | p+1$.

34. ليكن p و q عددين أوليين بحيث أن $2<p<q$. أثبت أنه إذا كان $pq+1$ مربعاً كاملاً، فإن $q=p+2$.

35. لتكن $p_1,p_2,\dots,p_t$ أعداداً أولية مختلفة. لنضع $m=p_1p_2\dots p_i$ و

$n = p_{i+1}p_{i+2}\dots p_t$. أثبت أن $m+n$ غير قابل للقسمة على أيٍ من الأعداد الأولية $p_1, p_2, \dots, p_t$. استنتج من ذلك وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية.

36. ليكن $n > 1$ عدداً طبيعياً. أثبت أنه إذا كان p هو أصغر عدد أولي يقسم العدد $n!+1$، فإن $p > n$. استنتج من ذلك وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

37. أثبت أنه يوجد عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $6n+5$.

38. أثبت أن $3^{6n+3} + 3^{4n+4} + 3^{2n+4} + 19$ عدداً مؤلفاً لجميع قيم $n \geq 1$.

39. جد جميع الأعداد الطبيعية n التي تجعل $4n^3 + 3n - 7$ عدداً أولياً.

40. أثبت أن $n^5 + n - 1$ عدد مؤلف لجميع قيم $n > 1$.

41. ليكن $R_n = \underbrace{111\cdots11}_{n}$ عدداً واحدياً. أثبت أنه إذا كان n عدداً مؤلفاً فإن R_n عدد مؤلف.

42. أثبت أن $(R_n, R_m) = R_{(n,m)}$ حيث إن $R_k = \underbrace{111\cdots11}_{k}$ عدد واحدي.

43. أثبت أن $101 | R_n$ إذا و فقط إذا كان $4|n$، حيث R_n عدد واحدي. (إرشاد: $1111 = 11 \times 101$)

44. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب k يوجد عدد لا نهائي من الأعداد N التي تجعل من جميع الأعداد $N, N+1, N+2, \cdots, N+k-1$ أعداداً مؤلفة.

45. لتكن $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية الأعداد الأولية. أثبت أنه لا يوجد عدد صحيح موجب N بحيث إن $p_n > n^2$ لجميع القيم $n \geq N$.

(إرشاد: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ متسلسلة تباعدية.)

46. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل جميع الأعداد $n, n+6, n+12, n+18, n+24$ أعداداً أولية.

47. جِد جميع الأعداد الأولية p والأعداد الطبيعية n التي تجعل p^n+1 مربعاً كاملاً.

48. أيٍ من الأعداد الأولية يمكن كتابتها كفرق و كمجموع عددين أوليين آخرين؟

49. جِد جميع الأعداد الأولية p و q و r التي تُحقق المعادلة $p^3+q^3=r^3$.

50. ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموع $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ليس عدداً صحيحاً.

51. ليكن $n>1$ عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن المجموع $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$ ليس عدداً صحيحاً.

52. أثبت أن أي عدد على الصيغة $(n!)^2+k$، حيث $2\le k\le n$، لا يمكن أن يكون قوة لأي عدد أولي.

53. لتكن المتتالية $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ مُعرفة تتابعاً على النحو الآتي: $a_1=2$، $a_n=$ أكبر عدد أولي يقسم P_n، حيث $P_n=1+a_1a_2\cdots a_{n-1}$، أي أن $a_2=3$، $a_3=7$، $a_4=43$، $a_5=139$. أثبت أن $a_n\ne 5$ لجميع القيم $n\ge 1$.

54. أثبت أنه إذا كان $n>1$ عدداً غير مربعاً، فإن العدد $\sqrt{n}$ عدد غير نسبي.

55. ليكن $a>1$ و $b>1$ عددين صحيحين بحيث يكون $(a,b)=1$. أثبت أن $\log_b a$ عدد غير نسبي.

56. باستخدام المُتسلسلة $\sin 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ أثبت أن العدد $\sin 1$ عدد غير نسبي.

المعادلات الديوفانتية الخطية

57. ليكن n و k عددين صحيحين. جد الحلول الصحيحة للمعادلة $nx+(n+k)y=k$.

58. جِد كسرين لهما المقامين 35 و 91 على التوالي بحيث يكون مجموعهما $\frac{1}{65}$.

59. ما هو أصغر عدد صحيح موجب m يجعل المعادلة الخطية $153x+119y=1000+m$ قابلة للحل؟ حل المعادلة لهذا العدد m.

60. ليكن k عدداً صحيحاً موجباً و a و b عددين صحيحين بحيث $(a,b)=1$. ما هو عدد الحلول الصحيحة (x,y) حيث $x\geq 0$ و $y\geq 0$ للمعادلة الخطية $ax+by=k$؟

61. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة الخطية $5x+22y+18z=3$.

62. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة الخطية $7x-9y+10z-11w=23$.

التطابقات

63. ليكن $c_1,c_2,\cdots,c_{m_1}$ و $d_1,d_2,\cdots,d_{m_2}$ نظامي رواسب تامين قياس

m_1 و m_2 على التوالي. إذا كان $(m_1,m_2)=1$ فأثبت أن مجموعة الأعداد $c_i+d_jm_1$، حيث $1\le i\le m_1$ و $1\le j\le m_2$، تُمثِل نظام رواسب تام قياس m_1m_2.

64. هل مجموعة الأعداد $1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \cdots, n\cdot(n+1)$ تُمثِل نظام رواسب تام قياس n؟

65. إذا كان $p>2$ عدداً أولياً و $(3,p-1)=1$، فأثبت أن الأعداد $1^3,2^3,3^3,\cdots,(p-1)^3$ تُمثِل نظام رواسب مُختَزَل قياس p. ماذا لو كان $(3,p-1)\neq 1$؟

66. أثبت أن $15 \mid 4\cdot 7^{2^n}+5\cdot 8^{2^n}+6\cdot 9^{2^n}$ لأي عدد صحيح $n\ge 2$.

67. أثبت أن $21 \mid 4^{n+2}+5^{2n+1}$ لجميع الأعداد الصحيحة $n\ge 0$.

68. ما هو باقي قسمة العدد $36^{50}+37^{50}$ على 34؟

69. أثبت أن $a^3\equiv -1, 0, \text{ or } 1 \bmod 9$ لأي عدد صحيح a.

70. أثبت أن أي عدد صحيح ذا الصيغة $9n+5$ لا يمكن كتابته كمجموع ثلاثة أعداد مكعبة.

71. أثبت أن أي عدد صحيح x يُحقق أحد التطابقات التالية:
$x\equiv 0 \bmod 2$، $x\equiv 0 \bmod 3$، $x\equiv 1 \bmod 4$، $x\equiv 1 \bmod 6$، $x\equiv 11 \bmod 12$.

72. أثبت أن $17 \mid 3^{30}-2$.

73. أثبت أن $2^{10^n}\equiv 2 \bmod 7$ حيث n عدد صحيح موجب.

74. أثبت أن $5^n\equiv 25 \bmod 100$ لأي عدد صحيح $n\ge 2$.

75. أثبت أن $21!\equiv 11! \bmod 23$.

76. أثبت أن $p^2 \equiv 1 \bmod 12$ لأي عدد أولي $p \geq 5$.

77. جِد جميع الأعداد الأولية p التي تجعل $p^2 + 2^p$ عدداً أولياً.

78. جِد اختباراً لقابلية قسمة عددٍ صحيح على 99.

79. جِد اختباراً لقابلية قسمة عددٍ صحيح على 27.

80. أثبت أن الأعداد ذات الصورة العامة $4\times 14^n + 1$، $n \geq 1$، هي أعداد مؤلفة.

81. ليكن p عدداً أولياً و r عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن $\binom{rp}{p} \equiv r \bmod p$.

82. ليكن p عدداً أولياً و r عدداً صحيحاً موجباً. أثبت أن $\binom{p^r}{k} \equiv 0 \bmod p$ لجميع القيم k التي تحقق $1 \leq k \leq p^r - 1$.

83. ليكن $k \geq 1$ و $m \geq 2$ عددين صحيحين. أثبت أنه إذا كان $a \equiv 1 \bmod m^k$ فإن $a^m \equiv 1 \bmod m^{k+1}$.

84. أثبت أنه إذا كان $(n, 936) = 1$ فإن $936 \mid n^{13} - n$.

85. أثبت أن $19 \nmid n^2 + 4$ لأي عدد صحيح n.

86. ليكن a عدداً صحيحاً و $n \geq 1$ عدداً فردياً. أثبت أن $a^n \equiv a \bmod 6$.

87. ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. صِف جميع القيم الصحيحة n التي تحقق $p \mid 1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-2}$.

88. ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. أثبت أن $1^{p-2} + 2^{p-2} + \cdots + (p-1)^{p-2} \equiv 0 \bmod p$.

89. ما هو الرقم الموجود في منزلة الآحاد للعدد $1117^{2228^{3339}}$؟

90. جِد الرقمين الموجودين في منزلتي الآحاد والعشرات للعدد $13^{14^{15}}$.

91. جِد الأرقام الموجودة في منازل الآحاد والعشرات والمئات للعدد 3^{9997}.

92. أثبت أنه إذا كان $n > 2$ و $2^{n-2} \equiv 1 \bmod n$، فإن n عدد مؤلف.

93. ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. أثبت أن $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p^2$ إذا و فقط إذا $2^{p^2-1} \equiv 1 \bmod p^2$.

94. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n يوجد عدد صحيح موجب a_n يُحقق المساواة $5^{2^{n-1}} = 2^n a_n + 1$.

95. ليكن p عدداً أولياً. جِد قيمة $(p!, (p-1)!+1)$.

96. أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $(2n-3)! \equiv 0 \bmod 2n$.

97. إذا كان $p > 2$ عدداً أولياً وكان $1 \leq k \leq p$، فأثبت أن $(p-k)!(k-1)! \equiv (-1)^k \bmod p$.

98. أثبت أن $(n+3)!+1$ عدد مؤلف لعدد غير منتهٍ من الأعداد الطبيعية n.

99. أثبت أن $n \times 2^n + 1$ عدد مؤلف لعدد غير منتهٍ من الأعداد الطبيعية n.

100. جِد جميع الأعداد الأولية p وجميع الأعداد الصحيحة الموجبة k التي تُحقق المعادلة $(p-1)!+1 = p^k$.

101. إذا كان $p \geq 5$ عدداً أولياً و $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$، فأثبت أن $a \equiv 0 \bmod p$.

102. أثبت أن العدد $n = 121$ عدد شبه أولي للأساس 3.

103. أثبت أنه إذا كان $p > 3$ عدداً أولياً، فإن العدد $n = \dfrac{2^{2p}-1}{3}$ عدد شبه أولي للأساس 2.

104. ليكن $p \neq 3$ عدداً أولياً. أثبت أن العدد $5p$ لا يمكن أن يكون عدداً شبه أولي للأساس 3.

105. ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. أثبت أن p^2 ليس عدداً كارمايكيلياً.

106. جِد حلول التطابق الخطي $2x \equiv 1 \bmod p$، حيث $p > 2$ عدد أولي.

107. جِد أصغر عدد صحيح موجب يترك الباقي 4، 5، 6 عند تقسيمه على 5، 6، 7 على التوالي.

108. ليكن $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_r$ أعداداً أولية مختلفة. أثبت وجود عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة N التي تحقق $p_1 | N, p_2^2 | N+1, p_3^3 | N+2, \cdots, p_r^r | N+r-1$.

109. لتكن $A = \left(231^{132} + 312^{213}\right)^{321}$. ما هو باقي قسمة A على 123؟

110. جِد باقي قسمة العدد 4^{1111} على 1155.

111. ليكن $a \geq 1$ و $b > 1$ عددين صحيحين. ما هو عدد الأعداد الموجودة في المجموعة $\{a, 2a, 3a, \cdots, ba\}$ التي تقبل القسمة على b؟

112. جِد حلول التطابق الخطي $17x \equiv 2 \bmod 143$.

113. جِد حلول التطابق $x^3 + 2x^2 - x - 2 \equiv 0 \bmod 24$.

114. جِد حلول التطابق $2x^3 + x^2 - 1 \equiv 0 \bmod 95$.

115. جِد حلول النظام $2x^3-x^2-1\equiv 0 \bmod 3$، $4x\equiv 2 \bmod 10$.

116. جِد حلول التطابق $x^2+1\equiv 0 \bmod 169$.

117. جِد حلول التطابق $x^{15}-2x-4\equiv 0 \bmod 7$.

118. ليكن p عدداً أولياً. جِد جميع حلول التطابق $x^p-x\equiv 0 \bmod p$.

119. ليكن p عدداً أولياً و a و n عددين صحيحين بحيث إن $n\geq 1$. جِد حلول التطابق $x^{p^n}\equiv a \bmod p$.

120. لتكن $f(x)$ كثيرة حدود مُعاملاتها أعداداً صحيحة و درجتها $n\geq 1$. أثبت أن التطابق $f(x)\equiv 0 \bmod p$ قابل للحل لعدد لانهائي من الأعداد الأولية p .

أعداد فيرما و أعداد مِرسان

121. أثبت أن جميع أعداد فيرما $F_n=2^{2^n}+1$، حيث $n\geq 1$، يمكن كتابتها على الصيغة $6k-1$.

122. ما هو عدد الخانات العشرية لعدد فيرما $F_{21}=2^{2^{21}}+1$ ؟

123. أثبت أن عدد فيرما $F_n=2^{2^n}+1$ ، $n\geq 0$، لا يساوي قوة لأي عدد صحيح.

124. أثبت أن عدد فيرما $F_n=2^{2^n}+1$ ، $n\geq 2$، لا يمكن أن يُكتب كمجموع عددين أوليين.

125. أثبت أنه إذا كان عدد فيرما $F_n=2^{2^n}+1$ ، $n\geq 0$، عدداً مؤلفاً، فإن F_n عدد شبه أولي للأساس 2 .

126. أثبت أن التطابق $2^{2^x}+1\equiv 0 \bmod p$ قابل للحل لعدد لانهائي من الأعداد الأولية p.

127. أثبت أنه إذا كان عدد مِرسان $M_n = 2^n - 1$، $n>2$، عدداً أولياً، فإن $M_n + 2$ عدد مؤلف.

128. أثبت أنه إذا كان n عدداً شبه أولي للأساس 2، فإن عدد مِرسان $M_n = 2^n - 1$ عدد شبه أولي للأساس 2.

129. أثبت أنه إذا كان p عدداً أولياً، فإن $(F_p, M_p) = 1$ حيث F_p عدد فيرما و M_p عدد مِرسان.

130. جِد جميع الأعداد التي هي معاً عدد فيرما و عدد مِرسان.

الجذور البدائية

131. ليكن $p>2$ عدداً أولياً و a عدداً صحيحاً. أثبت أنه إذا كان $\mathrm{ord}_p(a) = h > 1$، فإن $1+a+a^2+\cdots+a^{h-1}\equiv 0 \bmod p$.

132. أثبت أن $\mathrm{ord}_{F_n}(2) = 2^{n+1}$ حيث F_n عدد فيرما.

133. أثبت أنه إذا كان $\mathrm{ord}_m(a) = h$ و $\mathrm{ord}_n(a) = k$ فإن $\mathrm{ord}_{[m,n]}(a) = [h,k]$.

134. جِد عدداً، إنْ أمكن، رتبته n قياس عدد مِرسان $M_n = 2^n - 1$ حيث $n>1$.

135. ليكن $a>1$ عدداً صحيحاً و p و q عددين أوليين فرديين. أثبت أنه إذا كان $q \mid a^p - 1$ فإنه إما $q \mid a-1$ أو $q = 2kp+1$، حيث k عدد صحيح موجب.

136. ليكن $p>2$ عدداً أولياً. إذا كان g جذراً بدائياً قياس p فأثبت أن

$$g + g^2 + g^3 + \cdots + g^{p-1} \equiv 0 \bmod p$$

137. إذا كان $p \neq q$ عددين أوليين فرديين، فأثبت أنه لا يوجد جذر بدائي قياس pq.

138. جِد حلول التطابق $x^9 \equiv 12 \bmod 13$ إذا عِلمت أن 2 جذر بدائي قياس 13.

139. ليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً و $p > 2$ عدداً أولياً. ضع $S_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (p-1)^n$. أثبت أن $S_n(p) \equiv -1 \bmod p$ إذا كان $p-1 \mid n$ و $S_n(p) \equiv 0 \bmod p$ إذا كان $p-1 \nmid n$.

140. ليكن $p < q$ عددين أوليين فرديين. أثبت أن $N = pq$ ليس عدداً كارمايكيلياً.(إرشاد: استخدم الجذور البدائية.)

141. ليكن $p > 2$ عدداً أولياً. أثبت أنه إذا كان $\operatorname{ord}_p(a) = h$ فإن $\operatorname{ord}_{p^2}(a) = h$ أو $\operatorname{ord}_{p^2}(a) = hp$.

الرواسب التربيعية

142. إذا كان a راسباً تربيعياً قياس $m > 2$، فأثبت أن $a^{\phi(m)/2} \equiv 1 \bmod m$.

143. إذا كان $p \equiv 3 \bmod 8$ عدداً أولياً، فأثبت أن $p \mid 2^{(p-1)/2} + 1$.

144. جِد جميع الأعداد الأولية $p > 2$ التي تُحقِق $\left(\frac{-5}{p}\right) = 1$.

145. إذا كان p و $q = 6p + 1$ عددين أوليين فرديين، فأثبت أن $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

146. أثبت أن العدد -3 راسب غير تربيعي قياس أي عدد أولي ذي

الصورة العامة 4^n+1.

147. إذا كان $p=4n+1$ عدداً أولياً وكان q عدداً أوليا فردياً بحيث إن $q\mid n$، فأثبت أن $\left(\frac{q}{p}\right)=1$.

148. ليكن $p>2$ عدداً أولياً. أثبت أنه إذا كان q هو أصغر راسب غير تربيعي موجب قياس p فإن q عدد أولي.

149. إذا كان $p=4k+3$ عدداً أولياً وكان $\left(\frac{n}{p}\right)=1$، فأثبت أن $x\equiv n^{k+1} \bmod p$ هو حلٌ للتطابق $x^2\equiv n \bmod p$.

150. أثبت أنه إذا كان $p>3$ عدداً أولياً يُحقق $p\mid n^2-6n+90$ لعدد صحيح n فإن $p\equiv 1 \bmod 4$.

151. أثبت أن التطابق $(x^2-3)(x^2-5)(x^2-15)\equiv 0 \bmod p$ قابل للحل لأي عدد أولي $p>5$.

152. أثبت وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $5n+4$.

153. أثبت وجود عدد غير منتهٍ من الأعداد الأولية ذات الشكل العام $8n+7$.

154. ليكن p عدداً أولياً. أثبت أنه إذا كان $2^p\equiv 1 \bmod (2p+1)$ فإن $2p+1$ عدد أولي. أثبت أيضاً أن العكس صحيح إذا كان $p=4k+3$ حيث $k>1$ عدد صحيح.

155. إذا كان p عدداً أولياً فردياً و g جذراً بدائياً قياس p، فأثبت أن g راسب غير تربيعي قياس p.

156. ليكن p عدداً أولياً فردياً. أثبت أن عكس السؤال السابق صحيح

(أي أن كل راسب غير تربيعي قياس p هو جذر بدائي قياس p) إذا وفقط إذا كان $p = 2^k + 1$، حيث k عدد صحيح موجب.

157. إذا كان عدد فيرما $F_n = 2^{2^n} + 1$، $n \geq 1$، عدداً أولياً، فأثبت أن العدد 3 جذر بدائي قياس F_n.

158. إذا كان $p = 8n + 3$ و $q = 4n + 1$ عددين أوليين $(n \geq 1)$، فأثبت أن العدد 2 جذر بدائي قياس p.

الدوال العددية

159. ليكن m و n عددين صحيحين موجبين. جِد قيمة $\left[\!\left[\frac{n}{m}\right]\!\right] - \left[\!\left[\frac{n-1}{m}\right]\!\right]$.

160. إذا كان x عدداً حقيقياً و n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $0 \leq [\![nx]\!] - n[\![x]\!] \leq n - 1$.

161. جِد قيمة $\left[\!\left[\sqrt{3^{2n} + 3^n + 3}\right]\!\right]$ حيث n عدد صحيح موجب.

162. إذا كان p عدداً أولياً، فما هي قيمة المجموع $\sum_{i=1}^{p-1}\left[\!\left[\frac{[\![p/i]\!]}{p/i}\right]\!\right]$؟

163. أثبت أنه لأي عدد صحيح $n \geq 1$، فإن $f(n)$ عدد أولي، حيث

$$f(n) = (n-1) \cdot \left[\!\left[\left[\!\left[\frac{n!+1}{n+1}\right]\!\right] - \frac{n!-n}{n+1}\right]\!\right] + 2$$

164. ليكن $\alpha > 0$ عدداً حقيقياً. أثبت أن $\left[\!\left[\sqrt[k]{\alpha}\right]\!\right] = \left[\!\left[\sqrt[k]{[\![\alpha]\!]}\right]\!\right]$ حيث k عدد صحيح موجب.

165. إذا كان α عدداً حقيقياً بحيث إن $0 < \alpha < 1$، فأثبت أن المجموعة $\{[\![k\alpha]\!] : k = 1,2,3,\cdots\}$ تحتوي جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة.

166. ليكن $n \geq 2$ عدداً صحيحاً. إذا كان e_2 و e_5 أكبر أُسَّين بحيث $2^{e_2} \mid n!$ و $5^{e_5} \mid n!$ على التوالي، فأثبت أن $e_2 > e_5$.

167. ما هو عدد الأعداد الطبيعية n التي تحقق $n \leq 1000$ و $(n,12)=1$؟

168. إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فأثبت أن $\llbracket (3+2\sqrt{2})^n \rrbracket$ عدد فردي.

169. ليكن a، b، $m>1$ أعداداً صحيحة. إذا كان $(a,m)=1$ فأثبت أن

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left\llbracket \frac{ai+b}{m} \right\rrbracket = \frac{(a-1)(m-1)}{2} + b$$

170. إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً و x عدداً حقيقياً بحيث $0 \leq x < 1$، فأثبت أن

$$\llbracket x \rrbracket + \left\llbracket x + \frac{1}{n} \right\rrbracket + \left\llbracket x + \frac{2}{n} \right\rrbracket + \cdots + \left\llbracket x + \frac{n-1}{n} \right\rrbracket = \llbracket nx \rrbracket$$

171. إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فأثبت أن $\sum_{k=1}^{n} \left\llbracket \frac{k}{2} \right\rrbracket = \left\llbracket \frac{n^2}{4} \right\rrbracket$.

172. ما هو عدد عناصر المجموعة $\{i : 1 \leq i \leq n,\ (i,n)=d\}$؟

173. ليكن p عدداً أولياً فردياً و $k \geq 1$ عدداً صحيحاً. ما هو عدد الأعداد الأولية نسبياً مع p في المجموعة $\{1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \cdots, p^k(p^k+1)\}$؟

174. أثبت أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة n التي تحقق $9 \mid \phi(n)$. (ملحوظة: بما أن $\phi(n)$ عدد زوجي لجميع قيم $n>2$، فإنه لا يوجد عدد صحيح n يحقق المعادلة $\phi(n)=9$.)

175. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تُحقق المعادلة $\phi(n)=6$.

176. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تُحقق المعادلة $\phi(n)=2\times 7^m$ حيث $m\geq 1$.

177. جِد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تُحقق المعادلة $\phi(n)=\frac{2}{7}n$.

178. باستخدام القانون $\phi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$، أثبت وجود عدد لا نهائي من الأعداد الأولية.

179. أثبت أنه إذا كان $\phi(n)|n-1$ فإنه لا يوجد عدد أولي p بحيث $p^2|n$.

180. أثبت أنه إذا كان $n\geq 2$ فإن $\frac{\phi(n)}{n}\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\omega(n)}$.

181. إذا كان $n\geq 2$ فأثبت أن $\phi(n^2)+\phi((n+1)^2)\leq 2n^2$.

182. أثبت أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تُحقق $\phi(n)>\phi(n+1)$.

183. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب n مُعطى، يوجد عدد محدود من الحلول الصحيحة x للمعادلة $\sigma(x)=n$.

184. جِد حلول المعادلة $\sigma(n)-n=5$.

185. أثبت أن $\frac{\sigma(n)}{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

186. أثبت أن $\frac{\sigma(n)}{n}\geq\prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

187. إذا كان $n>1$ عدداً مؤلفاً، فأثبت أن $\sigma(n)>n+\sqrt{n}$.

188. أثبت أن $3|\sigma(3n+2)$ لجميع القيم $n\geq 1$.

189. إذا كان $k>1$ ، فأثبت أن $\frac{\sigma(kn)}{kn} > \frac{\sigma(n)}{n}$.

190. جِد أصغر عدد صحيح موجب n يحقق المعادلة $\tau(n)=30$.

191. جِد جميع الأعداد الطبيعية n التي تحقق $\tau(n)=4$ و $\sigma(n)=72$.

192. ليكن k عدد صحيح موجب بحيث إن العددين $4k+1$ و $6k+1$ عددان أوليان. أثبت أنَّ $\tau(12k+3)=\tau(12k+2)$.

193. أثبت أن $\tau(n)\le 2\sqrt{n}$ لأي عدد صحيح موجب n .

194. أثبت أنه لأي عدد صحيح موجب $n>1$ ، يوجد عددان صحيحان موجبان n_1 و n_2 يحققان $n=\tau(n_1)+\tau(n_2)$.

195. إذا كان $n=\underbrace{1111\cdots11}_{2010}$ ، فأثبت أن $\tau(n)$ عدد زوجي.

196. أثبت أنه لا يوجد عدد صحيح $n\ge 1$ يحقق

$$\tau(n)=\tau(n+1)=\tau(n+2)=\tau(n+3)=4$$

197. أثبت أنَّ $\omega(n)\le \log n/\log p$ ، حيث إنَّ p هو أصغر عدد أولي يقسم n .

198. أثبت أنه يوجد عدد لانهائي من الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تحقق $\omega(n)>\omega(n+1)$.

199. أثبت أن $\omega(2^n-1)<n$ لأي عدد صحيح موجب $n\ge 2$.

200. أثبت أن $\mu(n)\mu(n+2)\mu(n+5)\mu(n+7)=0$ لأي عدد طبيعي n .

201. ليكن $n\ge 3$ عدداً فردياً و m عدداً صحيحاً بحيث أن $m>n$. أثبت أنه إذا كانت a و b و c أعداداً صحيحة موجبة تحقق $a^n+b^n=c^m$ ، فإن $\mu(a+b)=0$.

202. جِد قيمة المجموع $\sum_{d|n}\mu(d)\omega(d)$ إذا كان $n>1$.

203. أثبت أن $\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}=\frac{n}{\phi(n)}$.

204. أثبت أن $\phi(n)\sigma(n)<n^2$ لأي عدد صحيح $n>1$.

205. أثبت أن $\sum_{k=1}^{n}\tau(k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\!\left[\frac{n}{k}\right]\!\right]$.

206. إذا كانت f دالة ضربية فأثبت أن $G(n)=\sum_{d^2|n}f(d)$ دالة ضربية أيضاً.

الأعداد التامة و الأعداد الزائدة و الأعداد الناقصة

207. أثبت أنه إذا كان العدد $n>1$ عدداً تاماً و $k>1$، فإن العدد nk عددٌ زائد.

208. أثبت أن العدد 11×2^k عددٌ زائد لجميع الأعداد الصحيحة $k\geq 3$.

209. أثبت أنه إذا كان $n>6$ عدداً زوجياً تاماً، فإن $n\equiv 1 \bmod 9$.

210. أثبت أن العدد p^kq^l عدد ناقص لأي عددين أوليين فرديين $p<q$ وأي عددين صحيحين $k\geq 1$ و $l\geq 1$.

211. جِد جميع الأعداد التامة ذات الصيغة العامة $n=p^2q$، حيث $p\neq q$ عددان أوليان.

212. إذا كان $p>3$ و $2p+1$ عددين أوليين، فأثبت أن العدد $2p(2p+1)$ عدد ناقص.

213. جِد جميع الأعداد الأولية q التي تجعل العدد $q(q+1)$ عدداً تاماً.

214. ليكن p و q و r أعداداً أولية مختلفة. أثبت أن العدد $n=pqr$ ليس عدداً تاماً.

215. إذا كان P و Q عددين تامّين زوجيين بحيث $6 < P < Q$ فأثبت أن $Q > 16P$.

ثلاثيات فيثاغورس

216. جِد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية التي أحد عناصرها يساوي 8.

217. جِد جميع مثلثات فيثاغورس التي قيمة مساحتها تساوي 30.

218. جِد جميع مثلثات فيثاغورس التي قيمة محيطها يساوي 30.

219. جِد جميع مثلثات فيثاغورس التي قيمة مساحتها تُساوي قيمة محيطها.

220. جِد جميع مثلثات فيثاغورس التي قياس أحد زواياها يساوي 60°.

221. جِد مثلثاً فيثاغورسياً بحيث يكون طول أحد أضلاعه يساوي عدد مِرسان $M_n = 2^n - 1$ لأي عدد $n > 1$.

222. جِد جميع ثلاثيات فيثاغورس (x, y, z) التي تُحقق $y = kx$ حيث $k > 0$ عدد صحيح.

223. جِد جميع ثلاثيات فيثاغورس (x, y, z) البدائية التي فيها x مربعاً كاملاً.

224. جِد جميع ثلاثيات فيثاغورس (x, y, z) البدائية التي تُحقق $z = y + 9$.

المعادلات الديوفانتية

225. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x^2 + y^2 = 4z^2$.

226. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x^2 + 3y^2 = z^2$.

227. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $3x^2 + 7y^2 = z^2$.

228. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x^y = xy$.

229. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $(n-1)!+1 = n^2$.

230. ليكن a و b عددين صحيحين موجبين بحيث إنَّ $(a,b)=1$. أثبت أن للمعادلة الديوفانتية $\frac{a}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ حلولاً صحيحة موجبة إذا وفقط إذا وُجِد عددان صحيحان موجبان c و d يقسمان b و $c+d \equiv 0 \mod a$.

231. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$.

232. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $x^2y^2+x^2y+xy^2+xy=xyz-1$.

233. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $2xy+3y^2=24$.

234. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2+2$.

235. جِد الحلول الصحيحة للمعادلة $x^6+3=y^3+z^3$.

236. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $2x^3+x^2+5y+7=0$.

237. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $4x^4-2=y(y+1)$.

238. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $x+y=x^2+y^2$.

239. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $2xy+5x+7y=3$.

240. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{w^2}=1$.

241. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x!+y!=z!$.

242. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $n^x + n^y = n^z$.

243. أثبت أن المعادلة $3^n + 4^n = 5^n$ ليس لها حل صحيح $n \geq 3$.

244. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $2^x - 3^y = -7$.

245. جِد جميع الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $2^x - 3^y = 7$.

246. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $2^n - x^m = 1$.

247. جِد جميع الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $2^x + 5^y = 19^z$

248. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $y^2 = x^3 - 3$.

249. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $y^2 = x^3 - 12$.

250. جِد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $y^2 = x^3 + 16$.