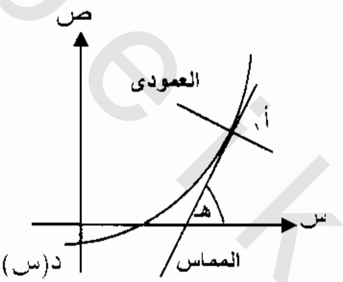
البـــاب الثالث

تطبيقات علي المشتقة الأولى

أولاً: التطبيق الهندسي

إذا كانت ص = د(س) دالة فإن **ميل المماس** عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) والتي تقع علي بيان الدالة هو $م_{١} = \frac{د\,ص}{د\,س}$ وتكون **معادلة المماس** عند هذه النقطة هي :

$ص - ص_{١} = م_{١}(\,س - س_{١})$



ويكون **ميل العمودي** هو $\frac{-١}{م_{١}}$ **ومعادلة العمودي** هي :

$ص - ص_{١} = \frac{-١}{م_{١}}$ ($س - س_{١}$) عند ($س_{١}$، $ص_{١}$)

ملاحظات :

١- ميل المماس م = ظا هـ حيث هـ هى الزاوية التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

٢- إذا كان المماس // المحور س فإن م = ظا هـ = ٠ ، ⟸ هـ = صفر .

٣- إذا كان المماس ⊥ المحور س فإن م = ظا هـ = ∞ ، هـ = ٩٠°

٤- عندما م = موجب ∴ هـ تكون زاوية حادة .

٥- عندما م = سالب ∴ هـ تكون زاوية منفرجة .

٦- إذا تقاطع منحنى $د_{١}$ مع منحنى $د_{٢}$ فإن الزاوية بينهما = الزاوية هـ بين مماسيهما عند نقطة التقاطع حيث نعين هـ من ظا هـ = $\left|\frac{م_{١} - م_{٢}}{س^{٢} + ١}\right|$ حيث $م_{١}$ هو ميل المماس الأول ، $م_{٢}$ هو ميل المماس الثاني .

٧- عند تعامد مستقيمان ميل الأول = $م_{١}$ وميل الثانى $م_{٢}$ فإن $م_{١} \times م_{٢} = -١$

٨- عند توازي المستقيمان فإن $م_{١} = م_{٢}$

أمثلة :

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودى للدالة ص = $\frac{٢\,س}{س^{٢} + ١}$ عند النقطة (-١ ،-١)

الحـــــــل

∵ $\text{ص} = \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ∴ $\text{م} = \frac{(\text{س}^{٢}+١) \times ٢ - ٢\text{س}(\text{س}^{٢}+١)}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

∴ عند س = -١ ⟸ $\text{م} = \frac{(١+١)\ ٢ - ٢ \times (-١)\ (١+١)}{(١ + ١)^{٢}} = \frac{٤ + ٤}{٤} = ٢$

∴ معادلة المماس ص - ص١ = م (س - س١) ⟸ ص+ ١ = ٢(س+١) ⟸ ص = ٢س+١

معادلة العمودى هي : ص+ ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س+١) ⟸ ٢ص + س+ ٣ = ٠

<u>مثال</u> : أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س + جا س عند النقطة (٠،٠) وكذا معادلة العمودى عند نفس النقطة .

الحـــــــل

ميل المماس = $\frac{\text{د س}}{\text{د ص}}$

= ١+ جتا س عند النقطة (٠،٠)

ميل المماس = ١+ جتا ٠ = ١+١ = ٢

معادلة المماس هي $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٠} = ٢$

ص = ٢س ، ص - ٢ س = صفر

معادلة العمودى هي $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٠} = \frac{-١}{٢}$

٢ص = - س ، ٢ص + س = صفر

<u>مثال</u>: أثبت أن المنحنى س ص = $\sqrt{٣}$ يتقاطع علي التعامد مع المنحنى ص٢ – س٢ = ٢ أوجد نقط التقاطع .

الحـــــــل

∵ س ص = $\sqrt{٣}$ ---- (١) ∴ س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص = ٠ ∴ م١ = $\frac{-\text{ص}}{\text{س}}$

، ∵ ص^{٢} – س^{٢} = ٢ --- (٢) ∴ ٢ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ - ٢ س = ٠

∴ م$_{٢}$ = $\frac{س}{ص}$ ∴ م$_{١}$× م$_{٢}$ = - ١

∴ المنحنيان يتقاطعان متعامدين

لكى نوجد نقط التقاطع من (١) ∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{ص}$ نعوض في (٢)

∴ ص^{٢} − $\frac{٣}{ص^{٢}}$ = ٢ ∴ ص^{٢} - ٢ ص^{٢} - ٣ = ٠

∴ (ص^{٢}-١) (ص^{٢}+ ١) = ٠ ∴ ص^{٢}= -١ مرفوض ∴ ص^{٢}= ٣

∴ ص = ± $\sqrt{٣}$ ∴ من (١) ∴ عند ص = ± $\sqrt{٣}$ ∴ س = ± ١

∴ نقط التقاطع هى (± ١ ، ± $\sqrt{٣}$) أى (١، $\sqrt{٣}$) ، (-١ ، - $\sqrt{٣}$)

<u>مثال</u>: أثبت أن المنحنيين ص = $\frac{س}{٢-٣ س}$ ، ص = [س - ٢]^{٨} (١ − ٢ س)^{٣} متماسان عند النقطة (١، -١) - ثم أوجد معادلة المماس المشترك عند تلك النقطة .

الحـــــــل

∵ ص = $\frac{س}{٢-٣ س}$ ∴ م$_{١}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(٢-٣ س) × ١ − س× -٣}{(٢-٣ س)^{٢}}$

∴ (م$_{١}$)$_{س = ١}$ = ٢

، ∵ ص = (س- ٢)^{٨} (١-٢ س)^{٣}

∴ م$_{٢}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$ = (س-٢)^{٨} × ٣ (١-٢ س)^{٢} × -٢+ [١-٢ س]^{٣} × ٨ [س-٢]^{٧}

∴ (م$_{٢}$)$_{س = ١}$ = -٦ + ٨ = ٢

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ∴ المنحنيين متماسين

معادلة المماس المشترك : ص - ص$_{١}$ = م (س- س$_{١}$) ∴ ص+ ١ = ٢ (س -١)

∴ ٢ س − ص − ٣= ٠ معادلة المماس المشترك.

<u>مثال</u>: أوجد النقطة التى عندها المماس يوازى المحور س للمنحنى ص = جا٢ س ، ط > س > ٠

الحـــــــل

ص = جا ٢ س ⇐ (١) ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا ٢ س

، ∵ المماس // المحور س　　　∴ م = ٠　　　∴ جتا ٢ س = ٠

∴ $٢س = \frac{ط}{٢}$ ⇐ $س = \frac{ط}{٤}$ حيث ط > س > ٠

∴ من (١) ⇐ ص = جا ٢ × $\frac{ط}{٤}$ = ١

∴ النقطة هي ($\frac{ط}{٤}$ ، ١)

مثال: إذا كان المماس للمنحنى ص = س (ب – س^٢) عند النقطة س =٢ يصنع زاوية هـ حيث ظا هـ حيث ظا هـ = ٢ ـ أوجد قيمة ب .

الحـــــــل

∵ ص = ب س – س^٣ ⇐ (١)　　　∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ب – ٣ س^٢

ولكن م = ٢ عند النقطة س = ٢

∴ ب – ٣ × ٤ = ٢　　　∴ ب = ١٤

مثال : إذا كان المنحنى د(س) = أس^٣ + ب س^٢+ جـ س يمس محور السينات عند النقطة (١،٠) وأن ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (٠،٠) يساوى٢ فأوجد قيم كل من أ ، ب ، جـ

الحـــــــل

∵ ص = أس^٣ + ب س^٢ + جـ س ⇐ (١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = م = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + جـ ⇐ (٢)

عند (٠،٠) ← م = ٢　　　∴ ٠ + ٠ + جـ = ٢　　　∴ جـ = ٢

عند (١،٠) المنحنى يمس المحور س　　　∴ م = صفر

∴ من (٢) : ٣ أ + ٢ ب + ٢ = ٠ ⇐ (٣)

النقطة (١،٠) تحقق معادلة المنحنى

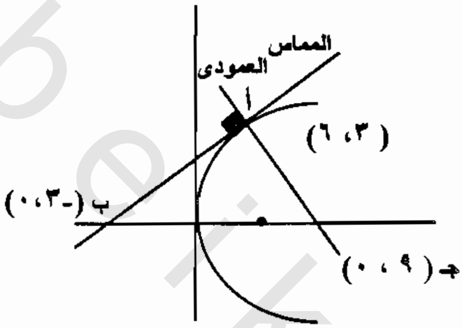
∴ أ + ب + ٢ = ٠ ⇐ (٤)　　　بالضرب × (-٢) والجمع مع (٣)

∴ أ – ٢ = ٠　　　∴ أ = ٢

من (٤): ب = -٤

مثال : **أوجد رؤوس المثلث الذي أضلاعه هي كل من المحور س ، والمماس والعمود لمنحنى**
ص^{٢} = ١٢ س عند النقطة (٣ ، ٦)

الحـــــــــل



∵ ص^{٢} = ١٢ س --- (١)

∴ حيث أن أ = (٣،٦) هى نقطة التماس

∴ ٢ ص . $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٢

∴ م = $\frac{٦}{\text{ص}}$ عند ص = ٦

∴ م = ١

ص- ٦ = ١× (س-٣) ⇐ ص = س + ٣ ---- (٢)

معادلة العمودى هى ص- ٦ = -١ × (س - ٣) ⇐ ص + س = ٩ ---- (٣)

∴ تقاطع المماس مع المحور س نضع ص = ٠ ∴ س = -٣

∴ الرأس ب = (-٣، ٠)

تقاطع العمودى مع المحور س يعطى الرأس جـ وهى (٩، ٠) وهى رؤوس المثلث أ، ب، جـ

مثال : **أثبت أن معادلة المماس لمنحنى الدالة التي معادلتها** $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$ **عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) الواقعة عليه هى** $\frac{\text{س س}_١}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص ص}_١}{\text{ب}^٢} = ١$

الحـــــــــل

∵ $\frac{\text{س}^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{ب}^٢} = ١$ ∴ بالإشتقاق

∴ $\frac{١}{\text{أ}^٢} \times \frac{٢\text{س}}{\text{ب}^٢} + \frac{١}{\text{ب}^٢} \times ٢\ \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ب}^٢\text{س}}{\text{أ}^٢\text{ص}} = \frac{-\text{ب}^٢\text{س}}{\text{أ}^٢\text{ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)_{\text{س}_1،\text{ص}_1} = \frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$

معادلة المماس بمعلومية ميل ونقطة $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$

∴ $\text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \cdot \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1} (\text{س} - \text{س}_2)$

∴ $\text{أ}^2 \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \text{س س}_1 + \text{ب}^2 \text{س}_1^2$

∴ $\text{أ}^2 \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \text{س س}_1 = \text{ب}^2 \text{س}_1^2 + \text{أ}^2 \text{ص}_1^2$ ----- (1)

، ∴ النقطة $(\text{س}_1، \text{ص}_1)$ واقعة علي المنحنى $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

∴ $\text{أ}^2 \text{ص}_1^2 + \text{ب}^2 \text{س}_1^2 = \text{أ}^2 \text{ب}^2$

بالتعويض في (1)

∴ $\text{أ}^2 \text{ص ص}_1 + \text{ب}^2 \text{س س}_1 = \text{أ}^2 \text{ب}^2$ بالقسمة علي $\text{أ}^2 \text{ب}^2$

∴ $\frac{\text{س س}_1}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص ص}_1}{\text{ب}^2} = 1$ وهو المطلوب

تمرين (٥)

❖ أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) ص = س^{٤} + ٣ س^{٢} − ٦ عند (١ ، −٢)

(٢) ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ عند (١ ، ١) حيث س > ٠

(٣) س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٢٧ عند (٦ ، ٣)

(٤) ص = (س − ١) (س + ٢) (س − ٣) عند نقط تقاطعه مع محور السينات − اوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها .

(٥) ص = س^{٢} − س^{٣} + ١ عند النقطتين (١ ، ١) ، (٠ ، ١)

(٦) ص = [illegible] $\frac{٤}{س + ١}$ عند النقطة ([illegible] ، ٢)

(٧) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٢ = ٠ عند النقطه (٣ ، −١)

(٨) اوجد النقط على منحنى الدالة ص = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١ التى يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

(٩) أوجد النقط علي منحنى الداله ص = (٢س − ٣) (س^{٢} − ٦س + ٣) التى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

(١٠) اوجد النقط علي منحنى الدالة ص = $\frac{[illegible]}{س − ٢}$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم ٣ س − ص = ٠

(١١) أوجد النقط علي منحنى الدالة ص = س^{٣} − ٣س + ٥ التي يكون عندها المماس

<u>أولاً</u>: موازياً للمستقيم ٣س + ص = ٥

<u>ثانياً</u> : عمودياً علي المستقيم س + ٩ ص − ٤٨ = ٠

(١٢) إذا كان قياس الزاوية بين المماس لمنحنى الدالة ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} − ٢ س + ٦ عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه والاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\frac{٣ ط}{٤}$ فأوجد كل من أ ، ب .

(١٣) اوجد قيم ا، ب،جـ حتي يكون لمنحنيي الدالتين ص= ا س^{٢} + ب س، ص = جـ س^{٢} س مماس مشترك عند النقطة (-١، ٢) .

(١٤) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها : وبالصورة المطلوبة .

أ- ص = س^{٣}+ ٢ س^{٢} – ٤س – ٣ عند النقطة (١، -٤) الاتجاهية .

ب- ص = $\frac{١+س}{١-س}$ عند النقطة (٢، -٣) الاحداثية .

ج- ص = $\frac{٨ أ^{٣}}{٤ أ^{٢} + س^{٢}}$ عند النقطة التي إحداثيها السينى ٢ ا الاتجاهية .

د- س^{٢}+ ص^{٢}+ ٢ س- ٣ص + ٢ =٠ عند النقطة (-٢ ، ١) الاحداثية .

هـ- ص = س^{٣}- ٣ س^{٢} – س -٥ عند النقطة التي احداثيها السيني ٣ الاتجاهية .

(١٥) أثبت أن العمودى علي منحنى الدالة ٣ ص = ٦س- ٥ س^{٢} عند النقطة (١ ، $\frac{١}{٣}$) يمر بنقطة الأصل .

(١٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص^{٢} = ٢٠ س الذى يصنع مع المحور وس زاوية قياسها $\frac{ط}{٤}$.

(١٧) أوجد معادلتى المماسين للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢ الموازيين للمستقيم ر = (١،١) + ك(٣، -٢) .

(١٨) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص= س^{٤}-٣س العمودى علي المستقيم س+٢٩ص+ جـ = ٠

(١٩) أثبت أن المنحنيين ص = ٢ س^{٢} – ٣ س + ٨ ، ص = س^{٢} – ٣ س+ ٩ يتقاطعان علي التعامد عند النقطة (١ ،٧)

(٢٠) أثبت أن المنحنيين ص = س^{٢} – س + ٢ ، ص = ٣ س – س^{٢} متماسين – ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما .

ثانياً : المعادلات الزمنية المرتبطة

في هذه الحالة يوجد عدد من المتغيرات التابعة مرتبطة معاً بواسطة متغير مستقل هو ن وذلك يكون في علاقة دالية واحدة ويطبق هذا في إيجاد معدل التغير في المساحا أو الحجوم وغيرها.

مثال: **يتساقط رمل علي سطح الأرض مكوناً كومة علي شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه = $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته وذلك بمعدل ٢٧ قدم^{٣} / دقيقة – فأوجد :**

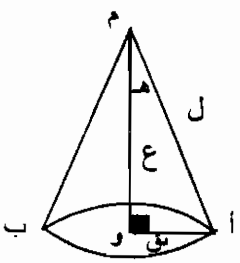
(أ) معدل الزيادة في نصف القطر في اللحظة التي يكون عندها نق = ٦ قدم .

(ب) معدل الزيادة في المساحة الجانبية .

الحـــــــل

(أ) ح المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع ، ∵ ع = $\frac{٣}{٤}$ نق ∴ ح = $\frac{١}{٤}$ ط نق^{٣} --- (١)

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٢} . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$



لكن نق = ٦ ، $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٢٧

∴ ٢٧ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣٦ .

∴ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{\text{ط}}$ قدم / ث

(ب) ∵ ع^{٢} = $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} ، ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢}

∴ ل^{٢} = نق^{٢} + $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} = $\frac{٢٥}{١٦}$ نق^{٢} ← ل = $\frac{٥}{٤}$ نق

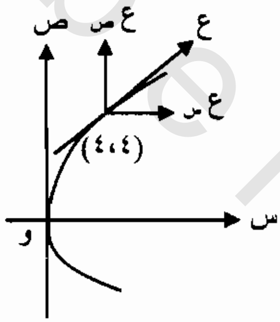
، ∵ م الجانبية = ط نق ل = ط × $\frac{٥}{٤}$ نق^{٢}

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٥}{٤}$ ط × ٢ نق × $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ = ١٥ قدم^{٢} / دقيقة

مثال: تتحرك نقطة مادية علي القطع المكافئ ص^{٢}=٤س على الجزء الواقع في الربع الأول بسرعة ثابتة =٥ قدم / ث ، فإذا كانت الحركة مبتدأه من نقطة الأصل.

- فأوجد ع$_{س}$،ع$_{ص}$ عند النقطة (٤،٤)

الحـــــــــل



ص^{٢} = ٤ س ∴ ٢ ص . $\frac{دص}{دن}$ = ٤ $\frac{دس}{دن}$ عند (٤ ، ٤)

∴ ٤ع$_{ص}$ = ٢ع$_{س}$ ∴ ع$_{س}$ = ٣ع$_{ص}$ ---- (١)

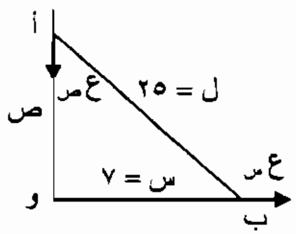
ولكن ع = ٥ = $\sqrt{ع^{٢}_{س} + ع^{٢}_{ص}}$ بالتربيع

ومن (١) ∴ ٢٥ = ٤ ع$^{٢}_{ص}$ + ع$^{٢}_{ص}$ = ٥ ع$^{٢}_{ص}$

∴ ع$_{ص}$ = $\sqrt{٥}$ ، ع$_{س}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة سرعة

مثال : ا ب سلم طوله ٢٥ قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأس وطرفه ب على أرض أفقية تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بمعدل ١٢ قدم/ ث – فأوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي أ عندما يكون الطرف ب يبعد ٧ قدم من الحائط.

الحـــــــــل



بفرض ع$_{س}$ = ١٢ قدم/ ث سرعة الطرف ب

، ع$_{ص}$ = ؟ سرعة انزلاق الطرف أ

أ ب^{٢} = ا و^{٢} + ب و^{٢} ∴ ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} -----(١)

عند س = ٧ ∴ ص^{٢} = (٢٥)^{٢} – ٧^{٢} = (٢٥- ٧) (٢٥ + ٧)

∴ ص^{٢} = ١٨ × ٣٢ = ٩ × ٦٤ ∴ ص = ٢٤ قدم بتفاضل (١)

∴ صفر = ٢ س . $\frac{دس}{دن}$ + ٢ ص . $\frac{دص}{دن}$

∴ ٢٤ . $\frac{دص}{دن}$ = -٧ × ١٢ ∴ $\frac{دص}{دن}$ = ع$_{ص}$ = - ٣ $\frac{١}{٢}$ قدم / ث

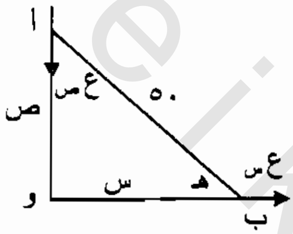
مثال: أ ب سلم طوله ٥٠ قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأسى وطرفه ب علي أرض افقية فإذا تحرك الطرف ب بعيداً عن الحائط بسرعة ٣ قدم / دقيقة - فأوجد :

أ) سرعة أ عندما تكون ب علي بعد ١٤ قدم من الحائط .

ب) بعد ب عن الحائط عندما تكون | ع أ | = | ع ب | ومنه أوجد ميل السلم على الأرض.

جـ) بعد ب ن الحائط عندما تكون سرعة أ لأسفل = ٤ قدم / دقيقة .

الحـــــــل



أ) انظر المثال السابق.

ب) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥٠^{٢}$ ---- (١)

∴ $٢\ \text{س} . \text{ع}_{\text{س}} + ٢\ \text{ص} . \text{ع}_{\text{ص}} = ٠$ ----- (٢)

عند | ع أ | = | ع ب |

من (٢) ∴ س = - ص أي أن | س | = | ص |

∴ من (١) ∴ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٥٠^{٢}$ ∴ س = $٢٥\sqrt{٢}$ قدم

∴ بعد ب عن الحائط = س = $٢٥\sqrt{٢}$ قدم ثانياً

جتا هـ = $\frac{٢٥\sqrt{٢}}{٥٠} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← هـ = ٤٥°

ج) ∵ $\text{ع}_{\text{س}}$ = ٣ قدم/ ث $\text{ع}_{\text{ص}}$ = ٤ قدم / ث ∴ نعوض في (٢)

∴ س × ٣ + ص× ٤ =٠ ∴ س = $\frac{-٣}{٤}$ س نعوض في (١)

∴ $\text{س}^{٢} + \frac{٩\ \text{س}^{٢}}{١٦} = ٥٠^{٢}$ ∴ $\frac{١٦\text{س}^{٢} + ٩\ \text{س}^{٢}}{١٦} = ٥٠^{٢}$

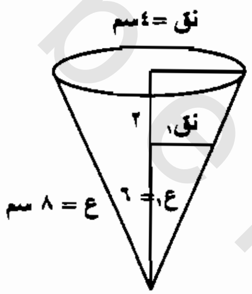
∴ س٢= ١٦ × ١٠٠

∴ س = ٤٠

∴ بعد ب عن الحائط = ٤٠ قدم

مثال: وعاء مخروطي رأسه إلى أسفل ارتفاعه = ٨ سم ، نصف قطر قاعدته = ٤ سم يتسرب سائل منه بمعدل ١ سم^{٣}/ ث. أوجد معدل انخفاض سطح السائل عندما يكون علي بعد ٢ سم من قاعدة الوعاء .

الحـــــــل



من التشابه $\frac{ع_{١}}{٨} = \frac{نق_{١}}{٤}$ $\therefore$ $نق_{١} = \frac{١}{٢} ع_{١}$

$\therefore$ $نق_{١}^{٢} = \frac{١}{٤} ع_{١}^{٢}$

$\because$ $ح = \frac{١}{٣}$ ط $نق_{١}^{٢} ع_{١} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}$ ط $ع_{١}^{٣}$

$\therefore$ $\frac{د ح}{د ن} = \frac{١}{١٢}$ ط $\times ٣ ع_{١}^{٢} \times \frac{د ع_{١}}{د ن}$

عندما يكون $ع_{١} = ٦$سم ، $\frac{د ح}{د ن} = ١$ سم^{٣} / ث

$\therefore$ $١ = \frac{١}{٤} \times ٣٦$ ط $\times \frac{د ع}{د ن}$ $\therefore$ $\frac{د ع_{١}}{د ن} = \frac{١}{٩ ط}$ سم / ث

مثال : يتحرك جسم أفقيا حسب المعادلة ف = $\frac{٣ ن}{ن^{٢} + ١}$ سم / ثانية من نقطة وأوجد :

أ) ع. عند ن = ٠ ب) أين ومتى يقف الجسم لحظيا .

الحـــــــل

(أ) $\because$ $ف = \frac{٣ ن}{ن^{٢} + ١}$ ---- (١)

$\therefore$ $ع = \frac{د ف}{د ن} = \frac{٣ (ن^{٢}+١) - ٣ن (٢ن)}{(ن^{٢}+١)^{٢}}$

$\therefore$ $ع = \frac{-٣ (ن^{٢} - ١)}{(ن^{٢} + ١)^{٢}}$ ---- (٢)

عند ٠ = $\therefore$ $ع. = \frac{-٣ (٠ - ١)}{(٠ + ١)^{٢}} = ٣$ سم / ث

(ب) نضع ع = ٠ في (٢)

$\therefore$ $\frac{٣ - ٣ ن^{٢}}{(ن^{٢} + ١)^{٢}} = ٠$ $\therefore$ $ن^{٢} = ١$ $\therefore$ $ن = \pm ١$

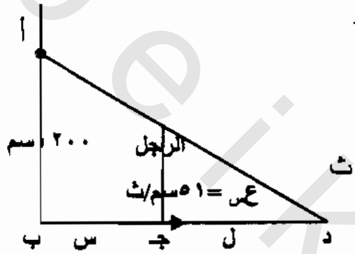
$\therefore$ عند ن = ١ث يقف الجسم لحظيا نعوض في (١)

$\therefore$ $ف = \frac{٣ \times ١}{١ + ١} = ١ \frac{١}{٢}$ سم وعلي بعد $١ \frac{١}{٢}$ سم عن النقطة

مثال : يتحرك رجل طوله ١٨٠ سم علي سطح الأرض مبتعداً عن مصباح علي ارتفاع ١٢ متر عن سطح الأرض وذلك بسرعة = ٥١ سم/ ث عن موضع مسقط المصباح علي الأرض . أوجد معدل ازدياد طول ظل الرجل على سطح الأرض .

الحـــــــل

بفرض أن طول ظل الرجل = ك ، س بعد الرجل عن النقطة ب .



من التشابه ∴ $\frac{\text{ل}}{١٨٠} = \frac{\text{ل + س}}{١٢٠٠}$ حيث $\frac{\text{ل}}{\text{ل + س}} = \frac{١٨٠}{١٢٠٠}$

∴ ١٧ ل = ٣ س

∴ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{١٧} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{١٧} \times ٥١ = ٩$ سم / ث

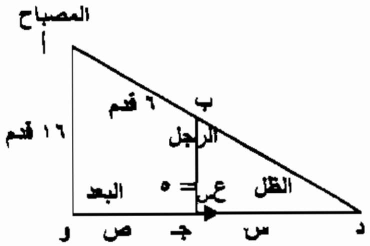
حيث $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥١$ سم / ث

مثال : رجل طوله ٦ أقدام يتحرك بسرعة ٥ قدم / دقيقة نحو مصباح يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٨ قدم . أوجد : أ) معدل تناقص ظل الرجل .

ب) بعد الرجل عن الحائط عندما يكون طول ظل الرجل = ٨ قدم .

الحـــــــل

(أ) $\frac{\text{س}}{\text{س+ ص}} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣}$ ∴ ٢ س = ص ---- (١)



٢ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ ⇐ ٢ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥$

∴ معدل تناقص الظل = $\frac{٥}{٢}$ قدم / ث

(ب) من (١) عندما ص = ٨

∴ س = ٤ قدم

مثال: يتزايد نصف قطر كرة بمعدل ٠,٠٣ بوصة / ث – فأوجد معدل تزايد حجم الكرة . ثم أوجد معدل تزايد مساحة سطح الكرة عندما يكون نصف القطر = ٣ بوصات .

الحـــــل

∵ $\text{ح} = \frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} ⇐ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٤ ط نق^{٢} . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٤ ط × ٩ × $\frac{٣}{١٠٠}$ ١,٠٨ بوصة^{٣} / ث

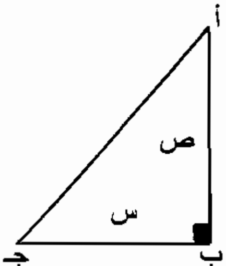
م = مساحة سطح لكرة = ٤ ط نق^{٢} ∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٨ ط نق . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

، ∵ نق = ٣ بوصة ، $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ = ٠,٠٣ بوصة / ث

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = ٨ ط × ٣ × $\frac{٣}{١٠٠}$ = ٧٢ و ط بوصة^{٢} / ث

<u>مثال</u>: أ ب ج مثلث قائم في ب ، فإذا كان طول أ ب = ١٦سم وينقص بمعدل = ٢ سم/ ث وطول ب جـ = ٩ سم ويزداد بمعدل٣سم/ث ـ فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد٢ ثانية.

الحـــــل



بعد ٢ ثانية ∴ أ ب = ص = ١٦ ـ ٢ × ٢ = ١٢ سم

، ب جـ = س = ٩ + ٢ × ٣ = ١٥ سم

م = $\frac{١}{٢}$ س . ص

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$ [س . $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ + ص . $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$]

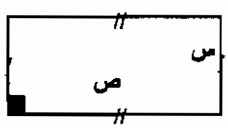
∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$ [١٥ × (-٢) + ١٢ × ٣] = - ١٥ + ١٨ = ٣ سم^{٢} / ث

<u>مثال</u>: يتزايد ضلعان متقابلان من مستطيل بمعدل ٤ سم / ث ويتناقص الضلعان الآخران بحيث تبقي مساحة المستطيل ثابت = ٦٠ سم^{٢} ، المطلوب :

(أ) معدل تغير محيط المستطيل عندما يكون طول الضلع المتزايد = ٨ سم .

(ب) أوجد بعد المستطيل عندما يتوقف المحيط عن التناقص .

الحـــــل



أ) نفرض أن الضلع المتزايد = س

∴ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٤ سم / ث الضلع الآخر حيث

= ؟ = معدل تناقص الضلع الآخر

∴ المساحة = س . ص = ٦٠ ⇐ ص = $\frac{٦٠}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ٧ سم

∴ بالتفاضل الضمني ∴ س . $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ + ص . $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٠ ---- (١)

∴ ٨ × $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = - $\frac{١٥}{٢}$ × ٤ ∴ = - $\frac{١٥}{٢}$ سم / ث

∵ المحيط ح = ٢ (س + ص)

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٢ ($\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ + $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$) = ٢ (٤- $\frac{٣}{٤}$ ٣) ---- (٢)

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ سم / ث هـ . ط . ت

ب) عندما يكون التغير في المحيط = صفر ∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = صفر ∴ من (٢)

∴ = - من (١)

∴ من (١) س = ص

لكن س× ص = ٦٠ ، ∴ س^{٢} = ص^{٢} = ٦٠

∴ س = ص = ٢ $\sqrt{١٥}$ سم وهما بعد المستطيل

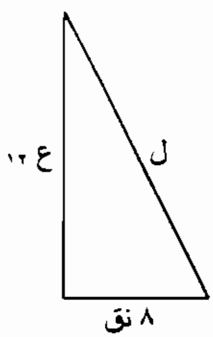
مثال: يتساقط رمل علي أرض افقية بمعدل ٩٦ سم^{٣} / ق مكونا مجسم على شكل مخروط ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ قطر قاعدته . فاوجد :

أ- معدل التغير في ارتفاعه عندما يكون نصف قطر القاعدة = ١٢ سم

ب- معدل التغير في المساحة الجانبية للمجسم الناتج عند نق = ١٢ سم

الحـــــــــل

أ) ∵ ع = $\frac{١}{٣}$ القطر = $\frac{٢}{٣}$ نق ∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم



، نق = $\frac{٢}{٣}$ ع ---- (١)

∵ ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ ط × $\frac{٩}{٤}$ ع^{٢} × ع

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣ ع^{٢} × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

ولكن $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ٩٦ سم^{٣}/ق ، ع = ٨ سم

∴ ٩٦ = $\frac{٩}{٤}$ ط ٦٤ × $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٢}{٣ ط}$ سم / ق

ب) $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٢} \cdot \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{١}{\text{ط}}$ سم / ق

م الجانبية = ط نق . ل $\therefore$ ل^٢ = ع^٢ + نق^٢

من (١) $\therefore$ ل^٢ = $\frac{٤}{٩}$ نق^٢ + نق^٢

$\therefore$ ل = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ نق

$\therefore$ م = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ ط نق^٢ $\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣}$ ط نق . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

، $\because$ نق = ١٢ سم ،   =   سم / ق

$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣}$ ط × ١٢ × $\frac{١}{\text{ط}}$ = ٨ $\sqrt{١٣}$ سم^٢ / ق

<u>مثال</u>: قطعة من الشمع أسطوانية الشكل تنصهر بمعدل ١٠٨ سم^٣ / ق محتفظة بشكلها الأسطوانى

ـ فأوجد ما يأتى عندما يكون الارتفاع = ٤٥ سم :

أ) معدل التغير في الارتفاع ونصف القطر .

ب) معدل التغير في المساحة الجانبية مع العلم أن الارتفاع يساوى $\frac{٣}{٤}$ نصف القطر دائما.

الحـــــــل

أ) $\because$ ع = $\frac{٣}{٤}$ نق $\therefore \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} \cdot \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ ---- (١)

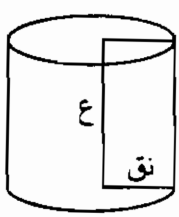
$\therefore$ ح = ط نق^٢ ع = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^٣

$\therefore \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{٩}{٤}$ ط نق^٢ ع .   ----- (٢)

ولكن $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ١٠٨ سم٣/ ق ، نق = $\frac{٤ \times \text{ع}}{٣} = \frac{٤ \times ٤٥}{٣}$ = ٦٠ سم

من (٢)   ١٠٨ = $\frac{٩}{٤}$ ط × ٦٠ × ٦٠ . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

$\therefore \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٧٥\text{ط}}$ سم / ق



$\therefore \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} \cdot \frac{١}{٧٥\text{ط}} = \frac{١}{١٠٠\text{ط}}$ سم / ق

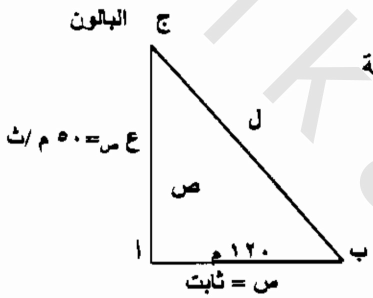
ب) $\because$ م الجانبية = ٢ ط نق ع = ٢ ط نق × $\frac{٣}{٤}$ نق = $\frac{٣}{٢}$ ط نق^٢

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤}\text{ ط} \times ٢\text{ نق} \cdot \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣\text{ ط} \times ٦٠ \times \frac{١}{٧٥\text{ ط}} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤ \text{ سم}^{٢} / \text{ق}$$

<u>مثال</u>: يقف رجل علي سطح أرض أفقية علي بعد ١٢٠ متر من نقطة أ تقع علي سطح الأرض أيضاً فإذا تحرك بالون رأسيا إلي أعلي من النقطة أ بسرعة ١٠ متر / ث ـ فأوجد معدل تباع البالون عن الرجل بعد ٥ ث من بدء الحركة .

الحـــــــــل



من الرسم نجد أن ل هو بعد البالون عن الرجل عند أي لحظة

$$\therefore \text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (١٢٠)^{٢} + \text{ص}^{٢} \quad --- (١)$$

$$\therefore ٢\text{ ل} \cdot \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٢\text{ ص} \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \quad ---- (٢)$$

بعد ٥ ثانية $\therefore$ ص = ٥٠ م

من (١) $\text{ل}^{٢} = (١٢٠)^{٢} + (٥٠)^{٢} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٠٠ = ١٦٩٠٠$

$\therefore$ ل = ١٣٠ م

$$\therefore \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{٥٠ \times ١٠}{١٣٠} = \frac{٥٠}{١٣} \text{ م / ث}$$

وهو تباعد البالون عن الرجل بعد ٥ ثانية من بدء الحركة

تمرين (٦)

(١) تتحرك نقطة علي المنحنى $س^{٢}$ + س ص + ص = ٧ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (-١،٣) يساوى ٠,١ - أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

(٢) تتحرك نقطة (س ، ص) علي المنحنى ص = $س^{٢}$ + ٤ س-٣ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى .

(٣) تتحرك نقطة (س،ص) على الدائرة $س^{٢}$+ $ص^{٢}$+٤س- ٨ ص = ١٠٨ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

(٤) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ ث عندما يكون العرض ٨٠سم ،أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة.

(٥) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢سم / ث - اوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة في نهاية ١٠ ثواني .

(٦) يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه علي أرض أفقية و بطرفه الاخر علي حائط رأسي . فإذا إنزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون علي بعد ٢,٥ متر من الحائط - أوجد : عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوي للسلم . ثم أوجد: بعد الطرف العلوي للسلم عن الارض عندما يتحرك الطرف العلوي و الطرف السفلي بنفس المعدل .

(٧) وضع مصباح كشاف علي ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء بسرعة ٢ متر / دقيقة . أوجد :

أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل .   ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

(٨) ونش رأسي طوله ٦ امتار يتحرك بسرعة ٥ أمتار / ثانية في إتجاه مصباح علي إرتفاع ١٦ متر، أوجد: أ) معدل تحرك نهاية ظل الونش .   ,   ب) معدل تغير طول ظل الونش.

ج) معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش علي بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح .

(٩) إذا كانت ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتي المركز نصفا قطريهما $نق_{١}$ ، $نق_{٢}$ حيث $نق_{٢}$ > $نق_{١}$ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التي عندها $نق_{١}$ = ٤سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم / ث ، $نق_{٢}$ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ٠,١ سم/ ث .

(١٠) في لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية هما ٨سم ، ٦ سم – إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثاني يزداد بمعدل ٢ سم/ دقيقة – فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين.

(١١) أ جـ ، ب جـ طريقان متعامدان ، أ جـ = ٩٠متر ، ب جـ = ٧٠ متر – يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ أمتار/ ث والثاني من ب نحو جـ بسرعة منتظمة ٨أمتار/ ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضى ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معا يعطى بالعلاقة $ف^{٢}$ = ١٠٠($ن^{٢}$ -٢٢ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلي ن عندما ن = ٨ ثواني .

(١٢) في الساعة الثامنة صباحا كانت سفينة تقع علي بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفي الساعة التاسعة صباحا خررجت من الميناء سفينة أخري متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠كم / ساعة – أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين في الساعة العاشرة صباحا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

(١٣) عمود إنارة طوله ١٥ متر أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلي أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متر م قاعدة العمود – وجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

(١٤) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلي بمعدل ١سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتا وذلك عند اللحظة التي يكون فيها نصفي قطريها ٣ ، ٩ سم - أوجد عند هذه اللحظة :

(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجي . (ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

(ج) معدل تغير سمكها .

(١٥) تتمدد قطعة من المعدن علي هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ $سم^{٣}$ / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١سم/ دقيقة – فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

تمارين غير محلولة

١. إذا كان طول اسطوانة مساوياً $\frac{٧}{١٢}$ من طول نصف قطر قاعدتها فأوجد معدل تغير قطر القاعدة إذا كان معدل تغير الحجم يساوى ٤٢ط قدماً^{٣} / ثانية عندما يكون القطر = ١٢ قدماً.

٢. يحتوى إناء رأسى على سائل حجمه ح ، يعطى بدلالة ع بعد سطح السائل عن المستوى المار بالحافة بالمعادلة ح = ٥ع^{٢} - ٥ع + ٣ ، فإذا كان بقاعدة الإناء ثقب يتسرب منه السائل بعشر وحدات مكعبة / ثانية وكان معدل زيادة ع يساوى ٢ وحدة/ ثانية – فأوجد البعد ع فى هذه اللحظة .

٣. صندوق من المعدن على شكل متوازى مستطيلات النسب بين أبعاده هى ١:٢:٣ فإذا تمدد الصندوق بالحرارة فاحسب معدل زيادة الحجم بالنسبة للزمن وكذلك معدل زيادة السطح بالنسبة للزمن فى هذه اللحظة التى يكون فيها معدل زيادة أصغر أبعاده ٠,٠٢سم/ ثانية وطول هذا البعد ١٠ سم .

٤. يتساقط رمل على الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعه $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته بمعدل ٢٧ قدماً مكعباً فى الدقيقة، فأوجد معدل الزيادة فى نصف قطر القاعدة فى اللحظة التى يكون فيها مساوياً ٦ أقدام .

٥. إذا كان الضغط ص بالأرطال على البوصة المربعة من كتلة معلومة حجمها ح بوصة مكعبة مرتبطين بالعلاقة : ص ح = ٨٠ - أوجد معدل نقص الضغط بالنسبة إلى الزيادة فى الحجم عندما يكون الحجم ٨٠ بوصة مكعبة .

٦. أ ب سلم طوله ٥٠ قدماً يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بسرعة مقدارها ٣ أقدام / دقيقة – فأوجد :

أ- سرعة أ عندما تبعد ب عن الحائط بمقدار ١٤ قدماً .

ب- بعد ب عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من أ ، ب .

ج- بعد ب عن الحائط عندما يتحرك الطرف أ إلى أسفل بسرعة مقدارها ٤ أقدام / دقيقة .