البـــاب الثانى

الإشـتقـاق

قابلية الاشتقاق : تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = أ

إذا كانت $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود

أي:

إذا كانت ($\frac{ء ص}{ء س}$) أو دَ (أ) لها وجود (عدد حقيقي وحيد)

❖ **المشتقة اليمني عند س = أ**

هي $\lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ ($أ^+$) حيث هـ > ٠

❖ **المشتقة اليسري عند س = أ**

هي $\lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ ($أ^-$) حيث هـ < ٠

❖ **بحث قابلية الدالة د(س) للاشتقاق عند س = أ ، أ ∋ لنطاق الدالة :-**

أولا: نوجد المشتقة اليمنى	ثانيا: نوجد المشتقة اليسرى
(١) نوجد د(أ) ---- (١) (٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)	(١) نوجد د(أ) ---- (١) (٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)
حيث هـ كمية صغيرة جداً هـ ← ٠ عندما س ← أ	
(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ) (٤) دَ ($أ^+$) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = م	(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ) (٤) دَ ($أ^-$) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = ك

- **تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت م = ك**

- تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق إذا كانت م ≠ ك

- إذا كان نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د(أ + هـ) − د(أ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{عدد}}{٠} = \infty$

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق .

مثال: ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ + \text{س} + ٣ & \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} + ٢ & \text{س} > ١ \end{cases}$

الحـــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

د، (س) = ٣س + ٢ بوضع س = ١ + هـ بدلا من س ، هـ ← ٠ عندما س ← ١

∴ د (١ + هـ) = ٣ (١ + هـ) + ٢ = ٣ + ٣ هـ + ٢ = ٥ + ٣هـ

د(١) = ٣ + ٢ = ٥

∴ د(١ + هـ) − د(١) = ٥ + ٣ هـ ـ ٥ = ٣ هـ

∴ دَ (١)$^{+}$ نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د}_١\text{(١ + هـ) − د}_١\text{١}}{\text{هـ}}$ = نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{٣\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$ = ٣ --- (١)

ثانيا : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

د٢ (س) = س^٢ + س + ٣

بوضع س = ١ + هـ هـ ← ٠ عندما س ← ١

∴ د(١ + هـ) = (١ + هـ)^٢ + (١ + هـ) + ٣ = هـ^٢ + ٣ هـ + ٥

د٢ (١) = ١ + ١ + ٣ = ٥

د (١ + هـ) ـ د(هـ) = هـ^٢ + ٣ هـ + ٥ ـ ٥ = هـ^٢ + ٣ هـ

∴ دَ (١)$^{-}$ = نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د}_٢\text{(١ + هـ) − د (هـ)}}{\text{هـ}}$ = نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{هـ}^٢ + ٣\,\text{هـ}}{\text{هـ}}$

= نها $_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{هـ(هـ + ٣)}}{\text{هـ}}$ = ٣ ---- (٢)

∴ دَ (١)$^{+}$ = دَ (١) ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال: بين هل الدالة د قابلة للاشتقاق عند هـ أم لا

د(س) = $\begin{cases} ٢\,\text{س}^٢ + ١ & \text{س} \geq ١ \\ ٤\,\text{س} - ١ & \text{س} < ١ \end{cases}$ هـ = ١

الحـــــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

د، (س) = ٤ س - ١ ∴ د، $(١)^+$ = ٤ × ١ – ١ = ٣

د، (١ + هـ) حيث هـ ← ٠ عندما س ← ٠

= ٤ (١ + هـ) - ١ = ٤ + ٤ هـ - ١ = ٣ + ٤ هـ

∴ د، $(١)^+$ نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) – د (١)}{هـ}$

= نها هـ ← ٠ $\frac{٣ + ٤ هـ - ٣}{هـ}$ = $\frac{٤ هـ}{هـ}$ = ٤

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

د٢ (س) = ٢ $س^٢$ + ١ ∴ د، $(١)^-$ = ٢×١ + ١ =٣

د٢ (١ + هـ) = ٢ $(١ + هـ)^٢$ + ١ = ٣ + ٤ هـ + ٢ $هـ^٢$

دَ٢ $(١)^-$ = نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) – د (١)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{٣+ ٤هـ +٢$هـ^٢$ -٣}{هـ}$

= نها هـ ← ٠ $\frac{هـ (٤ + ٢هـ)}{هـ}$ = ٤

∴ دَ٢ $(١)^+$ = دَ $(١)^-$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند هـ = ١

مثال: أوجد قيم أ ، ب التي تجعل الدالة د حيث :

د(س) = $\begin{cases} س^٢ & س > ١ \\ أ س + ب & س \leq ١ \end{cases}$ **قابلة للاشتقاق عند س = ١**

الحـــــــــل

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د$(١)^+$ = د$(١)^-$ ∴ نها س ← ١ أ س + ب = نها س ← ١ $س^٢$

∴ أ + ب = ١ ----- (١)

، ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ دَ $(١)^+$ = دَ $(١)^-$

∴ نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) – د (أ)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) – د (١)}{هـ}$

∴ نها هـ ← ٠ (أ (١ + هـ) + ب - (أ + ب)) / هـ = نها هـ ← ٠ ((١ + هـ)^٢ - ١) / هـ

نها هـ ← ٠ (أ + أ هـ + ب - أ - ب) / هـ = نها هـ ← ٠ (١ + هـ^٢ + ٢ هـ - ١) / هـ

∴ نها هـ ← ٠ أ = نها هـ ← ٠ هـ + ٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في (١)

∴ ٢ + ب = ١ ∴ ب = -١

مثال : بين هل دالة القيمة المطلقة المعرفة بالمعادلة د(س) = | س | - قابلة للاشتقاق عند س = ٠ أم لا.

الحـــــل

د (س) = | س |

تعريف الدالة د(س) = { س ، س > ٠ ؛ - س ، س < ٠ }

د(٠) = ٠ ∈ ح

(د(٠ + هـ) - د(٠)) / هـ = د(هـ) / هـ

إذا كانت هـ > ٠

∴ د(هـ) / هـ = ١ ∴ دَ(٠)^+ = ١

∴ دَ(٠)^- ≠ دَ(٠)^+ ∴ غير قابلة للاشتقاق

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

(١) الدالة متصلة ⟵ قابلة للاشتقاق
⟵ غير قابلة للاشتقاق

(٢) الدالة غير متصلة ⟸ غير قابلة للاشتقاق

(٣) الدالة قابلة للاشتقاق ⟸ الدالة متصلة

(٤) الدالة غير قابلة للاشتقاق ⟵ متصلة
⟵ غير متصلة

بحث اتصال الدالة	بحث اشتقاق الدالة
(١) نوجد د (أ) (٢) $\lim_{س \to (أ)^+}$ د(س) النهاية اليمنى = م (٣) $\lim_{س \to (أ)^-}$ د(س)النهاية اليسرى = ن إذا كانت م = ن ∴ الدالة متصلة إذا كانت م ≠ ن الدالة ليست متصلة	(١) نوجد د (أ) (٢) نوجد $دَ(أ)^+$ $\lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ} = م$ (٣) نوجد $دَ(أ)^-$ $\lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ} = ك$ إذا كانت م = ك ∴ الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت م ≠ ك ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

ملاحظة :

إذا كانت م أ، ك = ∞ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق .

مثال: اثبت أن $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & س < ٣ \\ س - ٣ & س \geq ٣ \end{cases}$ **دالة متصلة عندما س = ٣ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندما س = ٣**

الحــــــــل

نبحث اتصال الدالة:

نها هـ←٣⁺ د(س) = س – ٣ = ٣ - ٣ = ٠ ----- (١)

نها هـ←٣⁻ د(س) = س - ٣ = ٣ – ٣ = ٠ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الدالة متصلة عند س = ٣

نبحث الاشتقاق :

د١ (س) = س – ٣ د١ (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د١ (٣ + هـ) = ٣ + هـ - ٣ = هـ

دَ١ (٣)⁺ = نها هـ←٠ [د(٣ + هـ) – د (٣)] / هـ = نها هـ←٠ (هـ - ٠) / هـ = ١

د٢ (س) = ٣ – س د٢ (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د٢ (٣ + هـ) = ٣ – (هـ + ٣) = ٣ – ٣ – هـ = - هـ

دَ٢ (٣)⁻ = نها هـ←٠ [د(٣ + هـ) – د (٣)] / هـ = نها هـ←٠ (- هـ) / هـ = - ١

∴ دَ١ (٣⁺) ≠ دَ٢ (٣⁻)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة و غير قابلة للاشتقاق

<u>مثال</u> : إذا كانت د(س) =

٣ - س^٢	س ≤ ٣
س - ٩	س > ٣

أثبت أن الدالة متصلة عند س = ٣ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٣

الحــــــــل

نبحث اتصال الدالة :

د١ (س) = ٣ – س^٢ ، د١ (٣) = ٣ – ٩ = - ٦

نها س←٣⁺ د(س) = ٣ – ٩ = - ٦

، د٢ (س) = س - ٩ ، د٢ (٣) = ٣ – ٩ = -٦

نها س←٣⁻ د(س) = ٣ – ٩ = - ٦

∴ نها $_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = نها $_{س \leftarrow ٣^-}$ د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٣

- **نبحث قابلية الدالة للاشتقاق :**

النهاية اليمنى للدالة :

د$_١$ (س) = ٣ - س^٢ ، د$_١$ (٣ + هـ) = ٣ – (٣ + هـ)^٢ = - ٦

د$_١$ (٣ + هـ) – د$_١$ (٣) = ٣ – (٩ + ٦ هـ + هـ^٢) + ٦ = - ٦ هـ - هـ^٢

$$\acute{د}(٣)^+ = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د_١(٣ + هـ) - د_١(٣)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ(-٦ - هـ)}{هـ} = -٦$$

النهاية اليسرى للدالة :

د$_٢$ (س) = س - ٩ ∴ د$_٢$ (٣) = ٣ – ٩ = - ٦

د$_٢$ (٣ + هـ) = ٣ + هـ - ٩ = هـ - ٦

$$\acute{د}(٣)^- = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د_٢(٣ + هـ) - د_٢(٣)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ}{هـ} = ١$$

∴ $\acute{د}_١$ (٣$^+$) ≠ $\acute{د}_٢$ (٣$^-$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

تمرين (٣)

(١٣)إذا كانت الدالة د حيث د(س) =
- ١ - $\frac{١}{٤}$ س عندما س ≥ ٢
- $\frac{أ}{س}$ عندما س >٢

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٢

(١٤)إذا كانت الدالة د حيث د (س) =
- س^{٢} + أ س- ١ عندما س > ٢
- ٥ عندما س = ٢
- أ + ب س عندما س < ٢

متصلة عند س =٢ فأوجد قيمة الثابتين أ ، ب ثم ادرس قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = ٢

(١٥)إذا كانت الدالة د حيث د (س) =
- س + أ عندما س > ١
- ٣- س عندما س ≥ ١

متصلة عند س =١ فأوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

(١٦) أوجد قيمة كل من أ ، ب التين تجعلان الدالة د حيث :

د (س) =
- س^{٢} - ١ عندما س > ١
- ٢ أ س + ب عندما س ≥ ١

قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٧) ابحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د المعرفة كالآتي :

د (س) =
- س^{٢} +١ عندما س ≥ ١
- س + ١ عندما س = ١

(١٨) أثبت أن الدالة : د (س) =
- س عندما س ≥ ١
- $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ عندما س >١

متصلة وقابلة للاشتقاق مرة واحدة فقط عند س = ١

(١٩) إذا كانت الدالة د المعرفة كالتالي:

د (س) = { س^{٣} عندما س < ١ ، أ س^{٢} + ب س + جـ عندما س ≥ ١ } قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ ،

فأوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ

(٢٠) إذا كانت د(س) = { ١ – (س-١)^{٢} عندما س ≥ ١ ، ١ + (س-١)^{٢} عندما س < ١ }

فابحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ١

(٢١)إذا كانت الدالة د : ح ← ح معرفة بالقاعدة

د (س) = { ٢ س^{٢}- ٣ عندما س ≥ ١ ، ٤ س- ٥ عندما س < ١ }

(٢٢) إذا كان د (س) = { $\frac{\text{س}^{٢}-\text{س}^{١}-٥\text{س}-٣}{\text{س}-٣}$ س ≠ ٣ ، أ س = ٣ }

فأوجد قيمة أ لتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٣ وأوجد معادلة العمودي للمنحنى

عند هذه النقطة .

الدالة الضمنية – الاشتقاق الضمنى

❖ الدوال الضمنية :

هي الدوال لتي تكون علي الصورة د (س، ص) = ٠

مثلاً : س^{٢} – ٣ س ص+ ٤ = ٠ ، س + جتا ص = (س+ ص)

العلاقات الضمنية :

$$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ \quad ، \quad \frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$$

ملاحظات :

بعض الدوال والعلاقات الضمنية يمكن جعلها صريحة .

مثال ذلك : س^{٢}+ ص^{٢} = ٢٥ ، ص^{٢} = ٢٥ – س^{٢} ∴ ص = ± $\sqrt{٢٥ – س^{٢}}$

والطريقة العملية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي:

هو تفاضل س ، ص معا ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ءص}{ءس}$ ثم استخلاص $\frac{ءص}{ءس}$ في الطرف الأيمن .

المشتقات العليا:

المشتقة الثانية يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ أ، دً (س) أ، صً

المشتقة الثالثة يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ أ، د‴ (س) أ، ص‴

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية : س^{٢} – ٢ سص + ٢ ص^{٢} = ٨

الحـــــل

$$٢س - (٢ \times ص + ٢ س \times \frac{ءص}{ءس}) + ٤ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

٢س – ٢ص – ٢س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ بالقسمة علي ٢

∴ س – ص – س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ص- س) = ص – س ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص - س}{٢ص - س}$

مثال: أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ من المعادلة : ص^{٢} + ٥ س ص + ٣ س^{٢} − ٧ = ٠

الحـــــل

ص^{٢} + ٥ س ص + ٣ س^{٢} − ٧ = ٠

٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٥ [س × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص × ١] + ٦ س = ٠

٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٥ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٥ ص + ٦ س = ٠

٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٥س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − (٥ ص + ٦ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ص + ٥ س) = − (٥ ص + ٦ س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-(\text{٥ ص + ٦س})}{(\text{٢ ص + ٥ س})}$

مثال : إذا كان ص^{٢} + ٣ س^{٢} = ٢س أثبت أن ص صَ + (صَ)^{٢} + ٣ = ٠

الحـــــل

٢ص صَ + ٦س = ٢ بالقسمة ÷ ٢

∴ ص صَ + ٣ س = ١ ∴ صَ × صَ + صَ × ص + ٣ = ٠

∴ (صَ)^{٢} + ص صَ + ٣ = ٠

مثال : إذا كان ٢ ص^{٣} = ٣ ص^{٢} أثبت أن : ص صَ + ٢ (صَ) ^{٢} = $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$

الحـــــل

٦ ص^{٢} = ٦ س بالقسمة ÷ ٦ ∴ ص^{٢} ص = س

∴ ٢ ص صَ × صَ + صَ × ص^{٢} = ١

٢ص (صَ)^{٢} + ص^{٢} (صَ)^{٢} = ١ بالقسمة ÷ ص

∴ ٢(صَ)^{٢} + ص صَ = $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$

<u>مثال</u>: إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٩ اثبت أن : ص^{٢} ص$''$ + ٩ = صفر

الحـــــــل

٢س + ٢ص ص$'$ = ٠   بالقسمة ÷ ٦   ∴ ص^{٢} ص$'$ = س

∴ ٢ ص ص$'$ × ص$'$ + ص$''$ × ص^{٢} = ٠   ∴ ١ + (ص$'$)^{٢} + ص ص$''$ = ٠

١ + ($\frac{-\text{س}}{\text{ص}}$)^{٢} + ص ص$''$ = ٠   ∴ ١ + $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$ + ص ص$''$ = ٠ بالضرب في ص^{٢}

∴ ص^{٢} + س^{٢} + ص^{٢} ص$''$ = صفر   ∴ ٩ + ص^{٢} ص$''$ = صفر

<u>مثال</u>: أوجد معادلتي المماس والعمودي : س٢ + ص٢ – ٤س + ٦ص – ٢٤ = ٠ عند (١،٣)

الحـــــــل

٢س + ٢ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ - ٤ + ٦ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ ٢ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٦ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٤- ٢س

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ (٢ص+٦) = ٤ - ٢ س

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{٤ – ٢س}}{\text{٢ص + ٦}}$ وعند النقطة (١،٣)

المماس	العمودى
م$_{١}$ = $\frac{\text{٤ – ٢}}{\text{٦ + ٦}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{١٢}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ ∴ (ص - ٣) = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ (س – ١)	م$_{٢}$ = - ٦ (ص- ٣) = -٦ (س-١)

مثال: إذا كان س ص = (س + ص)^{٢} فاثبت أن س صَ = ص

الحـــــــــل

س ص = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٠

(س- ص) (س٢+ س ص + ص٢) = ٠   ∴ (س- ص) = ٠

∴ س^{٣} = ص^{٣} ∴ ٣ س^{٢} = ٣ ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بالضرب × س

س^{٣} = س ص^{٢} ∴ ص^{٣} = س ص^{٢} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

∴ ص = س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ∴ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ص

مثال : إذا كانت ص = ٢ جا س – س جتا س – أثبت أن صً + ص = ٢ جا س

الحـــــــــل

ص= ٢جا س – س جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ جتا س – [(١) (جتا س) + (- جا س) (س)]

= ٢ جتا س – جتا س + س حا س = جتا س + س حا س

∴ صً = - حا س + [١× حا س + جتا س × س]

= - حا س + حا س + س حتا س = س حتا س

∴ صً + ص = س حتا س + ٢ حا س – س حتا س = ٢ حا س

مثال: إذا كانت ص = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ اثبت أن : س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

الحـــــــــل

ص = $\frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ ، ∵ س ص = جتا س

∴ ١× ص + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × س = - حا س   ∴ ص + س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + جا س = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + [١× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + صً × س] + جتا س = صفر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + س صً + حتا س = ٠   ∴ ٢ صَ + س صً + س ص = ٠

تمرين (٤)

(١) إذا كان س^{٢} + ص^{٢} − ٥ س + ٣ ص = ١٥ ، أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(٢) إذا كان س^{٢} + س ص − ص^{٢} = ٦ − أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة (٢،٣)

(٣) إذا كان ص = $\frac{١}{٥}$ س^{٥} + $\frac{١}{٥}$ س^{٤} − ٢س^{٣} + ٧س − ٥ − أوجد صً عندما س = -١

(٤) إذا كانت ص^{٢} = $\frac{٢}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، أثبت أن : $\frac{\text{٣ ص}^{٢}}{\text{س}}$ × صً + ص^{٦} = صفر (حيث س ≠ ٠)

(٥) إذا كانت ص = جـ (س − حـ)^{٢} حيث حـ مقدار ثابت فأثبت أن :

ص‴ − ٣س ص صً + ٨ ص^{٢} = صفر

(٦) إذا كان س ص = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان − أثبت أن : س صً + ٢ صَ = ٢ أ

(٧) إذا كانت ٢ ص^{٢} = ٣ س − أثبت أن : س صً + ٢ (صَ)^{٢} = $\frac{١}{\text{ص}}$

(٨) إذا كان ص $\sqrt{\text{١ + س}^{٢}}$ = ١ − أثبت أن: (١+س^{٢}) صً + ٣ س صَ + ص = ٠

(٩) أوجد إذا عرفت ص بالمعادلة :

٣ ص حا س + ٥ ص^{٢} جتا س − س^{٣} = صفر

(١٠) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى :

س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة ق (٢،٣)