## ثالثا: التفاضل والتكامل

### الباب الأول

### النهايـــات

## نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

لدراسة مفهوم النهايات ندرس المنحنى المعرف بالمعادلة ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ نجد أن المقدار غير معرف عندما س = ١ ولمحاولة رسم هذا المنحنى نأخذ قيم تقترب من ١

جهة اليمين ← ، → جهة اليسار

| س | ١,١ | ١,٠١ | ١,٠٠١ | ⇐ | ١ | ⇒ | ٠,٩٩٩ | ٠,٩٩ | ٠,٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | ⇐ | ٢ | ⇒ | ١,٩٩٩ | ١,٩٩ | ١,٩ |

من الجدول نجد أن كلما تقترب س من العدد (١) أكثر وأكثر يقترب المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ من العدد (٢) أكثر وأكثر ويعبر عن ذلك جبرياً بالآتي :

نها س ← ١ $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = ٢ ويقرأ نهاية المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عندما س تؤول إلى ١ هو ٢

**ملاحظات :**

١) نهاية دالة عند نقطة لا يعني قيمة الدالة عند هذه النقطة

مثلاً : د١ (س) = س + ٣ ، د٢ (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

، د٣ (س) = { $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣ ، ٧ عندما س = ٣ }

∴ نها د١ (س) = نها س ← ٣ (س + ٣) = ٦ ، د١ (س) = ٣ + ٣ = ٦

نها س ← ٣ د٢ (س) = ٦ ، د٢ (٣) = كمية غير معروفة

نها س ← ٣ د٣ (س) = ٦ د٣ (٣) = ٧

∴ نهاية د٢ (س) ، د٣ (س) عندما س ← ٣ لا تساوى د٢ ( ٣ ) ، د٣ ( ٣ ) .

٢) نهاية الدالة لها وجود عند نقطة ما إذا كان الاقتراب من اليمين واليسار يؤول إلي قيمة واحدة .

مثلاً : د (س) = { س+ ٣ عندما س ≤ ٣ ، ٢س - ١ عندما س ≥ ٣ }

**نلاحظ** : كلما أقتربت س من العدد ٣ من جهة اليسار أقتربت الدالة من العدد ٥ وكلما أقتربت من العدد ٣ من جهة اليمين كلما أقتربت من العدد ٦ .

∴ كلما تقترب س حول العدد ٣ تقترب الدلة من قيمتين مختلفتين هما ٥، ٦

∴ نهاية الدالة عندما س تؤول إلي ٣ ليس لها وجود .

**الخلاصة** : إذا كان

د (س) = { ق( س) عندما س > ١ ، ق( س) عندما س < ١ }

**فـإن** : نهاية الدالة التي علي يمين أ تكتب د ( أ )$^{+}$ ∴ د( أ )$^{+}$ = نها س ← أ ق( س)

، نهاية الدالة التي علي يسار أ تكتب د( أ )$^{-}$ ∴ د( أ )$^{-}$ = نها س ← أ ك( س)

وإذا كان د( أ )$^{+}$ = د( أ )$^{-}$ = ل فإن الدالة لها نهاية عند س = أ

∴ نها س ← أ د( س) = ل

**مثال:** أبحث وجود نهاية د(س) = { س$^{٢}$-٢ عندما س> ٢ ، ٥س - ٤ عندما س <٢ } عندما س = ٢

**الحـــــــــل**

النهاية اليمني د(٢) $^{+}$ = نها س ← ٢ ٥ س- ٤ = ١٠ – ٤ = ٦

النهاية اليسري د (٢)$^{-}$ = نها س ← ٢ س$^{٢}$-٢ = ٨ – ٢ = ٦

∴ د(٢)$^{+}$ = د (٢)$^{-}$ = ٦

∴ نها س ← ٢ د( س) = ٦



openkanar.com

**مثال:** إذا كان د ( س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢ س - ٢}{س^{٢} - ١} & \text{عندما س} < ٢ \\ ٢س - ١ & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ - أوجد نهـا س ← ١ د( س)

**الحـــــــــل**

د (١)$^{+}$ = نهـا س ← ١ $\frac{س^{٢} + ٢ س - ٢}{س^{٢} - ١}$ = نهـا س ← ٢ $\frac{(س-١)(س+٢)}{(س-١)(س+١)}$

= نهـا س ← ١ $\frac{(س + ٣)}{(س+ ١)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

، د (١) = نهـا س ← ١ ٢ س – ١ = ٣ - ١ = ٢

∴ د ( ١)$^{+}$ = د (١)$^{-}$ = ٢

**مثال:** إذا كان د ( س) = $\begin{cases} \frac{حا ٤س}{س} & \text{عندما س} < ٠ \\ ٢ + حتا٢س & \text{عندما س} > ٠ \end{cases}$ - أوجد نهـا س ← ٠ د( س)

**الحـــــــــل**

د (٠)$^{+}$ = نهـا س ← ٠ $\frac{حا ٤س}{س}$ = ٤

د (٠)$^{-}$ = نهـا س ← ٠ ٢ + حتا ٣ س = ٣ + حتا٠ = ٣ + ١ = ٤

د (٠)$^{+}$ = د (٠)$^{-}$ = ٤

∴ نهـا س ← ٠ د( س) = ٤

**مثال:** إذا كان د ( س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & -١ < س < ٢ \\ ٢ س - ١ & ٢ \geq س < ٥ \\ س + ٤ & ٥ \geq س > ٢ \end{cases}$

**أبحث وجود:** ١) نهـا س ← ١٠ د(س) ٢) نهـا س ← ٢ د(س)

٣) نهـا س ← ٥ د(س) ٤) نهـا س ← ٧ د(س)

**الحـــــــــل**

(١) نهـا س ← ١٠ د(س) = نهـا س$^{٢}$ + ١ = ١ + ١ = ٢

(٢) د(٢)$^{+}$ = نهـا س ← ٢ ١٠ - ٦ = ١ = ٥



obeikandl.com

د (٢)$^-$ = نها$_{س \to ٢}$ س$^٢$ + ١ = ٤ + ١ = ٥

∴ د (٢)$^+$ = د (٢)$^-$ = ٥ ∴ نها$_{س \to ٢}$ د(س) = ٥

(٣) د( ٥ )$^+$ = نها$_{س \to ٥}$ س + ٤ = ٥ + ٤ = ٩

د( ٥ )$^-$ = نها$_{س \to ٥}$ ٣س - ١ = ١٥ - ١ = ١٤

∵ د ( ٥)$^+$ ≠ د( ٥)$^-$

∴ نها$_{س \to ٥}$ د(س) ليس لها وجود

(٤) نها$_{س \to ٧}$ د(س) = نها$_{س \to ٧}$ س + ٤ = ٧ + ٤ = ١١

**مثال: إذا كان د(س) =** $\begin{cases} \frac{٩س - حا٥س}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٣ + حتا٢س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ **عند س = ٠**

**الحـــــــل**

د(٠)$^-$ = نها$_{س \to ٠}$ $\frac{٩س}{س}$ - ٥ نها$_{س \to ٠}$ $\frac{جا ٥س}{٥س}$ = ٩ - ٥×١ = ٤

د(٠)$^+$ = نها$_{س \to ٠}$ ٣ + حتا ٢س = ٣ + ١ = ٤ = د(٠)$^-$

∴ نها$_{س \to ٠}$ د( س) = ٤

**مثال :** د(س) = $\begin{cases} ٣ - ٢حاس & \text{عندما } س < ط \\ \frac{جتا س}{(ط - س)} & \text{عندما } س > ط \end{cases}$ **عند س =** $\frac{ط}{٢}$

**الحـــــــل**

د( $\frac{ط}{٢}$ )$^-$ = نها$_{س \to ط}$ ٣ - ٢ حا س = ٣ - ٢ × ١

، د( $\frac{ط}{٢}$ )$^+$ = نها$_{س \to ط}$ $\frac{حا(ط - س)}{(ط - س)}$ = ١ = د( $\frac{ط}{٢}$ )$^-$

∴ نها$_{س \to ط}$ د( س) = ١

obeikandl.com

# تمرين (١)

(١) إذا كان: د(س) = { س+٢ عندما س< ١ ؛ ٣ عندما س > ١ } فأوجد نهاس ← ١ د(س)

(٢) إذا كان: د(س) = { س٢+٢ عندما س< -٢ ؛ ٢س+ ٣ عندما س > -٢ } فأوجد نهاس ← -٢ د(س)

(٣) إذا كان: د(س) = { ٤س-١ عندما س< ١ ؛ ٣ عندما س > ١ } فأوجد نهاس ← ١ د(س)

(٤) إذا كان: د(س) = { س٢-٣ عندما س ≥ ٢ ؛ ٣ عندما س > ٢ } فأوجد نهاس ← ٢ د(س)

(٥) إذا كان: د(س) = { ٤س-١ عندما س ≠ ١ ؛ ٣ عندما س = ١ }

(٦) إذا كان: د(س) = { -١ س < صفر ؛ صفر س= ٠ ؛ ١ س > ٠ }

(٧) ناقش نهاية الدالة الحقيقية عند أي نقطة في نطاقها

د(س) = { س٢ -١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٢س +١ ٢< س < ٣ ؛ ٣ س = ٣ ؛ ٧ ٣< س< ٥ ؛ ١٢-س ٥ ≤ س ≤ ٧ }

(٨) إذا كان : د(س) = $\frac{\text{حا}(س - ٣)^{٢}}{|س - ٣|}$ عند س =٣

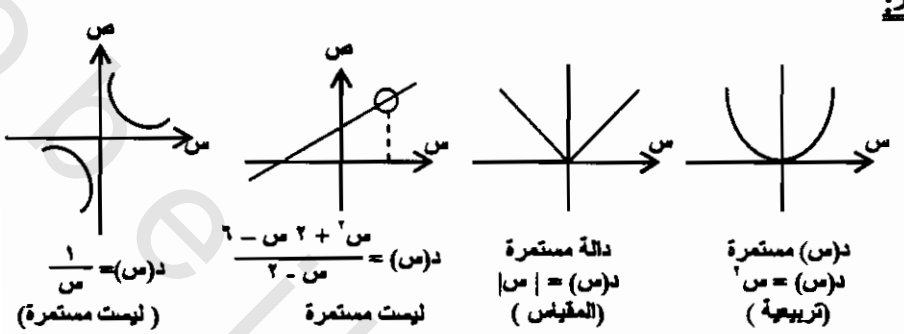
(٩) إذا كان : د(س) = { $\frac{\text{طاس- ٥ س}}{\text{٣س+ حا س}}$ عندما س<٠ ؛ ٣س- ١ عندما س>٠ } عند س = ٠

(١٠) إذا كان : د(س) = { ٥- ٢س عندما -١< س< ٢ ؛ $\frac{١٣}{\text{٣س - ٧}}$ عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

# الدوال المتصلة ( المستمرة )

**الدوال المستمرة أو المتصلة : هي التي شكلها البياني ليس به قفزات أو فراغات.**

**مثلاً:**




**مثال توضيحي :**

**إذا كانت د(س) = س٣ – ٣س٢ + ٥ س+ ٤ إبحث اتصال هذه الدالة عندما س = ٢**

**الحـــــــل**

١- نوجد د(٢) = ٨ – ١٢ + ١٠ + ٤ = ١٠

٢- نوجد نهاس ← ٢ د(س) = (٢)٣ – ٣ (٢)٢ + ٥ × ٢ + ٤ = ١٠

نلاحظ أن نهاس ← ٢ د(س) = د(٢) ∴ الدالة المتصلة عند س = ٢

## ❖ شروط اتصال الدالة :

١- د(س) معرفة عند س = أ

بمعني أن أ ∈ نطاق الدالة أو د ( أ ) لها وجود .

٢- د(س) لها نهاية محدودة عند س = أ

أي نهاس ← ا+ د(س) = نهاس ← ا- د(س)

٣- نهاس ← ا د( س ) = د ( أ )

## ❖ خطوات بحث استمرارية ( اتصال ) الدالة :-

١- نوجد د ( أ ) .

٢- نوجد النهاية اليمنى للدالة نهاس ← ا+ د(س) .

٣- نوجد النهاية اليسرى للدالة نهاس ← ا- د(س)

إذا كانت نهاس ← أ$^{+}$ د(س) = نهاس ← أ$^{-}$ د(س) = د ( أ )

فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

**مثال:** ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:-

أ) د( س ) = ١٥ عندما س = أ

ب) د( س ) = س$^{٢}$ − ٣ س + ٥ عندما س = ١

ج) د( س ) = جتا س عندما س = أ

د) د( س ) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ عندما س = ١

**الحـــــــل**

( أ ) د(س) = ١٠ عند س = أ ∴ د ( أ ) = ١٠

∴ نهاس ← أ د(س) = ١٠

∴ د ( أ ) = نهاس ← أ د( س) = ١٠ ∴ الدالة متصلة.

(ب) د ( س ) = س$^{٢}$ − ٣ س + ٥ عند س = ١

د ( ١) = ١ − ٣ + ٥ = ٣

نهاس ← ١ د(س) = ١ − ٣ + ٥ = ٣

∴ د (١) = نهاس ← ١ د(س) = ٣ ∴ الدالة متصلة

(ج) د(س) = جتا س

د ( أ ) = جتا أ

، نهاس ← أ د(س) = جتا أ

∴ د ( أ ) = نهاس ← أ د(س) = جتا أ ∴ الدالة متصلة

(ء) د ( س ) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ عند س = ٥

د( ٥ ) = $\sqrt{٥ - ٣}$ = $\sqrt{٢}$

، نهاس ← ٥ $\sqrt{\text{س} - ٣}$ = $\sqrt{٢}$

∴ د ( أ ) = نهاس ← ٥ د ( س ) = $\sqrt{٢}$ ∴ الدالة متصلة

❖ **ملاحظة : من الدوال المتصلة :-**



obeikandl.com

د( س) = $\sqrt{س}$ متصل لكل س ، ٠ ، د ( س ) = طا س متصل لكل س - T + ن T ، س$^{ن}$

متصل في ح ، المقادير التي تحتوى علي بسط ومقام يكون متصلاً في ح عدا عند أصفار المقام .

□ **متي تكون الدالة غير متصلة ؟**

(١) إذا كانت / ح فإن الدالة غير معرفة .

مثلاً : د(س) = $\sqrt{س - ٥}$ عندما س = ٢

د ( ٢ ) = $\sqrt{٢ - ٥}$ = $\sqrt{-٣}$ / ح غير معرفة .

(٢) إذا كانت الدالة ليس لها نهاية عندما س = أ

مثلاً : نهاس$_{٢}$ $\frac{٣}{س - ٢}$ = $\frac{٣}{٠}$ ليس لها وجود الدالة غير متصلة .

(٣) إذا كانت د ( أ ) نهاس$_{أ}$ د ( س )

(٤) إذا كانت نهاس$_{أ}^{+}$ د ( س ) نهاس$_{أ}^{-}$ د ( س )

(٥) إذا كان للدالة نهاية يمنى فقط أو يسرى فقط .

**مثال** : ناقش اتصال الدالة عند س = ٠ حيث د ( س ) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & س \ ٠ \\ ٥ & س = ٠ \end{cases}$

الحـــــــل

نهاس$_{٠}^{+}$ د(س) = ( ٠ )$^{٢}$ + ٢ = ٢ ، نهاس$_{٠}^{-}$ د ( س ) = س$^{٢}$ + ٢ = ٠ + ٢ = ٢

ولكن د ( ٠ ) = ٥ من الفرض الدالة غير متصلة لأن نهاس$_{٠}$ د(س) = د( ٠ )

**مثال** : ناقش اتصال الدالة عند س = -١ حيث د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ٢ & س < -١ \\ ٣ س \end{cases}$

الحـــــــل

نهاس$_{-١}^{-}$ د ( س ) = نهاس$_{-١}^{-}$ س$^{٢}$ + س + ٢ = ( -١)$^{٢}$ + ( -١) + ٢ = ٢

نهاس$_{-١}^{+}$ د ( س ) = نهاس$_{-١}^{+}$ ٣ س = ٣ × -١

نهاس$_{أ}^{+}$ د(س) نهاس$_{أ}^{-}$ د(س) الدالة ليست متصلة .

**مثال** : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{١}{٢}$ د (س) = $\begin{cases} -س + \frac{٣}{٢} & س > \frac{١}{٢} \\ ٣ س & \frac{١}{٢} \end{cases}$ حيث س



obeikandl.com

**مثال** : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{1}{2}$ د (س) = $\begin{cases} -س + \frac{3}{2} & \text{حيث س} < \frac{1}{2} \\ 3س & س \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

**الحـــــــــل**

د$_1$(س) = $-س + \frac{3}{2}$ ‖ د$_2$(س) = $\frac{1}{س}$

د$_1$($\frac{1}{2}$) = $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ ‖ د$_2$($\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

نهاس ← $\frac{1}{2}^-$ د$_1$(س) = $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ ‖ نهاس ← $\frac{1}{2}^+$ د$_2$(س) = $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

∴ نهاس ← $(\frac{1}{2})^-$ د$_1$(س) ≠ نهاس ← $(\frac{1}{2})^+$ د$_2$(س)

∴ الدالة ليست متصلة ( مستمرة )

**مثال**: ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ د (س) = $\begin{cases} \frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9} & س \neq 3 \\ \frac{13}{6} & س = 3 \end{cases}$

**الحـــــــــل**

نهاس ← ٣ د(س) = $\frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9}$

= $\frac{(س-3)(س+7)}{(س-3)(س+3)} = \frac{6+7}{3+3} = \frac{13}{6}$ ---- (١)

∵ د (٣) = $\frac{13}{6}$ ----- (٢)

∴ نهاس ← ٣ د(س) ≠ د (٣) ∴ الدالة ليست مستمرة .

**مثال**: ابحث اتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} 2س + \frac{3}{2} & \text{عندما س} \geq 1 \\ \frac{3}{س-1} & 1 < س < 3 \\ س^2 - 5 & \text{عندما س} \leq 3 \end{cases}$

**الحـــــــــل**

عند س = ١ : د$_1$ (س) = ٢س + $\frac{3}{2}$

د$_1$ (١) = ٢ + $\frac{3}{2}$ = $\frac{7}{4}$

نهـا د(س) = نهـا ٢س + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٧}{٤}$

نهـا د(س) = نهـا $\frac{٣}{س - ١}$ = $\frac{٣}{٠}$ = ∞

∴ لا يوجد للدالة نهاية عند س = (١)$^{+}$ ∴ الدالة غير مستمرة

عند س = ٣ د(س) = $\frac{٣}{س - ١}$

د(٣) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

نهـا د(س) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، ∵ د(س) = س$^{٢}$ − ٥

، نهـا د(س) = ٩ − ٥ = ٤

∴ نهـا د(س) ≠ نهـا د(س) ∴ الدالة ليست مستمرة .

## ❖ كيفية إزالة عدم اتصال الدالة عند نقطة معينة :-

**مثلاً** : د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ س ≠ ٢

١) نزيل العامل المسبب للصفر من البسط والمقام.

د(س) = $\frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س+٣)}$ = $\frac{س+٢}{س+٣}$ ... (١)

٢) نعوض في الناتج من الخطوة السابقة س = ٢

∴ د(٢) = $\frac{٢ + ٢}{٣ + ٢}$ = $\frac{٤}{٥}$

٣) نضع الدالة ع(س) معرفة بأكثر من قاعدة

∴ ع(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦} & س \neq ٢ \\ \frac{٤}{٥} & س = ٢ \end{cases}$

**مثال** : أعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المعينة حتى تكون متصلة

$$د(س) = \frac{٢س^{٢} + س - ١}{س + ١} \quad س = -١$$

**الحـــــــــل**

$$د(س) = \frac{٢س^{٢} + س - ١}{س + ١} \quad س = -١$$

$$= \frac{(س+١)(٢س-١)}{س + ١} = ٢س - ١$$

بوضع س = -١ ∴ د(س) = ٢ × -١ - ١ = -٣

$$\therefore ع(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} + س - ١}{س + ١} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$$

**مثال**: إذا كانت $ع(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$

**الحـــــــــل**

$$د(س) = \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س}$$ بضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\therefore د(س) = \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} \times \frac{\sqrt{٤ + س} + ٢}{\sqrt{٤ + س} + ٢} = \frac{(٤ + س) - ٤}{(س)(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

$$= \frac{س}{س[\sqrt{٤ + س} + ٢]}$$ بوضع س = ٠

$$\therefore د(٠) = \frac{١}{\sqrt{٤ + ٠} + ٢} = \frac{١}{٤} = أ$$

$$\therefore ع(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} & عند\ س \neq ٠ \\ \frac{١}{٤} & س = ٠ \end{cases}$$

obeikandl.com

**مثال:** إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} 1 - \frac{1}{4} س & \text{عندما س} \geq ٢ \\ \frac{أ}{س} & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$ متصلة عند س= ٢

فأوجد قيمة الثابت أ

**الحـــــــــل**

∵ الدالة متصلة

∴ نهاس← (٢)⁻ د(س) = نهاس← (٢)⁺ د(س)

، ∵ نها د٢(س) = نهاس← (٢)⁺ $\frac{أ}{س}$ = ٢

، نها د١ (س) = نهاس← (٢)⁻ $1 - \frac{1}{4} س = 1 - \frac{1}{4} \times ٢ = \frac{1}{٢}$

∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{1}{٢}$ ∴ أ = ١

**مثال:** إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{1}{س} (٢ جتا^{٢} \frac{٢ط - ٦ س}{4} - 1) & س \neq ٠ \\ ك + ٢ & س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة ك لتكوين الدالة متصلة عند س = ٠

**الحـــــــــل**

نهاس← ٠ د(س) = نهاس← ٠ $\frac{٢ جتا^{٢} \frac{ط - ٦ س}{4} - 1}{س}$

∵ ٢ جتا^٢ أ ـ ١ = جتا ٢ أ

∴ ٢ جتا^٢ $\frac{ط - ٦ س}{4}$ ـ ١ = جتا ٢ × $\frac{ط - ٦ س}{4}$ = جتا $\frac{ط - ٦ س}{٢}$

∴ نهاس← ٠ $\frac{جتا \frac{ط - ٦ س}{٢}}{س}$ = نهاس← ٠ $\frac{جتا \frac{ط}{٢} - \frac{٦ س}{٢}}{س}$

∴ نهاس← ٠ $\frac{جتا (٩٠ - ٣س)}{س}$ = نهاس← ٠ $\frac{جا ٣س}{س}$ = ٣

∴ لكى تكون الدالة متصلة عند س = صفر

فإن د(٠) = نها د(س) ∴ ك + ٢ = ٣ ∴ ك = ١



obeikandl.com

# تمرين (٢)

(١) إذا كان: د(س) = { س$^{٢}$ − س + ٢ ، س ≥ ١ ؛ ٢ س ، س < ١ } ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ١

(٢) ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ د (س) = { $\frac{|س^{٢} - ٧س + ١٢|}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣ ؛ ١ ، س = ٣ }

(٣) إذا كانت د(س) = { $\frac{س^{٢} + س}{س^{٢} + ١}$ ، س ≠ −١ ؛ ك ، س = −١ }

أوجد قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = −١

(٤) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٣ د(س) = { $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣ ؛ ك ، س = ٣ }

(٥) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٤ د(س) = { $\frac{\sqrt{٢٧س + ١} - ٣}{س - ٤}$ ، س ≠ ٤ ؛ $\frac{١}{٣}$ ، س = ٤ }

(٦) أوجد قيمة ك بحيث تكون د متصلة عند النقطة س = ٢

د (س) = { $\frac{س^{٢} - ٤}{٢س - ٤}$ ، س ≠ ٢ ؛ ك ، س = ٢ }

(٧) إذا كانت د(س) = { س$^{٢}$ ، س ≥ ٢ ؛ أ س + ٢ ، س < ٢ } أوجد قيمة أ لكى تكون د(س) متصلة عند س = ٢

(٨) ابحث اتصال الدالتين د(س) = $\frac{س^{٢}}{|س|}$ عند س = ٠ ، د(س) = س$^{٢}$ − |س| عند س = ٠

(٩) أوجد قيمة الثوابت أ ، ب إذا علم أن الدالة :

د (س) = { س$^{٢}$ + ب س + ٣ ، س > ١ ؛ أ س + ب ، س ≤ ١ } متصلة عند س = ١ وكان د(١) = ٧

(١٠) ابحث اتصال الدالة:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ٢ & ، س \geq ٣ \\ ٢ & ، ٣ > س \geq ١ \\ ٦ - س & ، س < ٤ \end{cases}$$

(١١) أوجد قيمة الثابت م إذا علم أن الدالة :

$$د(س) = \frac{س^{٧} - م^{٧}}{س^{٣} - م^{٣}}$$ متصلة عند س = م ، وكانت $د(م) = \frac{٢٨}{٣}$

(١٢) ابحث اتصال الدالة:

$$د(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} + ٥س + ٤}$$ عند س = -١

obeikandl.com