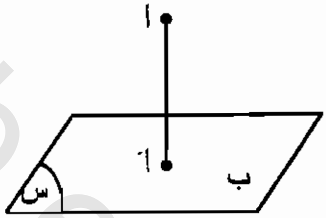
الإسقــاط العمــودي

مسقط نقطة :



إذا كان أ نقطة واقعة خارج المستوي س وكانت النقطة أَ هي موقع العمود الساقط من النقطة أ علي المستوي س فإن النقطة أَ هي المسقط العمودي للنقطة أ علي المستوى س .

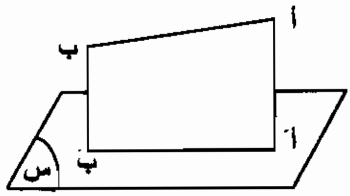
∴ أَ هي مسقط أ علي المستوي س .

إذا كانت ب **نقطة ∈ المستوي س** فإن مسقطها علي المستوي س هو نفس النقطة ب .

تعريف :

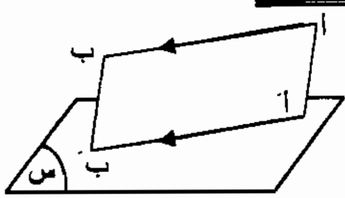
المسـقط العمـودي لنقطـة معلومـة علـي مسـتوي معلـوم هـو موقـع القطعـة المسـتقيمة العموديـة المرسومة من النقطة علي ذلك المستوى.

مسقط قطعة مستقيمة علي مستوي معلوم :



- إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة ، س مستوى معلوم ، أ ب لا تقع في المستوى س . وكانت أَ مسقط أ علي المستوى س ، بَ مسقط ب علي المستوى س فإن أَ بَ تسمي مسقط أ ب علي المستوى س.

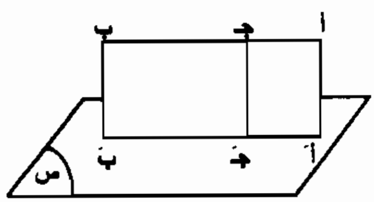
مسقط قطعة مستقيمة علي مستوي في أوضاع مختلفة :-



(١) إذا كانت أ ب // المستوي س

∴ مسقطها أَ بَ // أ ب

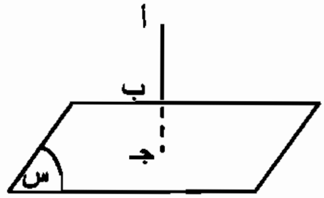
، أَ بَ = أ ب



(٢) إذا كانت جـ ∈ أ ب ، أَ بَ هو مسقط أ ب علي المستوي س فإن : جـَ مسقط جـ ∈ أَ بَ

(٣) إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي س فإن :

مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ على المستوي هو النقطة أَ



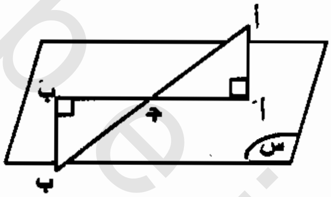
(٤) إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ س = { جـ }

فإن $\overline{\text{أَ بَ}}$ مسقط $\overline{\text{أ ب}}$ يمر بالنقطة جـ

حيث $\overline{\text{أَ جـ}}$ مسقط $\overline{\text{أ جـ}}$ على س

$\overline{\text{جـ بَ}}$ مسقط $\overline{\text{جـ ب}}$ على س

∴ $\overline{\text{أَ جـ بَ}}$ مسقط $\overline{\text{أ جـ ب}}$ على س



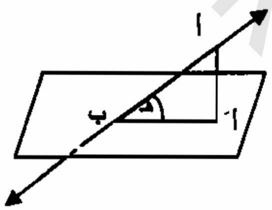
الزاوية بين مستقيم ومستوى :-

هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين

ومسقطه على ذلك المستوي .

ويطلق عليها زاوية ميل المستقيم على المستوي .

من الرسم : أَ ب مسقط أ ب على س



- ∠ أ ب أَ هي الزاوية المحصورة بين أ ب ، س حيث ق (∠ أ ب أَ) = هـ تسمي زاوية ميل المستقيم على المستوي س

، جتا هـ = $\frac{\text{أَ ب}}{\text{أ ب}}$ ← أَ بَ = أ ب جتا هـ

∴ **طول المسقط = طول المستقيم × جتا زاوية ميلها على المستوى .**

ملاحظة :

يوجد تناسب عكس بين المستيم ومسقطه على المستوي حيث تتزايد أو تتناقص هـ فتتناقص أو تتزايد (على الترتيب) طول القطعة التي هى مسقط على س حيث : هـ ∈ [٠ ، ٩٠]

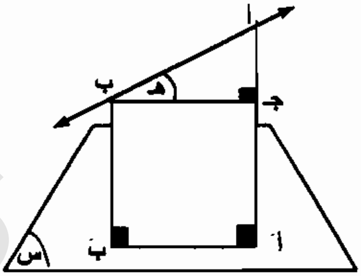
فعندما هـ = صفر ← أَ ب = أ ب (المستقيم يوازي المستوي)

وعندما هـ = ٩٠ ← أَ ب = صفر (المستقيم عمودي على المستوي)

وعندما ٠ < هـ < ٩٠ ← أَ ب < أ ب

∴ طول مسقط القطعة المستقيمة على مستوى يكون أصغر من أو يساوي طول هذه القطعة المستقيمة .

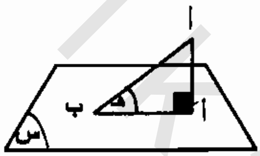
<u>والأشكال الآتية توضح ذلك: -</u>



(١) إذا لم تشترك القطعة المستقيمة أ ب مع المستوي س في أي نقطة فإن مسقط أ ب علي المستوي س هو أَ بَ

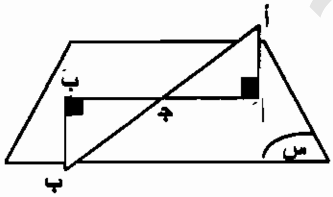
، نرسم ب جـ // بَ أَ ويقطع أ أَ في جـ

∴ ب جـ = بَ أَ ، ∠ أ ب جـ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س ، ب جـ < ب أ



(٢) إذا اشتركت القطعة المستقيمة أ ب مع المستوي س في نقطة ب .

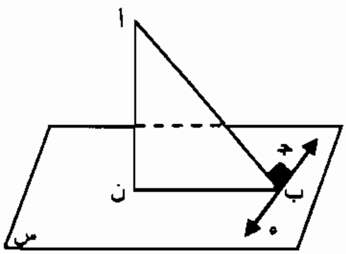
∴ ∠ أ ب أَ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س ، أَ ب < أ ب



(٣) إذا قطعت القطعة المستقيمة أ ب المستوي س في نقطة جـ فتكون ∠ أ جـ أَ هي زاوية ميل أ ب علي المستوي س.

<u>نظرية :</u>

▪ **إذا رسم مستقيم مائل علي مستو وكان عموديا علي مستقيم في المستوي فإن مسقطه علي المستوي يكون عموديا علي مستقيم المستوي .**



معطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مائل علي س ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$: $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \subset$ س ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ س .

المطلوب : $\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ مسقط $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ علي س يكون عموديا علي $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp$ س ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ أي $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ن}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}} \Leftarrow \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ المستوي أ ب ن

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ أي $\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ مسقط $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

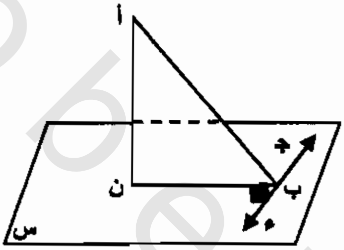
عكس النظرية :

▪إذا رسم مستقيم مائل علي مستو وكان مسقطه علي المستوي عمودياً علي مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً علي ذلك المستقيم .

معطيات : أ ب مائل علي المستوى س ، أ ن ⊥ س

ن ب ⊥ جـ ء الواقع في س

المطلوب : أ ب ⊥ جـ ء



البرهان : أ ن ⊥ س ⇐ أ ب ⊥ جـ ء

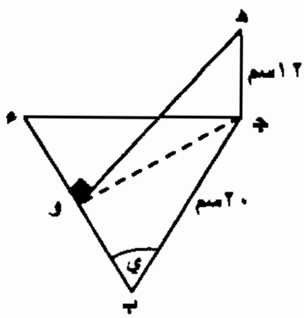
⇐ جـ ء ⊥ أ ب ولكن جـ ء ⊥ ب ن

⇐ جـ ء ⊥ المستوي أ ب ن

⇐ جـ ء ⊥ أ ب ومنه أ ب ⊥ جـ ء

مثال: ب جـ ، ب ء مستقيمان متقاطعان في ب ، ق (< جـ ب ء) = ى حيث جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ، ب جـ = ٢٠ سم . رسم من جـ العمود جـ هـ علي المستوي ب جـ ء حيث جـ هـ = ١٢ سم ثم رسم من هـ العمود هـ و علي ب ء قابله في و – أوجد طول هـ و .

المعطيات : جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ، جـ هـ ⊥ المستوى ب جـ ء



المطلوب : إيجاد طول جـ و

العمل: نرسم جـ و

البرهان:

هـ و مائل علي المستوي ب جـ ء وعمودي علي ب ء

∴ مسقطه جـ و ⊥ ب ء أي أن ق(< ب و جـ) = ٩٠ °

في Δ ب جـ و القائم الزاوية في و :

∵ $\frac{\text{جـ و}}{\text{ب جـ}}$ = جا ى ∴ $\frac{\text{جـ و}}{٢٠}$ = $\frac{٤}{٥}$ ∴ جـ و = ١٦ سم

∵ جـ هـ ⊥ المستوى ب جـ ء ∴ هـ جـ ⊥ جـ و

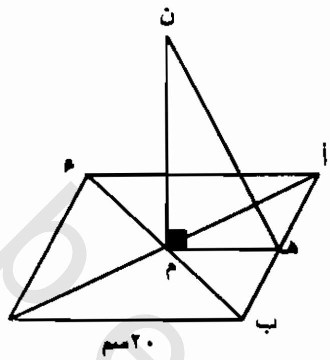
∴ Δ هـ جـ و قائم الزاوية في جـ ∴ (هـ و)^٢ = (هـ جـ)^٢ + (جـ و)^٢

∴ (هـ و)^٢ = (١٢)^٢ +(١٦)^٢ = ٤٠٠ ∴ هـ و =$\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

مثال : أ ب جـ ء مربع مركزه م وطول ضلعه ٢٠ سم ، هـ منتصف أ ب ، رسم م ن ⊥ مستوي

المربع بحيث كان م ن = ١٠ ٧ سم – أثبت أن ن هـ ⊥ أ ب ، و طول أ ن .

العمل: نرسم م هـ



البرهان: ∵ م مركز المربع ، هـ منتصف أ ب

∴ م هـ ⊥ أ ب

∵ ن هـ مائلة علي المستوي أ ب جـ ء مسقطها م هـ ⊥ أ ب

∴ ن هـ ⊥ أ ب (عكس نظرية ٤)

∵ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} ∴ أ جـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

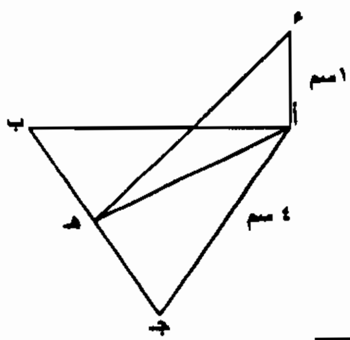
∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

∵ ن م ⊥ أ م ∴ (ن أ)^{٢} = (م ن)^{٢} + (أ م)^{٢}

∴ ن أ = ٣٠ سم

مثال: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤سم - رسم أ ء ⊥ المستوي أ ب جـ حيث أ ء = ١ سم ثم فرضت هـ ∋ ب جـ حيث ب هـ = ١,٨ سم - أثبت أن ء هـ ⊥ ب جـ واحسب طول ء هـ .

العمل : نرسم أ هـ



البرهان : ∵ ق (ب أ جـ) = ٩٠° ، ∴ ب جـ = ٥ سم

∴ ب هـ × ب جـ = ١,٨ × ٥ = ٩ ، (أ ب)^{٢} = ٩

∴ (أ ب)^{٢} = ب هـ . ب جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$ ، <ب مشتركة

∴ Δ ب أ جـ ≈ Δ ب هـ أ

∴ ق (<ب هـ أ) = ق (ب أ جـ) ∴ أ هـ ⊥ ب جـ

∵ ء هـ مائلة علي المستوي أ ب جـ

∴ مسقطها أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ء هـ ⊥ ب جـ ، جـ هـ = ٣,٢ سم ، أ هـ = ٢,٤ سم ، ء هـ = ٢,٦ سم

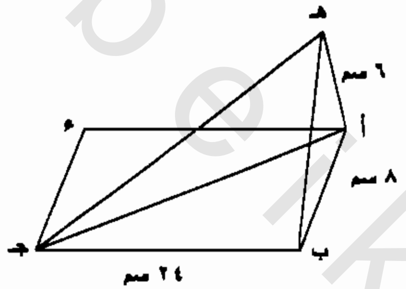
مثال: أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٢٤ سم رسم من أ العمود أ هـ علي

مستوي المستطيل بحيث أ هـ = ٦ سم. احسب **أولاً** : مساحة سطح Δ جـ هـ ب **ثانياً**: طول هـ جـ

البرهـــــان

هـ ب مائل علي المستوي أ ب جـ ء ، مسقطه أ ب ⊥ ب جـ الواقع في المستوي أ ب جـ ء

∴ المائل هـ ب ⊥ ب جـ أي أن ق (< هـ ب جـ) = ٩٠°



∵ Δ أ ب هـ قائم الزاوية في أ

∴ (ب هـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ هـ)^2 = ٦٤+ ٣٦ = ١٠٠

∴ ب هـ = ١٠ سم

∵ Δ جـ هـ ب قائم الزاوية في ب

∴ مساحة سطح Δ جـ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × هـ ب

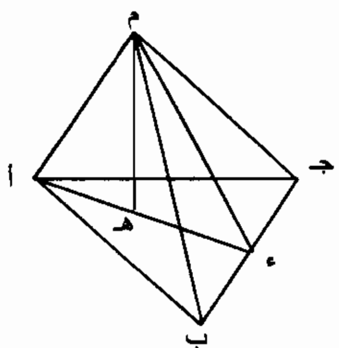
= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ١٠ = ١٢٠ سم^2

∵ (هـ جـ)^2 = (هـ ب)^2 + (ب جـ)^2 = ١٠٠ + ٥٧٦ = ٦٧٦

∴ هـ جـ = ٢٦ سم

مثال: م أ ، م ب ، م جـ ثلاث قطع مستقيمة غير مستوية ومتعامدة مثنى مثنى رسمت م هـ ⊥ المستوي أ ب جـ تقابله في هـ فإذا قطع أ هـ الضلع ب جـ في ء. اثبت أن م أ ⊥ المستوي م ب جـ وأن م ء ⊥ ب جـ ثم أثبت أن (م هـ)^2 = أ هـ . هـ ء

البرهـــــان



∵ م أ ⊥ كل من م ب ، م جـ

∴ م أ ⊥ المستوي م ب جـ

∵ م أ ⊥ أي مستقيم في المستوى م ب جـ

∴ م أ ⊥ ب جـ

، م أ ⊥ م ء ∴ م هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ م هـ ⊥ ب جـ

∵ ب جـ ⊥ كل من م أ ، م هـ

∴ ب جـ ⊥ أ هـ

∴ ب جـ ⊥ المستوى م أ هـ

∴ ب جـ ⊥ أ ء

∵ ب جـ عمودي علي كل من م أ ، أ ء

∴ ب جـ ⊥ المستوي م أ ء فيكون عمودياً علي مستقيم فيه

∴ ب جـ ⊥ م ء

∴ م هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

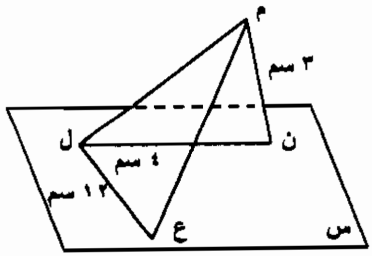
∴ م هـ ⊥ م ء

حيث أن Δ أ م ء فيه ق (< أ م ء) = ٩٠ ° ، م هـ ⊥ أ ء

∴ (م هـ)^2 = أ هـ . هـ ء

<u>مثال</u> : س مستوى ، م نقطة ∉ س ، رسمت م ن عمودية علي المستوي س وتقابله في ن ثم رسم المستقيمان ن ل ، ل ع في المستوي س بحيث ق (< ن ل ع) = ٩٠ ° ثم رسم م ل ، ل ع فإذا كان م ن = ٣ سم ، ن ل = ٤ سم ، ل ع = ١٢ سم فاحسب طول م ع .

الحـــــــل



∵ م ن ⊥ المستوى س

∴ ن ل هو مسقط م ل علي س مسقطها ن ل ⊥ ل ع

∴ م ل ⊥ ل ع

في Δ م ن ل :

م ل = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥ سم

في Δ م ل ع : (م ع)^2 = (م ل)^2 + (ل ع)^2

∴ م ع = $\sqrt{٢٥+١٤٤}$ = ١٣ سم

<u>مثال</u>: ا ب جـ ء اَ بَ جـَ ءَ مكعب رسمت اَ ب ، اَ جـ ، اَ ء . اثبت ان:

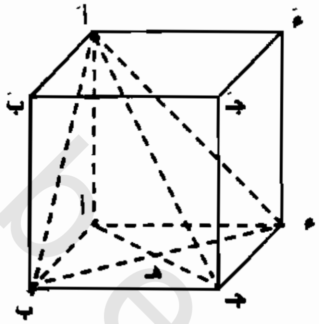
١) كل من Δ Δ اَ ب جـ ، اَ ء جـ قائم الزاوية وأنهما متطابقان .

٢) اَ جـ ⊥ ب ء

الحـــــــل

∵ أ أَ ⊥ مستوي المربع أ ب جـ ء

∴ أ ب مسقط أَ ب على المستوي أ ب جـ ء



∵ أ ب ⊥ ب جـ ∴ أَ ب ⊥ ب جـ

∴ Δ أَ ب جـ قائم الزاوية في ب

بالمثل : أ ء مسقط أَ ء على المستوي أ ب جـ ء

، أ ء ⊥ ء جـ ∴ أَ ء ⊥ ء جـ

∴ أَ ء قائم الزاوية في ء ، Δ أَ ل جـ ≡ Δ أَ ء جـ

، ∵ أَ أ ⊥ المستوي أ ب جـ ء ، أ جـ مسقط أَ جـ عليه

، ∵ أ جـ ⊥ ب ء (قطران في المربع أ ب جـ ء)

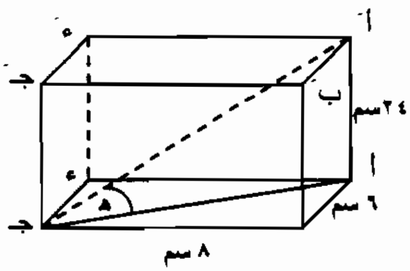
∴ أَ جـ ⊥ ب ء

مثال: ا ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازي مستطيلات فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ أَ = ٢٤ سم

– احسب طول القطر أَ جـ ثم أوجد قياس زاوية ميل أَ جـ على المستوي أ ب جـ ء .

الحـــــل

أ هي مسقط أَ على المستوي أ ب جـ



، ∵ جـ ∈ المستوي أ ب جـ ∴ مسقط جـ هو جـ

∴ أ جـ هو مسقط أَ جـ على المستوي أ ب جـ

في Δ أ ب جـ ∴ ق (< ب) = ٩٠ °

∴ أ جـ^{٢} = أ ب^{٢} + ب جـ^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

∴ أ جـ = ١٠ سم ، أَ أ ⊥ أ جـ

∴ (أَ جـ)^{٢} = (أ أَ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٥٧٦ + ١٠٠ = ٦٧٦ ب

∴ أَ جـ = ٢٦ سم

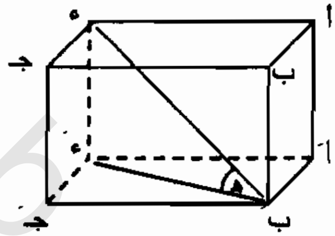
، < أَ جـ أ هي زاوية ميل أَ جـ على المستوي أ ب جـ ء

في Δ أَ أ جـ: ∵ < أ = ٩٠ ° ∴ جتا أَ جـ أ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أَ جـ}}$ = $\frac{١٠}{٢٦}$

∴ هـ = ٤٨َ ٢٢َ ٦٧ °

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ مكعب طول ضلعه ل . برهن أن جيب تمام الزاوية التي يميل بها قطر المكعب علي الوجه الذي تقع فيه = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

الحـــــل



المطلوب : إثبات أن جتا هـ = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

∵ Δ ء ءَ بَ قائم الزاوية في ءَ

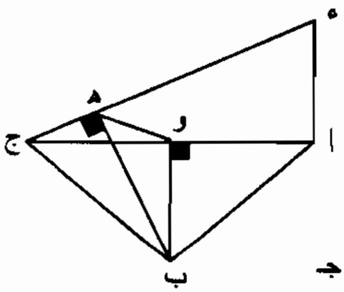
∴ زاوية ميل القطر ء بَ علي القاعدة هي هـ

∴ جتا هـ = $\frac{بَ ءَ}{ء بَ} = \frac{ل\sqrt{٢}}{ل\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٦}}{٣}$

مثال: أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع . رسم أ ء ⊥ علي مستو المثلث . ثم رسم ب و ⊥ أ جـ ،

ب هـ ⊥ ء جـ برهن أن : ١) ب و ⊥ لمستوي أ ء جـ ٢) وهـ ⊥ ء جـ

الحـــــل



∵ $\overline{ءأ}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{ءأ}$ عمودي علي أي مستقيم فيه

∴ $\overline{ءأ}$ ⊥ $\overline{بو}$ ولكن $\overline{بو}$ ⊥ $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{بو}$ ⊥ كلا من $\overline{ءأ}$ ، $\overline{أجـ}$

∴ $\overline{بو}$ ⊥ المستوي ء أ جـ ∵ $\overline{بو}$ ⊥ المستوي أ ء جـ

∴ $\overline{بو}$ (المائل) ⊥ $\overline{ءجـ}$ ∴ مسقط $\overline{وهـ}$ ⊥ $\overline{ءجـ}$

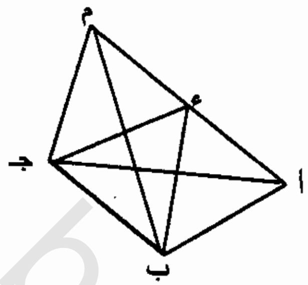
تمرين(٦)

١- في الشكل المقابل:

المستوى أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

، جـ م ⊥ المستوي أ ب جـ ، ء منتصف أ م

أثبت أن: ء ب = ء جـ

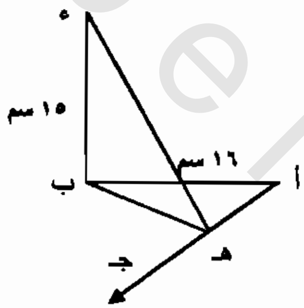


٢- في الشكل المقابل:

ق (< ب أ جـ) = ٣٠ ْ ، أ ب = ١٦ سم

، ء ب ⊥ المستوي أ ب جـ ، ء هـ ⊥ أ جـ

فإذا كان ب ء = ١٥ سم- احسب ء هـ .

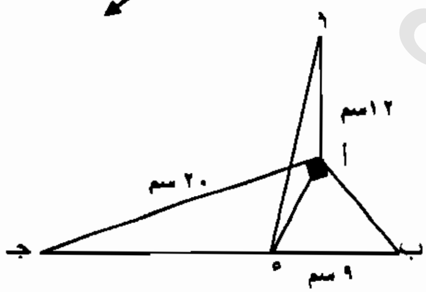


٣- في الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث فيه < أ قائمة ، أ ب = ١٥ سم

، أ جـ = ٢٠ سم ، أ م ⊥ مستوي المثلث أ ب جـ

، ء ∋ ب جـ بحيث ب ء = ٩ سم .



أثبت أن:

م ء ⊥ ب جـ وأوجد قياس زاوية ميل م ء علي المستوي أ ب جـ .

٤- أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ . رسم أ م ⊥ المستوي أ ب جـ ، كان أ م = ٣,٦سم ، رسم م هـ ⊥ ب جـ ويقطعها في هـ ورسمت أ هـ . فإذا كان أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٨ سم

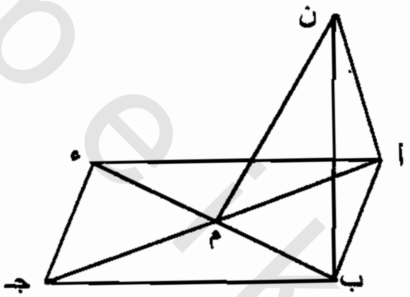
- فاحسب طول كل من أ هـ ، م هـ .

٥- جـ ء هـ مثلث قائم الزاوية في جـ . رسم جـ أ ⊥ المستوي جـ ء هـ ، رسمت أ ء ، أ هـ وكانت مساحة سطح Δ أ هـ ء = ٩٦ سم^2 ، جـ ء = ٩سم ، جـ هـ =١٢ سم .

- أحسب طول أ هـ.

٦- أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ق (< ب أ جـ) = ١٢٠° – رسم أ ء ⊥ ب جـ ويقطعها في ء ، كان أ ء = ١٠سم ، ورسم أ م ⊥ المستوي أ ب جـ فإذا كان ق(< أ م ب) = ٣٠° . فاحسب كل من أ م ، م ء ، مساحة سطح Δ م ب جـ .

٧- **في الشكل المقابل:**



أ ب ج ء مربع طول ضلعه ١٢سم تقاطع قطراه في م رسم أ ن ⊥ مستوي المربع بحيث كان أ ن = ٥ سم

١) أثبت أن :

أ) ب ء ⊥ المستوى ن أ م

ب) ن ب ⊥ ب جـ

٢) أوجد طول ن ب

٨- م أ ب ج هرم ثلاثي م أ ، م ب ، م جـ متعامدة مثنى مثنى ، م هـ ⊥ المستوي أ ب جـ ويقطعه في هـ وكان أ هـ يقطع ب جـ في نقطة ء فأثبت أن:

(أولاً) م أ ⊥ المستوي م ب جـ

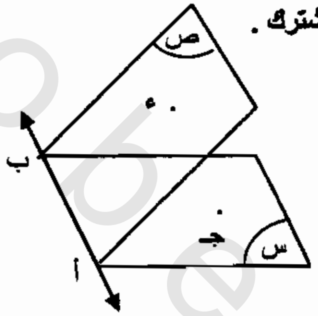
(ثانياً) م ء ⊥ ب جـ

(ثالثاً) $(\text{م هـ})^2$ = أ هـ . هـ ء

الزاويــة الزوجيــة

تعريف :

الزاوية الزوجية هي الناتجة من اتحاد نصفي مستويين لهما حد مشترك .



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ حداً لنصفي المستويين س ، ص

∴ س ∪ أ ب ∪ ص يسمي زاوية زوجية .

حيث كل من س ، ص وجه للزاوية الزوجية

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يسمي حرف للزاوية الزوجية .

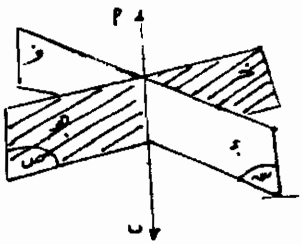
ويرمز للزاوية الزوجية بأحد الرموز الآتية :-

أ- الزاوية س – أ ب – ص

ب- الزاوية جـ - أ ب – ء

ج- الزاوية الزوجية التي حرفها $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

الزوايا الزوجية الناتجة عن تقاطع مستويين:-



إذا تقاطع مستويان س ، ص في المستقيم أ ب فإنه ينشأ

عن تقاطعهما الزوايا الزوجية الآتية :-

(> جـ - $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ء)

(> ء - أ ب – هـ)

(> و - $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – هـ) ، (> جـ - $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – و)

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (قياس الزاوية الزوجية):-

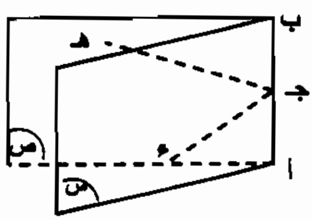
نحدد نقطة علي حرف الزاوية الزوجية أ ب

ونقيم منها عمودين علي الحرف أحدهما يقع في

المستوي الأول س والثاني يقع في المستوي الثاني

ص من ذلك يتحدد قياس الزاوية الزوجية بين

المستويين **ففي الشكل المقابل:-**



جـ نقطة علي أ ب (حرف الزاوية)

جـ ء ⊥ أ ب في المستوي س ، جـ هـ ⊥ أ ب في المستوي ص

∴ مقياس الزاوية الزوجية (الزاوية المستوية) بين المستويين س، ص هي الزاوية ء جـ هـ

تعريف : الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الحادثة من تقاطع هذه الزاوية الزوجية مع أي مستوي عمودي علي حرفها .

حقيقة: جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية القياس .

تعريف: قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي من زواياها المستوية .

ملاحظة: الزاوية الزوجية تكون حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة، إذا كانت زاويتها المستوية حادة ، منفرجة ، مستقيمة ، قائمة.

مثال: ا ب ج ء مربع طول ضلعه ١٢ سم تقاطع قطراه في م . رسمت $\overline{\text{ا ن}}$ عمودية علي مستوي المربع حيث ا ن = ٦ $\sqrt{٢}$ سم - أثبت أن : $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي ن ا م .

واوجد ق (< ا – $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ – ن)

الحـــــــل

∵ $\overline{\text{ا ن}}$ ⊥ مستوي المربع ∴ $\overline{\text{ا ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

ولكن $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ا م}}$ (لأن ا جـ ، ب ء قطر المربع)

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{ا ن}}$ ، $\overline{\text{ا م}}$

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي ن ا م ∴ $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ $\overline{\text{م ن}}$

∴ ق (< ا م ن) = ق (< ا – ب ء – ن)

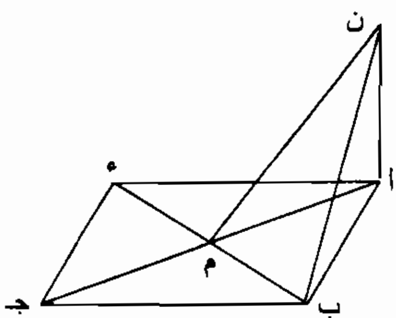
، ∵ $\overline{\text{ا ن}}$ ⊥ مستوي المربع ∴ $\overline{\text{ا ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ا م}}$

، ∵ ا م = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = ٦ $\sqrt{٢}$

∴ Δ ن ا م قائم الزاوية في ا ، ن ا = ا م

∴ ق (< ن م ا) = ٤٥ °

∴ ق (< ا – ب ء – ن) = ٤٥ °



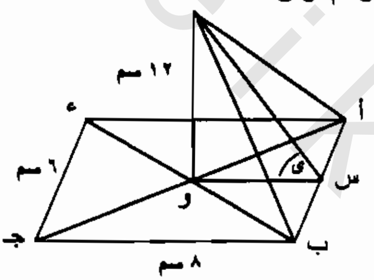
مثال: أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم تقاطع قطراه في و ثم رسمت و م عمودية علي مستوي المستطيل فإذا كان م أ = ١٣ سم أوجد طول م و ، و إذا كانت س منتصف أ ب فبرهن أن س م ⊥ أ ب وإذا كان ق (< م - أ ب - جـ) = ى - فأوجد قيمة طا ى .

الحـــــل

أ جـ^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ∴ أ جـ = ١٠سم ∴ أ و = ٥ سم

، ∵ م و ⊥ المستوي أ ب جـ ء ∴ م و ⊥ و أ

∴ م و^2 = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤ ∴ م و = ١٢ سم نرسم و س



∴ و س // ب جـ ∴ و س ⊥ أ ب

، و س = ٤ سم

، ∵ و س مسقط م س علي المستوي أ ب جـ ء

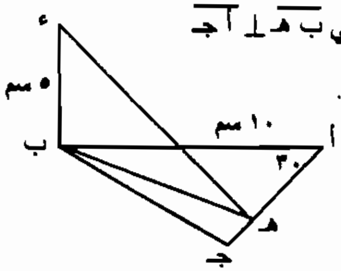
∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق (< م س و) = ق(< م - أ ب - جـ) = ى

طا ى = $\frac{\text{م و}}{\text{و س}}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق(< أ) = ٣٠ ° ، أ ب = ١٠ سم ، رسم ب ء ⊥ المستوي أ ب ج بحيث كان ب ء = ٥ سم . ثم رسم ب هـ ⊥ أ جـ يقابله في هـ . أثبت أن ء هـ ⊥ أ جـ ثم أوجد طول كل من ب هـ ، ء هـ وقياس الزاوية الزوجية (ب - أ جـ - ء) .

البرهـــــان



∵ ء هـ مائلة علي المستوي أ ب جـ ومسقطها علي المستوي هي ب هـ ⊥ أ جـ

∴ ء هـ ⊥ أ جـ

وحيث أن ب هـ ⊥ أ جـ

∴ < ب هـ ء زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب - أ جـ - ء)

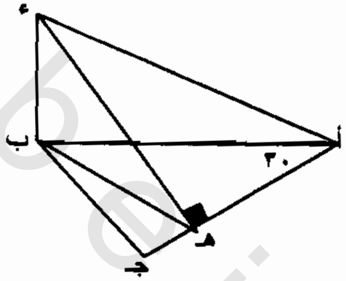
في Δ أ ب هـ : ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم

في Δ ء ب هـ : ء ب = ب هـ ، ق (ء ب هـ) = ٩٠ °

∴ ق(< ب هـ ء) = ٤٥ °

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق (< أ) = ٣٠°، أ ب = ١٠ $\sqrt{3}$ سم، رسم ب ء ⊥ المستوي أ ب جـ بحيث $\overline{\text{ب ء}}$ = ٥ سم ثم رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ قابله في هـ اثبت ان : $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ وأن قياس الزاوية الزوجية (< ب – $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ – ء) يساوي ٣٠°.

البرهـــان



∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ مائل علي المستوي أ ب جـ، $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ هي مسقط $\overline{\text{ء هـ}}$ علي المستوي أ ب جـ

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ < ب هـ ء زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< ب – $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ – ء)

في Δ أ ب هـ: ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٥ $\sqrt{3}$ سم

∵ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ∴ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$

ظا (< ب هـ ء) = $\frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}}$ = $\frac{5}{5\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

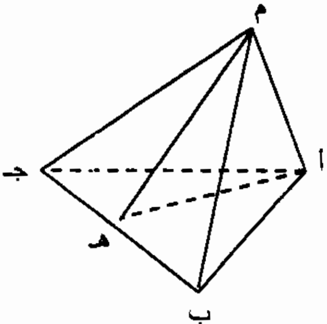
∴ ق (< ب هـ ء) = ٣٠°

مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، أ م ⊥ المستوي أ ب ج، أ م = ٢٠ $\sqrt{3}$ سم، هـ منتصف ب جـ.

(أولاً) اثبت أن المستوي م أ هـ ⊥ المستوي أ ب ج.

(ثانياً) أحسب قياس (< م – ب جـ – أ)

الحـــل



∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ، $\overline{\text{م أ}}$ ⊂ المستوي م أ هـ

∴ المستوي م أ هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ∴ أ هـ مسقط المائل م هـ علي أ ب جـ

∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ <م هـ أ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (<م- ب↔جـ - أ)

∵ م‾أ ⊥ المستوي أ ب جـ   ∴ م‾أ ⊥ أ‾هـ

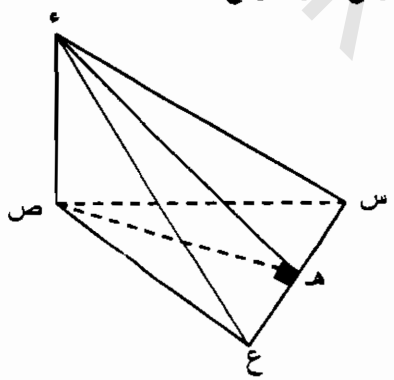
أ هـ = أ ب جا ٦٠ = ٤٠ × ٣√ / ٢ = ٢٠ ٣√ سم

، ظا (<م هـ أ) = م أ / أ هـ = ٢٠ ٣√ / ٢٠ ٣√ = ١

∴ ق (<م هـ أ) = ٤٥°

<u>مثال</u> : س ص ع Δ فيه ق(<س) = ٣٠°، س ص= ٢٠ سم. اقيم ص ء ⊥ مستوي Δ س ص ع حيث ص ء = ١٠ ٣√ رسمت ص‾هـ ⊥ س‾ع وتقطعها في هـ. أثبت أن ء‾هـ ⊥ س‾ع من ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع .

الحـــــل



∵ ء‾ص ⊥ المستوي س ع ص

∴ هـ‾ص مسقط ء‾هـ علي المستوي س ص ع

∵ ص‾هـ ⊥ س‾ع

∴ ء‾هـ ⊥ س‾ع (أولاً)

∴ (<ء هـ ص) هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع

في Δ س هـ ص : ص هـ = س ص جا ٣٠° = ٢٠ × ١/٢ = ١٠ سم

∵ ء ص ⊥ المستوي س ص ع

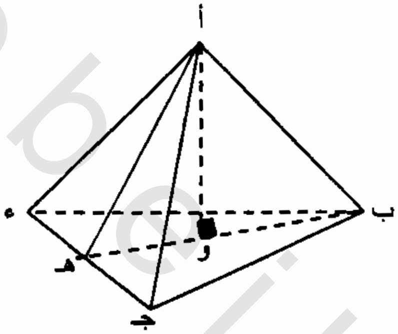
∴ ء‾ص ⊥ ص‾هـ

ظا (<ء هـ ص) = ء ص / ص هـ = ١٠ ٣√ / ١٠ = ٣√

∴ ق (<ء هـ ص) = ٦٠°

مثال: أ ب ج ء هرم ثلاثي فيه ب جـ = ب ء ، أ جـ = أ ء نصفت جـ ء في هـ أثبت أن جـ ء ⊥ المستوي أبهـ وإذا رسم أ و ⊥ بهـ أثبت أن أ و ⊥ المستوي بجء وإذا كان جء=١٨ سم ، أ جـ = ١٥ سم ، أ و = ٦ $\sqrt{٣}$ سم - أوجد قياس الزاوية الزوجية (ب – جـ ء – أ)

البرهـــــــان



في Δ ب جـ ء   ∵ ب جـ = ب ء ، هـ منتصف جـ ء

∴ ب هـ ⊥ جـ ء ----- (١)

في Δ أ جـ ء   ∵ أ جـ = أ ء ، هـ منتصف جـ ء

∴ أ هـ ⊥ جـ ء ----- (٢)

من (١) ، (٢)   جـ ء ⊥ المستوي أ ب هـ

∵ أ و ⊂ المستوي أ ب هـ   ∴ جـ ء ⊥ أ و

∵ أ و ⊥ ب هـ   ∴ أ و ⊥ المستوي ب جـ ء   ∵ جـ ء ⊥ المستوي أ ب هـ

∴ أ هـ ب زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ب – جـ ء – أ)

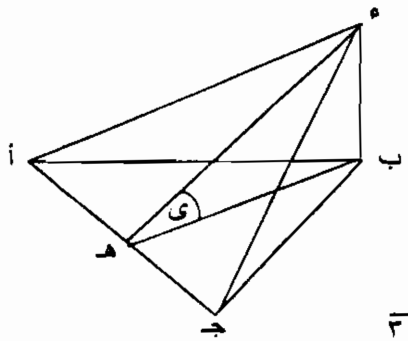
$(\text{أ هـ})^{٢} = (\text{أ جـ})^{٢} - (\text{جـ هـ})^{٢} = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

∴ أ هـ = ١٢ سم   ، جا (أ هـ و) = $\frac{\text{أ و}}{\text{أ هـ}} = \frac{٦\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق (< أ هـ و) = ٦٠°

مثال: أ ب ج Δ متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم . أقيم المستقيم ب عمودياً علي مستوي المثلث فإذا كان ب ء = ٦ سم – فأحسب الزاوية بين المستويين ء جـ أ ، أ ب جـ .

الحـــــــل



تنصف أ جـ في هـ ونصل ء هـ ، ب هـ

∵ Δ أ ب ج متساوي الأضلاع

∴ هـ منتصف أ جـ   ، ب هـ ⊥ أ جـ

∴ ء هـ ⊥ أ جـ

∴ ى هي مقياس الزاوية الزوجية

$\text{ء هـ}^{٢} = \frac{٢}{١٢} - (٦)^{٢}$ ∴ ء هـ = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ ظا ى = $\frac{٦}{٦\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ى = ٣٠°

المستويات المتعامدة

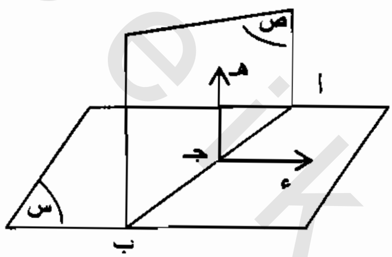
يقال لمستويين أيهما متعامدان إذا كانت إحدي الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطعهما قائمة .

نظرية:

- **إذا كان مستقيم عمودياً علي مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم يكون عمودياً علي ذلك المستوى .**

المعطيات : جـ هـ ⊥ المستوى س عند جـ ، جـ هـ ⊂ ص ، س ∩ ص = أ ب

المطلوب : إثبات أن : ص ⊥ س



البرهان:

نرسم جـ ء ⊥ أ ب في المستوى س

∵ جـ هـ ⊥ المستوي س (معطي) ، جـ ء ⊂ س

∴ جـ هـ ⊥ جـ ء ، وأيضا جـ هـ ⊥ أ ب

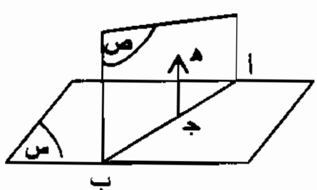
∴ ق (< ء جـ هـ) = ٩٠°

∵ < ء جـ هـ زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطع المستويين س ، ص

∴ ص ⊥ س

عكس النظرية (بدون برهان)

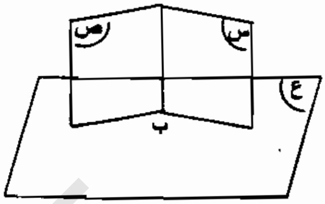
- **إذا تعامد مستويان ورسم فى أحدهما مستقيم عمودي على خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودياً علي المستوي الآخر .**



إذا كان س ⊥ ص ، س ∩ ص = أ ب ، جـ هـ ⊂ ص
، جـ هـ ⊥ أ ب فإن : جـ هـ ⊥ المستوي س .

حقيقة :

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً علي المستوي الثالث .



إذا كان كل من المستويين س ، ص عمودي علي المستوي ع

وكان س $\cap$ ص = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوي ع .

<u>ملاحظة :</u>

لإثبات أن المستويين متعامدين :-

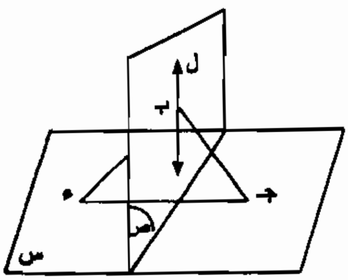
أـ نوجد مستقيم في أحدهما عمودي علي الآخر.

ب- نثبت الزاوية الزوجية بين المستويين قائمة .

<u>مثال</u> : س ، ص مستويان متعامدان ،المستقيم ل يقع في ص رسم من النقطة ب و ل المستقيمان ب جـ ، ب ء عمودين علي ل ويلاقيان المستوى س في جـ وء علي الترتيب .

ـ أثبت أن : جـ ء $\perp$ المستوي ص .

الحـــــــــل



$\because$ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ عموديين علي ل

$\therefore$ المستقيم ل عمودي علي مستويهما ب جـ ء

$\because$ ل $\subset$ المستوى ص

$\therefore$ المستوى ص $\perp$ المستوى ب جـ ء

$\therefore$ المستويان س ، ب جـ ء متعامدان على المستوى ص

$\therefore$ خط تقاطعهما $\perp$ المستوى ص

$\therefore$ $\overline{\text{جـ ء}}$ $\perp$ المستوى ص

مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م أ $\perp$ المستوى أ ب جـ ، أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، م أ = ٨ سم . ء فى منتصف ب جـ .

<u>أوجد</u>: (١) ق (م – ب جـ - أ) (٢) برهن أن المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدين

الحـــــــل

∵ ء في منتصف ب جـ   ∴ أ ء ⊥ ب جـ

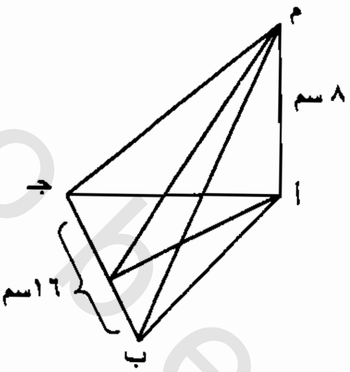
∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ أ ء المسقط ، م ء مائل

∵ المسقط أ ء ⊥ ب جـ

∴ المائل م ء ⊥ ب جـ

∴ ق (< أ ء م) المستوية = ق (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - أ) الزوجية



في Δ أ ء ب

∵ (أ ء)^{٢} = (١٠)^{٢} – (٨)^{٢} = ٣٦   ∴ أ ء = ٦سم

∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ   ∴ م أ ⊥ أ ء

∴ Δ م أ ء (م ء)^{٢} = ٨^{٢} + ٦^{٢} = ١٠٠   ∴ م ء = ١٠ سم

∴ جتا (< م ء أ) = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦   ∴ ق (< م ء أ) = ...

∵ ب جـ ⊥ كلا من أ ء ، م ء   ∴ ب جـ ⊥ المستوى م أ ء

∵ المستوى م ب جـ يحوى المستقيم ب جـ   ∴ المستوى م ب جـ ⊥ المستوى م أ ء

مثال: م أ جـ هرم ثلاثي فيه أ ب جـ Δ متساوي الأضلاع . طول ضلعه ٤٠ سم ، م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ م = ٢٠ √٣ سم ، هـ في منتصف ب جـ .

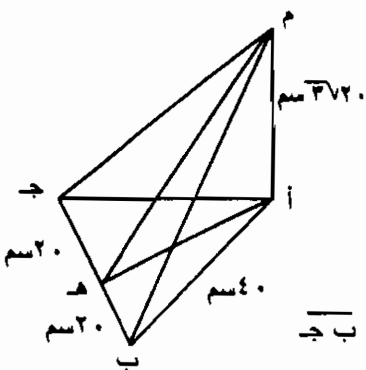
برهن أن : (١) المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ   (٢) ق (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - أ)

الحـــــــل

∵ أ م ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ مستواه ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ المستوى م أ هـ ⊥ أ ب جـ



∵ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع ، هـ منتصف ب جـ

∴ أ هـ ⊥ ب جـ

∵ أ هـ المسقط ، م هـ المائل   ∴ م هـ ⊥ ب جـ

∴ ق (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - أ) الزوجية = ق (< أ هـ م) المستوية

∵ أهـ = ٤٠ جا ٦٠ = ٢٠ √٣

∴ ظا (> أ هـ م) = $\frac{\text{أم}}{\text{أهـ}}$ = ١

∴ ق (> أ هـ م) = ٤٥°

مثال: أ ب جـ Δ فيه أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، رسم م أ ⊥ المستوى أ ب جـ
بحيث م أ = ٨ سم ، ء منتصف ب جـ

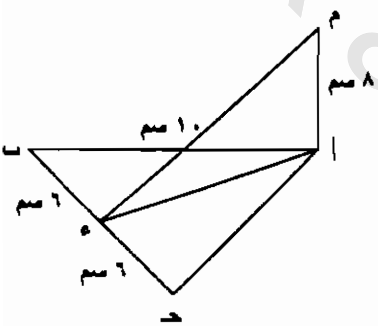
١) أحسب طول أ ء ، م ء

٢) أثبت أن م ء ⊥ ب جـ

٣) أوجد قياس (> م – ب جـ – أ)

٤) أثبت أن المستوي م أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ

الحـــــل



١) ∵ Δ متساوي الساقين ، ء منتصف ب جـ

∴ أ ء ⊥ ب جـ

في Δ أ ء جـ ∵ ق (> ء) = ٩٠°

∴ أ ء² = أ جـ² – جـ ء² = ١٠٠ – ٣٦ = ٦٤

∴ أ ء = ٨ سم ∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ م أ ⊥ أ ء

فى Δ م أ ء ∵ م ء² = م أ² + أ ء² = ٦٤ + ٦٤ = ١٢٨

∴ م ء = ٨ √٢ سم

٢) ∵ أ ء هو مسقط المائل م ء ، ∵ أ ء ⊥ ب جـ

∴ م ء ⊥ ب جـ

٣) > م ء أ هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية (> م – جـ ب – أ)

ظا > م ء أ = $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ء}}$ = ١ ∴ ق (> م – جـ ب – أ) = ٤٥°

٤) م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ المستوى م أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ .

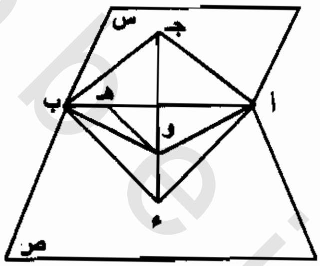
مثال: س ، ص مستويان متعامدان متقاطعان في أ ب . رسم Δ أ ب جـ في المستوي س بحيث

كان ق (< ب أ جـ) = ٩٠° - رسم Δ أ ب ء في المستوى ص بحيث كان ق (< ء ب أ) = ٩٠° فإذا كانت هـ في منتصف أ ب ، و في منتصف جـ ء - برهن أن هـ و ⊥ أ ب .

الحـــــل

∵ المستويين س ، ص متعامدين ، أ جـ ⊥ خط تقاطعهما أ ب

∴ أ جـ ⊥ المستوى ص



، ∵ أ جـ ⊥ أ ء ∴ Δ جـ أ ء قائم في أ

∵ أ و متوسط ∴ أ و = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ---- (١)

بالمثل المستويين متعامدين ، ء ب ⊥ خط تقاطعهما

∴ ء ب ⊥ المستو س ∴ ء ب ⊥ ب جـ

Δ جـ ب ء قائم في ب ، ∵ ب و متوسط

∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ---- (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن:

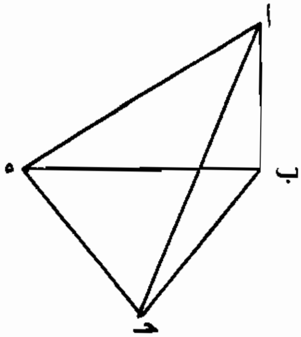
أ و = ب و ∴ Δ أ و ب متساوي الساقين

∵ هـ في منتصف أ ب ∴ و هـ ⊥ أ ب

مثال: ب جـ ء مثلث - رسم أ ب ⊥ المستوي ب جـ ء ، وكان (أ ء)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ + (جـ ء)^٢ - أثبت أن : ١) ء جـ ⊥ ب جـ

٢) المستو جـ ب ء ⊥ كل من المستويين ء ب أ ، جـ ب أ

الحـــــل



١) ∵ أ ب ⊥ ب ء ∴ أ ء^٢ = أ ب^٢ + ب ء^٢ ----- (١)

، ∵ أ ء^٢ = أ ب^٢ + ب جـ^٢ + جـ ء^٢ ----- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ب ء^٢ = ب جـ^٢ + جـ ء^٢

∴ ء جـ ⊥ ب جـ

٢) ∵ أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء ، أ ب ⊂ المستوى أ ب جـ

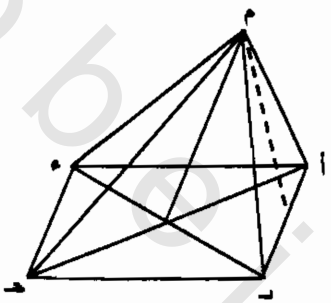
، أ ب ⊂ المستوى أ ب ء

∴ المستوى جـ ب ء ⊥ كل من المستويين ء ب أ ، جـ ب أ

تطبيقات على الهرم

الهرم القائم :

هو هرم قاعدته مضلع منتظم (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ـــــ) مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه .



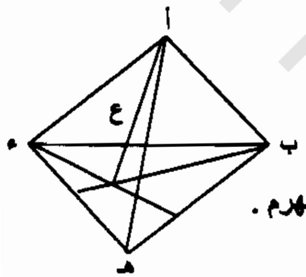
ويلاحظ أن :

(١) أوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

(٢) أحرفة الجانبية متساوية في الطول .

(٣) ارتفاعه الجانبية (ارتفاعات أوجه الجانبية) متساوية .

الهرم الثلاثي المنتظم :-



هو هرم ثلاثي أوجه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع .

ارتفاعه ع يمر برأسه وبنقطة تلاقي متوسطاته قاعدته .

أحرفه الستة متساوية وكل وجه من أوجه الأربعة تعتبر قاعدة للهرم .

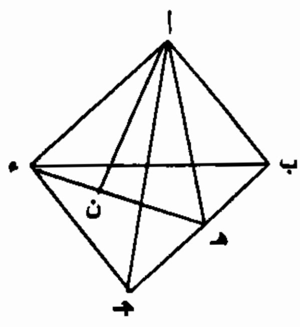
مثال: أ ب جـ ء هرم ثلاثي منتظم طول حرفه = ٦ سم . هـ في منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ثم رسم $\overline{\text{هـ أ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$

برهن أن: (١) $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي أ ء هـ .

(٢) المستوى ب جـ ء ⊥ المستوي أ ء هـ .

(٣) وإذا رسم $\overline{\text{أ ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$ أن هو $\overline{\text{أ ن}}$ ارتفاع الهرم ثم أوجد ق (أ ـ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ـ ء)

الحـــــــل



∵ Δ أ ب جـ متساوى الساقين ، هـ فى منتصف ب جـ

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ كلا من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ مستواها ⊥ المستوى أ هـ ء

∴ المستوى ب جـ ء ⊥ المستوى أ هـ ء

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$

∴ $\overline{\text{أ ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ن}}$ ⊥ كلا من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ن}}$ ⊥ المستوى ب جـ ء

∴ $\overline{\text{أ ن}}$ هو ارتفاع الهرم .

∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق (أ – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - ء) الزوجية = ق (< أ هـ ء) المستوية

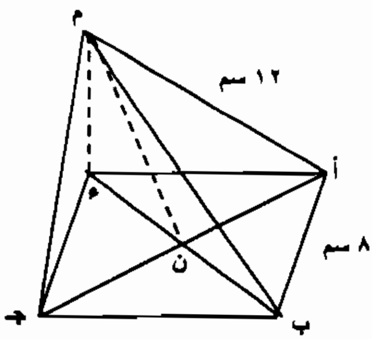
∵ جتا أ هـ ء = $\frac{\text{ن هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\frac{1}{2} \times ٣\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}} = \frac{١}{٣}$

∴ ق (< أ هـ ن) = ...

مثال : م أ ب جـ ء هرم رباعي قائم طول حرفه الجانبي ١٢ سم و طول ضلع قاعدته ٨ سم – أوجد قياس زاوية ميل الحرف $\overline{\text{م أ}}$ علي المستوى أ ب جـ ء .

الحـــــــل

زاوية ميل الحرف $\overline{\text{م أ}}$ علي المستوى أ ب جـ ء هي المحصورة بينه وبين مسقطه علي المستوى هي زاوية (< م أ ن)



∵ أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم

∴ طول قطره $٨\sqrt{٢}$

∴ أ ن = $٤\sqrt{٢}$

في Δ م أ ن قائم الزاوية في ن (لماذا) ؟

∴ جتا (< م أ ن) = $\frac{٤\sqrt{٢}}{١٢} = \frac{\sqrt{٢}}{٣}$

∴ ق (< م أ ن) = ٦١° ٥٢´

مثال: أ ب جـ ء مربع ضلعه ١٢ يم تقاطع قطراه في ن ، رسم $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، وكان م ن = ٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

(أولاً) أثبت أن المستوى م أ جـ ⊥ المستوى ب جـ ء

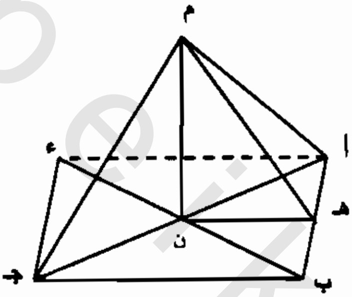
(ثانياً) أثبت ان المستوى آ ب ⊥ المستوى أ ب جـ ء

(ثالثاً) أوجد قياس (م – أ ب – ء)

الحـــــل

(أولاً) ∵ م ن ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، م ن ⊂ في المستوى م أ جـ

∴ المستوى م أ جـ ⊥ المستوى أ ب جـ ء



(ثانياً) في Δ ن أ ب : ن أ = ن ب ، هـ منتصف آ ب

∴ ن هـ ⊥ آ ب --- (١)

، ∵ م ن ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ م ن ⊥ آ ب ---- (٢)

من (١) ، (٢)

∴ آ ب ⊥ كل من هـ ن ، م ن

∴ آ ب ⊥ المستوى م ن هـ

(ثالثاً) ∵ ن هـ هو مسقط المائل م هـ ، ن هـ ⊥ آ ب

∴ م هـ ⊥ آ ب

∴ < م هـ ن هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (م – آ ب – ء)

في Δ أ ب جـ :

∴ هـ منتصف آ ب ، ن منتصف آ جـ

∴ هـ ن = ١/٢ ب جـ = ٦ سم

∴ ظا (< م هـ ن) = م ن / هـ ن = ٦/٦ = ١

∴ ق (< م هـ ن) = ٤٥° ∴ (م – آ ب – ء) = ٤٥°

مثال:

(أولاً) ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم – رسمت أ م عمودية علي مستوى المربع حيث أ م = ٨ √٣ سم .

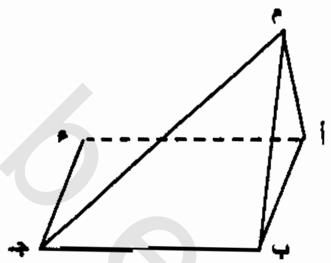
[أ] أثبت أن : م ب ⊥ ب جـ

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ ء

(ثانياً) م س ص ع هرم ثلاثي فيه س ص = س ع ، م ص = م ع ، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ - اثبت أن:

المستوى م ن س $\perp$ س ص ع

الحـــــل



(أولاً)

[أ] $\because$ $\overline{\text{م أ}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ ء

$\because$ $\overline{\text{أ ب}}$ هو مسقط المائل $\overline{\text{م ب}}$ علي هذا المستوى

، $\because$ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

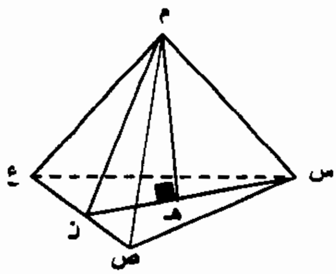
$\therefore$ $\overline{\text{م ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

[ب] $\therefore$ < م ب أ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (م - $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - أ)

$\therefore$ طا (< م ب أ) = $\frac{\text{أ م}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{٨\sqrt{٣}}{٨}$ = $\sqrt{٣}$

$\therefore$ ق (< م ب أ) = ٦٠° $\qquad$ $\therefore$ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ - أ) = ٦٠°

(ثانياً)



في Δ س ص ع

$\because$ $\overline{\text{س ص}}$ = $\overline{\text{س ع}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

$\overline{\text{س ن}}$ $\perp$ $\overline{\text{ص ع}}$ ---- (١)

في Δ م ص ع :

$\therefore$ $\overline{\text{م ص}}$ = $\overline{\text{م ع}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

$\therefore$ $\overline{\text{م ن}}$ $\perp$ $\overline{\text{ص ع}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\qquad$ $\because$ $\overline{\text{ص ع}}$ $\perp$ كل من $\overline{\text{س ن}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ص ع}}$ $\perp$ المستوى م س ن ، $\because$ $\overline{\text{م هـ}}$ $\subset$ في المستوى م س ن

، $\overline{\text{ص ع}}$ $\perp$ $\overline{\text{م هـ}}$ ---- (٣) ، $\overline{\text{س ن}}$ $\perp$ $\overline{\text{م هـ}}$ ---- (٤)

من (٣) ، (٤) $\qquad$ $\therefore$ $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ كل من $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{س ن}}$

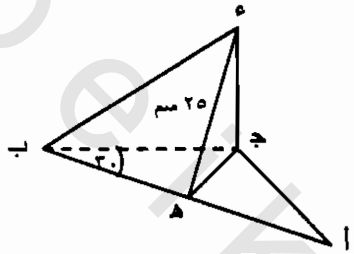
$\therefore$ $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ المستوى س ص ع $\qquad$ $\therefore$ المستوى م س ن $\perp$ المستوى س ص ع

مثال:

(أولاً) أ ب جـ مثلث فيه ق (< ب) = ٣٠° ، ب جـ = ١٤ سم- رسم $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، ثم رسم رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فقطعها في النقطة هـ. فإذا كان ء هـ = ٢٥ سم . فأوجد :

[أ] طول $\overline{\text{جـ ء}}$.　　　[ب] ظل زاوية ميل $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ علي المستوى جـ ء هـ

الحـــــل



[أ] ∵ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{\text{جـ هـ}}$ هو مسقط المائل ء هـ علي المستوى أ ب جـ

، ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$

في Δ ب هـ جـ　　∵ ق (< هـ) = ٩٠°

∴ جـ هـ = ب جـ جا ٣٠° = ٧ سم

فى Δ ء جـ هـ　　∵ ق (< جـ) = ٩٠°

∴ (جـ ء) ٢ = (ء هـ)٢ – (جـ هـ) ٢ = (٢٥)٢ – (٧) ٢ = ٥٧٦

∴ جـ ء = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

[ب] ∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ المستوى جـ ء هـ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ هو مسقط المائل $\overline{\text{ء ب}}$ علي المستوى جـ ء هـ .

∴ (< ب ء هـ)هي زاوية ميل $\overline{\text{ء ب}}$ علي المستوى جـ ء هـ .

في Δ جـ هـ ب　　∴ ق (< هـ) = ٩٠°

∴ ب هـ = ب جـ جتا ٣٠° = ٧ $\sqrt{٣}$ سم

طا (< ب ء هـ) = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ء هـ}}$ = $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢٥}$

(ثانياً) أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات، فيه أ ب=١٠،

[أ] أثبت أن الشكل أ ب جَ ءَ مستطيل ، واحسب

[ب] احسب قياس الزاوية الزوجية بين المس

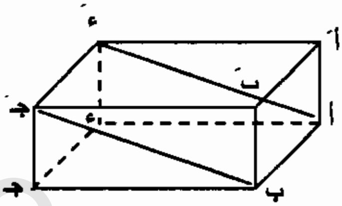
الـ

∴

∴

∴ ظا

[أ] $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ب جـ جَ بَ ، ب



∴ أَب ⊥ ب جـ ---- (١)

، أَب // ءَ جَ ويساويه ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جَ ءَ مستطيل

، في Δ ب جـ جَ ∵ ق (< جـ) = ٩٠°

(ب جَ)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (جـ جَ)^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

∴ ب جَ = √٦٢٥ = ٢٥ سم

مساحة المستطيل أ ب جَ ءَ = أ ب × ب جَ = ١٠ × ٢٥ = ٢٥٠ سم^{٢}

[ب] ∵ جَب ، جـ ب ⊥ أَب

∴ جَب جـ هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (جَ – أَب – جـ)

ظا (< جَب جـ) = جـ جَ / جـ ب = ١٥ / ٢٠ = ٣ / ٤

∴ ق (جَ – أَب – جـ) = ٣٦° ٥٢َ

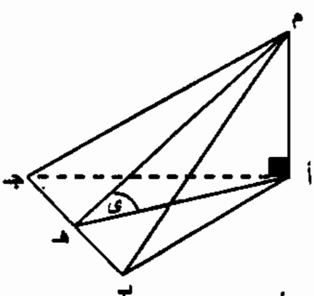
مثال: م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، أ م ⊥ المستوى أ ب جـ ، أم = ٢٠√٣ سم ، هـ منتصف جـ ب .

(أولاً) أثبت أن المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ . (ثانياً) احسب قياس (< م – ب جـ – أ)

الحـــــل

(أولاً) م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ، م أ ⊂ المستوى م أ هـ

∴ المستوى م أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ



(ثانياً) ∵ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع ، هـ منتصف ب جـ

∴ أ هـ ⊥ ب جـ ---- (١)

، ∵ أ هـ هو مسقط المائل م هـ على المستوى أ ب جـ

∴ م هـ ⊥ ب جـ --- (٢) من (١) ، (٢)

∴ < أ هـ م هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< م – ب جـ – أ)

أ هـ = أ ب جـ ٦٠° ∴ أ هـ = ٢٠√٣ سم

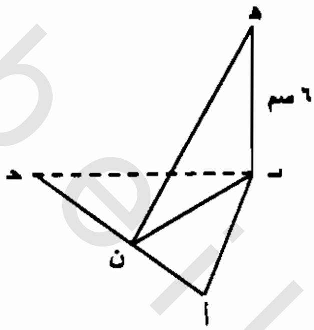
ى = ٢٠√٣ / ٢٠√٣ = ١ ∴ ى = ٤٥°

مثال: أ ب جـ مثلث فيه ق(< أ) = ٦٠° و أ ب = سم . رسم ب ن ⊥ أ جـ ويقطعها في ن ،

ب هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ، وكان ب هـ = سم .

(أولاً) اثبت أن : ن هـ ⊥ أ جـ (ثانيا) أوجد ق(ب – أ جـ ↔ – هـ)

الحـــــــل



(أولاً) ∵ ب هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ، ن ب هو مسقط

المائل ن هـ علي المستوى ب أ جـ

، ∵ ب ن ⊥ أ جـ ∴ هـ ن ⊥ أ جـ

(ثانيا) في Δ أ ن ب ∵ ق (< ن) = ٩٠°

∴ ن ب = أ ب جا ٦٠° = ٦ √٣ سم

، ∵ كلا من ن ب ، ن هـ ⊥ أ جـ

∴ < هـ ن ب هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< ب – أ جـ ↔ – هـ)

ظا (< هـ ن ب) = $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ن ب}}$ = $\frac{٦}{٦\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

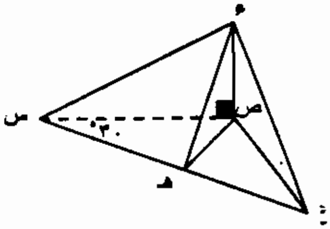
∴ ق (< هـ ن ب) = ٣٠° ∴ ق(ب – أ جـ ↔ – هـ) = ٣٠°

مثال: س ص ع مثلث فيه ق(< س) = ٣٠° ، س ص = ٢٠ سم . ص ء ⊥ مستوى المثلث

س ص ع بحيث ص ء = ١٠ √٣ سم . رسمت ص هـ ⊥ س ع تقطعها في هـ . أثبت ن:

ء هـ ⊥ س ع ، ومن ذلك احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ء س ع ، س ص ع

الحـــــــل



∵ ء ص ⊥ المستوى س ص ع

∴ ء ص ⊥ ص هـ

، ∵ ص هـ هو مسقط المائل ء هـ

، ص هـ ⊥ س ع ∴ ء هـ ⊥ س ع

< ء هـ ص هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (ء – ع س ↔ – ص)

في Δ س هـ ص : ص هـ = س ص جا ٣٠° = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ سم

في Δ ء هـ ص : ق (< ء ص هـ) = ٩٠°

∴ ظا (< ء هـ ص) = $\frac{\text{ص ء}}{\text{هـ ص}}$ = $\frac{10\sqrt{3}}{10}$ = $\sqrt{3}$

∴ ق (< ء هـ ص) = ٦٠° ∴ ق (< ء – $\overleftrightarrow{\text{ع س}}$ – ص) = ٦٠°

<u>مثال:</u>

(أولاً) أ ب ج ء هرم ثلاثي فيه أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء ، ء ب = ١٠ سم ، أ ب = ٥ سم ،

ق (< ب ء جـ) = ٣٠° . رسم أ هـ ⊥ جـ ء قطعها في النقطة هـ . أوجد :

[أ] طول ب هـ [ب] قياس الزاوية بين أ هـ والمستوى ب جـ ء

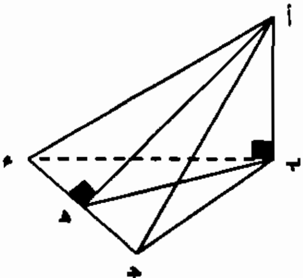
(ثانيا) ا ب جـ ء مربع رسمت أم عمودية علي كل من أ ب ، أ ء . أثبت أن :

[أ] ء جـ ⊥ المستوى أ م ء [ب] المستويان م أ ب ، م أ ء متعامدان

[ج] إذا كان أ م = أ ء ، فاوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ء جـ ، أ ب جـ ء

الحـــــل

(أولاً)



[أ] ∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ هو مسقط المائل أ هـ علي المستوى ب جـ ء

، ∵ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

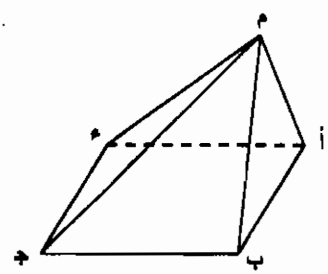
في Δ ب ء هـ : ∵ ب هـ = ب ء جا ٣٠° = ٥ سم

[ب] < ا هـ ب هي زاوية ميل $\overline{\text{أ هـ}}$ علي المستوى ب جـ ء

في Δ أ ب هـ : ∵ ظا (< أ هـ ب) = $\frac{\text{ص ء}}{\text{هـ ص}}$ = $\frac{5}{5}$ = ١

ق (أ هـ ب) = ٤٥°

(ثانيا)



[أ] ∵ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

∴ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

، ∵ $\overline{\text{جـ ء}}$ محتوى في المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$ ---- (١)

، ∵ أ ء ⊥ جـ ء ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∵ جـ ء ⊥ كل أ ب ، م أ

جـ ء ⊥ المستوى أ م ء

[ب] ∵ أ ب // ء جـ ، أ ب ⊥ المستوى أ م ء

، ∵ أ ب ⊂ في المستوى أ م ب

∴ المستوى أ م ب ⊥ المستوى أ م ء

[جـ] ∵ جـ ء ⊥ المستوى أ م ء ∴ جـ ء ⊥ م ء

، جـ ء ⊥ أ ء

∴ < أ ء م هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (أ – جـ ء – م)

∴ ظا (< أ ء م) = $\frac{\text{أ م}}{\text{ء أ}}$ = ١ ∴ ق (< أ ء م) = ٤٥°

∴ ق (< أ – جـ ء – م) = ٤°

مثال:

[أ] أ ب جـ أَ بَ جـَ منشور مائل فيه الوجه ب جـ جـَ بَ مستطيل. رسم الشعاع بَ ء ⊥ أ أَ فقطعها في ء . أثبت أن أ أَ ⊥ المستوى ء ب جـ ، وإذا كان أ ب = ٥ سم ، ب ء = ٣ سم أوجد قياس الزاوية بين أ ب و المستوى ء ب جـ .

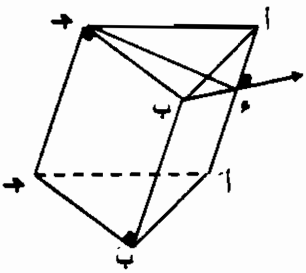
[ب] م أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م ، قاعدته المثلث المتساوي الأضلاع أ ب جـ الذي طول ضلعه ١٢سم ، ق(< م أ ب) = ق(< م أ جـ) = ٩٠° ، م أ = ٦ سم ، ء منتصف ب جـ .

(أولا) أثبت ان : ب جـ ⊥ المستوى م أ ء .

(ثانيا) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ .

(ثالثا) أثبت أن : المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدان .

الحـــــــل



[أ] ∵ أ أَ // جـ جـَ ، جـ جـَ ⊥ جـ ب

(اولا) ∴ أ أَ ⊥ جـ ب ، أ أَ ⊥ ب ء

، ∵ أ أَ ⊥ كل من جـ ب ، ب ء

∴ أ أَ ⊥ المستوى ء ب جـ

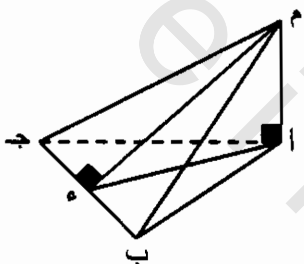
∵ $\overline{ب ء}$ هو مسقط المائل $\overline{أ ب}$ علي المستوى ب ء جـ

∴ < أ ب ء هي زاوية ميل $\overline{أ ب}$ علي المستوى ء ب جـ

جتا (< أ ب ء) = $\frac{ب ء}{ب أ}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق (< أ ب ء) = ٨َ ٥٣ °

[ب]



(أولاً) ∵ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى -----

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ اى مستقيم في المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ---- (١)

، ∵ المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع

، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ كل من $\overline{م أ}$ ، $\overline{أ ء}$

∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى أ م ء .

(ثانيا) ∵ $\overline{أ ء}$ هو مسقط المائل م ء علي المستوى أ ب جـ

، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

< أ ء م هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (أ — $\overleftrightarrow{ب جـ}$ - م)

في Δ أ ء ب : أ ء = أ ب جا ٦٠ ° = ٦ $\sqrt{٣}$

، طا (< م ء أ) = $\frac{أ م}{ء أ}$ = $\frac{٦}{٦\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ق (< أ ء م) = ٦٠°

(ثالثا) ∵ $\overline{ب جـ}$ ⊥ المستوى م ء أ ، $\overline{ب جـ}$ ⊂ في المستوى أ ب جـ

∴ المستوى م ب جـ ⊥ المستوى أ م ء

مثال:

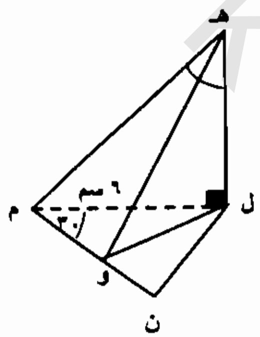
[أ] ل م ن مثلث فيه ل م = ٦ سم ، ق (< ل م ن) = ٣٠° ، رسم ل و ⊥ م ن ويقطعها في و ، رسم ل هـ ⊥ المستوى ل م ن بحيث ق(< م هـ ل) = ٣٠° ، أوجد طول ل هـ ، وظل الزاوية بيم هـ و والمستوى ل م ن .

[ب] أ ب جـ ء مربع طول ضلعه = ٨ سم تقاطع قطراه في هـ ، رسمت هـ م عمودية على المستوى أ ب جـ ء حيث هـ م = ٤ سم . أوجد قياس الزاوية الزوجية ق (< م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – هـ) ، وإذا مر مستو بالضلع أ ب وقطع م ء في و ، وقطع م جـ في ل .

أثبت أن : الشكل أ ب ل و شبه منحرف .

الحـــــــل

[أ] ∵ ل هـ ⊥ المستوى ل م ن



∴ ل هـ ⊥ ل م

∵ Δ هـ ل م ثلاثيني ستيني

∴ ل هـ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم .

∵ ل و هو مسقط المائل هـ و

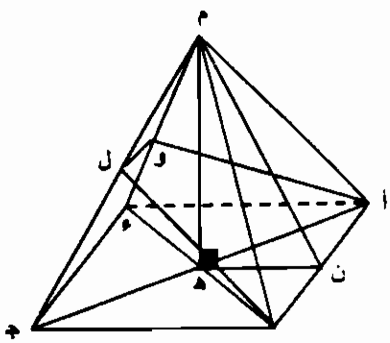
، ل و ⊥ ن م ∴ هـ و ⊥ ن م

Δ ل و م قائم الزاوية في و

، ق (< م) = ٣٠° ∴ ل و = $\frac{١}{٢}$ ل م = ٣ سم

∴ طا (< هـ و ل) = $\frac{\text{هـ ل}}{\text{ل و}}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

[ب] نرسم هـ ن ⊥ أ ب ، ∵ هـ منتصف أ جـ



∴ ن منتصف أ ب

∵ ن هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٤ سم

ثم نرسم م ن فيكون م ن ⊥ أ ب

∴ (< م ن هـ) هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (< م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – هـ)

∴ طا (< م ـ أب ـ هـ) = م هـ / ن هـ = ٤ / ٤

∴ ق (< م ـ أب ـ هـ) = ٤٥°

∵ م جـ ، م ء يكونان مستويا يحتوي جـ ء ، أ ب // جـ ء

∴ أ ب // المستوي م جـ ء

، ∵ المستوى أ ب ل و يقطع المستوى م جـ ء في ل و

∴ أ ب // جـ ء ---- (١)

، ∵ أ ب // جـ ء ∴ ل و // جـ ء

∴ Δ م ل و ≈ Δ م جـ ء

∴ ل و / جـ ء = م ل / م جـ ، ∵ م ل < م جـ ∴ ل و < جـ ء

، ∵ جـ ء = أ ب ∴ ل و < أ ب ــ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب ل و شبه منحرف

تمرين (٧)

(١) س ، ص مستويان متقاطعان في أ ب ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما . رسم $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{م ء}$ عمودين عليهما ليقطعا س في جـ ، ص في ء ثم رسم جـ هـ ⊥ أ ب أثبت أن $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$.

(٢) أ ب جـ قائم الزاوية في أ فيه أ ب = ٢ أ جـ ، رسم $\overline{أ م}$ عمودياً علي مستوي المثلث ثم رسم العمود $\overleftarrow{م هـ}$ علي $\overline{ب جـ}$ فقطعه في ء – أثبت أن ب ء = ٤ ء جـ .

(٣) س ، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، النقطة م ∈ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{م ن}$ ⊂ ص ويصنع زاوية حادة مع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، رسم $\overleftarrow{ن جـ}$ ⊥ س ليقطعه في جـ كما رسم $\overleftarrow{جـ ل}$ ⊥ $\overleftarrow{أ ب}$ ليقطعه في ل – أثبت أن حا(< ن م حـ) = حا (< ن م ل × حا < ن ل حـ)

(٤) $\overleftarrow{م س}$ ، $\overleftarrow{م ص}$ محتويان في نفس المستوى ومتعامدان ، ط نقطة لا تنتمي إلي رسم ط ع عمودى على $\overline{م س}$ ويقطعه في ع ، $\overleftarrow{ط ك}$ ⊥ $\overleftarrow{م ص}$ ويقطعه فى ك كما رسم $\overleftarrow{ط ى}$ ⊥ المستوى م س ص ويقطعه فى ى – أثبت أن :

[١] م ك ى ع مربع [٢] $\overleftrightarrow{ط م}$ يميل بزاوية قياسها ٤٥° مع المستوى م س ص

(٥) س ، ص مستويان متقاطعان فى $\overleftrightarrow{أ ب}$ رسم المستوى ع يوازى $\overleftrightarrow{أ ب}$ ويقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، المستوى ص في $\overleftrightarrow{هـ ء}$ – اثبت أن مجموع قياسات الزوايا الزوجية $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ = ١٨٠°

(٦) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم فإذا كان أ أَ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم – أوجد

[١] قياس زاوية ميل $\overline{أَ جـ}$ علي القاعدة .

[٢] ظل قياس الزاوية الزوجية (أ – $\overleftrightarrow{جـ ب}$ – أَ)

(٧) أ ب جـ ء مستطيل رسم عمودان $\overline{جـ هـ}$ ، $\overline{ء و}$ علي مستوى هذا المستطيل بحيث كان جـ ء = ١٥ سم ، و ب = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ، $\overleftrightarrow{و ب}$ يميل علي القاعدة بزاوية قياسها ٣٠° – احسب مساحة سطح Δ ب ء و ، ق(< ب – $\overleftrightarrow{ء و}$ – جـ)

(٨) أ ب جـ ء مستوى أفقي يقطع مستوى متوازى الأضلاع أ ب و هـ في $\overleftrightarrow{أب}$ وقياس الزاوية الزوجية بينهما = ٦٠° فإذا كان ق(< أ ب هـ) = ٣٠° ، و هـ = ٤٠ سم – احسب طول العمود هـ ن المرسوم من هـ على المستوى أ ب جـ ء ليقطعه في ن .

(٩) م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م أ = ٨ سم ، م ب = ١٠ سم ، م جـ = ١٧ سم ، أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ١٥ سم. أثبت أن المستوى أ ب جـ عمودياً على كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ

(١٠) أ ب قطر في دائرة ، رسم $\overline{أجـ}$ عمودياً على مستوى الدائرة فإذا كانت النقطة ء تنتمي إلى هذه الدائرة . أثبت أن المستوى جـ أ ء عمودي على المستوى جـ ء ب .

(١١) مستوي المستطيل أ ب جـ د عمودي على مستوي المستطيل أ ب هـ و و المستطيلان متطابقان. م منتصف أ و ، ن منتصف $\overline{ب هـ}$. اثبت ان جـ د م ن مستطيل و ان ظل الزاوية الزوجية بينه وبين المستطيل أ ب جـ د يساوي $\frac{1}{2}$

(١٢) س،ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{أب}$ و قياس الزاوية الزوجية بينهما ٦٠° و المربع أب جـ د محتوي في المستوي س ، هـ منتصف $\overline{جـ د}$ ، رسم $\overline{هـ و}$ ⊥ المستوي ص اثبت ان المستويين هـ و أ ، هـ و ب متعامدان .

(١٣) الشعاعان $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ يميلان على المستوي س بزاويتين قياسهما ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب ، رسم $\overleftarrow{أد}$ ⊥ المستوي س ليقطعه في د فإذا علم أن أجـ = ب جـ ، أثبت أن المستويين أ د ب ، أ د جـ متعمدان .

(١٤) أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه كل المستويات أ ب جـ ، أ ب د عموديان على المستوي ب جـ د اثبت أن : (أ جـ)^2- (أ د)^2 = (جـ ب)^2- (ب د)^2 .

(١٥) دائرة مركزها م رسم مماس لهذه الدائرة عند $\overline{أ و}$ و كانت كل من ب ، جـ تنتمي إلي هذا المماس على جانبي أ ثم رسم م ن عموديا على مستوي الدائرة . اثبت أن :

[١] المستقيم $\overleftrightarrow{جـ أ}$ ⊥ المستوي ن أ م

[٢] المستوي م ن أ عمودي على المستوي ن جـ ب .