ثانياً: الهندسة الفراغية

الباب الأول

المستقيمات والمستويات

مفاهيم ومسلمات:-

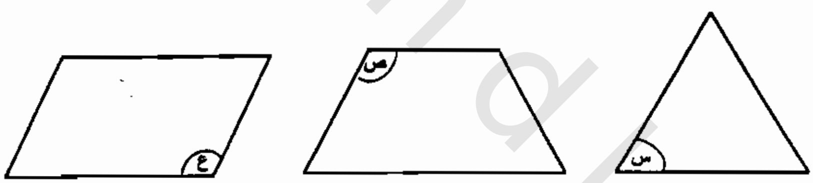
الهندسة الفراغية هي العلم الذي يدرس خواص المستقيمات والمستويات والمجسمات في الفراغ والعلاقة بينهما جميعاً.

المستقيم الهندسي :

عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط وأي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد.

المستوي:

عبارة عن مجموعة غير منتهية من النقط ينطبق عليها مستقيم في جميع الاتجاهات [المستوي لا أول له ولا أخر من جميع جهاته] ويرمز للمستوي عادة بأحد الحروف الكبيرة مثل س ، ص ويمثل المستوي الممتد من جميع جهاته بجزء محدود منه علي شكل مثلث أو شكل رباعي .

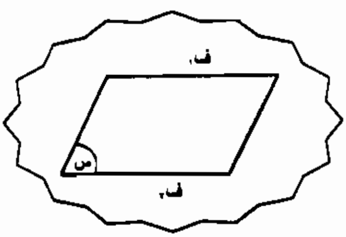


الفراغ (أو الفضاء) (ف):

هو مجموعة غير منتهية من النقط يحتوي جميع الأجسام أو المستويات (كل ما تفكر فيه من الأشكال) وبذلك يكون الفراغ بمثابة المجموعة الشاملة .

تجزئة الفراغ بأي مستوي :-

المستوي س يجزء الفراغ ف إلي ثلاث مجموعات منفصلة من النقط هي المستوي س نفسه ونصفا الفراغ ف١ ، ف٢ ويسمي المستوي س حداً (وجهاً) لكل من نصفي الفراغ رغم عدم وقوعه في أي منهما .



ونجد أن: ف١ $\cap$ ف٢ = ϕ ، ف = ف١ $\cup$ س $\cup$ ف٢

تعيين المستوي في الفراغ:-

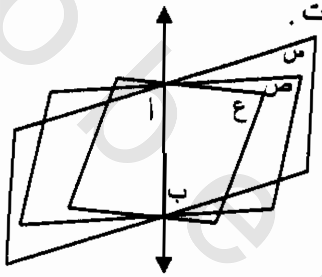
نعلم أن أي نقطة في المستوي يمر بها عدد لانهائي من المستقيمات .

في الفراغ:

١- أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

٢- أي مستقيم في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

كما بالرسم



- نقطة أ في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .
- $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات.

حالات تعيين المستوي:

(١) ثلاث نقط ليست علي استقامة واحدة . 

(٢) مستقيمان متقاطعان . 

(٣) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه . 

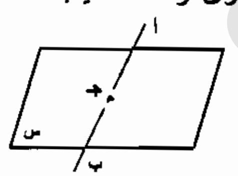
(٤) مستقيمان متوازيان . 

نتيجة : إذا اشترك مستويات في ثلاث نقط ليست علي استقامة واحدة فأنهما ينطبقان ويصبحان مستويا واحداً .

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى:-

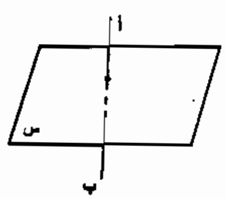
(١) المستقيم قاطع للمستوي س:

قد يلاقي المستوي في نقطة واحدة فيقال أن المستقيم قاطع للمستوى وقد يكون عمودياً علي المستوى أو مائلا عليه.



مستقيم قاطع للمستوي

(مائل)

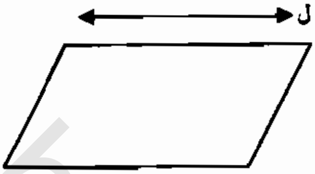


مستقيم قاطع للمستوى

(عمودى)

∴ المستقيم يقطع المستوى في جـ

(٢) قد لا يقطع المستقيم في أي نقطة فيقال أن المستقيم يوازى المستوى .



مثلاً : المستقيم أ ب يوازي المستوي س لأنه لا يشترك معه في أي نقطة .

$\therefore\ \text{ل} \cap \text{س} = \phi$

(٣) قد يشترك المستقيم مع المستوى في نقطتين فيقال إن المستقيم واقع في المستوى مثل س في الحالة التي تكون فيها جميع نقط المستقيم ل ممتداً إلى ما لانهاية واقعة في المستوى س .

$\therefore\ \text{ل} \subset \text{س}$ $\qquad$ $\therefore\ \text{ل} \cap \text{س} = \text{ل}$

الأوضاع النسبية لمستويين:

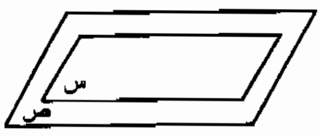
(١) قد يكون المستويان متقاطعين . والمستويان يتقاطعان في خط مستقيم .

$\therefore\ \text{س} \cap \text{ص} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٢) قد يشترك المستويان في جميع النقط فيقال إنهما متطابقان .

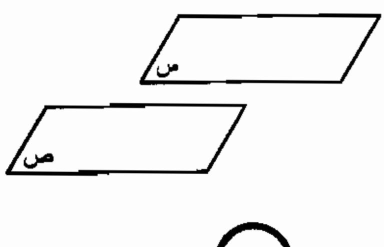
ويكون المستوى س هو نفسه المستوى ص

$\therefore\ \text{س} = \text{ص}$



(٣) قد لا يشترك المستويان في أي نقطة مهما امتدا فيقال أنهما متوازيان

$\therefore\ \text{س} \cap \text{ص} = \phi$

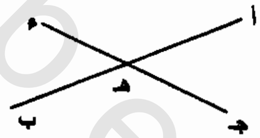


ملاحظة:

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة.

الأوضاع لنسبية لمستقيمين مختلفين في الفراغ :

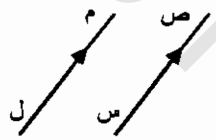
(١) قد يكون المستقيمان في الفراغ متقاطعين وهما في ستو واحد مثل المستقيمان أ ب ، جـ ء المتقاطعان في هـ .



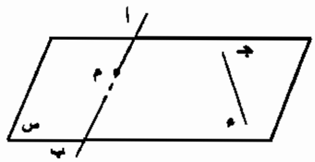
∴ [١] أ ب ∩ جـ ء = {هـ}

[٢] أ ب ، جـ ء يقعان في مستوي واحد .

(٢) قد يكون المستقيمان متوازيين مثل المستقيمين س ص ، ل م وهما أيضاً في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدا .



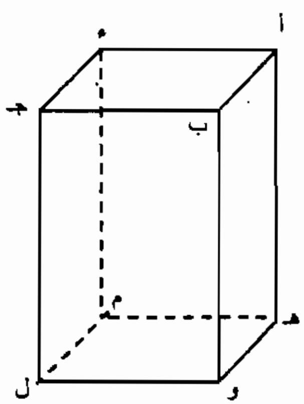
(٣) قد لا يكون المستقيمان في مستو واحد أي لا يمكن أن يوجد مستو واحد يجمعهما وفي هذه الحالة يقال إن المستقيمين غير مستويين معاً أو أنهما متخالفان.



فمثلاً: أ ب يقطع المستوى س في نقطة م والمستقيم جـ ء واقع في المستوى س ولا يمر بنقطة م فيقال أن أ ، ب ، جـ ء مستقيمان متخالفان.

∴ [١] أ ب ∩ جـ ء = ϕ [٢] أ ب ، جـ ء لا يقعان في مستوى واحد .

مثال: من الشكل الذي أمامك :



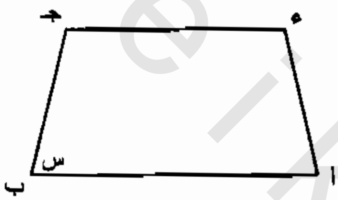
١- أذكر مستقيمين يوازيان ب و
٢- أذكر مستقيمين يوازيان ل و
٣- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى ب و ل جـ
٤- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى هـ و ل م
٥- أذكر مستقيمين يوازيان المستوى أ ب و هـ
٦- أذكر مستوياً يوازي المستوى أ هـ م ء
٧- أذكر مستقيمين متخالفين أحدهما ء جـ
٨- أذكر مستقيمين متخالفين أحدهما أ هـ

الحـــل

(١) ء م ، جـ ل	(٢) هـ م ، ب جـ	(٣) أ هـ ، ء م
(٤) أ ب ، ء جـ	(٥) ء م ل جـ	(٦) ب و ل جـ
(٧) و ل ، هـ م	(٨) ء جـ ، م ل	

<u>مثال</u>: من الشكل المقابل أ ب جـ ء شبه منحرف أثبت أن أضلاعه تقع جميعاً في مستوى واحد .

الحـــل



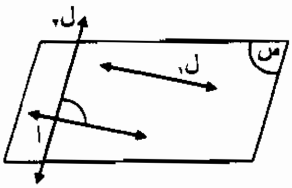
أ ب ، ء جـ مستقيمان متوازيان يعينان مستوى وليكن س .

∴ النقاط الأربعة أ ، ب ، جـ ، ء تقع في هذا المستوى .

أي أن المستقيمين أ ء ، ب جـ يقعان في المستوى س .

∴ المستقيمات أ ب ، ء جـ ، أ ء ، ب جـ تقع في المستوى .

<u>الزاوية بين مستقيمين متخالفين :-</u>



الزاوية بيم مستقيمين متخالفين هي أحدى الزوايا التى يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الآخر بفرض أن ل١ ، ل٢ مستقيمان متخالفان

، ل١ يقع في المستوي س ، ل٢ ∩ س = { أ }

من نقطة أ في المستوي س نرسم أ هـ // ل١

فتصبح الزاوية بين أ هـ ، ل٢ هي الزواية بين ل١، ل٢ .

<u>ملاحظة</u> :

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين المتخالفين = ٩٠ ° فإنه يقال إن المستقيمين المتخالفين متعامدان .

<u>مثال</u>:

أ ، ب نقطتان تقعان جهتين مختلفين من مستوى س فإذا كان أ ب ∩ س ={ء}، رسم الشعاع أ جـ ليقطع المستوى س في جـ والشعاع ب هـ ليقطع المستوى س في هـ بحيث كان أ جـ // ب هـ أثبت أن جـ ، ء ، هـ تقع علي استقامة واحدة .

الإثـــبـــات

∵ أ جـ // هـ ب فهما يعنيان مستو وليكن ص

∴ جـ ، هـ ∈ س ، جـ ، هـ ∈ ص

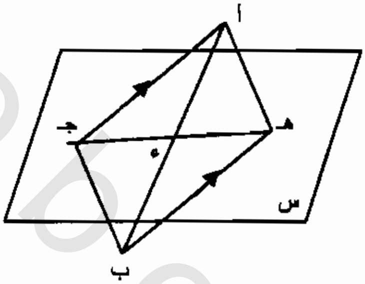
∵ ء ∈ أ ب ، ∵ أ ب ⊂ ص

∴ ء ∈ ص

∵ أ ب ∩ س = { ء }   ∴ ء ∈ س

∴ ء ∈ س ∩ ص   ∴ ء ∈ جـ هـ

∴ النقط جـ ، ء ، هـ تقع علي استقامة واحدة .



مثال: برهن أن :

إذا قطع مستقيم ثلاثة مستقيمات متوازية فإن المستقيمات الأربعة تقع فى مستوى واحد .

البرهـــان

نفرض أن ل، م ، ن ثلاثة مستقيمات متوازية يقطعها

المستقيم ك في ء ، هـ ، و علي الترتيب

∵ ل // م   ∴ ل ، م يعينان مستوى واحد وليكن ص

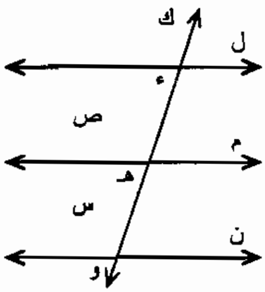
، ∵ ء هـ ⊂ ص ∴ و ∈ ص

، ∵ م // ن   ∴ م ، ن يعينان مستوى واحد وليكن س

، و ∈ س ، س ∩ ص = م

، ∵ و ∈ س ∩ ص حيث و ∉ م   ∴ س ، ص مستويان متطابقان

∴ ل، م ، ن ، ك يحويها مستوى واحد.



مثال: أ ب ، أ جـ ، أ ء ثلاثة مستقيمات في الفراغ متقاطعة في نقطة أ قطعها جميعا المستقيم ل في ب ، جـ ، ء علي الترتيب برهن أن المستقيمات الأربعة في مستوي واحد .

الحـــــل

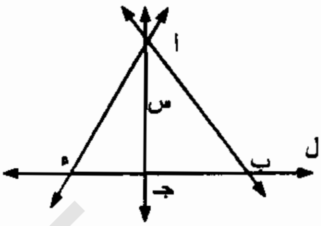
∵ المستقيمان أ ب، أ جـ متقاطعان

∴ يعينان مستوى وليكن س

∴ ب ، جـ $\in$ س　　　∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ $\subset$ س

، ∵ ء $\in$ ل　　　∴ ء $\in$ س　، ∵ أ $\in$ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ $\subset$ س　　　∴ المستقيمات تقع في مستوي واحد



ملاحظات تفيد:

(١) إذا كان المستقيمان ل١، ل٢ لا يتقاطعان ولا يتوازيان فأنهما :

أ- متخالفان.　　　　ب- أو غير مستويين معاً .

(٢) إذا كان ل١ ، ل٢ مستقيمين في الفراغ وكان ل١ $\cap$ ل٢ = ϕ فإنه إما :

أ- أن يكون المستقيمان متوازيان.　　　ب- أو متخالفان .

(٣) إذا تقاطع مستويان في خط مستقيم وكانت أ $\in$ للمستويين فإن أ $\in$ خط تقاطعهما .

(٤) المستويان يتقاطعان في خط مستقيم بينما الثلاثة مستويات يتقاطعون في خط مستقيم أو نقطة .

مثال: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة:-

١) بفرض أن ل مستقيم ، س مستوي ، أ نقطة

أ- إذا كان ل $\cap$ س = { أ } فإن ل $\subset$ س　　(　　)

ب- إذا كان ل $\cap$ س = ϕ فإن ل // س　　(　　)

ج- إذا كان ل $\subset$ س فإن ل $\cap$ س = ϕ　　(　　)

د- إذا كان ل يوازي س فإن ل $\cap$ س = { أ }　　(　　)

الحـــل : أ - ×　　ب- ×　　ج- ×　　د- ✓

٢) أ- أي نقطتين تعينان مستويا .　　(　　)

ب- يتعين المستوي إذا علم ثلاث نقط تنتمي إليه .　　(　　)

ج- يتطابق المستويان إذا اشتركا في ثلاث نقط .　　(　　)

د- أضلاع أي مستطيل تقع في مستوي واحد.　　(　　)

هـ- في الشكل الرباعي أ ب ج ء إذا كان $\overline{\text{أ جـ}}$ $\cap$ $\overline{\text{ب ء}}$ = { م }

كانت أضلاع الشكل في مستوي واحد .　　(　　)

و- أضلاع أي شكل رباعي تقع في مستو واحد .　　(　　)

الحـــل : أ - ×　　ب- ×　　ج- ×

د- ✓　　هـ - ✓　　و- ×

تمرين (١)

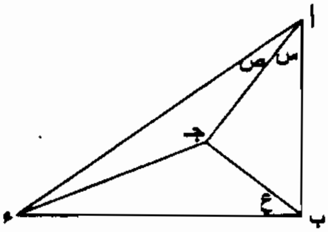
(١) أنكر العبارة الصحيحة والعبارة الخاطئة:-

١. المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوي واحد .
٢. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائى من المستويات .
٣. رؤوس المثلث تعين مستوياً .
٤. المستويان س ، ص متوازيان س $\cap$ ص = ϕ
٥. إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازى جميع المستقيمات الواقعة في هذا المستوى .
٦. المستقيمات التى توازى مستوى واحد تكون متوازية.
٧. المستقيمان المتخالفان يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان.
٨. المستوى يجزئ الفراغ إلي ثلاث مجموعات منفصلة من النقط .
٩. يمكن أن يمر بالمستقيم عدد لا نهائى من المستويات .
١٠.جميع المستويات الأفقية فى الفراغ متوازية.

(٢) س ، ص ، ع ، ل أربع نقط في الفراغ بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$
أثبت أن $\overline{\text{س ص}}$، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ يحويها مستوي واحد .

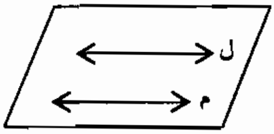
(٣) أثبت أن إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثني مثني في ثلاثة مستقيمات وتقاطع مستقيمان منهما في نقطة فإن نقطة تقاطع هذين المستقيمين تنتمي إلي المستقيم الثالث .

(٤) في الشكل المقابل أكمل :



١. س $\cap$ ص =
٢. س $\cap$ ع =
٣. ص $\cap$ ع =
٤. $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\cap$ س =
٥. $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ------ س ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ------ ع
٦. س $\cap$ ص $\cap$ ع = ------

توازي المستقيمان



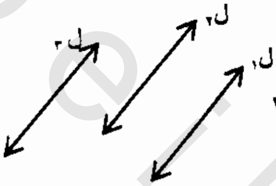
المستقيمان ل ، م يتوازيان وبذلك يكون

(أ) ل ، م في مستوى واحد.

(ب) ل $\cap$ م = ϕ

أي رغم وقوع ل ، م في مستوى واحد ومع ذلك لا يشتركان في أي نقطة

حقيقة :



المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان .

المستقيم ل$_1$ // المستقيم ل$_3$ ، المستقيم ل$_2$ // المستقيم ل$_3$

$\therefore$ المستقيم ل$_1$ // المستقيم ل$_2$

بعض المجسمات الشهيرة

المجسم :

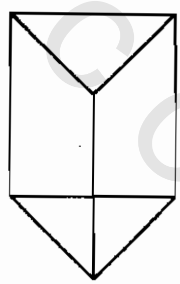
هو كل ما يشغل حيزا من الفراغ وتفصله عن الفراغ سطوح مستوية أو سطوح منحنية.

والمجسمات تنقسم إلي ثلاثة أنواع رئيسية هي:

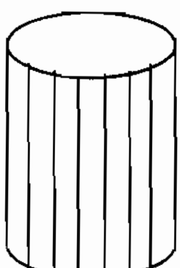
(١) مجسمات جميع أوجهها مستوية وغالباً ما يطلق عليها كثيرات السطوح . شكل(١)

(٢) مجسمات بعض أوجهها مستوية والأخرى سطوح منحنية . شكل(٢)

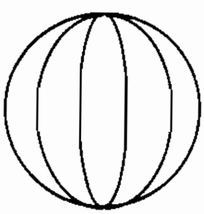
(٣) مجسمات جميع أوجهها سطوح منحنية. شكل (٣)



شكل(١)



شكل (٢)

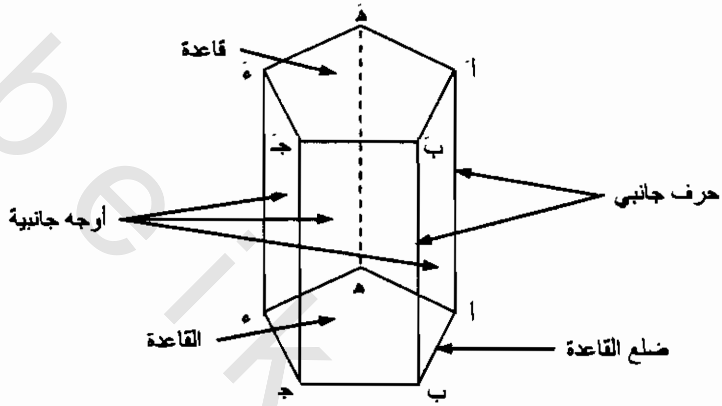


شكل (٣)

أولاً : المنشور

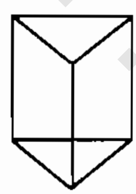
تعريف :

المنشور هو الجسم المتولد من انتقال سطح مضلع موازياً لنفسه في اتجاه ثابت ويسمي سطح المضلع في كل من وضعه الأول والأخير قاعدة المنشور.

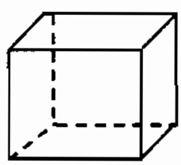


- المنشور له قاعدتان متوازيان ومتطابقان – أوجهه الجانبية علي شكل متوازى أضلاع – أحرفه الجانبية متساوية ومتوازية.
- يقال أن المنشور ثلاثى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح مثلث .
  ويقال أن المنشور رباعى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح شكل رباعى .
  ويقال أن المنشور خماسى إذا كانت كل من قاعدتيه سطح خماسى ، ------ .

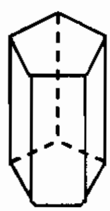
المنشور القائم:



منشور ثلاثى قائم



منشور رباعى قائم



منشور خماسى قائم

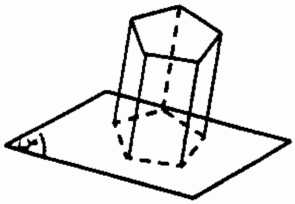
ويسمى المنشور قائماً إذا كانت:-

(أ) أوجهه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة.

(ب) أحرفه الجانبية عمودية على مستوى القاعدة .

(ج) أجهة الجانبية مستطيلات.

المنشور المائل :

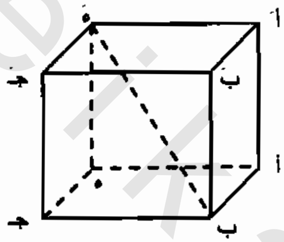


يسمي المنشور مائلا:

إذا كانت أوجهه الجانبية مائلة علي مستوي القاعدة .

حالات خاصة للمنشور

١- متوازي السطوح :-



منشور كل من قاعدتيه سطح متوازي أضلاع وبذلك تحده ستة أوجهه كل منها سطح متوازي أضلاع حيث كل وجهين متقابلين متوازيين ومتطابقين وله ١٢ حرف كل أربعة متوازية ومتساوية وله ثمانية رؤوس .

أقطار متوازي السطوح:

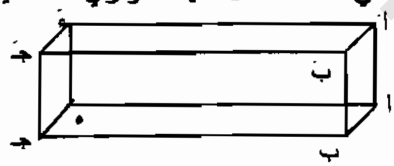
هي القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين ليسا في وجه واحد عددها أربعة وهي كما بالشكل:

أجـَ ، أَجـ ، بَ ءَ ، بءَ

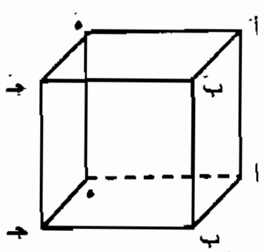
وأقطار متوازى السطوح تتقاطع جميعا في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

٢- متوازي المستطيلات:-

هو منشور رباعي قائم قاعدته سطح مستطيل. له ستة أوجه جميعها مستطيلات- أقطاره متساوية في الطول وتتقاطع في نقطة هي منتصف كل منها- متوازي المستطيلات هو متوازي سطوح قائم قاعدتيه مستطيل .



٣- المكعب :-

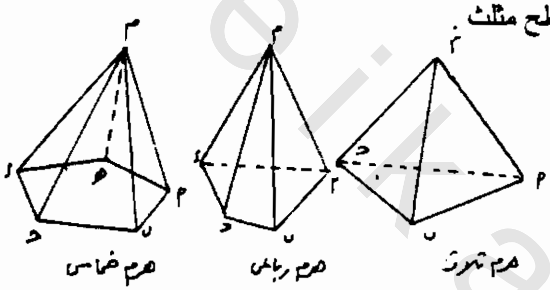


- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة .
- له (٦) أوجه عبارة عن سطوح مربعات متقاطعة .
- له(١٢) حرف متساوية في الطول.
- له ثمانية رؤوس.
- له(٤) أقطار متساوية وتتقاطع جميعا في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

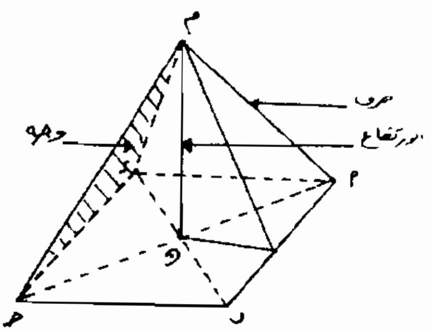
ثانياً: الهرم

تعريف :

إذا كانت م نقطة لا تنتمي إلي سطح المضلع س فإن اتجاه القطع المستقيمة المرسومة من النقطة م إلي جميع نقط سطح المضلع س يسمي هرماً . وتسمي م رأس الهرم ويسمي سطح المضلع بقاعدة الهرم .



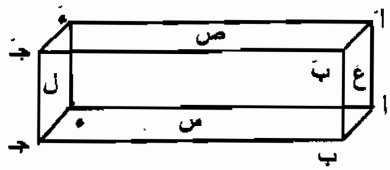
- يقال أن الهرم ثلاثي إذا كانت قاعدته سطح مثلث .
- ويقال أن الهرم رباعي إذا كانت قاعدته سطح رباعي.
- ويقال أن الهرم خماسي إذا كانت قاعدته سطح خماسي أي يسمي الهرم تبعاً لعدد أضلاعه .
- الأحرف الجانبية هي القطع المستقيمة م أ ، م ب ، م جـ ، م ء المرسومة من رأس الهرم إلي رؤوس القاعدة .
- ارتفاع الهرم هو طول القطعة المستقيمة م ن المرسومة من م عمودية علي مستوي القاعدة



الهرم الثلاثي المنتظم:

هو هرم أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع وأحرفه الستة متساوية في الطول .

مثال: أ ب ج ء أَ بَ جَ ءَ متوازي مستطيلات ـ ما العلاقة بين كل زوج من المستويات الآتية مع تعيين خط التقاطع في حالة تقاطع المستويين



(١) س ، ص
(٢) س ، ع
(٣) ص، ل
(٤) ع ، ل

الحـــــل

(١) س // ص
(٢) س ∩ ع = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$
(٣) ص ∩ ل = ءَ جَ
(٤) ع // ل

مثال: من الشكل السابق أكمل :

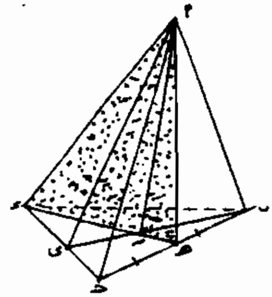
(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوي ــــ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوي ــــ
(٢) $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ // كل من المستويين ــــ ، ــــ ويقطع المستوي ــــ في جـ
(٣) المستوي ص ∩ المستوي ــــ = $\overleftrightarrow{\text{أَ ءَ}}$ والمستوي ع ∩ المستوي ل = ــــ
(٤) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ــــ المستوي س ويقطع المستوي ع في النقطة ــــ

الحـــــل

(١) س ، ع
(٢) ع ، ص ، بَ ب ج جَ
(٣) أَ أ ء ءَ ، ϕ
(٤) ⊂ ، {أ}

مثال: أ ب ج ء هرم ثلاثي ، هـ ، ى ، ك منتصفات ب ج ، ج ء ، ب أ علي الترتيب عين بالرسم المستقيم الذي يتقاطع فيه كل من :-
أ) المستويين أ ب ى ، أ ء هـ
ب) المستويين أ ب ى ، ج ء ك

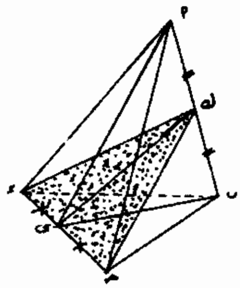
الحـــــل



∵ ن نقطة تلاقي المتوسطات

في Δ ب ج ن

أ) خط التقاطع هو $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$

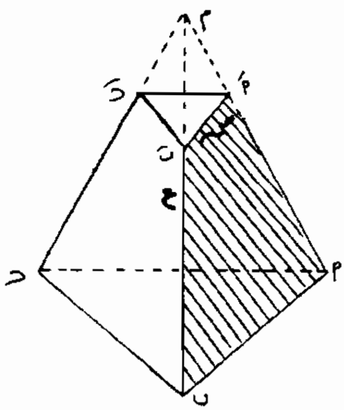


ب) خط تقاطع المستويين

أ ب ى ، ج ء ك هو $\overleftrightarrow{\text{ك ى}}$

<u>مثال</u>: أ ب ج أَ بَ جَ يسمي هرم ثلاثي ناقص متوازي القاعدتين وقاعدتاه : أ ب ج ، أَ بَ جَ موازيتان - س ترمز للوجه الجانبي أَ بَ ب أ، ص ترمز للوجه بَ جَ ج ب، ع رمز للوجه أَ أ ج جَ

<u>أكمل :</u>



(أ) س ∩ ع = ...

(ب) س ∩ ص = ...

(ج) ص ∩ ع = ...

(د) س ∩ ص ∩ ع = ...

(ه) س ∩ المستوي أ ب جـ = ...

(و) $\overleftrightarrow{\text{أَ بَ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ...

(ز) ص ∩ المستوى أَ بَ جَـ = ...

(ح) أَ بَ جَـ المستوى أ ب جـ = ...

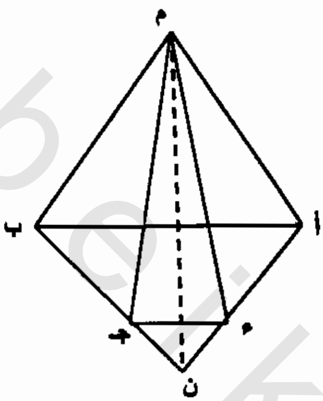
الحـــــل

أ) $\overleftrightarrow{\text{أ أَ}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$ ج) $\overleftrightarrow{\text{جـ جَـ}}$ د) { م }

هـ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ و) ϕ ز) $\overleftrightarrow{\text{بَ جَـ}}$ ح) ϕ

مثال : م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$. أوجد خط تقاطع المستويين م أ ء ، م ب جـ .

الحـــــل



∵ م ∈ لكل من المستويين م أ ء ، م ب جـ

، ∵ ن ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊂ المستوي أ م ء

∴ ن ∈ للمستوي أ م ء

بالمثل ن ∈ المستوي م أ ء ، م ب جـ

∴ م ، ن ∈ م أ ء ∩ م ب جـ

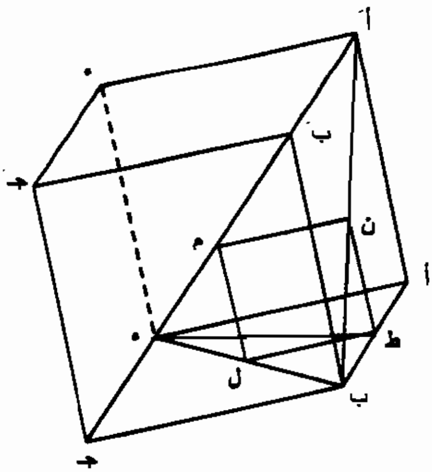
∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ هو خط تقاطع المستويين .

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ متوازي سطوح م نقطة تقاطع أقطاره ، ط ، ل ، ن منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أَ ب}}$ علي الترتيب أثبت أن الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع .

الحـــــل

∵ أقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعا في نقطة واحدة هي منتصف كل منها

∴ م منتصف بَ ء



في Δ أ أَ ب

ن ط واصلة بين منتصفي ضلعين

∴ ن ط // أ أَ ، ن ط = $\frac{1}{2}$ أ أَ ---- (١)

بالمثل في Δ ب بَ جـ

∵ م ل // بَ ب ، م ل = $\frac{1}{2}$ بَ ب ---- (٢)

∴ أ أَ // ب بَ ويساويه ---- (٣)

من خواص متوازي السطوح

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ن ط // م ب ويساويه

∴ الشكل ن ط ل م متوازي أضلاع

مثال: ضع علامة (   ) أمام العبارات الصحيحة ، علامة (×) أمام العبارات الخاطئة:-

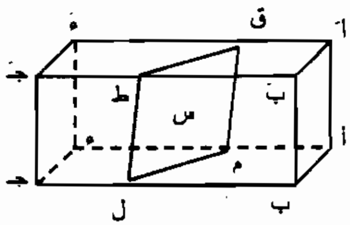
١. قاعدة الهرم الرباعي القائم يمكن أن تكون سطح مستطيل. (   )
٢. الهرم المنتظم هو هرم ثلاثي قاعدته سطح Δ متساوي الأضلاع . (   )
٣. يتقاطع المستويان في قطع مستقيمة. (   )
٤. كل مستقيمين متخالفين في الفراغ يمكن أن يمر بهما مستويان متوازيان . (   )
٥. المستويان الموازيان لمستقيم معلوم متوازيان . (   )
٦. المستقيمات التي توازي مستوي واحد تكون متوازية. (   )
٧. إذا وازي مستقيم مستوي فإنه يوازي كل مستقيم محتوي في نفس المستوي. (   )
٨. إذا توازي مستويان فأي مستقيم في أحدهما يوازي المستوي الآخر. (   )

الحـــــــل

١. ×	٢. ×	٣. ×	٤. ✓
٥. ×	٦. ×	٧. ×	٨. ✓

مثال: برهن أن مقطع متوازي السطوح بمستو يقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح متوازي أضلاع .

البرهـــــان



الوجهين أَ أ ء ءَ ، بَ ب جـ جَ في متوازي السطوح متوازيان .

قطعهما المستوي س في $\overline{\text{ق م}}$ ، $\overline{\text{ط ل}}$

∴ $\overline{\text{ق م}}$ // $\overline{\text{ط ل}}$

وبالمثل $\overline{\text{ق ط}}$ // $\overline{\text{م ل}}$

∴ الشكل ق ط ل م متوازي أضلاع .

تمرين (٢)

(١) ضع علامة ( ) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ :-

أ- إذا كان أ ب جـ ء هرم ثلاثي فإن جـ أ ب ء هرم ثلاثي . ( )

ب- إذا كان م أ ب جـ ء هرم رباعي فإن جـ م أ ب ء هرم رباعي. ( )

ج- قاعدة المنشور يجب أن تكون سطح مضلع منتظم . ( )

د- المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس واثنا عشر حرف . ( )

ء- أقطار متوازي السطوح متساوية في الطول . ( )

و- أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول . ( )

ز- لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة في واحدة . ( )

(٢) س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه ليست في مستوي واحد (هرم ثلاثي) رسم المستوي σ يوازي $\overline{\text{س ع}}$ ويوازي $\overline{\text{ص ل}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ في هـ ، و ، ن ، م على الترتيب . أثبت أن $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = ١$

(٣) م س ص ع هرم ثلاثي رسم مستوي يوازي كل من م س، ص ع ماراً بنقطة ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ قاطعا $\overline{\text{م ص}}$ ، $\overline{\text{م ع}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ في ن ، ط ، هـ على الترتيب – أثبت أن :

١- ل ن ط هـ متوازي أضلاعه محيطه م س+ ص ع

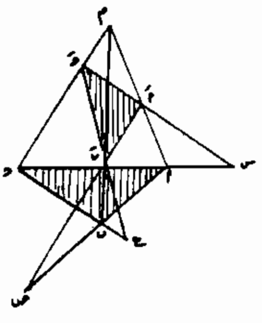
٢- إذا كان $\overline{\text{م س}} = \overline{\text{ص ع}}$ أثبت الشكل ل ن ط هـ معين .

(٤) أثبت أن المربع المنشأ على أحد أقطار متوازي المستطيلات يكافئ مجموع المربعات المنشأة على ثلاثة أحرف متلاقية في نقطة .

(٥) م أ ب ج هرم ثلاثي ، المستوي أَ بَ جَ يقطع أحرفه $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ في النقطة أَ ، بَ ، جَ فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ جَ}} = \{\text{س}\}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ بَ}} = \{\text{ص}\}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ بَ}} = \{\text{ع}\}$

أثبت أن : ١- س ، ص ، ع تنتمي لمستقيم واحد هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَ .

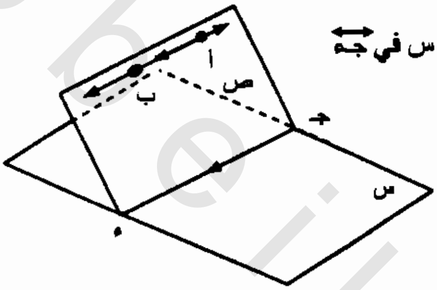
٢- س ص هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أَ بَ جَ .



توازي مستقيم ومستو

نظرية (١) :-

إذا وازي مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم .



المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوي س

ص أي مستوي يحتوي أ ب ويقطع المستوي س في $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

المطلوب : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

البرهان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوي س

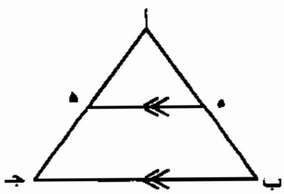
$\therefore \overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \text{س} = \phi$ ، $\because \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \subset \text{س}$

$\because \overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ء}} = \phi$

$\because \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يقعان في مستوي واحد وهو ص

$\therefore \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

مفاهيم تفيد في حل التمارين :-



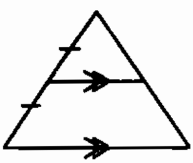
١- في Δ أ ب جـ إذا كان ء هـ // ب جـ

$\therefore$ Δ أ ء هـ ، أ ب جـ متشابهان

$\therefore$ (أ) $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}}$

(ب) $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}\right)^2$

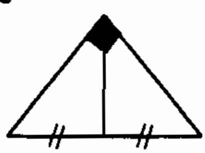
(ج) $\frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب جـ}}{\text{محيط } \Delta \text{ أ ء هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}}$



٢- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين

في Δ توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه .

٣- المستقيم المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث .



٤- المتوسط الخارج من رأس القائمة إلي منتصف الوتر ينصف الوتر.

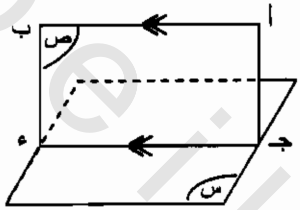
من النظرية السابقة لإثبات توازي مستقيمين في الفراغ يجب توافر الشرطين الآتيين معاً :

١) المستقيمان لا يتقاطعان .   ٢) المستقيمان يقعان في مستوي واحد .

حقيقة:-

إذا وازي مستقيم خارج مستوي مستقيماً في المستوي فإنه يوازي ذلك المستوي .

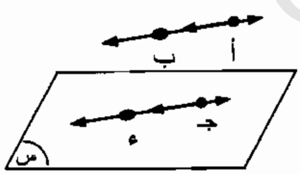
حيث أ ب خارج المستوي س ويوازي جـ ء الواقع في المستوي س وعلي ذلك فإن:



أ ب ، جـ ء يحددان مستوي وليكن ص فإذا كان المستقيم أ ب لا يوازي المستقيم س معني ذلك أنه لا يلاقيه في نقطة تقاطع علي خط تقاطع المستويين س ، ص أي علي المستقيم جـ ء وهذا مستحيل لأن: أ ب // جـ ء .

نتـــائـــج

(١) إذا وازي مستقيم مستوياً فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يقع في المستوي .

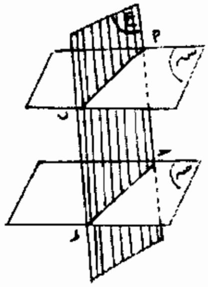


أ ب // المستوي س

، جـ ∋ س ورسمنا جـ ء // أ ب

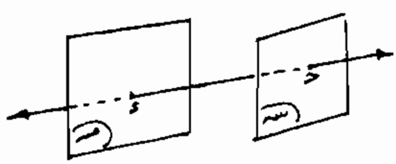
∴ جـ ء يقع في المستوي س

(٢) إذا قطع مستو مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين س ، ص مستويان متوازيان قطعهما المستوي ع في أ ب ، جـ ء .



∴ أ ب // جـ ء

(٣) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .



∵ س // ص

أ ب ∩ س = { جـ }

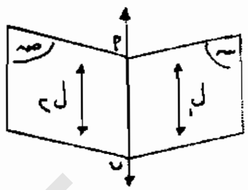
∴ أ ب ∩ ص = {ء}

(٤) إذا توازي مستقيمين ومر بكل منهما مستوي وتقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازياً لهذين المستقيمين : إذا كان ل١ // ل٢ ، ل١ ⊂ س

، ل٢ ⊂ ص وكان المستويان س ، ص

متقاطعان في $\overleftrightarrow{أ ب}$ فإن :

$\overleftrightarrow{أ ب}$ // كلا من ل١ ، ل٢

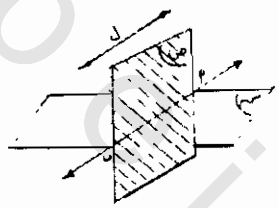


(٥) إذا وازي مستقيم كلا من مستويين

متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما

إذا كان المستقيم ل يوازي كلاً من المستويين

س ، ص المتقاطعين في $\overleftrightarrow{أ ب}$ فإن ل // $\overleftrightarrow{أ ب}$



مثال: جـ أ ب ، ء أ ب مثلثان في مستويين مختلفين فإذا كانت س ، ص ، م ، ن منتصفات جـ أ ، جـ ب ، ء أ ، ء ب على الترتيب فأثبت أن :

١) س ص // المستوي ء أ ب ٢) الشكل س ص ن م متوازي أضلاع.

الحـــــل

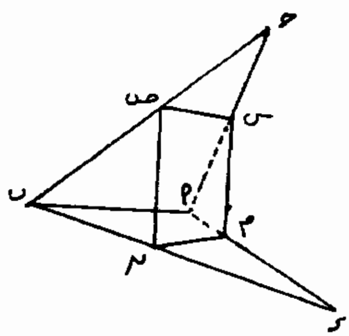
في Δ أ ب جـ

∵ س منتصف جـ أ ، ص منتصف جـ ب

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ ب ، س ص // أ ب ----- (١)

، ∵ أ ب ⊂ المستوي ء أ ب

∴ س ص // المستوي ء أ ب **أولاً**



في Δ ء أ ب

∵ م منتصف ء أ ، ن منتصف ء ب

∴ م ن = $\frac{1}{2}$ أ ب ، م ن // أ ب ------ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن س ص // م ن ، س ص = م ن = $\frac{1}{2}$ أ ب

في الشكل س ص ن م

∵ س ص = م ن ، س ص // م ن

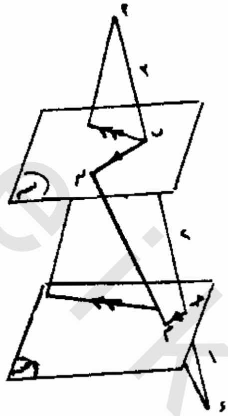
∴ الشكل س ص ن م متوازي أضلاع **ثانياً**

مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، أ ء يقطع المستويين في ب ، جـ على الترتيب بحيث أ ب :

ب جـ : جـ ء = ٣: ٢: ١ ، أ و يقطع المستويين س ، ص في النقطتين هـ ، و

، ء ن يقطعهم في م ، ن أثبت أن: $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ ء}} \quad \frac{١}{٥}$

البرهـــــان



∵ المستوي ء ب ن يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في م جـ ، ن ب ∴ م جـ // ن ب

∴ $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}} = \frac{١}{٣}$ ----- (١)

وبالمثل المستوي أ جـ و يقطع المستويين المتوازيين س ، ص

في ب هـ ، جـ و ∴ ب هـ // جـ و

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{٥}$ ----- (٢)

من (١) ، (٢)

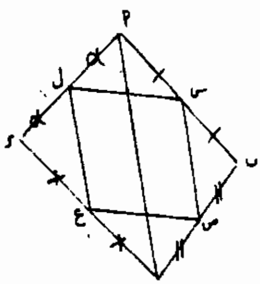
∴ $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٥}$

مثال: أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط ليست في مستو واحد (هرم ثلاثي) نصفت أ ب في س ، ب جـ في

ص ، جـ ء في ع ، ء أ في ل برهن ان :-

١) س ص // المستوي أ ء جـ ٢) النقط س ، ص ، ع ، ل في مستو واحد .

الحـــــل



∆ أ ب جـ ∵ س ص واصل بين منتصفي ضلعين

∴ س ص // أ جـ ويساوي نصفه ---- (١)

∵ أ جـ ⊂ المستوي أ ء جـ

∴ س ص // المستوي أ ء جـ

∆ أ ء جـ ∵ ل ع واصل بين منتصفي ضلعين

∴ ل ع // أ جـ ويساوي نصفه ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل ▱

∴ النقط س ، ص ،ع ، ل تقع في مستو واحد وهو متوازي الأضلاع .

مثال: اثبت أن:

أقطار متوازي السطوح تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها.

- البرهان -

∵ $\overline{\text{ءَ ء}}$ // $\overline{\text{ب بَ}}$ ، ءَ ء = بَ ب

∴ الشكل ءَ بَ ب ء متوازي أضلاع

∴ قطرا $\overline{\text{ءَ ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـَ}}$ يتقاطعان في نقطة م

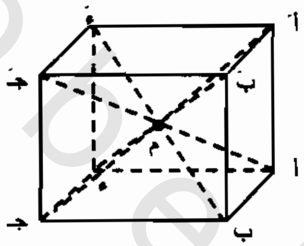
منتصف كلا منهما وكذلك $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ءَ جـَ}}$ ، أ ب = ءَ جـَ

∴ الشكل ءَ أ جـَ متوازي أضلاع

∴ قطراه $\overline{\text{ءَ ب}}$ ، $\overline{\text{جـَ أ}}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ م منتصف $\overline{\text{جـَ أ}}$ وبالمثل يمكن إثبات أن م منتصف القطر $\overline{\text{جـ أَ}}$

∴ الأقطار الأربعة تتقاطع في نقطة واحدة هي منتصف كل منها .



مثال: س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة لا تنتمي لأي منهما رسمت المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{م أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م جـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م هـ و}}$ الغير مستوية معا لتقطع المستوي س في النقط أ ، جـ ، هـ وتقطع المستوي ص في النقط ب ، ء ، و أثبت أن Δ أ جـ هـ يشابه Δ ب ء جـ .

- البرهان -

المستوي م ب و يقطع المستويين المتوازيين س، ص

في أ هـ ، ب و ∴ أ هـ // ب و

في Δ م ب و ويكون $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م و}}$ ---- (١)

كذلك المستوي م ب ء يقطع المستويين المتوازيين

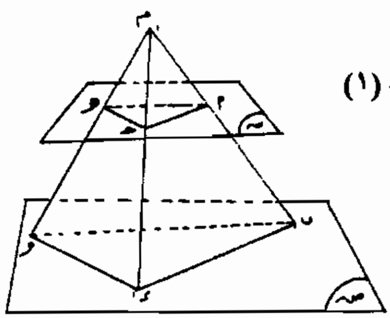
س ، ص في أ جـ ، ب ء

∴ أ جـ // ب ء

في Δ م ب ء

يكون $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م ء}}$ ---- (٢)

بالمثل جـ هـ // ء و



∴ في Δ م ء و

يكون $\frac{\text{م هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{و ء}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م ء}}$ ---- (٣)

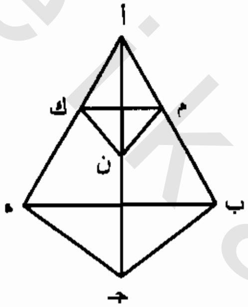
من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$\frac{\text{ا هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{و ء}}$

أي أن الأضلاع المتناظرة في Δ Δ أ جـ هـ ، ب ء و ومتناسبه

∴ Δ أ جـ هـ يشابه Δ ب ء و

مثال: في الشكل المقابل ـ المستوي م ن ك // المستوي ب جـ ء برهن أن :



١) Δ م ن ك يشابه Δ ب جـ ء

٢) وإذا كانت أ م : م ب = ١ : ٢ وكانت

مساحة Δ ب جـ ء = ٢٧٠ سم^{٢}

أوجد مساحة Δ م ن ك

الحــــــل

∵ المستو م ن ك // المستو ب جـ ء والمستو أ ب جـ قاطع لهما

∴ م ن // ب جـ

∴ في Δ أ ب جـ : $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}}$ وبالمثل يمكن اثبات أن :

في Δ أ جـ ء : $\frac{\text{ا ن}}{\text{ا جـ}} = \frac{\text{ن ك}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ا ك}}{\text{ا ء}}$

، في Δ أ ب ء : $\frac{\text{ا ك}}{\text{ا ء}} = \frac{\text{م ك}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ب}}$ ومن التناسبات الثلاثة نستنتج أن:

$\frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ن ك}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{م ك}}{\text{ب ء}}$ ∴ Δ Δ متشابهين

، ∵ Δ Δ متشابهين

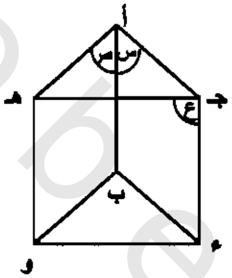
∴ النسبة بين مساحتيهما = مربع النسبة بين أي ضلعين متناظرين فيها.

∴ $\frac{\text{مساحة Δ م ن ك}}{\text{مساحة Δ ب جـ ء}} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ ∴ $\frac{\text{مساحة Δ م ن ك}}{٢٧٠} = \frac{١}{٩}$

∴ مساحة Δ م ن ك = $\frac{٢٧٠ \times ١}{٩}$ = ٣٠ سم^{٢}

مثال: مستويان س ، ص متقاطعان في أ ب ، المستوي ع يقطعهما في المستقيمين جـ ء ، هـ و علي الترتيب ، فإذا كان جـ ء // هـ و فاثبت أن : أ ب // كلا من جـ ء ، هـ و

الحـــــل



∵ جـ ء // هـ و ، ∵ هـ و ⊂ ص

∴ جـ ء // المستوي ص

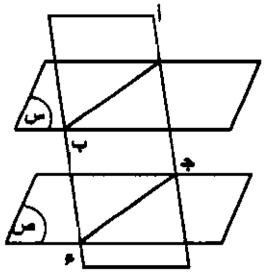
، ∵ المستوي س يمر بالمستقيم جـ ء ويقطع المستوي ص في أ ب

∴ جـ ء // أ ب ولكن جـ ء // هـ و

∴ أ ب // جـ ء // هـ و

تمرين (٣)

١- في الشكل إذا كان س ، ص مستويان قطعهما المستوي ع في أ ب ، جـ ء فأكمل الفراغات التالية بما يناسبها:

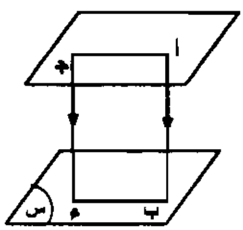


أ) أ ب ...... جـ ء

ب) إذا كان أ ب = جـ ء كان الشكل أ ب ء جـ ......

ج) إذا كان أ ب ≠ جـ ء فإن الشكل أ ب ء جـ ......

٢- في الشكل المقابل :

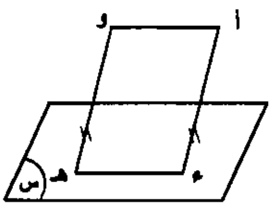


إذا كان أ ب // جـ ء وكان المستويان س ، ص يقطعان المستقيمين أ ب ، جـ ء في النقط أ ، جـ ، ب ، ء علي الترتيب .

- فاثبت أن : أ ب = جـ ء

٣- ء ، هـ نقطتين في مستوي رسم من النقطتين ء ، هـ المستقيمين المتوازيين ء م ، هـ و بحيث كان ء م = هـ و

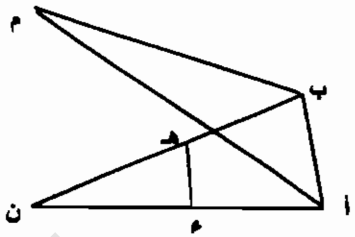
- اثبت أن م و // المستوي س .



٤- ن أ ب ، م أ ب مثلثان في مستويين مختلفين

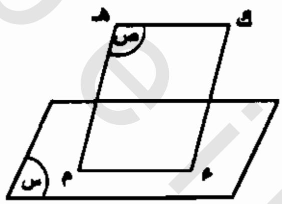
نصف المستقيمان ن أ ، ن ب في ء، هـ

- أثبت أن ء هـ يوازي المستوي م أ ب



٥- س مستوي معلوم ، ك هـ مستقيم معلوم خارج المستوي س بحيث كان ك هـ يوازي المستوي س ، رسم المستقيمان المتوازيان ك ء ، هـ م فقطعا المستوي س في ء ، م

- اثبت أن الشكل ك ء م هـ متوازي أضلاع .



٦- م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط ء، هـ ، و علي الأحرف $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ علي الترتيب بحيث كان $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}}$ - اثبت أن : المستوي ء هـ و // المستوي أ ب جـ .

٧- المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوي س رسم الشعاعان $\overrightarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ ب}}$ فقطعا المستوي س في جـ ، ء علي الترتيب فإذا كان أ ب = $\frac{٢}{٣}$ جـ ء ومساحة سطح المثلث هـ جـ ء = ٣٦ سم^{٢} – أذكر اسم الشكل أ جـ ء ب وأوجد مساحة سطحه.

٨- $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مستقيمان متخالفان ، م منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ – رسم المستوي ل م ن موازيا لكل من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ وقاطعا $\overline{\text{ب جـ}}$ في ل ، $\overline{\text{أ ء}}$ في ن – أثبت أن :

١) $\overline{\text{م ن}}$ // أ ب　　٢) $\overline{\text{ل م}}$ // جـ ء　　٣) ل ن < $\frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء)

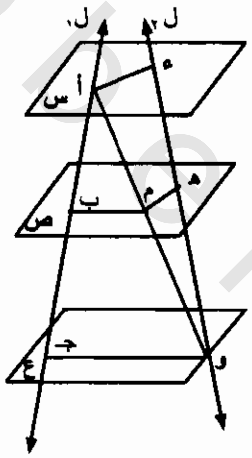
٩- أ ، ب ، جـ ثلاث نقط تنتمي إلي مستقيم واحد – ل يوازي مستوي مثل س ، م ∉ ل ، م ∉ س ، المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ تقطع المستوي س في النقط ء ، هـ ، و علي الترتيب .

اثبت أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

١٠- أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ع ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ وكان $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ في هـ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ في جـ - اثبت ان $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

تمرين مشهور

إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة .



البرهان

نرسم $\overline{\text{أ ء}}$ فتقطع المستوي ص في م ونرسم $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$

∵ المستوي أ جـ و قطع المستويين المتوازيين ص ، ع في

$\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ و}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ م}}{\text{م و}}$ ----- (١)

وبالمثل المستوي ء و أ قطع المستويين المتوازيين

س ، ص أ ء ، هـ م ∴ أ ء // هـ م

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م و}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ وهو المطلوب

<u>ملاحظات :</u>

١- إذا كان أ ب = ب جـ فإن ءهـ = هـ و

٢- يعرف هذا التمرين باسم نظرية لما ليس في الفراغ .

<u>نظرية :</u>

إذا تقاطع مستقيمان في مستوي وكانا متوازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوي آخر كان مستوي المستقيمين الأولين موازياً لمستوي المستقيمين الآخرين .

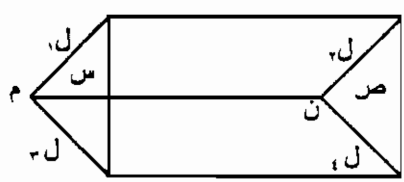
تستخدم هذه النظرية في إثبات توازي مستويين حيث :

ل١ ، ل٣ ⊂ س

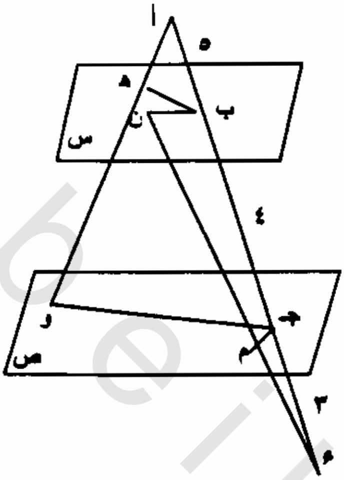
ل١ ∩ ل٣ = {م}

، ل٢ ، ل٤ ⊂ ص ، ل٢ ∩ ل٤ = {ن}

∴ المستوي س// المستوي ص



مثال : في الشكل س ، ص مستويان متوازيان ، أ ء قاطع لهما بحيث أ ب : ب جـ : جـ ء = ٥ : ٤ : ٣ فإذا كان ء ن قاطع لهما



- برهن أن : $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{٥}{٢١}$

الحـــــل

∵ المستوي س // المستوي ص ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ قاطع لهما

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{٥}{٩}$ ----- (١)

∵ المستوى ص // المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{ء أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ قاطع لهما

∴ $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{ب ن}} = \frac{٣}{٧}$ ----- (٢)

من (١) ، (٢)

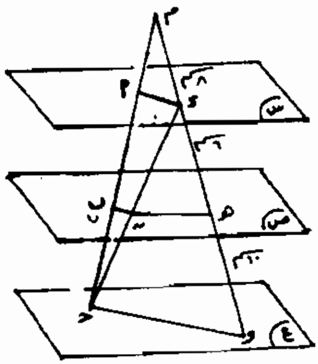
∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} \times \frac{\text{جـ م}}{\text{ب ن}} = \frac{٥}{٩} \times \frac{٣}{٧} = \frac{٥}{٢١}$

مثال : في الشكل المقابل

س // ص // ع ، ء هـ = ٦ سم ، هـ و = ١٠ سم ، جـ و = ٢٤ سم ، م ء = ٨ سم. برهن أن :

١) ب ، ن ، هـ علي استقامة واحدة . ٢) قيمة $\frac{\text{ء ن}}{\text{ء جـ}}$ ٣) أحسب طول ب هـ

الحـــــل



∵ س // ص ، المستوي م هـ ب قاطع ∴ $\overline{\text{ن ب}} // \overline{\text{ء أ}}$

، ∵ ص // ع والمستوي ء و جـ قاطع ∴ $\overline{\text{هـ ن}} // \overline{\text{و جـ}}$

، ∵ ع // س والمستوي م و جـ قاطع ∴ $\overline{\text{ء أ}} // \overline{\text{و جـ}}$

∴ هـ ن ، $\overline{\text{ن ب}} // \overline{\text{و جـ}}$ وهما مشتركان في نقطة واحدة

∴ النقط هـ ، ن ، ب علي استقامة واحدة

Δ ء و جـ : $\overline{\text{هـ ن}} // \overline{\text{و جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ء ن}}{\text{ن جـ}} = \frac{٦}{١٠}$

∵ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{و جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{١٦} = \frac{\text{هـ ن}}{٢٤}$

∴ هـ ن = ٩ سم

في Δ م و جـ :

∵ ء أ // و جـ ∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{و جـ}}$

∴ $\frac{٨}{٢٤} = \frac{\text{أ ء}}{٢٤}$ ∴ أ ء = ٨ سم

في Δ جـ ء أ :

∵ ن ب // ء أ   ∴ $\frac{\text{جـ ن}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ن ب}}{\text{أ ء}}$

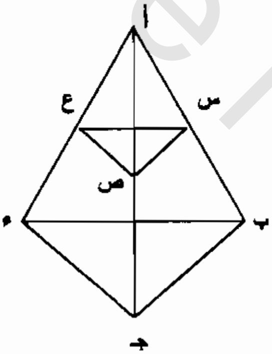
∴ $\frac{١٠}{١٦} = \frac{\text{ن ب}}{٨}$ ∴ ن ب = ٥   ∴ هـ ب = هـ ن + ن ب = ٩+٥ = ١٤

<u>مثال</u> : أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه س، ص ، ع منتصفات أ ب ، أ جـ ، أ ء برهن أن :

١) المستوي س ص ع // المستوى ب جـ ء   ٢) Δ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء

٣) النسبة بين مساحتيهما .

الحـــــل



∵ س منتصف أ ب ، ص منتصف أ جـ

∴ س ص // ب جـ وبالمثل

ص ع // جـ ء ، س ع // ب ء

، ∵ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ متقاطعان في س

، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ متقاطعان في ب

∴ مستوى س ص ع // مستوى ب جـ ء   **<u>أولا</u>**

، ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ في Δ أ ب جـ   ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}}$

، $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ في Δ أ جـ ء   ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{جـ ء}}$

، $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ في Δ أ ب ء   ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ب ء}}$

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ب ء}}$

∴ Δ س ص ع يشابه Δ ب جـ ء والنسبة بين مساحتيهما = $(\text{س ص})^2 : (\text{ب جـ})^2$

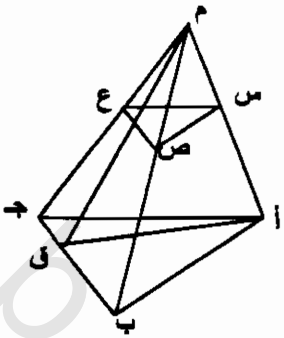
<u>مثال</u> : م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط س ، ص ، ع علي $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ علي الترتيب بحيث

كان $\frac{\text{م س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{ص ب}} = \frac{\text{م ع}}{\text{ع جـ}} = \frac{١}{٣}$ ـ برهن أن :

١) المستوي س ص ع // المستوى أ ب جـ

٢) إذا أخذت نقطة ق ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ورسم $\overline{\text{م ق}}$ فقطع $\overline{\text{ص ع}}$ في ل برهن أن أ ق = ٤ س ل

الحـــــل



∵ $\frac{\text{م س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{ص ب}} = \frac{1}{3}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ المستوى س ص ع // المستوى أ ب جـ

∵ المستوى م أ ق قطع المستويين س ص ع ، أ ب جـ

في $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ق}}$ ∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{أ ق}}$

∴ $\frac{\text{م س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{ص ب}} = \frac{1}{4}$ ∴ أ ق = ٤ س ل

تمرين (٤)

(١) م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط ء، هـ ، و علي الأحرف $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ علي الترتيب بحيث كان: $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}} = \frac{1}{3}$

أ) أثبت أن المستوي ء هـ و // المستوي أ ب جـ

ب) إذا كان م (Δ ء هـ و) = ٩ سم^2 فأوجد مساحة Δ أ ب جـ

(٢) م أ ب جـ هرم ثلاثي مساحة قاعدته أ ب جـ = ١٥٠ سم^2 أخذت نقطة ء علي $\overline{\text{م أ}}$ بحيث $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{2}{3}$ رسم من ء مستوى يوازي القاعدة أ ب جـ فقطع $\overline{\text{م ب}}$ في هـ ، $\overline{\text{م جـ}}$ في و

أ) أثبت أن : Δ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ

ب) أوجد مساحة Δ ء هـ و

(٣) أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان في مستويين مختلفين ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ومنتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ اثبت أن $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي المستوي ء ب جـ .

(٤) أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان في مستويين مختلفين ، س، ص، ع، ل منتصفات $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ علي الترتيب – أثبت أن الشكل س ص ع ل أضلاعه في مستوى واحد يوازي كلا من $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

(٥) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثي ، ن نقطة تقاطع قطري الوجه أَ أ ب بَ ، م نقطة تقاطع قطري الوجه بَ ب جـ جَ ، ط ، ق منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ علي الترتيب. أثبت أن الشكل ن م ق ط متوازي أضلاع .

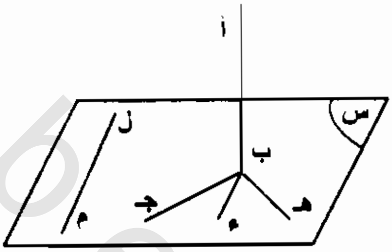
(٦) أ ب جـ ء مربع ، ن نقطة لا تنتمي إلي مستواه بحيث ن أ = ن ب = ن جـ = ن ء ، رسم مستوي مار بالضلع $\overline{\text{أ ب}}$ قاطعاً $\overline{\text{ن جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ء}}$ في هـ ، و علي الترتيب. أثبت أن الشكل أب هـ و شبه منحرف متساوي الساقين .

(٧) س ، ص ، ع ثلاث مستويات متوازية قطعها المستقيمان ل ، م فإذا قطعها ل في أ ، ب ، جـ وقطعها م في ء، هـ ، و وكان أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٢سم ، هـ و = ٣سم فأحسب طول $\overline{\text{ء هـ}}$.

(٨) س ، ص مستويان متوازيان ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ يقطع المستويين في ب، جـ علي الترتيب بحيث كان أ ب: ب جـ : جـ ء = ١: ٣: ٥ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ يقطع س ، ص في النقطتين هـ و ، $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ يقطع المستوى ص في م والمستوي س في ن – أثبت أن : ٢ م جـ . جـ و = ٥ ن ب . ب هـ

المستقيم العمودي علي المستو

يقال للمستقيم بأنه عمودي علي مستقيم ، إذا كان هذا المستقيم عمودياً علي جميع المستقيمات الواقعة في المستوي والتي تلاقي ذلك المستقيم .



في الشكل :

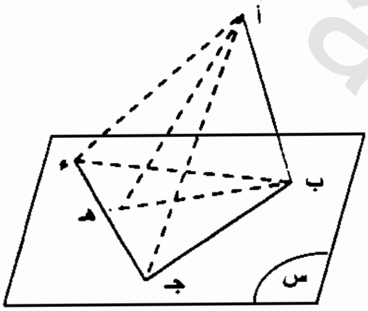
أ ب عمودي علي كلمن المستقيمات :

ب جـ ، ب ء ، ب هـ ، ل م الواقعة في المستوي س

$\therefore$ المستقيم أ ب $\perp$ المستوي س .

أي أن : إذا كان المستقيم أ ب $\perp$ المستوي س فانه يكون عمودياً علي جميع المستقيمات الواقعة في المستوي سواء مرت هذه المستقيمات بالنقطة ب أو لم تمر .

نظرية: المستقيم العمودي علي كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً علي مستويهما .



في الشكل:

أ ب $\perp$ كل من المستقيمين ب جـ ، ب ء

المتقاطعين في نقطة ب والواقع في المستوي س

$\therefore$ أ ب $\perp$ المستوي س

نتائج :

١- إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين مستويين معاً وغير متوازيين فانه يكون عمودياً علي مستويهما. (هذه النتيجة تعميم للنظرية السابقة) .

$\therefore$ لإثبات أن مستقيماً عمودياً علي مستوي معلوم ، نثبت أن هذا المستقيم يكون عمودياً علي أي مستقيمين غير متوازيين في المستوي .

٢- جميع الأعمدة المرسومة علي مستقيم ل من نقطة أ عليه تقع في مستوى واحد هو المستوى العمودي علي هذا المستقيم.

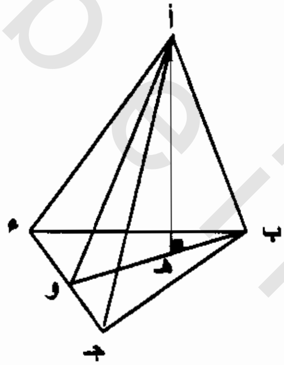
٣- يوجد مستو واحد وواحد فقط عمودي علي مستقيم ل من نقطة عليه.

٤- المستقيمان العمودان علي مستقيم واحد متوازيان .

٥- إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيان وكذلك إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً علي الآخر.

تمرين : أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه أ جـ = أ ء ، ب جـ = ء ب ، ب و متوسط في Δ ب جـ ء رسم أهـ ⊥ ب و برهن أن أ هـ ⊥ المستوى ب جـ ء .

الحــــــل



∵ و في منتصف جـ ء ، Δ ب جـ ء متساوي الساقين

∴ $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب و}}$ ----- (١)

كذلك $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ و}}$ ----- (٢)

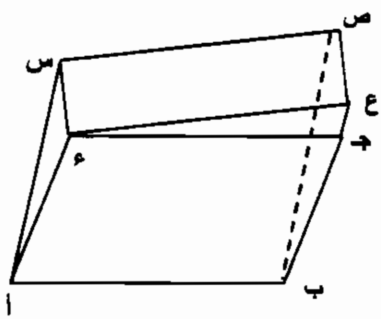
من (١) ، (٢)

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ المستوي ب و أ ∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ هـ}}$

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ كلا من $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ المستوي ب جـ ء

مثال: أ ب جـ ء متوازي أضلاع أقيم من أ ، ب ، جـ أعمدة علي المستوي أ ب جـ ء فقابلت مستوياً مارا بالنقطة ء في س ، ص ، ع . أثبت أن: الشكل س ص ع ء متوازي أضلاع.

الحــــــل



∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ أعمدة علي المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ع}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$

$\overleftrightarrow{\text{ب ص}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = { ب }

، $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ = { أ }

∴ المستوي ب ص ع جـ // المستوي أ س ء

∵ المستوي ع ص س ء قاطعاً لهما في $\overleftrightarrow{\text{ع ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ع ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ء}}$ ----- (١)

بالمثل ع جـ // ص ب ، جـ ء // ب أ

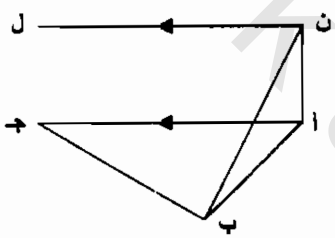
∴ المستوي ع جـ ء // المستوي ص ب أ س ، المستوي ع ص س ء قاطعاً لهما

في ص س ، ع ء ∴ ص س // ع ء ------ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ء متوازي أضلاع

مثال: أ ب جـ Δ قائم الزاوية في أ والمستقيم أ ن عمودي علي مستوي المثلث رسم ن ل موازياً أ جـ أثبت أن ن ل ⊥ ن ب .

الحـــــل



أن ⊥ المستوي أ ب جـ

∴ ن أ ⊥ أ جـ ، أ جـ ⊥ أ ب ، أ جـ ⊥ أ ن

(لأن ن أ ⊥ مستوي Δ أ ب جـ)

∴ أ جـ ⊥ المستوي ن أ ب

، ∵ ن ل // أ جـ ∴ ن ل ⊥ المستوي ن ل ب

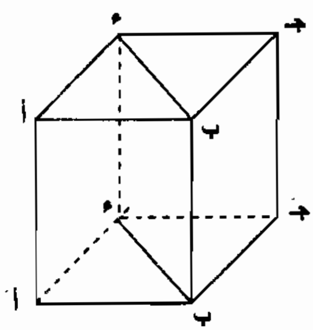
∴ ن ل ⊥ ن ب

مثال: أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ مكعباً .

١) بين أن ب بَ ⊥ علي المستوي أ ب جـ وأستنتج أن أ جـ ، ب بَ متعامدان .

٢) أثبت أن أ جـ ⊥ المستوي ء ب بَ وأستنتج أن أ جـ ، ء بَ متعامدان .

الحـــــل



(١) ب بَ والمستوي أ ب ج متعامدان لأن :

ب جـ ⊥ ب بَ ، ب أ ⊥ ب بَ

∴ ب بَ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ ب بَ ⊥ المستوي أ ب جـ

، أ جـ يقع في المستوي أ ب جـ

∴ المستقيمان ب بَ ، أ جـ متعامدان

(٢) أ جـ والمستوي ء ب بَ متعامدان لأن :

أ جـ ⊥ ء ب (قطر المربع أ ب جـ ء) ، أ جـ ⊥ ب بَ

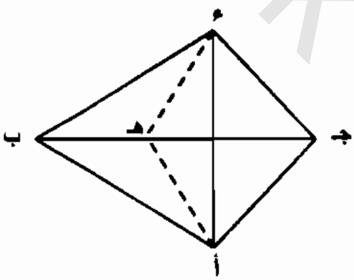
∴ أ جـ ⊥ المستوي ء ب بَ

∴ أ جـ ⊥ المستوي ء ب بَ ، ء بَ يقع في المستوى ء ب بَ

∴ أ جـ ، ء بَ متعامدان .

<u>مثال</u>: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، ء نقطة خارج مستو المثلث بحيث كان ء أ = ء ب = ء جـ ، نصف ب جـ في هـ . أثبت أن : ء هـ ⊥ المستوى أ ب جـ .

الحــــــــل



الفكرة : محاولة إثبات أن ء هـ ⊥ مستقيمين في المستوي أ ب جـ وبذلك يكون ء هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

∵ ء جـ = ء ب ، هـ منتصف ب جـ

∴ ء هـ ⊥ ب جـ ----- (١)

نصل أ هـ فيكون أ هـ = ب هـ

∴ ء ب² = ء هـ² + هـ ب² = ء هـ² + أ هـ²

لكن ء ب = ء أ ∴ ء أ² = ء هـ² + أ هـ²

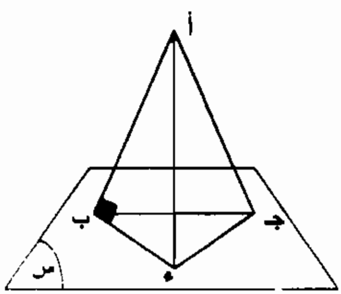
∴ < ء هـ أ قائمة ∴ ء هـ ⊥ أ هـ ----- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ء هـ عمودي علي كل من ب جـ ، أ هـ الواقعين في المستوي أ ب جـ

∴ ء هـ ⊥ المستوي أ ب جـ

<u>مثال</u> : أ ب عمودي علي المستوي س ويلاقيه في ب، ب جـ ، جـ ء مستقيمان متعامدان في المستوي س . أثبت أن: أ جـ ⊥ جـ ء .

الحــــــــل



∵ أ ب ⊥ المستوي س فهو عمودي علي أي مستقيم فيه

∴ أ ب ⊥ جـ ب ومن الرسم

أ جـ² = أ ب² + جـ ب² ----- (١)

∵ ب جـ ⊥ جـ ء

∴ ب ء² = جـ ء² - جـ ب² ---- (٢)

∵ أ ب ⊥ ب ء ∴ أ ء² = أ ب² + ب ء² ---- (٣)

بالتعويض من (٢) في (٣) عن قيمة ب ء^2

∴ أ ء^2 = أ ب^2 + ب ء^2 = أ ب^2 + جـ ء^2 + جـ ب^2

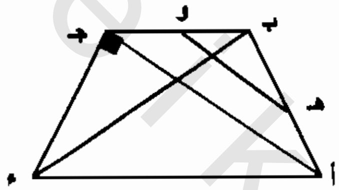
= أ ب^2 + جـ ء^2 + جـ ب^2

= أ جـ^2 + جـ ب^2 من المعادلة رقم (٣)

∴ < أ جـ ء قائمة ∴ أ جـ ⊥ جـ ء

<u>مثال:</u> أ ب جـ ء شكل رباعي ليست أضلاعه كلها في مستوى واحد ، أ جـ عمودي علي كل من جـ ، ء جـ . نصف أ ب في هـ ، ب جـ في و. أثبت أن هـ و ⊥ المستوي ب جـ ء .

الحـــــل



∵ أ جـ ⊥ ب جـ ، ء جـ

∵ هـ و // أ جـ

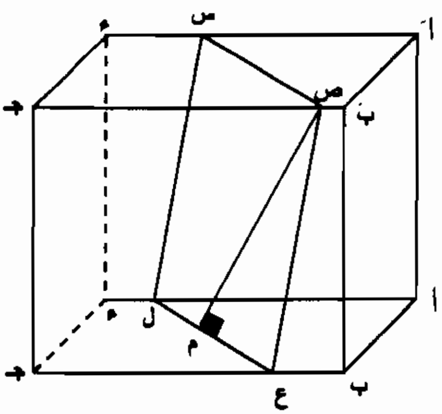
∴ هـ و ⊥ ب جـ ، ء جـ

وحيث إن ب جـ ، ء جـ يعنيان مستوي

∴ هـ و ⊥ المستوى ب جـ ء

<u>مثال:</u> أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ متوازي سطوح – المستوى س العمودي علي ب جـ قطع الأحرف أَ ءَ ، بَ جَـ ، ب جـ ، أ ء في س ، ص ، ع، ل علي الترتيب أثبت أن: المقطع س ص ع ل سطح متوازي أضلاع وإذا رسم $\overline{\text{ص م}}$ ⊥ ل ع. أثبت أن: $\overline{\text{ص م}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ء .

الحـــــل



∵ المستوي أ ب جـ ء // المستوي أَ بَ جَـ ءَ

، المستوي س قاطعاً لهما في $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$

∴ سَ صَ // ع ل ----- (١)

بالمثل المستوى ب بَ جَـ جـ // المستوى أ ء ءَ أَ

والمستوي س قاطعاً لهما في $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوي س

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ----- (٣)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ فرضاً ----- (٤)

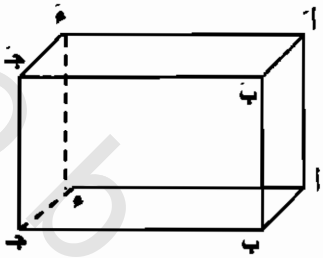
من (٣) ، (٤)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ كل من $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ص م}}$ ⊥ المستوي أ ب جـ ء

تمرين (٥)

١- **في الشكل المقابل :**



أ ب جـ ء أَ بَ جَـ ءَ متوازي مستطيلات

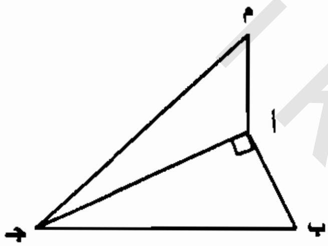
(أ) ما وضع أ أَ بالنسبة للمستوي أ ب جـ ء ؟ ولماذا؟

(ب) ما وضع ء أ بالنسبة للمستوي أ ب بَ أَ ؟ لماذا؟

(ج) ما وضع ب أ بالنسبة للمستوي أ ء ءَ أَ ؟ ولماذا؟

(ء) أثبت أن أ أَ ⊥ ب ء

٢- **في الشكل المقابل:**



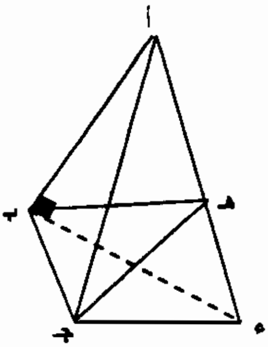
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، م نقطة لا تنتمي للمثلث أ ب جـ

، م أ = أ ب ، م جـ = ب جـ

- **اثبت أن:** أ جـ ⊥ المستوي م أ ب .

٣- **في الشكل المقابل:**



إذا كان أ ب ⊥ ب جـ ، ء ب ⊥ ب جـ ، أ ب = ب ء

فاثبت أن:

(أولاً) Δ أ ب جـ ≡ Δ ء ب جـ

(ثانياً) ب جـ ⊥ المستوي أ ب ء .

(ثالثاً) أ ء ⊥ المستوي هـ ب جـ حيث هـ منتصف أ ء .

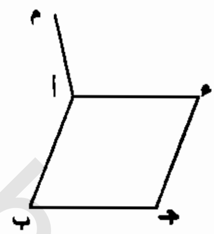
٤- النقط أ ، ب ، جـ ، ء لا تقع في مستو واحد وكان أ ب = أ جـ = أ ء ، أ ب ⊥ المستوي أ جـ ء ، أ ء ⊥ المستوي ب أ جـ - ارسم شكلا يوضح ذلك : أثبت أن Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع.

٥- **في الشكل المقابل :** أ ب جـ ء مربع ، م نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع بحيث م أ ⊥ أ ب

أولاً: هل م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ؟ ولماذا؟

ثانياً : أثبت أن ب أ ⊥ المستوى م أ ء .

ثالثاً : هل يوجد مستقيم أخر ⊥ المستوى م أ ء ؟ لماذا ؟



٦- أ ب جـ ء أ َ ب َ جـ َ ء َ مكعب طول حرفه = ل

اثبت أن : **(أولاً)** Δ ء َ أ جـ متساوى اللأضلاع واحسب مساحة سطحه بدلالة ل .

ثانياً أ ب ⊥ ب جـ َ   **ثالثاً** أ جـ ⊥ ء َ ب

رابعاً أثبت أن اقطار المكعب متساوية في الطول وطول كلا منها ل$\sqrt{3}$ وتستخدم هذه الخاصية في حل التمارين .

٧- أ ب جـ ء أ َ ب َ جـ َ ء َ متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة ب جـ = س ، ب أ = ص ، ب ب َ = ع

أولاً: أثبت أن : ب جـ ⊥ ب أ َ

ثانياً : أثبت أن : اقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول ومربع طول كلا منها = س^2+ ص^2+ ع^2

ثالثاً : إذا كان س = ٨ سم ، ص = ٦سم ، ع = ٢٤ سم – فاحسب طول قطر متوازي المستطيلات .

تمارين غير محلولة

- أذكر فقط أي من الجمل الآتية صحيح وأي منهما خاطئ :-

١. أي نقطتين يمر بهما مستو واحد فقط .

٢. أي نقطة من الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

٣. أي ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد على الأقل .

٤. كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستو واحد فقط .

٥. كل مستويين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة .

٦. أى مستقيم محتوى فى كل مستوى يجزئ هذا المستوى إلى ثلاث مجموعات منفصلة من النقط .

٧. أى مستوى يجزئ الفراغ إلى مجموعتين منفصلتين من النقط .

٨. رؤوس المثلث تعين مستوياً .

٩. رؤوس متوازى الأضلاع لا تعين مستويا .

١٠. المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية .

١١. المستقيمات الأفقية فى الفراغ كلها متوازية .

١٢. المستويان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان .

١٣. إذا وازى مستقيم كل من مستويين كان هذا المستويان متوازيين .

١٤. إذا توازى مستويان فكل مستقيم فى أحدهما يوازى أى مستقيم فى الآخر .

١٥. إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ س ، المستوى ⊃ س يوازى المستوى ص فإن أ ب // المستوى ص .

١٦. قاعدة المنشور القائم يجب أن تكون سطح مضلع منتظم .

١٧. المنشور القائم أحرفه عمودية على كل من قاعدتيه .

١٨. متوازى السطوح المائل هو منشور مائل جميع أوجهه سطوح متوازيات أضلاع .

١٩. متوازى المستطيلات هو منشور قائم قاعدته سطح مستطيل .

٢٠. المكعب له ثمانية أوجه وستة رؤوس وإثنا عشر حرف .

٢١. أقطار متوازى السطوح متساوية فى الطول .

٢٢. أقطار متوازى المستطيلات متساوية فى الطول .

٢٣. لا يمكن رسم أربع مستويات كل ثلاثة منها متقاطعة فى نقطة واحدة.

٢٤. قاعدة الهرم الرباعى القائم يمكن أن تكون سطح معين .