

الباب الثالث

المحددات

المحدد هو مجموعة من العناصر مرتبة على هيئة صفوف وأعمدة بشرط عدد الصفوف = عدد الأعمدة وكل محدد له قيمة محددة .

$$* \text{ محدد } 2 \times 2 \text{ ويأخذ الصورة } \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

مثال 1: أوجد قيمة :-

$$[أ] \quad 2 - = 6 - 4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad [ب] \quad 1 = 1^2 + 1^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

* محدد 3×3

$$\begin{matrix} + & - & + \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad \text{مثال 2: أوجد قيمة}$$

$$\text{المحدد} = 1 + = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 5 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

ملاحظة: فك المحدد ممكن باستخدام أي صف أو أي عمود مع ملاحظة الإشارات .

$$\text{مثال 3: حل المعادلة} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3س \\ 3س & 1 & 0 \\ 3س & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore 3س = (3س - 2)س$$

$$0 = 3س - 2س - 3س = 3س - 2س - 3س = 3س - 3س = 0$$

$$0 = (3س - 1)س$$

$$\therefore 3س = 0, \quad 3س = 1, \quad 3س = 1$$

مثال ٤: إذا كانت (س-١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ١+س & ك & ٤ \\ ٤ & ٤ & ١+س \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix}$ فابعد قيمة ك؟

الحل

∴ (س-١) أحد عوامل المحدد

∴ المحدد = ٠ عندما س=١
 ∴ أي عندما س=١

$$٠ = (٢٠-ك٧)٤ + (١٠-ك٦)٤ + (١٤-٢٤)٢$$

$$٠ = ٨٠ - ٢٨ك + ١٠ك + ٤٠ - ٢٤ك + ٢٠$$

$$٢٠ - ٢٤ك + ٣٨ك - ٦٠ = ٠$$

$$٣ك - ١٩ك + ٥٠ = ٠$$

$$٠ = (٣-ك)(١٠-ك) \quad \therefore ك = \frac{١٠}{٣} = ك = ٣$$

مثال ٥: إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٢$ فابعد قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$

الحل

$$\therefore ٢ = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$\therefore ٢ = ٤ - ٤ = ٠ \quad \therefore ٢ + ٤ = ٤$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ٤ = ٠ = ٤ - ٤ = ٢ - ٢ = ٢$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ٤ = ٠ = ٤ - ٤ = ٢ - ٢ = ٢$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ - ٤ = ٠ = ٤ - ٤ = ٢ - ٢ = ٢$$

مثال ٦: إذا كانت جـ جنرا للمعائلة س^٢ - س - ١ = ٠

فأثبت ان: $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

الحل

الطرف الأيمن : (ج - ٢) - (٣ - ٢ج) + (١٤ - ١٢)

$$\therefore \text{ج} - ٢ - ٣ + ٢ج + ٢$$

$$\text{ج} - ٢ج - ١$$

\therefore ج جذراً للمعادلة $\text{ج} - ٢ج - ١ = ٠$

\therefore ج - ٢ج - ١ = ٠ وهذا يحقق صحة المطلوب

تمارين (١٢)

(١) أكتب المحددات التي تنشأ من حذف المتغيرات من المعادلات الآتية:-

$$(أ) \quad ٢س = ٣ + س$$

$$(ب) \quad ١ = ٢ص - س ، ٤ = ٣ص + س ، ٥ = ٢ص - س$$

$$(ج) \quad ٣ = ص - س ، ٣ = ٢ص + س ، ٤ = ص + س ، ٥ = ٣ص - س$$

(٢) أوجد قيمة المحددات الآتية :-

$$[أ] \quad \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \quad [ب] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} \quad [ج] \quad \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$[د] \quad \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix} \quad [هـ] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} \quad [و] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}$$

(٣) باستخدام عناصر الصف الأول ، أوجد قيمة المحددات الآتية :-

$$[أ] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix} \quad [ب] \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} \quad [ج] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$[د] \quad \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} \quad [هـ] \quad \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} \quad [و] \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{vmatrix}$$

(٤) حل كلا من المعادلات الآتية:-

$$(أ) \quad \begin{vmatrix} ١س & ٢س \\ ١س & ١س \end{vmatrix} = ١ - ٢س \quad (ب) \quad \begin{vmatrix} ١س & ١س \\ ٣س & ١س \end{vmatrix} = ١ - ٣س \quad (ج) \quad \begin{vmatrix} ١س & ٠س & ١س \\ ١س & ٢س & ٥س \end{vmatrix} = ٣س$$

خواص المحددات

(١) قيمة المحدد (Δ) = مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (عمود) \times العوامل المرافقة لها.

$$\text{مثال ٧: أوجد قيمة المحدد } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

باستخدام عناصر الصف الثاني

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = 12 - 6 + 14 = 20$$

$$\Delta = 20 - 24 = -4$$

(٢) قيمة المحدد لا تتغير إذا تبديلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها

$$\Delta = \Delta \quad \therefore \text{المحدد} = \text{محورته}$$

$$\text{مثال ٨: حقق الخاصية السابقة إذا كان: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$29 = 4 + 2 - 27 = 2 - 2 - 2 \times 1 - 9 \times 3 =$$

$$29 = 1 \times 2 + 9 \times 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \Delta$$

\therefore المحدد = محورته

(٣) قيمة المحدد لا تتغير بإضافة أي صف أو عمود مضروباً في عدد ثابت إلى صف أو عمود آخر .

مثال ٩: بدون فك المحدد اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

الحل

نضيف - ص٢ إلى ص١

$$\therefore \begin{vmatrix} 1+a-b & 1+b-c & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \text{ ثم نضيف - ص٢ إلى ص٣}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 - a^2 - b^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

∴ الطرفان متساويان

(٤) قيمة المحدد على الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

مثال ١٠: أوجد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

∴ المحدد على الصورة المثلثية

∴ قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي

$$105 = 7 \times 5 \times 3 =$$

(٥) إذا ضرب كل عنصر من عناصر أي صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد .

$$\begin{vmatrix} ٥ ك & ٣ ك & ٢ ك \\ ١٠ & ٧ & ٤ \\ ٣ & ١ & ١- \end{vmatrix} \cdot \frac{١}{ك} = \Delta \therefore \begin{vmatrix} ٥ ك & ٣ ك & ٢ ك \\ ١٠ & ٧ & ٤ \\ ٣ & ١ & ١- \end{vmatrix} = \Delta \times ك \therefore$$

نتيجة : العامل المشترك لعناصر صف (أو عمود) هو أحد عوامل المحدد .

مثال ١١ : بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ١ س & ١ س & ١ س \\ ١ ص & ١ ص & ١ ص \\ ١ ع & ١ ع & ١ ع \end{vmatrix} = س ص ع \begin{vmatrix} ١ س & ١ س & ١ س \\ ١ ص & ١ ص & ١ ص \\ ١ ع & ١ ع & ١ ع \end{vmatrix}$$

الحل

بأخذ س ← عامل مشترك من ص ١

، ص ← عامل مشترك من ص ٢

، ع ← عامل مشترك من ص ٣

$$\therefore س ص ع = \begin{vmatrix} ١ س & ١ س & ١ س \\ ١ ص & ١ ص & ١ ص \\ ١ ع & ١ ع & ١ ع \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٦) تتغير إشارة المحدد إذا تبالغ الوضع صفان أو عمودان .

$$\begin{vmatrix} ١ س & ١ ص & ١ ع \\ ٢ ٢ & ٢ ٢ & ٢ ٢ \\ ٤ ٥ & ٤ ٥ & ٤ ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ ٢ & ٢ ٢ & ٢ ٢ \\ ٤ ٥ & ٤ ٥ & ٤ ٦ \\ ٤ ٥ & ٤ ٥ & ٤ ٦ \end{vmatrix} \text{ : بدون فك المحدد أثبت أن:}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} ١ س & ١ ص & ١ ع \\ ٤ ٥ & ٤ ٥ & ٤ ٦ \\ ٣ ٢ & ٣ ٢ & ٣ ١ \end{vmatrix} - \text{ص ١ ، ص ٣ يتبادلان الوضع : } \therefore$$

$$\text{ثم ص } ١, \text{ ص } ٢ \text{ يتبادلان الوضع : } \therefore -x - \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

(٧) خاصية التجزئ (تحويل محدد إلى مجموع محددين) ويستفاد منها :

[١] ينتج عامل مشترك بعد التجزئ كان من الصعب استخراجه قبل التجزئ.

[٢] ينتج بعد التجزئ صفان أو عمودان متساويان .

$$\text{مثال ١٣ : } \begin{vmatrix} س+١ & ص+ب & ع+ج \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ك & ل & م \end{vmatrix}$$

الحل

$$= \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ك & ل & م \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ب & ج \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ك & ل & م \end{vmatrix}$$

نتيجة :

قاعدة جمع المحددات :-

- أ- أن يكونا من نفس الدرجة .
ب- أن تتطابق جميع صفوفهما (أو أعمدهما) ما عدا صف واحد (أو عمود واحد) علي الأكثر.

مثال ١٤ : بدون فك المحدد أثبت أن :-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & ٢- \\ ٤- & ٣ & ٧- \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣- & ١- & ٤ \\ ٥ & ٣ & ٧- \\ ٨ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٦ & ١- & ٤ \\ ٩- & ٣ & ٧- \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

الحل

بجمع المحددين الأول والثاني فقط

$$\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٢ \\ ٤- & ٣ & ٧- \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & ٢- \\ ٤- & ٣ & ٧- \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ١- & ٤ \\ ٤- & ٣ & ٧- \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر لأن ص_١ = ص_٢

إنعدام المحدد

(١) بنعم المحدد إذا تساوي فيه صفان أو عمودان .

مثال ٥: بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ١ & س & ٦ \\ ب & ص & أب \\ ج & ع & أج \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & س & ٦ \\ ب & ص & أب \\ ج & ع & أج \end{vmatrix} \text{ ولأن } ع = ٦ع$$

\therefore المحدد = صفر

(٢) بنعم المحدد إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود أصفار

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

(٣) بنعم المحدد إذا وجد تناسب بين عناصر صفين أو عمودين .

$$\text{لوجود تناسب بين } ع١, ع٢, ع٣ = \begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٢ \\ ١٠ & ١١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦}$$

(٤) بنعم المحدد إذا وجد به صف أو عمود عناصره تساوي المجموع الجبري للصفين أو العمودين الآخرين .

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ١١ & ٧ & ٣ \end{vmatrix}$$

لأن $ص٣ = ص١ + ص٢$

٥) ينعدم المحدد إذا كانت عناصره في توالي عددي بالنسبة للصفوف (الأعمدة) .

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ١٥ & ١١ & ٥ \\ ١٦ & ١٢ & ٦ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \end{vmatrix}$$

تعريف المحدد المتماثل:

$$\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ا} \\ \text{ع} & \text{ب} & \text{س} \\ \text{ح} & \text{ع} & \text{ص} \end{vmatrix} \text{عناصره أعلى القطر الرئيسي} = \text{عناصره أسفل القطر الرئيسي}$$

٦) ينعدم المحدد إذا كان ملتو التماثل عناصر قطره الرئيسي أصفار وعناصره أعلى القطر

$$\begin{vmatrix} ٥- & ١ & ٥ \\ ٣- & ١- & ٥ \\ \swarrow & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = \text{الرئيسي}$$

عناصره أسفل القطر الرئيسي ولكن بإشارة مختلفة والمحدد الملتوي التماثل فردي الدرجة .

مثال ١٦ : إذا كان $0 = \begin{vmatrix} ١١ & ٤ & ١ \\ ١٢ & \text{س} & ٢ \\ \text{ص} & ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ بأربع طرق مختلفة اقترح قيمة لكل من س ، ص

الحل

(١) $٥ = \text{ص} ، ١٣ = \text{س}$

(٢) $٣\text{ص} = ٢\text{ص} + ١\text{ص}$

(٣) تناسب بين $٢\text{ص} ، ٣\text{ص}$

$١٨ = \text{ص} ، ٤ = \text{س}$

(٤) تناسب بين $٢\text{ع} ، ٣\text{ع}$

$٦٦ = \text{ص} ، \frac{٤٨}{١١} = \text{س}$

$\therefore \frac{١١}{١٨} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٦}{\text{ص}} = \frac{\text{س}}{١٢} = \frac{٤}{١١}$

كيف تفكر في حل مسائل المحددات ؟

إذا طلب منك إثبات قيمة المحدد بالخواص أو إيجاد قيمة المحدد بالخواص أو حل معادلة في صورة محدد بحيث يكون المجهول متواجد في عناصر القطر الرئيسي أو موزع على عناصر المحدد أتبع ما يلي :-

- [١] أخرج العامل المشترك أولاً إن وجد .
- [٢] جمع صفين أو عمودين أو ثلاثة صفوف أو ثلاثة أعمدة بشرط ما ينتج من الجمع مقدار ثابت (مقادير متساوية) ثم تخرج هذا الثابت خارج المحدد .
- [٣] إذا كانت عناصر أحد الصفوف = واحد تضرب $١ \times$ ع ، ثم إضافته إلى ٢ ع ، ٣ ع ، ينتج صفين ثم تفك المحدد بالمرافقات .
- [٤] إذا كانت أحد الأعمدة = واحد تضرب $١ \times$ ص ، ثم إضافته إلى ٢ ص ، ٣ ص ، ينتج صفين ثم تفك المحدد بالمرافقات .

مثال ١٧ : باستخدام خواص المحددات بالمرافقات باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$${}^2 (ع + ص + س) = \begin{vmatrix} ع٢ & ٢ ص & ع-ص-س \\ ع٢ & ص-ع-س & س٢ \\ ع-ص-س & ٢ ص & س٢ \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} ع٢ & ٢ ص & ع+ص+س \\ ع٢ & ص-ع-س & ع+ص+س \\ ع-ص-س & ٢ ص & ع+ص+س \end{vmatrix} \begin{matrix} +ع \\ +ع \\ +ع \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} ع٢ & ٢ ص & ١ \\ ع٢ & ص-ع-س & ١ \\ ع-ص-س & ٢ ص & ١ \end{vmatrix} \therefore (ع + ص + س)$$

ص $١ \times$ ثم إضافته إلى ٢ ص ، ٣ ص

$$\begin{vmatrix} ع٢ & ٢ ص & ١ \\ ع٢ & ص-ع-س & \triangle \\ ع-ص-س & ٢ ص & \triangle \end{vmatrix} \therefore (ع + ص + س)$$

$$= (ع + ص + س) (ع - ص - س) (ع - ص - س) (ع - ص - س)$$

$$= (ع + ص + س) (ع + ص + س) - (ع + ص + س) \times (ع + ص + س) = {}^2 (ع + ص + س)$$

مثال ١٨: أثبت أن $(س-ا) (س-ب) (س+ا+ب) = \begin{vmatrix} ب & ا & س \\ ب & س & ا \\ س & ب & ا \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} ب & ا & س+ا+ب \\ ب & س & ا+ا+ب \\ س & ب & ا+ا+ب \end{vmatrix} \therefore ١ع + ٢ع + ٢ع$$

$$(س+ا+ب) = \begin{vmatrix} ب & ا & ١ \\ ب & س & ١ \\ س & ب & ١ \end{vmatrix}$$

بضرب ص ١ \times ١ وإبط افقه إلى ص ٢ ، ص ٣

$$\therefore (س+ا+ب) = \begin{vmatrix} ب & ا & ١ \\ ٠ & س-ا & ٠ \\ ب-س & ا-ب & ٠ \end{vmatrix}$$

بفك المحدد بمعلومية ع

$$\therefore \Delta = (س+ا+ب) (س-ا) (س-ب)$$

مثال ١٩: بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ع & س & س \\ س & ع & س \\ س & س & ع \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} س+ع & س+ع & س+س \\ س+س & س+ع & ع+س \\ ع+س & س+س & ع+س \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} س+ع & س+ع & (س+س+ع)٢ \\ س+س & س+ع & (س+س+ع)٢ \\ ع+س & س+س & (س+س+ع)٢ \end{vmatrix} \therefore ١ع + ٢ع + ٢ع$$

$$\therefore ٢ \begin{vmatrix} س+ع & س+ع & س+س+ع \\ س+س & س+ع & س+س+ع \\ ع+س & س+س & س+س+ع \end{vmatrix}$$

$$١ع - ١ع$$

$$\begin{vmatrix} س & ص+ع & ع+س \\ ٢ & ص & ع+س \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} =$$

$$١ع - ٢ع$$

$$\begin{vmatrix} س & ص+ع & ع \\ ٢ & ص & ع+س \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} =$$

$$٢ع - ٢ع$$

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٢ & ص & ع \\ ع & س & س \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

مثال ٢٠: اثبت ان:

$$٠ = \begin{vmatrix} ١ جتا٢ ا & ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج \\ ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د \\ ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د & ١ جتا٢ هـ \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \text{جتا}٢ ا = ٢ \text{جتا}٢ ا - ١$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ جتا٢ ا & ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج \\ ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د \\ ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د & ١ جتا٢ هـ \end{vmatrix}$$

$$١ع + ٢ع$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ جتا٢ ا & ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج \\ ١ جتا٢ ب & ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د \\ ١ جتا٢ ج & ١ جتا٢ د & ١ جتا٢ هـ \end{vmatrix}$$

$$\therefore \text{يوجد تناسب بين } ١ع, ٢ع = \frac{١}{٢}$$

∴ المحدد = صفر

مثال ٢١ : باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} 2جأس & 1 & 2جأص \\ 2جأص & 1 & 2جأع \\ 2جأع & 1 & 2جأع \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 2جأس + 2جأص + 2جأع & 1 & 2جأص \\ 2جأص - 2جأص & 1 & 2جأع \\ 2جأع + 2جأع & 1 & 2جأع \end{vmatrix} = ٢ع + ١ع$$

$$\begin{vmatrix} 2(جأس + جأص) & 1 & 2جأص \\ 2(جأص - جأص) & 1 & 2جأع \\ 2(جأع + جأع) & 1 & 2جأع \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2جأس & 1 & 1 \\ 2جأص & 1 & 1 \\ 2جأع & 1 & 1 \end{vmatrix} = ٢ =$$

∴ المحدد = صفر لأن ١ع = ٢ع

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر الصفوف (الأعمدة) = واحد فإنه بالاستفادة بعملية الضرب الخارجي يجعل العناصر المناظرة له أصفار وذلك بضرب العناصر بإشارة مخالفة ثم إضافتها إلى الصفوف أو الأعمدة الأخرى.

مثال ٢٢ : باستخدام الخواص أثبت أن

$${}^٢(١-١) = \begin{vmatrix} ١ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$ص١ - ١ × ص٢ + ص٣$$

$$ص١ - ١ × ص٣ + ص٢$$

$${}^٢(١-١) = ({}^٢(١-١))({}^٢(١-١)) = \begin{vmatrix} ١ & 1 & 1 \\ (١-١) & (١-١) & 1 \\ (١-١) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{المحدد} \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix}$$

مثال ٢٣: بدون فك المحدد اثبت أن:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

باخذ ٢ ع. م من ص ١، ٢ ع. م من ص ٣

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \times 2 \\ 2 \times 2 \\ 2 \times 2 \end{matrix}$$

ع ٢ + ع ٣

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

\therefore المحدد = صفر لأن ع ١ = ع ٢

مثال ٢٤: بدون فك المحدد اثبت أن

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

ناخذ $\frac{1}{2}$ ع. م من ص ١

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

ص ١ + ص ٣

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$$

\therefore المحدد = صفر لوجود تناسب بين ص ١، ص ٣

مثال ٢٥ : اثبت ان

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ص_١ × أ ، ص_٢ × ب ، ص_٣ × ج

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ع + ع

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + 1 + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ لان } ع = ع = ع$$

ملاحظة هامة:

$$\begin{vmatrix} 1+س & 1+ل & 1+هـ \\ 1+ص & 1+م & 1+و \\ 1+ع & 1+ن & 1+ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال ٢٦: أثبت أن :

$$0 = \begin{vmatrix} 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+c & 1+c & 1+c \\ 1+e & 1+e & 1+e \end{vmatrix}$$

الحل

$$= \begin{vmatrix} 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+c & 1+c & 1+c \\ 1+e & 1+e & 1+e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+c & 1+c & 1+c \\ 1+e & 1+e & 1+e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+s & 1+s & 1+s \\ 1+c & 1+c & 1+c \\ 1+e & 1+e & 1+e \end{vmatrix} = 0$$

مثال ٢٧: بدون فك المحدد أثبت أن

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

الحل

نجزئ المحدد

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

ص_١ × أ ، ص_٢ × ب ، ص_٣ × ج

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = 0$$

بالتناوب مع ع_١ ، ع_٢ مع ع_٣

مثال ٢٨: أوجد مجموعة الحل ، أثبت أن $x = 2$ تحقق هذه المعادلة

أ، أثبت أن $x = 2$ جذراً لهذه المعادلة

الحل

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & x-10 \\ 4-x & x-9 & 6-x \\ 5-x & 4-x & 2 \end{vmatrix}$$

$$2(2x^2 + 16x + 16) = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & x-2 \\ 4-x & x-9 & x-4 \\ 5-x & 4-x & x-4 \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & (x-2) \\ 4-x & x-9 & (x-2)x \\ 5-x & 4-x & (x-2)x \end{vmatrix}$$

$$2(2x^2 + 16x + 16) = 0$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 1 \\ 4-x & x-9 & 2 \\ 5-x & 4-x & 2 \end{vmatrix} (x-2)$$

ص $x-1$ ثم إضافته إلى ص $x-2$ ، ص $x-3$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 6-x & 1 \\ 8-x & x-21 & 0 \\ 8-x & 8 & 0 \end{vmatrix} (x-2)$$

$$0 = \begin{vmatrix} 8-x & x-21 \\ 8-x & 8 \end{vmatrix} (x-2)$$

$$0 = (x-2)(8-x-21+21x-168+8x-64) = (x-2)(7x-105)$$

$$0 = (x-2)(7x-105)$$

$$0 = (x-2)(7x-105)$$

$$\therefore x=2, x=15, x=0$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل } | 15, 0, 2 |$$

مثال ٢٩ : باستخدام خواص المحددات أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & 1- & 1-س \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix}$$

الحل

$$ص_1 + 2ص_2 + 2ص_3 \leftarrow ص_1$$

$$0 = \begin{vmatrix} س & س & س \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix} س$$

ع_١ × ١ - ثم إضافته إلى كل من ع_٢ ، ع_٣

$$0 = \begin{vmatrix} \triangle & 1 & 1 \\ 1- & 2+س & 1- \\ 1-س & 1- & 2 \end{vmatrix} س$$

$$0 = (س-٣) (س+٣)$$

$$س = ٣ ، س = -٣ ، ٠ = س$$

∴ مجموعة الحل | ٣ ± ، ٠ |

مثال ٣٠ : أثبت بالخواص

$$(س+ص) (ع+ص) (ع+س) = \begin{vmatrix} ص- & ع- & س+ص+ع \\ س- & س+ص+ع & ع- \\ ع+ص+س & ع- & ص- \end{vmatrix}$$

الحل

$$∴ ص_1 + 1ص_2 \leftarrow ص_1 ، ص_2 + 1ص_3 \leftarrow ص_2$$

$$\therefore \text{المحدد} \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & & \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} - & \\ \text{س} + \text{ع} & \text{س} + \text{ص} & \text{ص} - \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & & \\ \text{س} + \text{ص} & \text{ع} - & \\ \text{س} + \text{ع} & \text{س} + \text{ص} & \text{ص} - \end{vmatrix}$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} - & \text{ع} - & \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{ص}_2 + \text{ص}_3 \leftarrow \text{ص}_1$$

$$\begin{vmatrix} \text{س} - & \text{ع} - & \text{س} + \text{ص} + \text{ع} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (\text{س} + \text{ع}) (\text{س} + \text{ص})$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \begin{vmatrix} \text{س} - & \text{ع} - \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times 2 - \text{ع} - 1$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) \times 2 - (\text{ع} - \text{ص})$$

$$= 2 (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} + \text{ع}) - (\text{ع} - \text{ص})$$

مثال ٣١: باستخدام المحددات أثبت أن:
$$1 + \begin{vmatrix} 1+a & ab & a \\ ab & 1+b & b \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$$

الحل

بالتجزئ

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} 1+a & ab & a \\ ab & 1+b & b \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ab & a \\ b & 1+b & b \\ 1+c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\text{أ.ع. م من ص}_1, \text{ أ.ع. م من ع}_1$$

$$\therefore 1 \times 1 \begin{vmatrix} a & ab & a \\ b & 1+b & b \\ 1+c & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & ab & a \\ ab & 1+b & b \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$$\text{ص}_1 \times - \text{ب} + \text{ص}_2 \leftarrow \text{ص}_1$$

$$\text{ص}_1 \times - \text{ج} + \text{ص}_3 \leftarrow \text{ص}_1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

ملاحظة هامة:

إذا كان المجهول من متواجد في عناصر صف أو عمود ساوي من (من الدرجة الأولى) بالقيم المناظرة لها .

مثال ٣٢: أوجد مجموعة الحل للمعادلة أو أوجد جنور المعادلة أو أوجد من التي تجعل

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

\therefore مجموعة الحل $| \pm 1, 2 |$

مثال ٣٣: إذا كان $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ فإن من = -----، أ، -----

الحل

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \leftarrow \Delta = 0$$

تمارين (١٣)

(١) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ مع ذكر

الخاصية التي استخدمت في كل حالة.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{[أ]} \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{[ب]} \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{[ج]} \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{[د]} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{[هـ]} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{[و]}$$

(٢) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي صفر مع ذكر الخاصية التي

استخدمت في كل حالة .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{[ج]} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{[ب]} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{[أ]}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{[د]} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{[هـ]} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{[و]}$$

(٣) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيم المحددات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{ص+ع} \\ 1 & \text{ص+ع} & \text{ص} \\ \text{ص+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} \quad \text{[ب]} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{س} \\ 1 & \text{س} & 1 \\ \text{س} & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{[أ]}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{[ج]}$$

(٤) أثبت أن:

$$[أ] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$$[ب] \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (s+1)(s-1)$$

$$[ج] \begin{vmatrix} 1 & s & s+1 \\ s & s+1 & s \\ s+1 & s & 1 \end{vmatrix} = 1 + s + s^2 + s^3$$

(٥) أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c \\ c+d & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ثم عمم هذه القاعدة بالنسبة للمحددات من الدرجة ٣ .

حل المعادلات الخطية

شكل المعادلات الخطية :

هي معادلات من الدرجة الأولى تحتوي كل مجموعة منها على نفس العدد من المجاهيل .

$$\begin{cases} \text{مثال: } 2س + 5ص = 12 \\ 3س + 4ص = 11 \end{cases} \text{ معادلات خطية ذات مجهولين}$$
$$\begin{cases} 3س + 2ع + 13 = 0 \\ 2س - 2ص + 2ع + 7 = 0 \\ 4س + 5ص + 2ع + 4 = 0 \end{cases} \text{ معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل}$$

حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات (كرامر)

طريقة الحل:

- 1- نوجد محدد المعاملات .
- 2- نستبدل ع، بعمود الثوابت ونوجد Δ .
- 3- نستبدل س، بعمود الثوابت ونوجد Δ .

$$\therefore س = \frac{\Delta_1}{\Delta} ، ص = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

مثال: حل المعادلتين $س + 5ص = 1$ ، $2س - 3ص = 1$
الحل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 10 = -13$$

$$\therefore \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 = -1$$

$$\therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 5 = -4$$

$$ص = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-13} = \frac{1}{13}$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-13} = \frac{4}{13}$$

\therefore مجموعة الحل هي $\{(4/13, 1/13)\}$

مثال: أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$$١٠ = ع٢ - ص + س٢$$

$$١ = ع٢ + ص٢ + س٣$$

$$٤ = ع٣ + ص٤ + س٥$$

الحل

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = \Delta \therefore$$

$$(١٠ - ١٢)٢ - (١٠ - ٩)١ - (٨ - ٦)٢ =$$

$$٧ - = \Delta \therefore$$

$\Delta \neq ٠$ ، \therefore مجموعة المعادلات لها حل وحيد

$$٧ - = ٤ \times ٢ - = (٥ -)١ - (٢ -)١٠ = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \Delta \therefore$$

$$١٤ - = ٧ \times ٢ - = (١ -)١٠ - (٥ -)٢ = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \Delta \therefore$$

$$٢١ = ٢ \times ١٠ + ٧ \times ١ - ٤ \times ٢ = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٣ \Delta \therefore$$

$$٢ = \frac{١٤ -}{٧ -} = \frac{٢ \Delta}{\Delta} = ص ، \quad ١ = \frac{٧ -}{٧ -} = \frac{١ \Delta}{\Delta} = س \therefore$$

$$٣ - = \frac{٢١ -}{٧ -} = \frac{٣ \Delta}{\Delta} = ع$$

\therefore مجموعة الحل هي $\{(٣ - ، ٢ ، ١)\}$

ملاحظة:

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بقيمة كل من س، ص، ع في أحد المعادلات الثلاثة فينتسوى طرفاها.

تمارين (١٤)

(١) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

$$(أ) \quad ٥ = ٢ص + ٣س, \quad ٢ = ٢ص + ٣س$$

$$(ب) \quad ١ = ٢ص + ٣س, \quad ٢ = ٢ص + ٣س$$

$$(ج) \quad ٥ = ٢ص + ٣س, \quad ٥ = ٢ص + ٣س$$

$$(د) \quad ٢ = ٢ص + ٣س, \quad ١ = ٢ص + ٣س$$

(٢) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

$$(أ) \quad ٢ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ٣ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ١٣ = ٢ص + ٣س + ع$$

$$(ب) \quad ٤ = ٢ص + ٣س + ع, \quad ١ = ٢ص + ٣س + ع, \quad ١٠ = ٢ص - ٣س - ع$$

$$(ج) \quad ١٤ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ٢ = ٢ص - ٣س - ع, \quad ١٠ = ٢ص - ٣س - ع$$

$$(د) \quad ١ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ٣ = ٢ص - ٣س - ع, \quad ٦ = ٢ص - ٣س - ع$$

$$(هـ) \quad ١ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ٧ = ٢ص - ٣س - ع, \quad ٢ = ٢ص + ٣س - ع$$

$$(و) \quad ٥ = ٢ص + ٣س - ع, \quad ١ = ٢ص - ٣س - ع, \quad ٥ = ٢ص + ٣س - ع$$

تمارين غير محلولة

$$1- \text{أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-s)(1-j) = (1-s)$$

$$2- \text{بدون فك المحدد أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1+s & 1 & 1 \\ 1 & 1+s & 1 \\ 1 & 1 & 1+s \end{vmatrix} = (1+s)^2 + (1+s) + 1 = (1+s)^2 + (1+s) + 1$$

$$3- \text{أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1+s^2 & 1+s & 1 \\ 1+s & 1+s^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+s^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+s^2 & 1+s & 1 \\ 1+s & 1+s^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+s^2 \end{vmatrix}$$

$$4- \text{أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5- أثبت أن لكل a, b, c فإن جنور المعادلة

$$= \text{صفر (تكون أعداداً حقيقية)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6- \text{أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ومن ذلك ضع $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$ في صورة محدد

$$7- \text{أثبت أن: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

8- حل المعادلات الآتية باستخدام كرامر:

$$7s - 3v - 8 = 0$$

$$1 = s + v$$

$$1 = s + v$$