الباب الثاني

الأعـداد المـركبة

الحاجة إلي توسيع نظام الأعداد الحقيقية :

من دراستنا السابقة تعرفنا علي مجموعات الأعداد وهي :

١) **مجموعة الأعداد الطبيعية** ط = { ١، ٢، ٣، ٤، .... }

حيث جمع أو ضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي

٢) **مجموعة الأعداد الكلية** ك = { ٠، ١، ٢، ٣، .... }

٣) **مجموعة الأعداد الصحيحة** ص= { ..... ، -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة س + أ = ب حيث أ ، ب أعداد طبيعية . فمثلا حل المعادلات س+ ٧ = ٣ هو س = ٣ - ٧

∴ س = -٤ وهذا الناتج لا يوجد في الأعداد الطبيعية .

٤) **مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) :**

ق = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة أ س = ب

فمثلا : حل المعادلة ٤ س = ٩ هو س = $\frac{٩}{٤}$ وهذا الناتج لا يوجد في مجموعة الأعداد الصحيحة .

٥) **مجموعة الأعداد الحقيقية** ح = { الأعداد النسبية والغير نسبية }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $س^٢ = ٢$ ∴ س = ± $\sqrt{٢}$

ورأينا أن أي نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق .

مثلاً المعادلة $س^٢ + ١ = ٠$ أي $س^٢ = -١$

فهذه المعادلة غير قابلة للحل في ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث لا يمكن إيجاد عدد حقيقي س يحقق المعادلة . لذلك كان التفكير في إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلاً لمثل هذه المعادلات هذه المجموعة الجديدة تسمي و " مجموعة الأعداد المركبة" .

العدد التخيلي ت :

نعلم أن $\sqrt{-١}$ ∉ ح لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة = -١ ونرمز للعدد $\sqrt{-١}$ بالرمز ت وهو أول حرف من كلمة تخيلي (غير حقيقي) حيث $ت^٢ = -١$

obeikandi.com

قوي العدد ت :

∵ $ت^2 = -1$ ∴ $ت^3 = ت^2 \times ت = -ت$ ، $ت^4 = ت^2 \times ت^2 = 1$

وعلي العموم : $ب^{4ن} = 1$ حيث ن ∈ $ص^+$ ، $ت^{4ن+م} = ت^م$

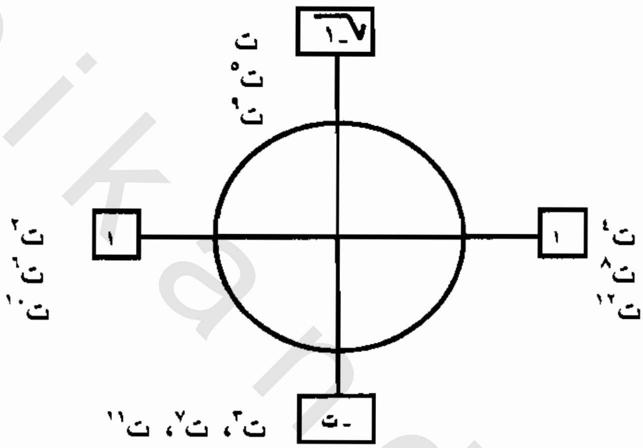
حيث م = ١، ٢، ٣ وهي بواقي قسمة أس (ت) علي ٤

<u>فمثلاً :</u> $ت^5 = ت^{4+1} = ت$ ، $ت^6 = ت^{4+2} = ت^2 = -1$ ، $ت^7 = ت^{4+3} = ت^3 = -ت$

<u>ويلاحظ أن</u> : قوي ت الزوجية كميات حقيقية مثل $ت^2$ ، $ت^4$ ، $ت^6$

وقوي ت الفردية كميات تخيلية مثل ت ، $ت^3$ ، $ت^5$

ومن المفيد تذكر هذا الرسم الذي يبين أن دورة ت رباعية



<u>مثال:</u> أكتب في ابسط صورة $ت^{20}$ ، $ت^{21}$ ، $ت^{22}$ ، $ت^{23}$ ، $ت^{24}$ ، $ت^{50}$

الحـــــل

$ت^{20} = (ت^4)^5 = 1$ ، $ت^{21} = ت^{20+1} = ت$

$ت^{22} = ت^{20+2} = ت^2 = -1$ ، $ت^{23} = ت^{20+3} = ت^3 = -ت$

$ت^{24} = (ت^4)^6 = ت^6 = 1$ ، $ت^{50} = ت^{48+2} = ت^2 = -1$

مجموعة الأعداد التخيلية ( ) :

مجموعة الأعداد التخيلية = { ع: ع = ص ت ، ص ∈ ح ، $ت^2 = -1$}

أي كل عدد بالصورة ص ت مثل ٣ت ، ٥ت ، -٧ ، √٣ ت ، ....

يسمي عدد تخيلي وينتمي إلي هذه المجموعة وأي عدد بالصورة √-أ حيث أ عدد حقيقي موجب

هو عدد تخيلي ويكتب بالصورة ص ت مثل :

√-٣ = √٣ ت ، √-٧ = √٧ ت

∴ العدد التخيلي هو الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب .

obeikandi.com

مجموعة الأعداد المركبة

يعرف العدد المركب بأنه العدد الذي يمكن وضعه علي الصورة ع = س + ت ص حيث س، ص عددان حقيقيان . وتسمي س الجزء الحقيقي للعدد المركب ع وتسمي ص الجزء التخيلي للعدد المركب ع . وتسمي الصورة س + ت ص بالصورة الجبرية للعدد المركب ع .

فإذا كان ص = ٠ فإن العدد ع = س يكون حقيقيا صرفاً

فإذا كان س = ٠ فإن العدد ع = ت ص يكون تخيلياً صرفاً

كما يمكن كتابة العدد المركب ع علي هيئة زوج مرتب يكون العنصر الأول فيه هو الجزء الحقيقي والعنصر التالي هو الجزء التخيلي للعدد المركب .

ع = (س، ص) حيث س ، ص ∈ ح

وتسمي الصورة ع = (س، ص) الصورة الكارتيزية .

∴ العدد المركب هو الكمية التي تتركب من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي .

ومجموعة الأعداد المركبة يمكن كتابتها بالصورة :-

كـ = { ع : ع = س+ ت ص ، س ∈ ح ، ص ∈ ح}

<u>مثال</u> : حل المعادلة $س^٢$ ــ ٢س+ ٢ = ٠

الحـــــــــل

∵ حل المعادلة $أس^٢$ + ب س + جـ = ٠ هو

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{المميز}}}{\text{٢ أ}} \quad \text{حيث المميز} = \text{ب}^٢ - \text{٤ أ جـ}$$

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ٢ ، المميز = $(-٢)^٢$ ــ ٤ (١) (-٢) = ٤ -٨ = ٤

، ∵ المميز < ٠ ∴ يوجد حلان ∈ إلي مجموعة الأعداد المركبة وهما

$$\text{س} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{-٤}}{٢\,(١)} = \frac{٢ \pm ٢\,\text{ت}}{٢} = \frac{٢\,[١ \pm \text{ت}]}{٢} = ١ \pm \text{ت}$$

∴ الحلول هي { ١+ ت ، ١- ت }

obeikandl.com

نظام الأعداد المركبة

- **تعريف تساوي عددين مركبين :-**

١) يقال للعددين المركبين $س_{١} + ت ص_{١}$ ، $س_{٢} + ت ص_{٢}$ أنهما متساويان

إذا كان $س_{١} = س_{٢}$، $ص_{١} = ص_{٢}$ أي جزأيهما الحقيقيان يتساويان وجزأيهما التخيليان يتساويان أيضا.

أي أنه إذا كان $ع_{١} = س_{١} + ت ص_{١} = (س_{١} ، ص_{١})$

، $ع_{٢} = س_{٢} + ت ص_{٢} = (س_{٢} ، ص_{٢})$

وكانت $ع_{١} = ع_{٢}$ فإن $س_{١} = س_{٢}$ ، $ص_{١} = ص_{٢}$

٢) إذا كان س+ ص ت = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

بمعني إذا أنعدم مقدار تخيلي مركب فإن الجزء الحقيقي ينعدم علي حده والجزء التخيلي ينعدم أيضاً علي حده .

مثال: أوجد قيمة س ، ص الحقيقة التي تحقق المعادلة :

(١+ ٢ت) س – (٢ + ٣ ت) ص = -١ - ٤ ت

الحـــــــل

نضع الطرف الأيمن علي صورة عدد مركب

∴ س + ٢ س ت - ٢ ص- ٣ ص ت = -١ - ٤ت

(س- ٢ص) + (٢س - ٣ص) ت = -١ - ٤ت

∴ س - ٢ ص = ١ ---- (١) ، ٢ س- ٣ص = -٤ ---- (٢)

بضرب طرفي المعادلة (١) في (٢)

∴ -٢س + ٤ص = -٢ وبالجمع مع (٢)

٢ س - ٣ص = -٤

ص = -٦ بالتعويض في (١) ∴ س = -١١

مثال: إذا كان س+ ت ص = أ + ب ت – أثبت أن : س = أ ، ص= ب حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

الحـــــــل

∵ س+ ت ص = أ + ب ت

obeikandl.com

∴ $(س - أ) = ت\,(ب - ص)$ بتربيع الطرفين

∴ $(س - أ)^{٢} = -(ب - ص)^{٢}$

∴ $(س - أ)^{٢} + (ب - ص)^{٢} = ٠$

، ∵ لا يوجد عددان حقيقيان مجموع مربعيهما = صفر

∴ $س - أ = ٠$ ∴ $س = أ$

، $ب - ص = ٠$ ∴ $ب = ص$

تعريف مجموع عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة :

$(س_{١} \mp ت\,ص_{١}) + (س_{٢} \mp ت\,ص_{٢}) = (س_{١} \mp س_{٢}) + (ص_{١} \mp ص_{٢})\,ت$

أي نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

مثلاً :

إذا كان $ع_{١} = ٢ + ٣ت$ ، $ع_{٢} = ٤ - ت$

فإن : $ع_{١} + ع_{٢} = (٢+٤) + (٣ - ١)\,ت = ٦ + ٢ت$

، $ع_{١} - ع_{٢} = ع_{١} + (-ع_{٢}) = ع_{١} +$ المعكوس الجمعي للعدد المطروح

$= ٢ + ٣ت + (-٤ + ت) = (٢ - ٤) + (٣ + ١)\,ت = -٢ + ٤ت$

(ب) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

إذا كان $ع_{١} = (س_{١} ، ص_{١})$ ، $ع_{٢} = (س_{٢} ، ص_{٢})$ فإن :

$ع_{١} \mp ع_{٢} = (س_{١} \mp س_{٢} ، ص_{١} \mp ص_{٢})$

مثلاً :

$ع_{١} = (٣ ، -١)$ ، $ع_{٢} = (٠ ، ٥)$

فإن: $ع_{١} + ع_{٢} = (٣ + ٠ ، -١ + ٥) = (٣ ، ٤)$

، $ع_{١} - ع_{٢} = (٣ - ٠ ، -١ - ٥) = (٣ ، -٦)$

تعريف حاصل ضرب عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

$ع_{١} . ع_{٢} = (س_{١} ، ص_{١})\,(س_{٢} ، ص_{٢}) = (س_{١}س_{٢} - ص_{١}ص_{٢} ، س_{١}ص_{٢} + س_{٢}ص_{١})$

مثلاً : $(٢ ، ٣)\,(٤ ، -١) = (٢ \times ٤ - ٣ \times -١ ، ٢ \times -١ + ٣ \times ٤)$

$= (٨ + ٣ ، -٢ + ١٢) = (١١ ، ١٠)$

obeikandl.com

(ب) إذا كان العددين على الصورة العامة للأعداد المركبة:

$ع_1 . ع_2 = (س_1 + ت ص_1)(س_2 + ت ص_2)$

نتبع نفس قواعد حاصل ضرب المقادير الجبرية مع اختصار قوي ت

<u>مثلاً</u> : إذا كانت $ع_1 = ٢ + ٣ت$ ، $ع_2 = ٥ + ٤ت$

فإن ٢ + ٣ت

٥ + ٤ت

١٠ + ١٥ت

$+ ٨ت + ١٢ت^2$

$١٠ + ٢٣ت + ١٢(-١) = -٢ + ٢٣ت$

تمارين (٦)

- **<u>اختصر إلى أبسط صورة :-</u>**

(١) $(٥ + \sqrt{-٤}) + (٥ - \sqrt{-١٦})$

(٢) $(٢ - \sqrt{-٢٥})(٣ + \sqrt{-٣٦})$

(٣) $(٣ - ٢ت)(٢ - ت)^2$

(٤) أجمع ت + ٢ت + ٣ت .... إلى ٢١ حداً

- **<u>أوجد قيمة كل من س ، ص الحقيقية</u>**

(٥) $(١ + ٢ت) س + ٣ (ت - ١) ص = ٩$

(٦) $س + ص ت = (١ + ت)^3$

- **<u>أوجد الناتج على صورة عدد مركب</u>**

(٧) أوجد العدد المركب الذي يساوي $(١ + ت)^4 - (١ - ت)^4$

(٨) إذا كان ص + ٩ - ٢ س (١ + ت) - (٣ - $س^2$) ت = ٠ حيث س ، ص ∈ ح فأوجد قيمة كل من س ، ص

(٩) إذا كان $ع_1 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ ، $ع_1 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ فاثبت أن : $ع_1^2 = ع_2$

(١٠) حل المعادلة :

$س^2 + ٥ = ٠$

obeikandi.com

خصائص عملية جمع الأعداد المركبة

(١) عملية الجمع علي الأعداد المركبة عملية تبديلية فإن كان :

$ع_1 = س_1 + ت\,ص_1$ ، $ع_2 = س_2 + ت\,ص_2$ فإن:

$ع_1 + ع_2 = (س_1 + ت\,ص_1) + (س_2 + ت\,ص_2) = (س_1 + س_2) + (ص_1 + ص_2)\,ت$

$= (س_2 + س_1) + (ص_2 + ص_1)\,ت = (س_2 + ت\,ص_2) + (س_1 + ت\,ص_1)$

$= ع_2 + ع_1$

(٢) عملية جمع الأعداد المركبة تسيقيه (تجميعيه):

إذا كان $ع_1 = س_1 + ت\,ص_1$ ، $ع_2 = س_2 + ت\,ص_2$ + $ع_3 = س_3 + ت\,ص_3$

فإن: $ع_1 + (ع_2 + ع_3) = (ع_1 + ع_2) + ع_3$

(٣) العدد صفر هو المحايد الجمعي للأعداد المركبة :

صفر + ع = ع + صفر = ع

(٤) لكل عدد مركب ع معكوس جمعي (-ع) بحيث ع + (-ع) = صفر

فإذا كان ع = س + ت ص فإن –ع = - (س+ ت ص) = - س – ت ص

خصائص عملية ضرب الأعداد المركبة

(١) عملية ضرب الأعداد المركبة إبدالية:

$ع_1\,ع_2 = ع_2\,ع_1$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ∈ ك

(٢) عملية الضرب تجميعية (تنسيقيه):

$(ع_1\,ع_2)\,ع_3 = ع_1(ع_2\,ع_3) = ع_1\,ع_2\,ع_3$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ∈ ك

(٣) وجود العنصر المحايد:

ع× ١ = ١ ×ع = ع لكل ع ∈ ك

(٤) إذا فرض أن ع = س + ت ص فإنه يوجد معكوس ضربي يساوي

$$\frac{س}{س^2 + ص^2} - \frac{ص}{س^2 + ص^2}\,ت$$

ونرمز له بالرمز $ع^{-1}$ أو $\frac{١}{ع}$ حيث $ع\left(\frac{١}{ع}\right) = ١$ لكل ع ∈ ك

(٥) عملية الضرب تتوزع علي عملية الجمع في ك

$ع_1\,(ع_2 + ع_3) = ع_1\,ع_2 + ع_1\,ع_3$ لكل $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ∈ ك

ملاحظة:

المحايد الضربي معكوسة نفسه ع = (١،٠) فإن $ع^{-1} = \frac{١}{١+٠}$ ، $\frac{٠}{١+٠} = (١،٠)$

قسمة عدد مركب علي آخر:

ع$_1$ = (أ ، ب)   ، ع$_2$ = (جـ ، ء)

∴ $\frac{ع_1}{ع_2}$ = (أ ، ب) , (جـ ، ء)$^{-1}$

= (أ ، ب) . ($\frac{جـ}{جـ^2 + ء^2}$ ، $\frac{-ء}{جـ^2 + ء^2}$)

= ($\frac{أ جـ + ب ء}{جـ^2 + ء^2}$ ، $\frac{ب جـ - أ ء}{جـ^2 + ء^2}$)

<u>مثلا:</u>

$\frac{(٣،٢)}{(٤،٣)}$ = ($\frac{٣×٤ + ٢×٣}{١٦ + ٩}$ ، $\frac{٢×٤ - ٣×٣}{١٦ + ٩}$) = $\frac{١٨}{٢٥}$ ، $\frac{-١}{٢٥}$

<u>مثال:</u> أوجد قيمة $\sqrt{٥ - ١٢ ت}$

الحـــــل

نفرض س + ت ص = $\sqrt{٥ - ١٢ ت}$ بتربيع الطرفين

∴ (س^2 − ص^2) + ٢ س ص ت = ٥ − ١٢ ت

∴ س^2 − ص^2 = ٥ ----- (١) ، ٢ س ص = -١٢

∴ س ص = -٦ ---- (٢)

لكن (س^2 + ص^2) = (٥)^2 + (-١٢)^2 = ١٣ ----- (٣)

∴ ٢س^2 = ٥ + ١٣ = ١٨   ∴ س = ± ٣ ، ص = - $\frac{٦}{س}$ = ± ٢

∴ $\sqrt{٥ - ١٢ت}$ = ± ٣ ± ٢ت

<u>مثال:</u> إذا كان ع عدداً مركباً في المعادلة (١،٢)ع + (١،-٢) = $\frac{(٤،٦)}{(١،١)}$

الحـــــل

∵ (١،٢)ع + (١،-٢) = $\frac{٤×١ + ٦×١}{(١)^2 + (١)^2}$ ، $\frac{٦×١ - ٤×١}{(١)^2 + (١)^2}$

= ($\frac{١٠}{٢}$ ، $\frac{٢}{٢}$) = (٥ ، ١)

∴ (١ ، ٢) ع = (٥ ، ١) − (١ ، -٢) = (٤ ، ٣)

ع = $\frac{(٤،٣)}{(١،٢)}$ = $\frac{٤+٦}{٥}$ ، $\frac{٣-٨}{٥}$ = (٢ ، -١)

obeikandl.com

مثال:

إذا كانت س = (١،٢) ، ص = (٣،٤) ، ع = (٧،١) حيث س، ص ، ع أعداد مركبة اثبت أن :

$$\frac{١}{\text{س}} + \frac{٢٠}{\text{ع}} - \frac{٥}{\text{ص}} = (٤,٢ ، ٠)$$

الحــــــل

الطرف الأيمن: $١(\text{س}^{-١}) + ٢٠(\text{ع}^{-١}) - ٥(\text{ص}^{-١})$

$$\therefore \left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + ٢٠\left(\frac{٧}{٥٠} ، \frac{-١}{٥٠}\right) - ٥\left(\frac{٣}{٢٥} ، \frac{-٤}{٢٥}\right)$$

$$\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + \left(\frac{١٤٠}{٥٠} ، \frac{٢٠}{٥٠}\right) - \left(\frac{١٥}{٢٥} ، \frac{-٥\times٤}{٢٥}\right)$$

$$\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) + \left(\frac{١٤}{٥} ، \frac{-٢}{٥}\right) - ٥\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$$

$$\left(\frac{١٥}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right) - \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right) = \left(\frac{١٢}{٥} ، \text{صفر}\right) = (٢,٤ ، \text{صفر})$$

مثال: إذا كان ع = س + ص ت حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ فاثبت أن :

$$\text{ع}^{-١} = \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} - \frac{\text{ص ت}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}$$

الحــــــل

الفكرة هي إثبات أن $\text{ع} \times \text{ع}^{-١} = \text{ع}^{-١} \times \text{ع} = ١$ (المحايد الضربى)

$$\therefore \text{ع} \times \text{ع}^{-١} = (\text{س} + \text{ت ص})\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}\ \text{ت}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} + \frac{\text{ص}^٢}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}\right) + \left(\frac{-\text{س ص}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} + \frac{\text{س ص}}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}\right)\text{ت}$$

$$= \frac{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢} + \text{صفر} = ١ \quad \text{-----} \ (١)$$

، ∵ الضرب عملية إبدالية ∴ $\text{ع}^{-١} \times \text{ع} = ١$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) يثبت المطلوب

مثال: إذا كان الزوج المرتب (أ ، ب) يعبر عن أ + ب ت وكان: $\text{ع}_١ = (٢ ، \sqrt{٣})$

، $\text{ع}_٢ = (٣ ، -\sqrt{٣})$ فاوجد كلاً من $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢$ ، $\text{ع}_١\text{ع}_٢$

الحــــــل

obeikandi.com

ع$_1$ + ع$_2$ = (٢ ، √٣) + (٣ ، − √٣) = (٥ ، ٠)

، ع$_1$ع$_2$ = (٢ ، √٣) (٣ ، − √٣)

= س$_1$ س$_2$ − ص$_1$ ص$_2$ ، س$_1$ ص$_2$ + س$_2$ ص$_1$

= ٦ + ٣ ، ٣√٣ − ٢√٣ = (٩ ، √٣)

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص فإن العدد المركب عَ = س − ت ص يسمى مرافق العدد ع

- لاحظ أن العدد المركب ع ، مرافقه عَ لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

مثلاً : العدد ٣ + ٤ ت مرافقه ٣ − ٤ ت ، مرافق العدد ٣ هو نفسه

∴ العددان المركبان المترافقان :

أ) جزآ هما الحقيقيان متساويان .

ب) جزآ هما التخيليان مختلفان في الشارة فقط .

خواص العددان المترافقان :

(١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي قيمته ضعف الجزء الحقيقي لأيهما .

فإذا كان ع = س + ت ص فإن عَ = س − ت ص

∴ ع + عَ = س + ت ص + س − ت ص = ٢ س = عدد حقيقي .

(٢) حاصل ضرب أي عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

لأن ع × عَ = (س + ت ص) (س- ت ص) = س^2 − ص^{2}ت^2 = س^2 + ص^2 = عدد حقيقي قيمته مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي .

(٣) الفرق بين العددين المركبين المترافقين عدد تخيلي.

(٤) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

أي $\overline{ع_1 + ع_2} = \overline{ع_1} + \overline{ع_2}$

(٥) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

أي أن : $\overline{ع_1 \times ع_2} = \overline{ع_1} \times \overline{ع_2}$

(٦) المرافق لخارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مرافقيهما

أي : $\overline{ع_1 \div ع_2} = \overline{ع_1} \div \overline{ع_2}$

ملاحظة:

$\overline{\left(\frac{١}{ع}\right)} = \frac{١}{\overline{ع}}$ ، $\overline{(\overline{ع})} = ع$

مثال: إذا كانت $ع^{-١}$ = (٣، ١) فإن ع = ...

الحــــــل

∵ $ع^{-١}$ = (٣، ١) ∴ ع = $(٣، ١)^{-١}$

= ($\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{١}{١٠}$)

مثال: إذا كان (س، ص) عدداً مركباً وكان (س، ص) = $\frac{(٣،٢)}{(٣،٢)}$ فإن س = ... ، ص = ...

الحــــــل

∵ (س، ص) = $\frac{(٣،٢)}{(٣،٢)}$ = ($\frac{٦+٦}{١٣}$ ، $\frac{٩-٤}{١٣}$)

∴ (س، ص) = ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{-٥}{١٣}$)

∴ س = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ص = $\frac{-٥}{١٣}$

مثال: أوجد $\sqrt{\frac{-٧ + ت}{١ + ت}}$

الحــــــل

نفرض المقدار = س+ ت ص ثم بالتربيع للطرفين

∴ $\frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$ = -٣ + ٤ ت

∴ $س^٢ - ص^٢$ = -٣ ---- (١)

، ٢س ص = ٤ ---- (٢) ، ∵ $س^٢ + ص^٢$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥

∴ س = ± ١ ، ص = ± ٢

مثال: أوجد قيمة $س^٢ + ص^٢$ إذا كان : س + ت ص = $\frac{٣ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$

الحــــــل

الطرف الأيسر = $\frac{٣ - ٢ت}{٣ + ٢ت} \times \frac{٣ - ٢ت}{٣ - ٢ت}$ = $\frac{٥ - ١٢ت}{١٣}$

∴ س + ت ص = $\frac{٥ - ١٢ت}{١٣}$ = $\frac{٥}{١٣}$ - $\frac{١٢}{١٣}$ ت

obeikandi.com

∴ س = $\frac{\text{٥}}{\text{١٣}}$ ، ص = $\frac{\text{-١٢}}{\text{١٣}}$

∴ س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{١٦٩}}$ + $\frac{\text{١٤٤}}{\text{١٦٩}}$ = ١

<u>مثال</u>: حل المعادلة (١،٢) ع + (٣،٢) = (٤، -٢) حيث ع عدد مركب

الحـــــل

(١،٢) ع = (ع ، -٢) − (٣،٢) = (١، -٤)

∴ ع = $\frac{\text{(١،-٤)}}{\text{(١،٢)}}$ = ($\frac{\text{١-٨}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{-٤-٢}}{\text{٥}}$) = ($\frac{\text{-٧}}{\text{٥}}$ ، $\frac{\text{-٦}}{\text{٥}}$)

<u>مثال</u>: أوجد قيمتي (س، ص) الحقيقيتين:

$\frac{\text{(١+ت) (٢س+ت ص)}}{\text{٣ - ت}}$ = $\frac{\text{١+ ٢ ت}}{\text{٢ - ت}}$

الحـــــل

بضرب الطرفين في (٣- ت) (٢- ت)

∴ (١+ت) (٢- ت) (٢س + ت ص) = (١+ ٢ت) (٣- ت)

∴ ٢س + ت ص = $\frac{\text{(١+ ٢ت) (٣- ت)}}{\text{(١+ت) (٢- ت)}}$

= $\frac{\text{٣+ ٥ ت − ٢ ت}^{\text{٢}}}{\text{٢ + ت − ت}^{\text{٢}}}$ = $\frac{\text{٥ + ٥ ت}}{\text{٣ + ت}}$

∴ ٢ س + ت ص = $\frac{\text{٥ + ٥ ت}}{\text{٣ + ت}}$ × $\frac{\text{٣- ت}}{\text{٣ - ت}}$ = $\frac{\text{١٥ + ١٠ت − ٥ ت}^{\text{٢}}}{\text{٩ − ت}^{\text{٢}}}$

= $\frac{\text{٢٠ + ١٠ ت}}{\text{١٠}}$ = $\frac{\text{١٠(٢+ت)}}{\text{١٠}}$ = ٢ + ت

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١ ، ص = ١ ∴ ص = ١

<u>مثال</u>: إذا كان (أ+ ب ت) (١+ ت) − ٥ = ت حيث ت = $\sqrt{\text{-١}}$ فأوجد القيمتين لكل من أ ، ب

الحـــــل

∴ (أ+ ب ت) (١+ ت) = ٥ + ت

∴ أ + أ ت + ب ت − ب = ٥ + ت ∴ (أ - ب) + (أ ت + ب ت) = ٥ + ت

∴ (أ - ب) + (أ + ب) ت = ٥ + ت

∴ أ − ب = ٥ ---- (١)

∴ أ + ب = ١ ---- (٢)

٢ أ = ٦ ∴ أ = ٣ ، ب = ٢

obeikandl.com

<u>مثال:</u> إذا كان (-٢) أحد جذري المعادلة $\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢} + ١٧\text{س} + ٢٦ = ٠$ فأوجد الجذرين الآخرين وأثبت أنهما مترافقان .

الحـــــــل

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}^{٢} + ١٧\text{س} + ٢٦ & \text{س} + ٢ \\ \hline \text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} & \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١٣ \\ \hline ٢\text{س}^{٢} + ١٧\,\text{س} & \\ -\,٢\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س} & \\ \hline ١٣\,\text{س} + ٢٦ & \\ ١٣\,\text{س} + ٢٦ & \\ \hline ٠ \quad\quad ٠ & \end{array}$$

$\therefore$ $(\text{س} + ٢)\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ١٣) = ٠$ إما $\text{س} = -٢$

أو $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ١٣ = ٠$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ}\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$$ حيث أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ١٣

$$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ١٣}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤٨-}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٤\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$$

$$= -١ \pm ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$$

$\therefore$ الجذران $-١ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ ، $-١ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ مترافقان

<u>مثال:</u> إذا كان $\text{ل} = \frac{٨+٦\text{ت}}{٣+\text{ت}}$ ، $\text{م} = \frac{١٢-١٤\text{ت}}{٥-٣\text{ت}}$ أثبت أن ل ، م مترافقان

ثم أحسب قيمة $\frac{\text{ل}^{٣} - \text{م}^{٣}}{\text{ل} - \text{م}}$

الحـــــــل

$$\text{ل} = \frac{(٨+٦\text{ت})\,(٣-\text{ت})}{(٣+\text{ت})\,(٣-\text{ت})} = \frac{٢٤+١٠\text{ت}+٦}{٩+١} = ٣ + \text{ت}$$

$$\text{م} = \frac{(١٢-١٤\text{ت})\,(٥+٣\text{ت})}{(٥-٣\text{ت})\,(٥+٣\text{ت})} = \frac{٦٠-٣٤\text{ت}+٤٢}{٢٥+٩} = ٣ - \text{ت}$$

، ل + م = ٦ ، ل م = ١٠

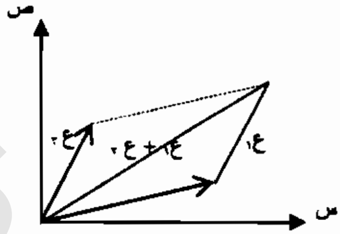
$$\therefore\ \frac{\text{ل}^{٣} - \text{م}^{٣}}{\text{ل} - \text{م}} = \frac{(\text{ل} - \text{م})\,(\text{ل}^{٢} + \text{ل}\text{م} + \text{م}^{٢})}{(\text{ل} - \text{م})} = [\,(\text{ل} + \text{م})^{٢} - \text{ل}\,\text{م}\,]$$

$$= ٣٦ - ١٠ = ٢٦$$

obeikandl.com

المعني الهندسي لجمع وطرح الأعداد المركبة

(١) الجمع:-



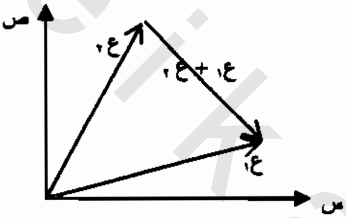
مثلا : ع$_{١}$ = (٦ ، ٢)

ع$_{٢}$ = (-٢، ٤)

∴ ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ = (٦ ، ٢) + (-٢، ٤)

= (٤ ، ٦)

(٢) الطرح:



مثلا : ع$_{١}$ = (٤ ، ٢)

ع$_{٢}$ = (-٣، ٥)

∴ ع$_{١}$ - ع$_{٢}$ = (٤، ٢) - (-٣، ٥)

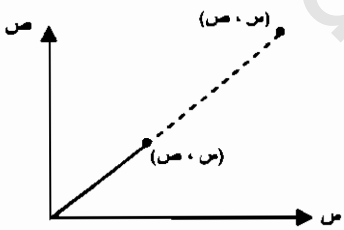
= (٤ ، ٢) + (٣ ، -٥)

= (٧ ، -٣)

المعني الهندسي لضرب عددين مركبين

(١) ضرب عدد حقيقي ك في عدد مركب ع = س + ت ص

(أ) إذا كان ك > ٥ (موجب)



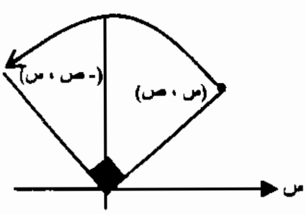
(٢) عند ضرب ت في عدد مركب ع = س + ت ص

ت (س+ ص) = ت س + ت٢ ص = - ص + ت س

أي تتحول النقطة (س ، ص) إلي النقطة (- ص، س)

وهو دوران موجب بزاوية ٩٠° في الإتجاه الموجب

حول نقطة الأصل.



مثلا : ع = ١ + ٢ ت   ∴ ت ع = -٢ + ت

obeikandi.com

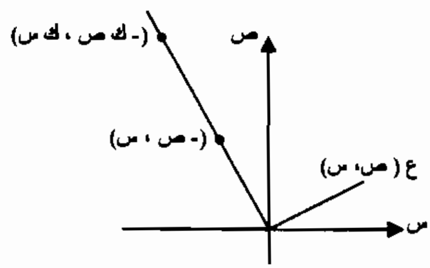
(٣) **ضرب ك ت في العدد المركب ع = س + ت ص**

ك ت (س+ ت ص) = - ك ص + ت ك س

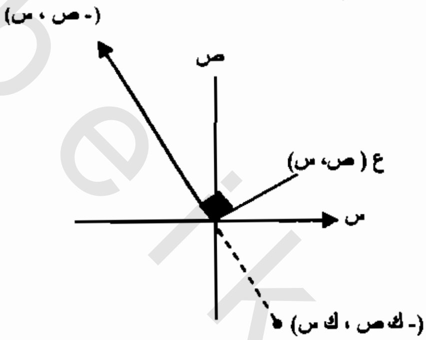
∴ النقطـة (س، ص) يحـدث لهـا دوران موجـب حـول نقطـة الأصـل بزاويـة مقـدارها ٩٠°

فتصبح (- ص ، س) فتنتج النقطة (- ك ص ، ك س) .

(أ) ك > صفر



(ب) ك < صفر



<u>مثال</u>: ع = ٣ + ٢ت

∴ ٣ ت ع ------ ؟

∵ (٣، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران بزاوية ٩٠}}$ (-٢، ٣) $\xrightarrow[\text{٣}]{\text{تكبير بمعامل}}$ (-٦، ٩)

(٤) **ضرب عددين مركبين:-**

ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

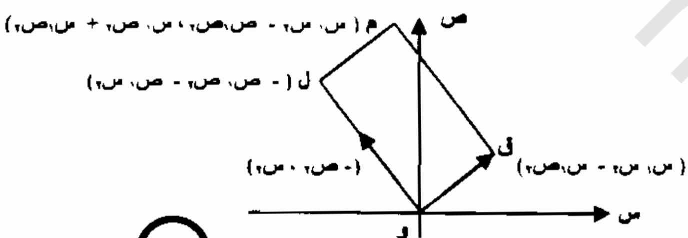
∴ التفسير الهندسي لحاصل ضرب ع$_1$ × ع$_2$ نتبع ما يلي:-

(أ) نعين النقطة التي تمثل حاصل ضرب س$_1$ في (س$_2$+ ت ص$_2$) وهي النقطة (س س$_2$+ س$_1$ ص$_2$)

(ب) دوران (س$_1$ ص$_2$) بزاوية قدرها ٩٠° ضد حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل فتنتج النقطـة (- ص$_2$ ، س$_2$) التـي هـي عبـارة عن حاصل ضـرب ت فـي (س$_2$ + ت ص$_2$) والتـي عبارة هي عن حاصل ضرب ت في (س$_2$ + ت ص$_2$) .

(ج) تعيين النقطة (- ص$_1$ص$_2$ ، ص$_1$ س$_2$) الناتجة من حاصل ضرب (ص$_2$ ، س$_2$) في ص$_1$

(د) توجد النقطة التي تمثل مجموعة الصورتين (س$_1$ س$_2$ ، س$_1$ص$_2$) ، (- ص$_1$ص$_2$، ص$_1$س$_2$)



obeikanal.com

تمارين (٧)

▪ **أوجد قيم س، ص الحقيقية في كل مما يأتي :**

(١) (٣ + ٤ت) (٥ - ٧ت) = س + ت ص

(٢) (٣ - ٢ت) س + (٥ + ٣ ت) ص = ٤ - ٩ ت

(٣) (٢س - ٣ت ص) (١ + ٢ ت) = (٢ - ت)^{٢}

(٤) $\frac{\text{س + ت ص}}{\text{١ + ت}} + \frac{\text{٢س + ٣ت ص}}{\text{١ - ت}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$

(٥) $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ص}^{٢}}{\text{س - ت ص}} = \frac{\text{٣ت - ١}}{\text{(٣ + ت)}^{٢}} + \frac{\text{ت - ٣}}{\text{(١ + ٣ت)}^{٢}}$

(٦) $\frac{\text{١ + ت}}{\text{٢ + ت}} + \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ٢ت}} = \frac{\text{س + ص + ت}}{\text{س - ص + ت}}$

(٧) إذا كان $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{أ - ب ت}}$ = س + ت ص

أثبت أن س^{٢} + ص^{٢} = ١ مهما كانت قيمة كل من أ ، ب

(٨) إذا كان أ + ب ت = $\frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ - ت}}$ حيث أ ، ب حقيقيان

فأثبت أن ٢(أ^{٢} + ب^{٢}) = ٧

(٩) إذا كان (س + ت ص)^{٢} + $\frac{\text{١٠ (١ - ٢ت)}}{\text{١ + ٢ت}}$ + ٢١ = ٠

فأوجد قيمة كل من س، ص

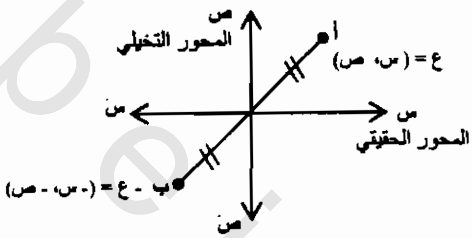
(١٠) إذا كان ل + ن ت أحد جذري المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

حيث ل ، ن ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فأثبت أن أ ن^{٢} = أ ل^{٢} + ب ل + جـ

obeikandl.com

التمثيل البياني للأعداد المركبة

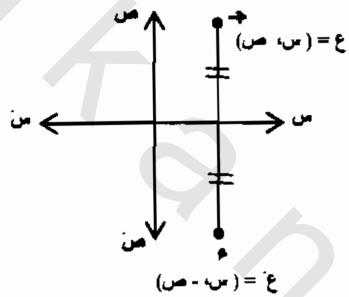
العدد المركب ع = س + ص ت نمثله بيانياً في نظام أحداثي متعامد (شكل آرجاند) بالنقطة (س، ص) حيث س تمثل الأعداد الحقيقية ، ص تمثل الأعداد التخيلية البحته .



(١) تمثيل العدد ومعكوسه الجمعي :

أ ، ب تمثلان ع ، - ع

وهما متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل.



(٢) تمثيل العدد المرافق له:

جـ ، ء تمثلان ع ، عَ وهما متماثلان

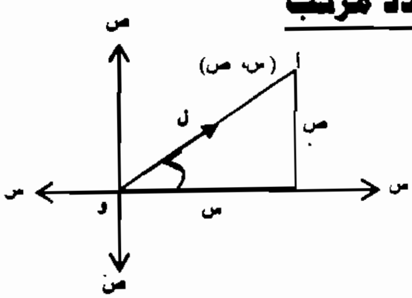
بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{\text{س سَ}}$

ومما سبق نستنتج أن:

(١) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانياً بنقطتين متماثلتان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{\text{سَ و س}}$.

(٢) العدد المركب ومعكوسه لجمعي يمثلان بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها.

المقياس والسعة لعدد مركب



أي مركب ع = س + ت ص

تمثله في الشكل المقابل نقطة أ حيث | و أ | = ل

(١) مقياس العدد (ع) هو: ع = ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

وهو عدد حقيق موجب.

(٢) سعة العدد (ع) قياس الزاوية التي يصنعها $\overleftarrow{\text{و أ}}$

مع الأتجاه الوجب لمحور السينات (وهو عدد حقيقي)

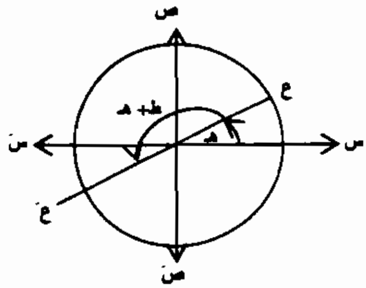
والسعة الأساسية للعدد (ع) = هـ حيث هـ ∈ [٠، ٢ط[

obeikandi.com

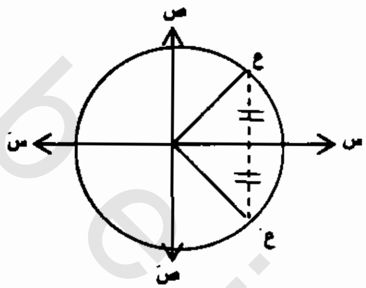
(٣) جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ ← س = ل جتا هـ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل}$ ← ص = ل جا هـ

∴ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد ع هي

ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) حيث ل المقياس ، هـ السعة



العلاقة بين سعة ع ، سعة (- ع)



العلاقة بين سعة ع ، سعة (َع)

<u>لاحظ أن:</u>

إذا كان سعة العدد ع = هـ فإن:

(أ) سعة المعكوس الجمعي (-ع) = ط + هـ

∴ - ع = ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط + هـ)]

(ب) سعة المرافق له َع = (٢ط – هـ)

∴ َع = ل [جتا (٢ط هـ) + ت جا (٢ط هـ)]

كيف تحسب القيمة الأساسية لسعة ع = س+ ت ص ؟

(١) نحسب | ع | = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

(٢) نحسب قياس الزاوية الحادة وليكن (ي) من:

حتا ي = | $\frac{س}{ل}$ | أو حا ي = | $\frac{ص}{ل}$ | ونصرف النظر مؤقتاً عن اشارات س ، ص عند حساب ي

(٣) نعين القيمة الأساسية لسعة ي بناء علي إشارتي س ، ص طبقاً للجدول التالي:-

إشارة س	إشارة ص	المربع الذي تقع فيه ع	السعة الأساسية
+	+	الأول	هـ = ي
-	+	الثاني	هـ = ١٨٠- هـ
-	-	الثالث	هـ = ١٨٠+ هـ
+	-	الرابع	هـ = ٣٦٠- هـ

obeikandl.com

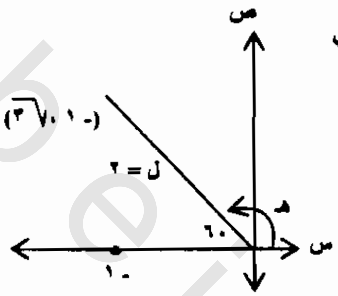
مثال: أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم أكتب كلا منها علي الصورة المثلثية:

[١] $-١ + \sqrt{٣}$ ت [٢] $١ +$ ت

[٣] $١ -$ ت [٤] $-٣ - ٤$ ت

الحل

[١] العدد تمثله النقطة $(-١، \sqrt{٣})$ وهي تقع في الربع الثاني



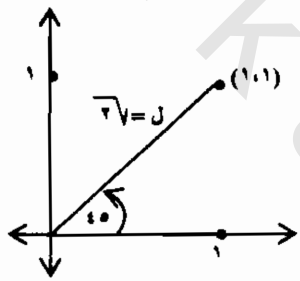
$∴$ ل $=$ |ع$_١$| $= \sqrt{١+٣} = ٢$

، جتا هـ $= \frac{\text{س}}{\text{ل}} = -\frac{١}{٢}$

$∴$ هـ $= ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠ = \frac{٢}{٣}$ ط

$∴$ ع$_١$ $= ٢$ (جتا $\frac{٢}{٣}$ ط $+$ ت جا $\frac{٢}{٣}$ ط)

[٢] العدد تمثله النقطة $(١،١)$ وهي تقع في الربع الأول

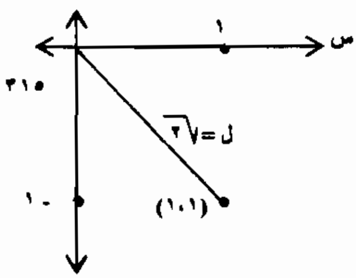


$∴$ ل $=$ |ع$_٢$| $= \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

، جتا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ $∴$ هـ $= ٤٥ = \frac{\text{ط}}{٤}$

$∴$ ع$_٢$ $= \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\text{ط}}{٤}$ $+$ ت جا $\frac{\text{ط}}{٤}$)

[٣] العدد تمثله النقطة $(١، -١)$ وهي تقع في الربع الرابع



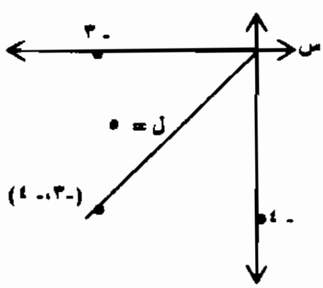
$∴$ ل $=$ |ع$_٣$| $= \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

، جتا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$∴$ هـ $= ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥ = \frac{٧\text{ط}}{٤}$

$∴$ ع$_٣$ $= \sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ $+$ ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

[٤] العدد تمثله النقطة $(-٣،-٤)$ وهي تقع في الربع الثالث



$∴$ ل $=$ |ع$_٤$| $= \sqrt{٩+١٦} = ٥$

، جتا هـ $= \frac{-٣}{٥}$

$∴$ هـ $= ١٨٠ + ٥٣^{\circ} ٨' = ٢٣٣^{\circ} ٨'$

$∴$ ع$_٤$ $= ٥$ (جتا $٢٣٣^{\circ} ٨'$ $+$ ت جا $٢٣٣^{\circ} ٨'$)

obeikandi.com

<u>مثال</u>: اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة التالية:-

١) $ع_١$: مقياسه ٢ ، سعته $\frac{ط}{٤}$ **٢) $ع_٢$: مقياسه $٢\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{٢}{٣}$ ط**

٣) $ع_٣$: مقياسه ٥ وسعته $\frac{٧}{٦}$ ط   **٤) $ع_٤$: مقياسه ٧ وسعته $\frac{٣ط}{٢}$**

الحـــــــل

١) $ع_١ = ٢\left(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\frac{ط}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \text{ت} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}\ \text{ت}$

٢) $ع_٢ = ٢\sqrt{٣}\left(\text{جتا}\frac{٢ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{٢ط}{٣}\right)$

$= ٢\sqrt{٣}\ (\text{جتا } ١٢٠ + \text{ت جا } ١٢٠) = ٢\sqrt{٣}\left(-\frac{١}{٢} + \text{ت}\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = -\sqrt{٣} + ٣\text{ت}$

٣) $ع_٣ = ٥\left(\text{جتا}\frac{٧ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{٧ط}{٦}\right) = ٥\left(-\text{جتا}\frac{ط}{٦} - \text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)$

$= ٥\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{ت} \times \frac{١}{٢}\right) = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٥}{٢}\ \text{ت}$

٤) $ع_٤ = ٧\left(\text{جتا}\frac{٣ط}{٢} + \text{ت جا}\frac{٣ط}{٢}\right) = ٧\ (٠ + \text{ت} \times -١) = -٧\ \text{ت}$

<u>مثال</u>: أوجد الصورة المثلثية لكل من:

١) العدد ٢   **٢) العدد ٢ ت**

الحـــــــل

١) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٥

∴ $ع_١$ = ٢(جتا ٥ + ت جا ٥)

٢) العدد ٢ ت تمثله النقطة (٥، ٢)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٩٠°

∴ $ع_٢$ = ٢(جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

مثال:

ضع العدد ع = $\frac{\text{١ - ٥ ت}}{\text{٢ + ٣ت}}$ علي الصورة الجبرية س+ ت ص ثم علي الصورة المثلثية

الحـــــل

ع = $\frac{\text{١ - ٥ ت}}{\text{٢ + ٣ت}} \times \frac{\text{٢-٣ت}}{\text{٢-٣ت}} = \frac{\text{-١٣-١٣ت}}{\text{١٣}}$ = -١- ت

∴ ل = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}} = \sqrt{\text{١ + ١}} = \sqrt{\text{٢}}$ --- (١)

والعدد ع تمثله النقطة (-١، -١) وهي في الربع الثالث

∴ طا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ١ ∴ هـ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥ --- (٢)

من (١) ، (٢)

∴ الصورة القطبية هي ع = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)

مثال: إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

فاكتب علي الصورة القطبية كلا من: -ع ، عَ ، $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{عَ}}$

الحـــــل

-ع = ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

عَ = ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{\text{١}}{\text{ع}} = \frac{\text{١}}{\text{ل(جتا هـ + ت جاهـ)}} = \frac{\text{١}}{\text{ل}} \times \frac{\text{جتا هـ - ت جاهـ}}{\text{جتا}^{2}\text{ هـ + جا}^{2}\text{ هـ}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{ل}}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{\text{١}}{\text{عَ}} = \frac{\text{١}}{\text{ل(جتا هـ + ت جاهـ)}} = \frac{\text{١}}{\text{ل}} \quad \frac{\text{جتا هـ + ت جاهـ}}{\text{جتا}^{2}\text{ هـ + جا}^{2}\text{ هـ}}$

= $\frac{\text{١}}{\text{ل}}$ (جتا هـ + ت جا هـ)

> **ملاحظة:**
> سعة العدد ع = هـ
> (-ع) = ط+ هـ
> عَ = ٢ط - هـ = - هـ
> $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = ٢ط - هـ = - هـ
> $\frac{\text{١}}{\text{عَ}}$ = هـ

مثال: ضع علي الصورة القطبية كلا من :-

١) جتا هـ - ت جا هـ
٢) جا هـ + ت جتا هـ
٣) - جا هـ + ت جتا هـ
٤) - جا هـ - ت جتا هـ

obeikandl.com

الحــــــل

١) جتا هـ - ت جا هـ = جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

٢) جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ)

٣) - جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ)

٤) - جا هـ - ت جتا هـ = جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ)

ملاحظة:

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

-ع (المعكوس الجمعي) $\xleftarrow{\text{الصورة القطبية}}$ ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

عَ (المرافق) ← ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{ع}$ (المعكوس الضربي) ← $\frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{ع}$ ← (جتاهـ + ت جا هـ)

obeikandl.com

تمارين (٨)

- أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية ثم عبر عن كل منها بالصورة المثلثية:-

١) -١ + ت

٢) $\sqrt{٣}$ - ت

٣) -٢ + ٢ت

٤) $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

٥) ٣$\sqrt{٢}$ + ٣$\sqrt{٢}$ ت

٦) ٢ت

- أكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية:-

٧) العدد الذي مقياسه ٢$\sqrt{٣}$ وسعته ١٢٠°

٨) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٥ ط}{٤}$

٩) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{١١ ط}{٤}$

١٠) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٦}$ وسعته $(-\frac{٥ ط}{٦})$

- ضع كلا من الأعداد الآتية علي صورة أ+ب ت حيث أ، ب $\in$ ح ثم أكتب الصورة المثلثية لكل منها

١١) $\frac{٥ - \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٢ت}$

١٢) $\frac{٨(٢ + \sqrt{٣}ت)}{٥ - \sqrt{٣}ت}$

١٣) $\frac{٦ + ٢\sqrt{٣}ت}{٣ - \sqrt{٣}ت}$

١٤) $\frac{\sqrt{٣} - ت}{٢(جتا\frac{ط}{٢} + ت جا\frac{ط}{٢})}$

١٥) إذا كانت ع = ٢-٢ت فأكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

١٦) مثل علي شكل أرجاند الأعداد $ع_١$ = -٣+ ٤ت ، $ع_٢$ = -٢ + ٣ت ، $ع_٣$ = $ع_١$-$ع_٢$ ثم أوجد مقياس وسعة $ع_٣$

- أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية:-

١٧) -٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

١٨) ٤ (جتا ١٥٠° – ت جا ١٥٠°)

١٩) -٢ (جا ٢١٠° - ت جتا ٢١٠)

٢٠) ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

obeikandl.com

ملاحظات هامة

مثال: عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:-

١) ١   ٢) ت   ٣) -١   ٤) -ت

الحل

١) ١ + ٠ × ت   ∴ س = ١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١ + ٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{١}{١}$ = ١ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ٠   ∴ ١ = ١ × (جتا ٠ + ت جا ٠)

أي أن : ١ = جتا٠ + ت جا ٠

٢) ت = ٠ + ١ × ت

∴ س = ٠ ، ص = ١ ، ل = $\sqrt{٠ + ١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠ ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{١}{١}$ = ١

∴ هـ = ٩٠° = $\frac{\text{ط}}{٢}$ ∴ ت = ١ × (جتا $\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٢}$)

أي أن : ت = جتا $\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٢}$

٣) -١ = -١ + ٠ × ت   ∴ س = -١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١ + ٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{-١}{١}$ = -١ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ١٨٠° = ط   ∴ -١ = جتا ط + ت جا ط

أي أن : -١ = جتا ط + ت جا ط

٤) -ت = ٠ - ١ × ت   ∴ س = ٠ ، ص = -١ ، ل = $\sqrt{٠ + ١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{-١}{١}$ = -١

هـ = ٢٧٠° = $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ ∴ -ت = ١ × (جتا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$)

أي أن: -ت = جتا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$

الخلاصة:

١ = جتا٠ + ت جا ٠   ت = جتا $\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٢}$

-١ = جتا ط + ت جا ط   -ت = جتا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$

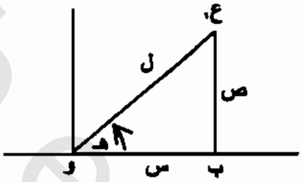
obeikandi.com

ل (جتا هـ + ت جا هـ)

١) إذا كانت $ع_١$ = ل (جا هـ + ت جتا هـ)

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$ = جا هـ   ∴ $\frac{\text{جاهـ}}{\text{ل}}$ = جا هـ

، جتا هـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{ل}}$

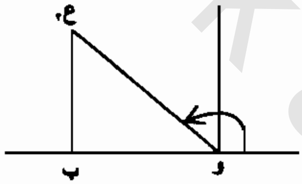


∴ السعة (هـ) في الربع الأول

∴ جا هـ ⟸ جتا هـ وذلك انتسابها للعدد $\frac{\text{ط}}{٢}$ = ٩٠°

∴ $ع_١$ = ل [جتا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - هـ)]

٢) إذا كانت $ع_٢$ = ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

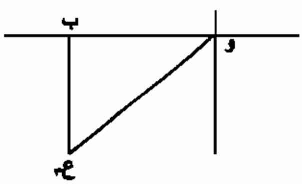


∵ س = -   ، ص = +

∴ العدد المركب يقع في الربع الثاني

∴ $ع_٢$ = ل [جتا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

٣) إذا كانت $ع_٣$ = ل (- جا هـ - ت جتا هـ)



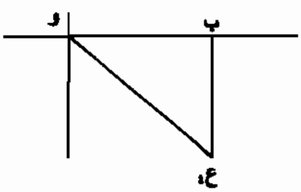
س= -   ، ص = -

∴ العدد المركب يقع في الربع الثالث

∴ السعة تنسب للعدد $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ = ٢٧٠°

∴ $ع_٣$ = ل [جتا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

٤) إذا كانت $ع_٤$ = ل (جا هـ - ت جتا هـ)



س = +   ، ص = -

∴ العدد المركب يقع في الربع الرابع

∴ السعة تنسب للعدد ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)

∴ $ع_٤$ = ل [جتا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

obeikandl.com

الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب وإشارتها غير مضبوطة وفي هذه الحالة تنسب الزوايا إلي ط/٢ ، ٣ط/٢

- ل (- جتاهـ + ت جا هـ) = ل [جتا (ط- هـ) + ت جا (ط – هـ)]
- ل (- جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
- ل (جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (٢ط - هـ) + ت جا (٢ط - هـ)]

الخلاصة: النسب المثلثية للعدد المركب مضبوطة ولكن إشارتها غير مضبوطة

∴ تنسب الزوايا إلي ط ، ٢ ط

مثال: اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية الصحيحة:-

١) ع١ = -٤ (جا ٣٠ – ت جا ٣٠)

٢) ع٢ = -٢ (جا ١/٤ ط – ت جتا ١/٤ ط)

٣) ع٣ = -٩ (جا ٥/٣ ط + ت جتا ٥/٣ ط)

الحل

١) ع١ = -٤ [جتا (٩٠ – ٣٠) + ت جا(٩٠ – ٣٠)]

= -٤ [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠] = ٤ (- جتا ٦٠- ت جا ٦٠)

٢) ع٢ = -٢ (جا ١/٤ ط – ت جتا ١/٤ ط)

= -٢ (جا ٤٥ – ت جتا ٤٥)

= -٢ [جتا (٩٠-٤٥) – ت جا (٩٠-٤٥)]

= -٢ (جتا ٤٥ – ت جا ٤٥)

= ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

٣) ع٣ = -٢ (جا ٥/٣ ط – ت جتا ٥/٣ ط)

= -٩ (جا ٣٠٠ – ت جتا ٣٠٠)

= -٩ [جا (٣٦٠-٦٠) + ت جتا (٣٦٠-٦٠)]

= -٩ (جا ٦٠ + ت جتا ٦٠)

= ٩ (- جا ٦٠ + ت جتا ٦٠) = ٩ (- جتا ٣٠ – ت جا ٣٠)

لأن ٦٠ تتم ٣٠°

المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما

- **حقائق هندسية:**

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ حا ب

جتا (أ+ ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب

جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ ⇐ جا أ = ٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$

جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ ⇐ جتا أ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} أ – ١   = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١

= ١ – ٢ جا^{٢} أ   = ١- ٢ حا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

أولاً : المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين

مقياس (حاصل ضرب عددين مركبين) = حاصل ضرب مقياسهما
سعـــة (حاصل ضرب عددين مركبين) = مجموع سعتيهما

إذا كان ع$_{١}$ = ل$_{١}$ (جتاهـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)

ع$_{٢}$ = ل$_{٢}$ (جتاهـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$)

∴ ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = ل$_{١}$ ل$_{٢}$ [جتا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$) + ت جا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$)]

نتيجة(١):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت حا هـ)

∴ ع^{٢} = ل^{٢} (جتا ٢ هـ + ت ج ٢ هـ)

نتيجة(٢):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جاهـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن

ع^{ن} = ل^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

obeikandl.com

ناتج قسمة عدد مركب علي آخر

$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$ [جتا ($\text{هـ}_1 - \text{هـ}_2$)+ ت جا ($\text{هـ}_1 - \text{هـ}_2$)]

∴ خارج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب

فمثلاً : إذا كان ع_1 = ٣ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥)

ع_2 = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

فإن : $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{٣}{٢}$ [جتا (٧٥-٤٥) + ت جا(٧٥-٤٥)]

= $\frac{٣}{٢}$ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

، $\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1} = \frac{٢}{٣}$ [جتا (٤٥-٧٥) + ت جا(٤٥-٧٥)]

= $\frac{٢}{٣}$ (جتا -٣٠ + ت جا -٣٠)

= $\frac{٢}{٣}$ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)

نتيجة : إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) فإن

$\frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{\text{ل}}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

أما $\bar{\text{ع}}$ = ل (جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

فمثلاً : ع = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

∴ $\frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{٢}$ [جتا (- ٤٥) + ت جا (-٤٥)]

= $\frac{١}{٢}$ (جتا ٤١٥ + ت جا ٤١٥)

ملاحظة هامة

إذا كان $\text{ع}_1 = \text{ل}_1$ (جتا هـ_1 + ت جا هـ_1)

$\text{ع}_2 = \text{ل}_2$ (جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)

$\text{ع}_3 = \text{ل}_3$ (جتا هـ_3 + ت جا هـ_3)

فإن : $\frac{\text{ع}_1\,\text{ع}_2}{\text{ع}_3} = \frac{\text{ل}_1\,\text{ل}_2}{\text{ل}_3}$ [جتا ($\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 - \text{هـ}_3$) + ت جا ($\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 - \text{هـ}_3$)]

obeikandl.com

مثال:
إذا كان $ع_1$ = ٦ (جتا ٧٠ + ت جا ٧٠) ، $ع_2$ = ٣ (جتا ٤٠ + ت جا ٤٠) فأوجد $\frac{١٤}{٢٤}$ ثم ضع الناتج علي صورة زوج مرتب .

الحـــــــل

، $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2}$ [جتا ($هـ_1$ - $هـ_2$) + ت جا ($هـ_1$ - $هـ_2$)]

$= \frac{٦}{٣}$ [جتا (٧٠ - ٤٠) + ت جا (٧٠ - ٤٠)] = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

= ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت) = $\sqrt{٣}$ + ت = ($\sqrt{٣}$ ، ١)

مثال: ضع العدد (١ - ت) علي الصورة المثلثية ثم أوجد قيم $(١ - ت)^{٦}$

الحـــــــل

س = ١ ، ص = ١ ، ل = $\sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{س}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل} = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥

١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

$(١ - ت)^{٦} = (\sqrt{٢})^{٦}$ (جتا ٦ × ٣١٥ + ت جا ٦ × ٣١٥)

= ٨ (جتا ١٨٩٠ + ت جا ١٨٩٠)

= ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٨ ت

مثال: إذا كان $ع_1 = ل_1$ (جتا (أ + ب) + ت جا (أ + ب)) ، $ع_2 = ل_2$ (جتا (أ - ب) + ت جا (أ - ب))
أوجد $ع_1 ع_2$

الحـــــــل

$ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2$ (جتا ٢أ + ت جا ٢أ)

مثال: أوجد الصورة المثلثية لحاصل ضرب $ع_1 ع_2$ إذا كان :

$ع_1$ = - جا ٢٤٠ - ت جتا ٢٤٠ ، $ع_2$ = ٧ (جا ١٢٠ - ت جتا ١٢٠)

obeikandi.com

الحـــــل

$ع_1$ = جا٦٠ + ت جتا٦٠ = جتا ٣٠ + ت جا ٣٠

$ع_2$ = ٧(جا ٦٠+ت جتا ٦٠) = ٧(جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

∴ $ع_1$ $ع_2$ = ٧(جتا ٦٠ + ت جا٦٠)

∴ مقياس $ع_1$ $ع_2$ يساوي ٧ سعة $ع_1$ $ع_2$ = ٦٠°

__مثال:__ إذا كان $ع_1$ = ـ ٣٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، $ع_2$ = ٥(جتاهـ ـ ت جا هـ) أوجد $\frac{ع_1}{ع_2}$

الحـــــل

$ع_1$ = ٣٠(ـ جتا هـ ـ ت جا هـ)

= ٣٠ [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]

$ع_2$ = ٥ [جتا (ـ هـ) + ت جا (ـ هـ)]

∴ $\frac{ع_1}{ع_2}$ = ٦ [جتا (ط + ٢هـ) + ت جا (ط + ٢هـ)]

__مثال:__ اختصر لأبسط صورة : $\frac{(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\frac{ط}{٤})^{٦} \; (\text{جتا}\frac{ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{ط}{٣})^{٥}}{(\text{جتا}\frac{ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{ط}{٦})^{٤}}$

الحـــــل

$$\frac{(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\frac{ط}{٤})^{٦} \; (\text{جتا}\frac{ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{ط}{٣})^{٥}}{(\text{جتا}\frac{ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{ط}{٦})^{٤}}$$

= جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ + $\frac{٥ط}{٣}$ ـ $\frac{٢ط}{٣}$) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ + $\frac{٥ط}{٢}$ ـ $\frac{٢ط}{٣}$)

= جتا $\frac{٥ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٢}$ = ت

__مثال:__ إذا كان $ع_1$ = ١٠٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، $ع_2$ = $\frac{١}{٢٠}$ (جا ٢ هـ + ت جتا ٢ هـ)

حيث طا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ [٠ ، ٩٠] أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لحاصل الضرب $ع_1$ $ع_2$.

الحـــــــل

$ع_٢ = \frac{١}{٢٠}$ [جتا (٩٠-٢هـ) + ت(٩٠-٢هـ)]

$ع_١ ع_٢ = ١٠٠ \times \frac{١}{٢٠}$ [جتا (هـ+٩٠-٢هـ) + ت جا (هـ+٩٠-٢هـ)]

= ٥ [جتا (٩٠- هـ) + ت جا (٩٠- هـ)]

= ٥ [جا هـ + ت جا هـ)

= ٥ [$\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٤}{٥}$ت] = ٣ + ٤ ت وهي الصورة الجبرية

<u>مثال</u>: اوجد قيمة $\left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)^{٤}$

الحـــــــل

$\frac{١-ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{١-٢ت+ت^{٢}}{١-ت^{٢}} = \frac{-٢ت}{١+١} = -ت$

$\therefore \left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)^{٤} = (-ت)^{٤} = ١$

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_١$ = ١٠(جتا ٣١٠ + ت جا ٣١٠) ، $ع_٢$ = ٥(جتا١٠٠ + ت جا ١٠٠)

أوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل من $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ، $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحـــــــل

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٠}{٥}$ [جتا (٣١٠- ١٠٠) + ت جا (٣١٠- ١٠٠)]

= ٢ [جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠]

= ٢[- جتا٣٠ - ت جا ٣٠] الصورة المثلثية

= ٢ [- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - ت × $\frac{١}{٢}$] = -$\sqrt{٣}$ - ت الصورة الجبرية

$\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١}{٢}$ [جتا (-٢١٠) + ت جا (-٢١٠)]

= $\frac{١}{٢}$ [جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠]

= $\frac{١}{٢}$ [- جتا٣٠ + ت جا ٣٠] الصورة المثلثية

= $\frac{١}{٢}$ [- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت] = - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ ت الصورة الجبرية

obeikandl.com

مثال: ضع كل من العددين $\sqrt{٢}\,\text{ت}$ ، $١+\text{ت}$ علي الصورة المثلثية ثم أوجد $\left(\frac{\sqrt{٢}\,\text{ت}}{١+\text{ت}}\right)^{٨}$

الحـــــــل

$\sqrt{٢}\,\text{ت} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٢}\right)$

$١+\text{ت} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{٤}\right) + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}$

$\left(\frac{\sqrt{٢}\,\text{ت}}{١+\text{ت}}\right)^{٨} = \text{جتا } ٢\,\text{ط} + \text{ت جا } ٢\,\text{ط} = ١ + \text{ت} \times ٠ = ١$

تمارين (٩)

- **أوجد الصورة المثلثية لكل من $\text{ع}_١\,\text{ع}_٢$ ، $\text{ع}_١ \div \text{ع}_٢$ في كل مما يأتي :-**

(١) $\text{ع}_١ = ٦\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٣}\right)$ ، $\text{ع}_٢ = ٢\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٣} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٣}\right)$

(٢) $\text{ع}_١ = ٨\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}\right)$ ، $\text{ع}_٢ = ٤\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٢} - \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٢}\right)$

(٣) $\text{ع}_١ = ١٠\left(\text{جتا } ٣٠٠^\circ - \text{ت جا } ٣٠٠^\circ\right)$ ، $\text{ع}_٢ = ٤\left(\text{جا } ٣٠٠^\circ - \text{ت جتا } ٣٠٠^\circ\right)$

(٤) $\text{ع}_١ = \text{ل}_١\left(\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ}\right)$ ، $\text{ع}_٢ = \text{ل}_٢\left(\text{جتاهـ} - \text{ت جاهـ}\right)$

- **أوجد الصور المثلثية لكل من $\text{ع}^٢$ ، في كل مما يأتي:-**

(٥) $\text{ع} = \frac{١}{\sqrt{٢}}\left(\text{جتا}\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)$

(٦) $\text{ع} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا أ} - \text{ت جتا أ}\right)$

(٧) أكتب الصورة المثلثية لكل من العددين المركبين :

$\text{ع}_١ = \frac{١}{٢}\left(-١ + \text{ت}\sqrt{٣}\right)$ ، $\text{ع}_٢ = \frac{١}{٢}\left(-١ - \text{ت}\sqrt{٣}\right)$ ثم أثبت أن :

أولا: $\text{ع}_١^{\,٢} = \text{ع}_٢$ **ثانيا**: $\text{ع}_٢^{\,٢} = \text{ع}_١$ **ثالثا**: $\text{ع}_١^{\,٣} = \text{ع}_٢^{\,٣} = ١$

(٨) إذا كان $\text{ع}_١ = ٤\left(\text{جتا } ٣\text{هـ} - \text{ت جا}٣\text{هـ}\right)$ ، $\text{ع}_٢ = -٢\left(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ}\right)$ حيث هـ $\in$]١٨٠، ٢٧٠[
، $\text{طا هـ} = \frac{١}{٢}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لخارج القسمة $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}$

(٩) إذا كان $\text{س} = \sqrt{٣} + \text{ت}$ ، $\text{ص} = ١ - \text{ت}$ فأوجد الصورة المثلثية لكل من س ، ص ،
$\text{ص}^٢ \div \text{س}^٢$

(١٠) اختصر لأبسط صورة $\dfrac{\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}\right)^{٦}\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}\right)^{٥}}{\left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٤} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٤}\right)^{٤}}$

نظرية ديموافر

- إذا كان ن عددا نسبيا فإن : (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\text{ن}}$ = جتا هـ + ت جا ن هـ
- إذا كان ن عدد صحيح موجب أو سالب فإن:

(جتا هـ + ت جا هـ)$^{\text{ن}}$ = [جتا (هـ + ٢ ر ط) + ت جا (هـ + ٢ ر ط)]$^{\text{ن}}$

= جتا ن هـ + ت جا ن هـ

- إذا كان ن كسر حقيقي وليكن ن = $\frac{١}{\text{ك}}$ (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{\text{ك}}}$

= جتا $\frac{\text{هـ} + ٢ \text{ر ط}}{\text{ك}}$ + ت جا $\frac{\text{هـ} + ٢ \text{ر ط}}{\text{ك}}$

لذلك المقدار (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{\text{ك}}}$ له ك من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض في المقدار (جتا $\frac{\text{هـ} + ٢ \text{ر ط}}{\text{ك}}$ + ت جا $\frac{\text{هـ} + ٢ \text{ر ط}}{\text{ك}}$) عن ر = ٠، ١، ٢،..... إلي (ك - ١)

مثال: اختصر الاتي: (جتا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$)^{٤}

الحـــــــل

(جتا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$)^{٤} = جتا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$ × ٤ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٤}$ × ٣

= جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط

= -١ + ت × ٠ = -١

مثال: أثبت أن $\frac{(\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٨})^{٥} \; (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٨})^{٤}}{(\text{جتا } \frac{٥\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{٥\text{ط}}{٨})}$ = ت

الحـــــــل

$\frac{(\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٨})^{٥} \; (\text{جتا } \frac{\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{\text{ط}}{٨})^{٤}}{(\text{جتا } \frac{٥\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{٥\text{ط}}{٨})}$

= $\frac{(\text{جتا } \frac{٥\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{٥\text{ط}}{٨}) \; (\text{جتا } \frac{٤\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{٤\text{ط}}{٨})}{(\text{جتا } \frac{٥\text{ط}}{٨} + \text{ت جا } \frac{٥\text{ط}}{٨})}$

obeikandl.com

$$= \frac{\text{جتا}\left(\frac{٥ط}{٦}+\frac{٤ط}{٦}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{٥ط}{٦}+\frac{٤ط}{٦}\right)}{\text{جتا}\frac{٥ط}{٦}+\text{ت جا}\frac{٥ط}{٦}} = \frac{\text{جتا}\frac{١٣ط}{٦}+\text{ت جا}\frac{١٣ط}{٦}}{\text{جتا}\frac{٥ط}{٦}+\text{ت جا}\frac{٥ط}{٦}}$$

$$= \text{جتا}\left(\frac{١٣ط}{٦}-\frac{٥ط}{٣}\right)+\text{ت جا}\left(\frac{١٣ط}{٦}-\frac{٥ط}{٣}\right)$$

$$= \text{جتا}\frac{ط}{٢}+\text{ت جا}\frac{ط}{٢} = ٠ + \text{ت} + ١ = \text{ت}$$

<u>مثال</u>: اثبت أن: $\frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦}-\text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}} = \frac{١}{٢}\left(١-\sqrt{٣}\,\text{ت}\right)$

الحـــــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦}-\text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}} = \frac{\text{ت}}{\left[\text{جتا}\left(-\frac{ط}{٦}\right)+\text{ت جا}\left(-\frac{ط}{٦}\right)\right]^{٧}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\left(-\frac{٧ط}{٦}\right)+\text{ت جا}\left(-\frac{٧ط}{٦}\right)} = \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\frac{٧ط}{٦}-\text{ت جا}\frac{٧ط}{٦}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}٢١٠^{\circ}-\text{ت جا}٢١٠^{\circ}} = \frac{\text{ت}}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}+\frac{١}{٢}\text{ت}} = \frac{٢\,\text{ت}}{-\sqrt{٣}+\text{ت}}$$

$$= \frac{٢\,\text{ت}}{-\sqrt{٣}+\text{ت}} \cdot \frac{-\sqrt{٣}-\text{ت}}{-\sqrt{٣}-\text{ت}}$$ بالضرب في مرافق المقام

$$= \frac{٢\left(١-\sqrt{٣}\,\text{ت}\right)}{٤} = \frac{١}{٢}\left(١-\sqrt{٣}\,\text{ت}\right) = \text{الطرف الأيسر}$$

<u>مثال</u>: باستخدام نظرية ديموافر عبر عن كل من : جا٣هـ ، جتا ٣هـ بدلالة قوي جاهـ ، جتا هـ

الحـــــــل

الفكرة: نكتب العدد الذي مقياسه = ١ ، سعته = ٣ هـ علي صورة ديموافر

$\because$ جتا ٣هـ + ت جا٣هـ = $(\text{جتاهـ} + \text{ت جا هـ})^{٣}$

بفك الطرف الأيسر بنظرية ذات الحدين

= $\text{جتا}^{٣}\text{هـ} + ٣\,\text{جتا}^{٢}\text{هـ}\,(\text{ت جاهـ}) + ٣\,\text{جتا هـ}\,(\text{ت جاهـ})^{٢} + (\text{ت جاهـ})^{٣}$

= $\text{جتا}^{٣}\text{هـ} + ٣\,\text{جتا}^{٢}\text{هـ جتا}^{٢}\text{هـ ت} - ٣\text{جا}^{٢}\text{هـ جتاهـ} - \text{ت جا}^{٣}\text{هـ}$

= $(\text{جتا}^{٣}\text{هـ} - ٣\text{جا}^{٢}\text{هـ جتا هـ}) + (٣\text{جاهـ جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٣}\text{هـ})\,\text{ت}$

وبمساواة الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي

∴ جتا٣هـ = جتا^{٣}هـ - ٣جا^{٢}هـ جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣(١- جتا^{٢}هـ) جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣جتاهـ + ٣جتا^{٣}هـ

= ٤جتا^{٣}هـ - ٣ جتا هـ

، جا٣هـ = ٣جاهـ جتا^{٢}هـ - جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ (١- جا^{٢}هـ) – جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ - ٤جا^{٣}هـ

<u>مثال</u>: باستخدام نظرية ديموافر أو جد قيمة كل من جتا ٢هـ ، جا٢هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ .

الحـــــــل

من ديموافر (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا ٢هـ + ت جا٢هـ ----- (١)

، جبرياً (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ + ت^{٢} جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت---- (٢)

من(١) ، (٢) واستخدام خصائص تساوي عددين مركبين

∴ جتا٢هـ+ ت جا ٢هـ = (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت

∴ جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ ، جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ ت

<u>مثال</u>: إذا كان ع$_{١}$ = ٢(جتا هـ + ت جاهـ) ، ع$_{٢}$ = ٤(جتا٢هـ + ت جا٢هـ)

ع$_{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا$\frac{هـ}{٢}$ + ت جا$\frac{هـ}{٢}$) أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع_{١}^{٥} \times ع_{٢}^{-٣}}{ع_{٣}}$

علماً بأن هـ ∈]٠ ، ٩٠[، ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

الحـــــــل

ع$_{١}^{٥}$ = ٢^{٥} (جتا ٥هـ + ت جا٥هـ) ---- (١)

، ع$_{٢}^{-٣}$ = ٤$^{-٣}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا(-٦هـ)]

= ٢$^{-٦}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا (-٦هـ)] ----- (٢)

obeikandl.com

$ع_٣^{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} [\text{جتاهـ} + \text{ت جا هـ}]$ ----- (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\frac{ع_١^{٥} \times ع_٢^{-٣}}{ع_٣} = \frac{٢^{٥} \times ٢^{-١٠}}{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}} [\text{جتا}(٥\text{هـ} - ٦\text{هـ} - \text{هـ}) + \text{ت جا}(٥\text{هـ} - ٦\text{هـ} - \text{هـ})]$$

$= ٢ [\text{جتا}(-٢\text{هـ}) + \text{ت جا}(-٢\text{هـ})]$ ---- (٤)

، ∵ طاهـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈] ٠ ، ٩٠ [

∴ جتا (-٢هـ) = جتا ٢هـ = ٢جتا^{٢} هـ - ١

$$= ٢ \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - ١ = \frac{٣٢}{٢٥} - ١ = \frac{٧}{٢٥}$$

، جا(-٢هـ) = - جا٢هـ = -٢جاهـ جتاهـ

$$= -٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = -\frac{٢٤}{٢٥}$$

، بالتعويض في (٤) ينتج أن :-

$$\frac{ع_١^{٥} \times ع_٢^{-٣}}{ع_٣} = ٢\left(\frac{٧}{٢٥} - \frac{٢٤}{٢٥}\text{ت}\right) = \frac{١٤}{٢٥} - \frac{٤٨}{٢٥}\text{ت}$$

مثال: أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع = (١+ جتاأ + ت جاأ)^{٥}

الحـــــل

نضع ١+ جتا أ + ت جا أ في الصورة القطبية

∵ ١+ جتا أ = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ ، جا أ = ٢ جا$\frac{أ}{٢}$ جتا$\frac{أ}{٢}$

∴ ١+ جتا أ + ت جا أ = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ + ت × ٢ جا$\frac{أ}{٢}$ جتا$\frac{أ}{٢}$

= ٢ جتا$\frac{أ}{٢}$ (جتا$\frac{أ}{٢}$ + ت جا$\frac{أ}{٢}$)

∴ ع^{٥} = ٢^{٥} جتا^{٥}$\frac{أ}{٢}$(جتا٥ × $\frac{أ}{٢}$ + ت جا ٥ × $\frac{أ}{٢}$)

∴ | ع | = ٣٢ جتا^{٥} $\frac{أ}{٢}$ ، سعة العدد = $\frac{٥أ}{٢}$

<u>مثال</u>: اختصر العدد الآتي إلي الصورة الجبرية :-

$$ع = \frac{\left(\text{جتا}\,\frac{ط}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{ط}{٣}\right)^{٥} \times \left(\text{جتا}\,\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\,\frac{ط}{٤}\right)^{٣}}{\left(\text{جتا}\,\frac{ط}{٦} + \text{ت جا}\,\frac{ط}{٦}\right)^{٧}}$$

الحـــــــل

بتطبيق نظرية ديموافر علي البسط والمقام

$$\therefore ع = \frac{\left(\text{جتا}\,\frac{٥}{٣}ط + \text{ت جا}\,\frac{٥}{٣}ط\right) \times \text{جتا}\left(\frac{٣}{٤}ط + \text{ت جا}\,\frac{٣}{٤}ط\right)}{\text{جتا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right)}$$

$$= \left[\text{جتا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right)\right]$$

$$= \text{جتا}\,\frac{٥}{٤}ط + \text{ت جا}\,\frac{٥}{٤}ط = \text{جتا}\,٢٢٥ + \text{ت جا}\,٢٢٥$$

$$= \text{جتا}\,(١٨٠+٤٥) + \text{ت جا}\,(١٨٠ + ٤٥)$$

$$= -\frac{١}{٢}\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢}\;\text{ت} = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢}\,(١+\text{ت})$$

obeikandl.com

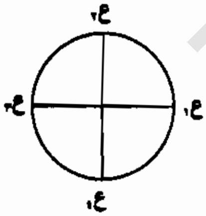
استخدام نظرية ديموافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة

إذا كان العدد المركب ع = ل(جتا هـ + ت جا هـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن ع له ن من الجذور المختلفة التي تعطي بالقانون :

$$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{ن} \left[جتا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن} + ت \; جا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن} \right] ، ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ......$$

مثال: للمعادلة $س^{٤} = ١$ أربعة جذور أحدهما $ر_{١}$ = جتا. + ت جا.) أوجد الجذور الأخري.

الحـــــــل



$\therefore$ $س^{٤} = ١$

$\because$ $ع_{١}$ = جتا. + ت جا.

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية ($\frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠$)

$\therefore$ $ع_{٢}$ = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠

$ع_{٣}$ = جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠

$ع_{٤}$ = جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠

مثال: ضع العدد المركب - ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت في الصورة ر(جتاهـ + ت جاهـ)

ثم أوجد $\sqrt[٤]{٨+٨\sqrt{٣} \; ت}$

الحـــــــل

- ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت = ر(جتاهـ + ت جا هـ)

س = - ٨ ، ص = ٨ $\sqrt{٣}$ $\qquad$ $\therefore$ ر = $\sqrt{٦٤ + ٦٤ \times ٤} = ١٦$

$\therefore$ طا هـ = $\left| \frac{س}{ص} \right| = \left| \frac{٨\sqrt{٣}}{-٨} \right| = \sqrt{٣}$ $\qquad$ $\therefore$ هـ = ٦٠^{0} وتقع في الربع الثاني

$\therefore$ هـ = ١٨٠ _ ٦٠ = ١٢٠

$\therefore$ - ٨ + ٨ $\sqrt{٣}$ ت = ١٦ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

لإيجاد الجذر الرابع فقط لابد من ايجاد الجذر الأول

obeikandl.com

$ع_1 = \sqrt[4]{16}\left[\text{جتا}\,\frac{120}{4} + \text{ت جا}\,\frac{120}{4}\right] = 2\left[\text{جتا } 30 + \text{ت جا } 30\right]$

$ع_2 = 2\left[\text{جتا }(30 + 270) + \text{ت جا}(30 + 270)\right] = 2\left[\text{جتا } 300 + \text{ت جا } 300\right]$

مثال: اثبت ان $(1+\text{ت})^{20} = -1024$ حيث $\text{ت} = \sqrt{-1}$

الحـــــل

$(1+\text{ت})^{20} = \left[(1+\text{ت})^{2}\right]^{10}$

$= (1 - 1 + 2\text{ت})^{10} = (2\text{ت})^{10}$

$= 2^{10} \times \text{ت}^{10} = 1024 \times \text{ت}^{2} = 1024 \times -1 = -1024$

مثال: أوجد الجذور الخمسة للعدد ٣٢

الحـــــل

$32 \times 1 = 32\left[\text{جتا}\ . + \text{ت جا}.\right]$

$\therefore\ ع_1 = \sqrt[5]{32}\left[\text{جتا}\,\frac{0}{5} + \text{ت جا}\,\frac{0}{5}\right] = 2\left[\text{جتا } 0 + \text{ت جا } 0\right]$

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية علي التتابع $\frac{360}{5} = 72$

$ع_2 = 2\left[\text{جتا}72 + \text{ت جا } 72\right]$

$ع_3 = 2\left[\text{جتا}144 + \text{ت جا } 144\right]$

$ع_4 = 2\left[\text{جتا } 216 + \text{ت جا } 216\right]$

$ع_5 = 2\left[\text{جتا}288 + \text{ت جا } 288\right]$

مثال: إذا كانت س = ١+ ت فحول س إلس الصورة المثلثية ثم أوجد قيمة س^{10}

الحـــــل

$\text{س} = 1 + \text{ت}$

$\text{ر} = \sqrt{1+1} = 2$

$\text{طاهـ} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \therefore\ \text{هـ} = 45^\circ$

$\text{س} = \sqrt{2}\ (\text{جتا }45 + \text{ت جا}45)$

$\text{س}^{10} = \left[\sqrt{2}\ (\text{جتا }45 + \text{ت جا }45)\right]^{10} = (\sqrt{2})^{10}\ (\text{جتا }450 + \text{ت جا}450)$

$= 2^{5}\ (\text{جتا}90 + \text{ت جا}90) = 32\ \text{ت}$

obeikandl.com

إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

لكل عدد مركب ع = ل (جتاهـ + ت جاهـ) يوجد جذران تربيعيان مقياس كل منهما = $\sqrt{ل}$
وسعة الأولي = $\frac{هـ}{٢}$ وسعة الثاني = ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)

<u>أي الجذران هما</u>

$\sqrt{ل}$ (جتا $\frac{هـ}{٢}$ + ت جا $\frac{هـ}{٢}$) ، $\sqrt{ل}$ [جتا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط) + ت جا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)]

<u>مثال</u>: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت بتحويله إلي الصورة القطبية

الحــــــــل

نضع العدد ع بالصورة القطبية

|ع| = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤ = ل

جتا ي = | $\frac{س}{ل}$ | = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ي = ٦٠°

∵ ع = (-٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) تقع في الربع الثاني ∴ هـ = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠

∴ ع = ٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

∴ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ (جتا $\frac{١٢٠}{٢}$ + ت جا $\frac{١٢٠}{٢}$)

= ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

أ، $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ [جتا (٦٠+١٨٠) + ت جا (٦٠+١٨٠)]

= ٢ [(- جتا ٦٠) - (ت جا ٦٠)] = -١ - $\sqrt{٣}$ ت

<u>ملاحظة :</u>

كل من الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هو المعكوس الجمعي للآخر فإذا كان الجذر الأول هو س + ت ص فإن الآخر - س - ت ص = - (س+ ت ص) .

obeikandi.com

إيجاد الجذرين التربيعين لعدد مركب جبرياً

مثال: أوجد جبرياً الجذرين التربيعين للعدد ع = -٧ + ٢٤ ت

الحـــــــل

نفرض أن $\sqrt{\text{-٧ + ٢٤ ت}}$ = س + ت ص وبتربيع الطرفين

-٧ + ٢٤ ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت

∴ س^{٢} – ص^{٢} = -٧ ---- (١)

، ٢ س ص = ٢٤ ---- (٢)

∴ ص = $\frac{\text{١٢}}{\text{س}}$

بالتعويض في (١) ∴ س^{٢} - $\frac{\text{١٤٤}}{\text{س}}$ = -٧

∴ س^{٤} + ٧ س^{٢} – ١٤٤ = ٠

(س^{٢} - ٩) (س^{٢} + ١٦) = ٠ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ± ٣ أو س^{٢} = -١٦ وهذا مرفوض

بالتعويض في (٢) ∴ ص = ± $\frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ = ٤

∴ الجذران التربيعيان هما ± (٣ + ٤ ت)

مثال: ضع العدد ٢ت بالصورة القطبية

الحـــــــل

∴ ٢ت = ٢ (جتا٩٠ + ت جا٩٠)

∴ $\sqrt{\text{٢ت}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٩٠ + ت جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٩٠)

= $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا ٤٥ + ت جا٤٥) = ١ + ت

، $\sqrt{\text{٢ت}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ [جتا(٤٥ + ١٨٠) + ت جا (٤٥ + ١٨٠)]

= $\sqrt{\text{٢}}$ (- جتا ٤٥ - ت جا٤٥) = -١ - ت

∴ الجذران هما ± (١ + ت)

ثانيا : الطريقةالجبرية :-

نفرض أن $\sqrt{\text{٢ ت}}$ = س + ت ص

∴ ٢ت = (س^{٢} - ص^{٢}) + ٢ س ص ت

∴ س^{٢} – ص^{٢} = ٠ ----- (١) ، ٢س ص = ٢

∴ س ص = ١ ∴ ص = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ----- (٢) **بالتعويض في (١)**

obeikandi.com

∴ $\text{س}^{٢} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{٢}} = ٠$ ∴ $\text{س}^{٤} = ١$ ∴ س = ± ١

بالتعويض في (٢) ∴ ص = ± ١

∴ الجذران هما ± ١ ± ١ × ت = ± (١+ت)

<u>مثال</u>: إذا كان $\sqrt{\frac{\text{-٧ + ٢٦ت}}{\text{-٥ - ٢ت}}}$ **= أ + ت ب حيث أ ، ب حقيقيان أوجد قيم أ ، ب**

الحـــــل

الكسر = $\frac{\text{-٧ + ٢٦ت}}{\text{-٥ - ٢ت}} \times \frac{\text{٥ + ٢ت}}{\text{٥ + ٢ت}} = \frac{\text{-٣٥+١٦٦ت + ٢٥ت}^{٢}}{\text{٢٥ - ٤ت}^{٢}}$

$= \frac{\text{-٨٧ + ١١٦ت}}{\text{٢٩}}$ = -٣ + ٤ ت

∴ $\sqrt{\text{-٣ + ٤ت}}$ = أ + ب ت وبالتربيع

∴ -٣+ ٤ت = $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$ + ٢ أ ب ت

∴ $\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$ = -٣ ------ (١)

، ٢ أ ب = ٤ ∴ ب = $\frac{\text{٢}}{\text{أ}}$ وبالتعويض في (١)

∴ $\text{أ}^{٢} - \frac{\text{٤}}{\text{أ}^{٢}}$ = -٣ ∴ $\text{أ}^{٤} + \text{٣أ}^{٢} - ٤ = ٠$

∴ $(\text{أ}^{٢} + ٤)(\text{أ}^{٢} - ١) = ٠$

∴ $\text{أ}^{٢} = ١$ ∴ أ = ± ١ ∴ ب = ± ٢

<u>مثال</u>: أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$(\text{س+ت ص})^{٢} - ٤ \frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}} + ٤ = \text{صفر}$

الحـــــل

$\frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}} = \frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} - \text{ت}} \times \frac{\sqrt{٣} + \text{ت}}{\sqrt{٣} + \text{ت}} = \frac{٣ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{٣ - \text{ت}^{٢}} = \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٤}$

بالتعويض بهذه القيمة عن الكسر في المعادلة

∴ $(\text{س+ت ص})^{٢} - ٤ \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٤} + ٤ = \text{صفر}$

∴ $(\text{س+ت ص})^{٢} - ٢ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت} + ٤ = ٠$

∴ $(\text{س+ت ص})^{٢} = -٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

∴ $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{س ص ت} = -٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

∴ $س^2 - ص^2 = -٢$ ----- (١) ، $٢ س ص = ٢\sqrt{٣}$ ----- (٢)

∴ $س ص = \sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{\sqrt{٣}}{س}$

بالتعويض في (١) ∴ $-٢ = س^2 - \frac{٣}{س}$

بالضرب في $س^2$ ∴ $-٢ س^2 = س^4 - ٣$

∴ $س^4 + ٢س^2 - ٣ = ٠$ ∴ $(س^2 + ٣)(س^2 - ١) = ٠$

∴ $س^2 = -٣$ (مرفوض) أ، $س^2 = ١$ ∴ $س = \pm ١$

بالتعويض في (٢) ∴ $ص = \pm \sqrt{٣}$

<u>مثال</u>: إذا كانت س ∈ ك فاوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^2 - (٢+ت) س - (١+ ٥ ت) = ٠$

الحــــــــل

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث أ = ١ ، ب = - (٢+ت) ، جـ = - (١+ ٥ ت)

∴ $س = \frac{(٢+ت) \pm \sqrt{٣ + ٤ت + ٤ + ٢٠ت}}{٢} = \frac{(٢+ت) + \sqrt{٧ + ٢٤ت}}{٢}$

ثم نفرض أن $\sqrt{٧ + ٢٤ت} = ل + ت م$ وبتربيع الطرفين

∴ $٧ + ٢٤ت = ل^2 - م^2 + ٢ل م ت$

∴ $ل^2 - م^2 = ٧$ ----- (١) ، $٢ل م = ٢٤$ ----- (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع ∴ $(ل^2 + م^2)^2 = ٦٢٥$

∴ $ل^2 + م^2 = ٢٥$ ------ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ $٢ل^2 = ٣٢$ ∴ $ل^2 = ١٦$ ∴ $ل = \pm ٤$

بطرح (١) من (٣) ∴ $٢م^2 = ١٨$ ∴ $م^2 = ٩$ ∴ $م = \pm ٣$

∴ $\sqrt{٧ + ٢٤ت} = \pm (٤ + ٣ت)$

∴ $س = \frac{(٢+ت) \pm (٤+٣ت)}{٢}$

∴ $س = \frac{٢+ت+٤+٣ت}{٢} = \frac{٦+٤ت}{٢} = ٣ + ٢ت$

أ، $س = \frac{٢+ت-٤-٣ت}{٢} = \frac{-٢-٢ت}{٢} = -١-ت$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي : {٣+ ٢ت ، -١-ت}

obeikandl.com

تمارين (١٠)

- إستخدم نظرية ديموافر الجذرين التربيعين لكل من الأعداد الآتية:

١) $-٢ت$ ٢) $١ - \sqrt{٣}\,ت$

٣) $-٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ ٤) $٤\left(جتا \frac{ط}{٣} - ت\, جا \frac{ط}{٣}\right)$

٥) $٩\,(جتا ٣٠٠° + ت\, جا ٣٠٠°)$ ٦) $\frac{-٨}{١+\sqrt{٣}\,ت}$

- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتي دون التحويل للصورة المثلثية :-

٧) $-٨ - ٦ت$ ٨) $٥ - ١٢ت$

٩) $\frac{-٧ + ت}{١ + ت}$ ١٠) $\frac{٣١+١٧ت}{١ - ت}$

١١) إذا كان $ع^{٢} = ٣ + ٤ت$ أثبت أن $ع + ٥ع^{-١} = \pm ٤$

١٢) إذا كان $(س + ت\,ص)^{٢} + \frac{٨(١-ت)}{١+ت} + ١٥ =$ صفر فأوجد قيمتى س ، ص الحقيقية التى تحقق المعادلة .

١٣) إذا كان $س + ت\,ص = \frac{٧ - ٤ت}{٢ + ت}$ حيث س ، ص حقيقيتان فأوجد قيمة $\sqrt{٢س - ت\,ص}$

١٤) إذا كانت $س = \frac{١+٢ت}{١ - ت}$ ، $ص = \frac{١-٢ت}{١ + ت}$ أوجد : قيمة $\sqrt{٥س + ٣ص}$

١٥) إذا كانت س ∈ ك حل المعادلة

$$(٢+ت)\,س^{٢} - ٣\,(١+٣ت)\,س - ٤\,(١-٢ت) = صفر$$

- أوجد الصورة المثلثية لقيم المقادير الآتية:-

١٦) $(-\sqrt{٣}+ت)^{\frac{٣}{٥}}$ ١٧) $(-٦٤ت)^{\frac{١}{٤}}$

١٨) $(١+ت)^{\frac{٢}{٣}}$ ١٩) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

- حل كل من المعادلات الآتية في ك :-

٢٠) $س^{٥} + ١ = ٠$

٢١) $ع^{٥} = ١ - \sqrt{٣}\,ت$

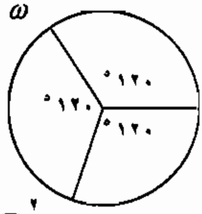
obeikandi.com

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

[س = ١ ، $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ ، $\omega^2 = \frac{-1 - \text{ت}\sqrt{3}}{2}$]

أي للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدهما حقيقي والجذران الآخران تخيليان مترافقان

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$



س = ١

$\omega^2 = \frac{-1 - \text{ت}\sqrt{3}}{2}$

- **خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

١. مربع أحد الجذرين التخيلين = الجذر التخيلي الآخر .

٢. مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر .

٣. الفرق بين الجذرين التخيلين = $\pm$ ت $\sqrt{3}$

٤. حاصل ضرب الجذرين التخيلين = ١

- **علاقات هامة بين الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

$1 + \omega + \omega^2 = 0$	$\omega \times \omega^2 = 1$	$\omega - \omega^2 = \pm\,\text{ت}\sqrt{3}$
جمع الجذور $1 + \omega = -\omega^2$ $1 + \omega^2 = -\omega$ $\omega^2 + \omega = -1$ $1 + \text{أ}\omega + \text{أ}\omega^2 = 0$	**ضرب الجذور** $\omega = \frac{1}{\omega^2}$ $\omega^2 = \frac{1}{\omega}$ $\omega^3 = 1$	**طرح الجذور** إذا اعتبرنا $\omega - \omega^2 = \text{ت}\sqrt{3}$ فإن: $\omega^2 + \omega = -\,\text{ت}\sqrt{3}$ والعكس صحيح

obeikandl.com

■ **<u>كيفية اختزال قوي ω :</u>**

اقسم الأس علي ٣ وباقي خارج القسمة هو الأس الجديد لـ ω .

$\omega^{١٦} = \omega$ ، $\omega^{٢٩} = \omega^{٢}$ ، $\omega^{٣٢} = \omega^{٢}$ ، $\omega^{٣٠} = ١$

<u>مثال</u>: اثبت أن $(١ + \omega^{٢})^{١٥} = -١$

الحــــــــل

$\because ١ + \omega + \omega^{٢} = ٠$ $\therefore (١ + \omega^{٢}) = -\omega$

$(١ + \omega^{٢})^{١٥} = (-\omega)^{١٥}$ $\therefore$ الأس يقبل القسمة علي ٣

$\therefore [(-\omega)^{٣}]^{٥} = (-١)^{٥} = -١$ = الطرف الأيسر

<u>مثال</u>: اثبت ان : $\dfrac{١}{٤ + ٣\omega + ٢\omega^{٢}} + \dfrac{١}{٥ + ٣\omega + -\omega^{٢}} = ١$

الحــــــــل

نجعل المقدار المكون من ثلاثة حدود ثنائي الحد

$\therefore ٤ + ٣\omega + ٢\omega^{٢}$ ، $\because \omega^{٢} = -١ - \omega$

$\therefore ٤ + ٣\omega - ٢ - ٢\omega = ٢ + \omega$

$\therefore ٥ + ٣\omega + ٤\omega^{٢} = ٥ + ٣\omega - ٤ - ٤\omega = ١ - \omega$

$\therefore$ المقدار $= \dfrac{١}{٢ + \omega} + \dfrac{١}{١ - \omega} = \dfrac{١ - \omega + ٢ + \omega}{(١ - \omega)(٢ + \omega)} = \dfrac{٣}{٢ - ٢\omega + \omega - \omega^{٢}}$

$= \dfrac{٣}{٢ - \omega - \omega^{٢}} = \dfrac{٣}{٢ - (\omega + \omega^{٢})} = \dfrac{٣}{٢ + ١} = \dfrac{٣}{٣} = ١$

<u>مثال</u>: إذا كان ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left(\frac{٢ + ٣\omega - ٤\omega^{٢}}{٣ - ٤\omega + ٢\omega^{٢}} - \frac{٢ - ٣\omega - ٤\omega^{٢}}{٢س + ٣\omega^{٢} - ٤} \right)^{٨}$$

الحــــــــل

الكسر الأول : $\dfrac{٢ + ٣\omega - ٤\omega^{٢}}{٣ - ٤\omega + ٢\omega^{٢}} = \dfrac{\omega(٢\omega^{٢} + ٣ - ٤\omega)}{(٣ - ٤\omega + ٢\omega^{٢})} = \omega$

الكسر الثاني : $\frac{2-3\omega-4\omega^2}{2س+3\omega^2-4} = \frac{2+3\omega-4\omega^2}{\omega(2+3\omega-4\omega^2)} = \frac{1}{\omega}$

∴ المقدار $[\omega - \frac{1}{\omega}]^8 = [\omega - \omega^2]^8$

$(\pm\sqrt{3}\,ت)^8 = [\pm\sqrt{3}\,(ت)^2]^4 = (3ت)^4 = 3ت^4 = 3$

<u>مثال</u>: اثبت أن:

$(2+2\omega+\frac{3}{\omega})^2 + (2+3\omega+\frac{2}{\omega})^2 + (3+2\omega^2+\frac{2}{\omega})^2 =$ صفر

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $(2+2\omega+3\omega^2)^2 + (2+3\omega+2\omega^2)^2 + (3+2\omega^2+2\omega)^2$

$= [2(1+\omega)+3\omega^2]^2 + [2(1+\omega^2)+3\omega]^2 + [2(\omega+\omega^2)+3]^2$

$= [-2\omega^2+3\omega^2]^2 + [2\times-\omega+3\omega]^2 + (-2\omega+3)^2$

$= (\omega^2)^2 + \omega^2 + 1 = \omega^4 + \omega^2 + 1$

$= \omega + \omega^2 + 1 =$ صفر

<u>مثال</u>: اثبت أن : $\frac{1+\omega-\omega^2}{1-\omega+\omega^2} = \omega$

الحـــــــل

$\frac{(1+\omega)-\omega^2}{(1+\omega^2)-\omega} = \frac{-\omega^2-\omega^2}{-\omega-\omega} = \frac{-2\omega^2}{-2\omega} = \omega$

<u>مثال</u>:اثبت أن : $\frac{3+\omega}{1+2\omega} + \frac{3+\omega^2}{1+2\omega^2} = 1$

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $\frac{(3+\omega)(1+2\omega^2)+(3+\omega^2)(1+2\omega)}{(1+2\omega)(1+2\omega^2)}$

$= \frac{3+6\omega^2+\omega+2\omega+3+6\omega+\omega^2+2\omega^2}{1+2\omega^2+2\omega+4\omega}$

obeikandi.com

$$= \frac{١٠+٧\omega+٧\omega^{٢}}{٥+٢(\omega+\omega^{٢})} = \frac{١٠+٧(\omega+\omega^{٢})}{٥+٢(\omega+\omega^{٢})} = \frac{١٠-٧}{٥-٢} = \frac{٣}{٣} = ١$$

مثال: إذا كانت ١، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

$$\omega - \omega^{٢} = \omega^{٢} - \omega = \pm\sqrt{٣}\,\text{ت}$$

الحـــــل

$$\omega = \frac{-١+\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢} \quad ، \quad \omega^{٢} = \frac{-١-\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$$

$$\omega - \omega^{٢} = \sqrt{٣}\,\text{ت} \quad ، \quad \omega^{٢} - \omega = -\sqrt{٣}\,\text{ت}$$

الفرق بين ω ، $\omega^{٢} = \pm\sqrt{٣}\,\text{ت}$

مثال: اثبت ان : $\sqrt{\frac{٥+٥\omega^{٢}+٦\omega}{٧+٦\omega^{-١}+٦\omega^{-٢}}} = \pm\omega^{٢}$

الحـــــل

بالتربيع للطرفين

$$\frac{٥+٥\omega^{٢}+٦\omega}{٧+\frac{٦}{\omega}+\frac{٦}{\omega^{٢}}} = \omega^{٤}$$

$$= \frac{٥(١+\omega^{٢})+٦\omega}{٧+\frac{٦}{\omega}+\frac{٦}{\omega^{٢}}} = \omega^{٤}$$

$$= \sqrt{\frac{٥\times-\omega+٦\omega}{٧+٦\omega^{٢}+٦\omega}} = \sqrt{\frac{\omega}{١}} = \sqrt{\omega^{٤}} = \omega^{٢}$$ الطرف الأيسر

مثال: حل المعادلة $س^{٢} = ١ + \omega^{٢}$ حيث $س \in ك$

الحـــــل

$$س^{٢} = ١ + \frac{-١+\sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢} = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{ت}$$

obeikandl.com

س^{٢} = [جتا٦٠ + ت جا٦٠]

س = (جتا $\frac{٦٠}{٢}$ + ت جا $\frac{٦٠}{٢}$) = (جتا٣٠ + ت جا ٣٠)

يضاف $\frac{٣٦٠}{٢}$ = ١٨٠ ∴ س$_{٢}$ = (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

<u>مثال</u>: اثبت ان

$$\frac{١}{٢ - ٢\omega + \omega^{٢}} + \frac{١}{٣ + ٢\omega - \omega^{٢}} = \frac{٥}{١٣}$$

الحــــــل

∵ $٢ - ٢\omega + \omega^{٢} = ٢ - ٢\omega - ١ - \omega = ١ - ٣\omega$

، $٣ + ٢\omega - \omega^{٢} = ٣ + ٢\omega - ١(-١ - \omega) = ٣ + ٢\omega + ١ + \omega = ٤ + ٣\omega$

الطرف الأيمن = $\frac{١}{١ - ٣\omega} + \frac{١}{٤ + ٣\omega}$

$$= \frac{٤ + ٣\omega + ١ - ٣\omega}{(١ - ٣\omega)(٤ + ٣\omega)} = \frac{٥}{٤ + ٣\omega - ١٢\omega - ٩\omega^{٢}}$$

$$= \frac{٥}{٤ - ٩\omega - ٩\omega^{٢}} = \frac{٥}{٤ - ٩(\omega + \omega^{٢})} = \frac{٥}{١٣}$$

<u>مثال</u>: اثبت ان $\sqrt{\frac{١ + ١٠\omega + ١٠\omega^{٢}}{١ - ٣\omega + ٣\omega^{٢}}} = \pm \frac{٣}{٢}$ ت

الحــــــل

الطرف الأيمن = $\sqrt{\frac{١ + ١٠(\omega + \omega^{٢})}{١ - ٣(\omega + \omega^{٢})}} = \sqrt{\frac{١ - ١٠}{١ + ٣}} = \sqrt{\frac{-٩}{٤}} = \pm \frac{٣}{٢}$ ت

<u>مثال</u>: إذا كانت س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\text{ ب}}{٢}$ **فاثبت ان** س^{١٠} + س^{٨} + ١ = ٠

الحــــــل

س = ω = $\frac{١ + \sqrt{٣}\text{ ب}}{٢}$

$\omega^{١٠} + \omega^{٨} + ١ = ٠$ $\qquad$ $\omega + \omega^{٢} + ١ = ٠$

obeikandl.com

مثال: اثبت ان $(١ + \omega)^{٣} + (١ - \omega - \omega^{٢})^{٣} = ٧$

الحـــــل

$(١ + \omega)^{٣} + [١ - (\omega + \omega^{٢})]^{٣}$

$= (-\omega^{٢})^{٣} + (١ + ١)^{٣}$

$= -\omega^{٦} + ٢^{٣} = -١ + ٨ = ٧$

مثال: اختصر إلي ابسط صورة $(٢ + \frac{١}{\omega})^{٢} - (\frac{\omega^{٥} - ١}{\omega^{٢}})^{٢}$

الحـــــل

$(٢ + \omega^{٢})^{٢} + (\omega^{٣} - \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢}$

$= ٤ + ٤\omega^{٢} + \omega^{٤} + ١ - ٢\omega + \omega^{٢}$

$= ٥ + ٥\omega^{٢} + \omega - ٢\omega$

$= ٥(١ + \omega^{٢}) - \omega$

$= -٥\omega - \omega = -٦\omega$

تمارين (١١)

▪ إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن:

(١) $(2+11\omega+2\omega^2)(2+11\omega^2+2\omega^4) = 81$

(٢) $\left(\frac{1}{1+\omega^5} - \frac{1}{1+\omega^4}\right)^2 = -3$

(٣) $\left(\frac{2\omega+1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2-1}{\omega^2}\right)^2 = -3$

(٤) $\frac{(2+11\omega+2\omega^2)(2+11\omega^2+2\omega^4)}{(1-\quad+\omega^2)(1+\omega-\quad)} = \frac{9}{2}$

(٥) $(\omega-\omega^2)\left(\frac{\omega-3}{4+2\omega} - \frac{\omega^2-3}{4+2\omega^2}\right) = -\frac{5}{2}$

(٦) $(5+\omega)\left(\frac{1}{5+4\omega+3\omega^2} - \frac{1}{3\omega+2\omega^2}\right) = 4$

(٧) $\left(\frac{1}{1+2\omega-2\omega^2} - \frac{1}{1-2\omega+2\omega^2}\right) = -\frac{48}{169}$

(٨) $\left(\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\omega}\right)\left(\text{أ}+\frac{\text{ب}}{\omega^2}\right) = (\text{أ}-\text{ب})^2+\text{أ ب}$

(٩) $\left(1+3\omega^2-\frac{4}{\omega^2}\right)\left(1+3\omega-\frac{4}{\omega}\right) =$ عدد حقيقي

(١٠) $\left(\frac{\text{أ}+1}{\text{أ}+(2\text{أ}+1)\omega+\text{أ}\,\omega^2}\right)^6$ لا يتوقف علي قيمة أ

(١١) $\left(\frac{5-3\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2-7\omega}{2\omega^2-7}\right)^4 = 9$

(١٢) <u>اوجد مجموعة ن حداً الأولى من المتتابعة:</u>

(١، ω ، ω^2 ، ω^3 ، ......) ثم أوجد هذا المجموع في أبسط صورة عندما

ن = ٣م ، ٣م+١ ، ٣م + ٢ حيث م عدد صحيح

(١٣) إذا كانت $\text{س} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}$ فاثبت أن $\text{س}^{22} + \text{س}^{11} + 1 =$ صفر

(١٤) أوجد جذري المعادلة : $\text{س}^2 + (1+2\omega+\omega^2)(1+\omega+2\omega^2) = 0$

obeikandl.com

(١٥) أوجد قيمة ت + ω^{2} + ت^{3} + ω^{4} + ت^{5} + ω^{6} + ... إلي ١٥ حداً

(١٦) أوجد مجموع ٢٣ حداً من المتتابعة الآتية إبتداء من الحد الأول :

(ω ، ت^{2} ، ω^{3} ، ت^{4} ، ω^{5} ، ت^{6} ، .....)

(١٧) أوجد قيمة (١ - ω) (١ - ω^{2}) (١ - ω^{4})(١ - ω^{8})

(١٨) كون المعادلة التي جذرها (١+ ω - ω^{2})^{3} ، (١ - ω + ω^{2})^{3}

(١٩) إذا كان س + ص ت = ($\frac{1}{ت}$ - ω - ω^{2})^{6} حيث س ، ص عددان حقيقيان فأوجد س ، ص

(٢٠) إذا كان (١ - ت) (س+ ص ت) = ١٩ ($\frac{1}{2 - 3\omega^{2}}$ + $\frac{1}{5 + 3\omega^{2}}$) فاثبت أن س = ص = $\frac{7}{2}$

(٢١) حل المعادلة س^{2} = ١ + ω^{2}

obeikandl.com