أولاً :الجبر

الباب الأول

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مبدأ العد:

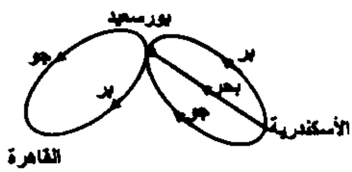
- **هو الذي يعين عدد طرق اختيار عنصر من مجموعة مع عنصر من مجموعة أخري يسمي مبدأ العد .**
- **فعدد طرق اختيار عنصر من مجموعة (س) عدد عناصرها (ن) مع عنصر من مجموعة أخري (ص) عدد عناصرها (م) يساوي عدد الأزواج المرتبة من س إلي ص = عدد عناصر المجموعة ص = ن × م .**
- **يمكن تعميم مبدأ العد لأكثر من مجموعتين .**

مثال:

إذا كان السفر من الإسكندرية إلي بورسعيد ممكناً بثلاث طرق هي بر ، بحر جو ويمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة بطريقتين بر ، جو . فبكم طريقة يمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة مارا ببورسعيد .

الحـــــل

∴ عدد الاختيارات = ٣ × ٢ = ٦ اختيارات



مثال :

إذا اخترت معك في رحلة ٣ بدلات ، ٤ قمصان . فبكم طريقة يمكن اختيار لبس هذه الملابس؟

الحـــل

عدد طرق لبس هذه الملابس = ٣ × ٤ = ١٢

التبـاديـل

إذا كان لدينا ن من الأشياء فإن عدد الأشياء المرتبة التي يمكن اختيارها من (ن) دون تكرار يسمي وتقرأ تباديل (ن) مأخوذة راءً راءً ويرمز لها بالرمز $^{ن}ل_{ر}$

مثال : أوجد تباديل الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ مأخوذة أثنين أثنـين .

الحـــــل

العدد ١ يؤخذ مع ٢، ٣ ، ٤ أي ٢١ ، ٣١ ، ٤١

العدد ٢ يؤخذ مع ١، ٣ ، ٤ أي ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢

العدد ٣ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٤ أي ١٣ ، ٢٣ ، ٤٢

العدد ٤ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٣ أي ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤

∴ $^{٤}ل_{٢}$ = ١٢ أي $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣

∴ $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) × ـــــــــ × (ن-ر + ١) --- (١)

مثلاً: $^{٧}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ، $^{١٥}ل_{٣}$ = ١٥ × ١٤ × ١٣ ، $^{م}ل_{٢}$ = م (م-١)

نتيجة :

من المعادلة (١) بوضع ر = ن ينتج أن :

$^{ن}ل_{ن}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ـــــــــ (ن-ر + ١)

= ن (ن - ١) (ن-٢) (ن-٣) ـــــــــ ٣ × ٢ × ١

ويمكن كتابة $^{ن}ل_{ن}$ علي الصورة $\underline{|ن}$ وتقرأ مضروب ن أي أن :-

$\underline{|ن}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ـــــــــ × ٣ × ٢ × ١ --- (٢)

مثلا : $\underline{|٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

، $\underline{|٦}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

ملاحظه: $\underline{|ن}$ = ن $\underline{|ن-١}$ = ن (ن-١) $\underline{|ن-٢}$ = ن (ن-١) (ن-٢) $\underline{|ن-٣}$ وهكذا

مثلا: $\underline{|٥}$ = ٥ $\underline{|٤}$ = ٥ × ٤ $\underline{|٣}$ وهكذا

قاعدة (١):

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$$

الإثبات :

$\because\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\,(\text{ن}-٣)\ \text{ــــــ}\ (\text{ن}-\text{ر}+١)$

بضرب الطرف الأيسر في $\dfrac{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$

$$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\,(\text{ن}-٣)\ \text{ــــ}\ (\text{ن}-\text{ر}+١)\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$$

$$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \qquad \text{-----}\ (٣)$$

وهذا القانون يعتبر صيغة أخري لإيجاد قيمة $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$ بدلالة مضروب ن ، مضروب (ن – ر)

نتيجة :

$\underline{|٠} = ١$ ، $^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

ملاحظة :

الصورة (١) تستخدم عندما ر عدد صغير معلوم

الصورة (٣) تستخدم عندما ر عدد كبير أو مجهول

مثال : اختصر $\dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}} + \dfrac{\underline{|٨}}{\underline{|٦}}$

الحـــــــل

$$\frac{\underline{|٩}}{\underline{|٧}} + \frac{\underline{|٨}}{\underline{|٦}} = \frac{٩\times٨\ \underline{|٧}}{\underline{|٧}} + \frac{٨\times٧\ \underline{|٦}}{\underline{|٦}} = ٩\times٨ + ٨\times٧ = ١٢٨$$

مثال : إذا كان ن ل ٣ = ٧٢٠ فما قيمة ن

الحـــــــل

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}\text{ل}_{٣}$

$\therefore$ ن = ١٠

مثال : إذا كان $٥ ل_ر = ١٢٠$ فأوجد قيمة ر

الحل

$٥ ل_ر = ٥ × ٤ × ٣ × ....$ (٥ − ٥ + ١)

أي نضرب العوامل في بعضها حتى نصل إلي العدد ١٢٠

٥ × ٤ = ٢٠ ، ٢٠ × ٣ = ٦٠ ، ٦٠ × ٢ = ١٢٠

∴ $٥ ل_ر = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠$ ∴ ر = ٤

مثال : إذا كان $\underline{|ن} = ١٢٠$ فما قيمة ن ؟

الحل

نحلل ١٢٠ إلي أعداد متتالية تبدأ بالعدد ١

∴ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ $\underline{|ن} = \underline{|٥}$ ∴ ن = ٥

مثال : إذا كان $^{س+ص}ل_٣ = ٥٠٤$ ، $^{س-ص}ل_٢ = ٢٠$ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحل

$^{س+ص}ل_٣ = ٩ × ٨ × ٧$

$= {}^{٩}ل_٣$

∴ س + ص = ٩ ---- (١)

$^{س-ص}ل_٢ = ٥ × ٤$

= ٥ ل ٢

∴ س - ص = ٥ ---- (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ثم بالطرح نجد أن س = ٧ ، ص = ٢

مثال : إذا كان $^{ن-١}ل_٣ : {}^{ن+١}ل_٣ = ٢ : ٧$ أوجد ن

الحل

$$\frac{(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)}{(ن+١)\,(\,ن\,)\,(ن-١)} = \frac{٢}{٧}$$

∴ $\frac{ن^٢ - ٥ن + ٦}{ن^٢ + ن} = \frac{٢}{٧}$ ∴ $٧ن^٢ - ٣٥ن + ٤٢ = ٢ن^٢ + ٢ن$

$٥ن^٢ - ٣٧ن + ٤٢ = ٠$ ∴ $(٥ن - ٧)(ن - ٦) = ٠$

∴ $ن = \frac{٧}{٥}$ مرفوض ، ن = ٦

مثال : حل المعادلة :-

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = 12\ ^{\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ر}-1}$$

الحــــــل

$$\frac{\text{|ن}}{\text{|ن-ر}} = 12 \times \frac{\text{|ن-١}}{\text{|ن-ر}}$$

$\therefore$ ن |ن-١ = ١٢ |ن-١ $\qquad$ $\therefore$ ن = ١٢

مثال : حل المعادلة :-

$$\frac{\text{|ن+٣}}{\text{|٤}} = \frac{\text{٣ |٧}}{\text{ن+٤}}$$

الحــــــل

$\therefore$ |ن+٣ × (ن+٤) = |٤ × ٣ |٧ ضربنا الطرفين × الوسطين

$\therefore$ |ن+٤ = |٤ × ٣ |٧ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٣ |٧

|ن+٤ = ٩ × ٨ |٧ = |٩

$\therefore$ ن + ٤ = ٩ $\qquad$ $\therefore$ ن = ٥

مثال : إذا كان $\frac{٣}{\text{|ن-٢}} + \frac{٥}{\text{|ن-١}} = \frac{٢٠٨}{\text{|ن}}$ فأوجد قيمة ن

الحــــــل

بضرب طرفي المعادلة في |ن

$$\therefore \frac{\text{٣|ن}}{\text{|ن-٢}} + \frac{\text{٥|ن}}{\text{|ن-١}} = \frac{\text{٢٠٨|ن}}{\text{|ن}}$$

$$\frac{\text{٣ن × ن-١ |ن-٢}}{\text{|ن-٢}} + \frac{\text{٥ن |ن-١}}{\text{|ن-١}} = ٢٠٨$$

$\therefore$ ٣ن (ن-١) + ٥ن = ٢٠٨ $\qquad$ $\therefore$ ٣ن^{2} + ٢ن − ٢٠٨ = ٠

$\therefore$ (ن − ٨) (٣ن + ٢٦) = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ن = ٨ والقوس الآخر مرفوض

مثال : إذا كان $\underline{|٢ن - ١} = ٥٠٤٠$ فاوجد قيمة ن

الحـــــــل

∵ $\underline{|٢ن - ١} = ٥٠٤٠$

نحلل ٥٠٤٠ ∴ $٥٠٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

∴ $٥٠٤٠ = \underline{|٧}$ ∴ $\underline{|٢ن - ١} = \underline{|٧}$

∴ $٢ن - ١ = ٧$ ∴ $٢ن = ٨$ ∴ $ن = ٤$

تمرين (١)

(١) إذا كان $\underline{|ن} = ٢٤$ فاوجد ${}^{٢ن}ل_{٣}$

(٢) إذا كان ${}^{٨}ل_{ر} = ٦٧٢٠$ فاوجد $\underline{|ر + ١}$

(٣) إذا كان ${}^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$ فاوجد ن .

(٤) أوجد قيمة : ${}^{ن}ل_{.} + {}^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ل_{٢}$ إذا علم أن $\underline{|ن + ١} : \underline{|ن - ١} = ٧٢$

(٥) إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $\underline{|ر} = ٧٢٠$ فاوجد قيمة ${}^{ن+١}ل_{ر-١}$

(٦) أثبت أن : ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{ن-١}ل_{ر} + ر\ {}^{ن-١}ل_{ر-١}$

(٧) إذا كان ${}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ فاوجد $\underline{|ن}$

(٨) إذا كان ${}^{٩}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ فاوجد $\underline{|ر}$

(٩) أثبت أن : $\underline{|١٠} = (١ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times ٩) \times ٢^{٥} \underline{|٥}$

(١٠) أثبت أن : $\underline{|٢ن} = (١ \times ٣ \times ٥ \times .... \times (٢ن - ١)) \times ٢^{ن} \underline{|ن}$

(١١) إذا كان ${}^{س+ص}ل_{٢} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$ أوجد ${}^{ص}ل_{س}$

(١٢) إذا كان ${}^{٦}ل_{ر} = ٤\ {}^{٦}ل_{ر-١}$ فاوجد قيمة $\frac{\underline{|ر + ١}}{\underline{|ر + ٢}} + \frac{\underline{|ر}}{\underline{|ر + ١}} + \frac{\underline{|ر - ٢}}{\underline{|ر - ١}}$

(١٣) إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٧ }

وكانت ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب } كم عدد عناصر ص ؟

(١٤) إذا كانت س = { س: س ∈ ص ، -٣ ≤ س ≤ ٤ }

، ع = { (أ، ب، جـ) : أ ، ب ، جـ ، ∈ س ، أ ≠ ب ≠ جـ } كم عدد عناصر ع ؟

(١٥) إذا كانت ن+١ ل٣ : $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٢}} = ٧$ فما قيمة ن ؟

التوافيـــق

كنا نهتم بترتيب الرقم المكون للعدد ولكن في التوافيق لا نعطي اهتماماً للترتيب فمثلاً العددان ٣١ ، ١٣ يعتبران توافقياً واحداً وكذلك الأعداد ٢٣١، ٣١٢ ، ١٢٣ ، ٣٢١ تعتبر توافقياً واحداً ونقول إن اختيار من الاختيارات السابقة تسمي توافقياً أو توافيق .

أي أنه إذا كان الترتيب له قيمة يجيب عندئذ إيجاد عدد التباديل أمام إذا كان الترتيب ليس له قيمة فيكون المطلوب إيجاد عدد التوافيق .

تعريف :

التوافيق هي عدد طرق إختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء بدون إحلال (تكرار) وبدون مراعاة ترتيب العناصر التي تختارها .

ونرمز لهذا العدد بالرمز $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ حيث ر ، ن $\in$ ص$^{+}$ ، ر $\leq$ ن.

العلاقة بين التوافيق والتباديل :

- إذا كان لدينا مجموعة س ، ن من العناصر فإن عدد المجموعات الجزنية للمجموعة س والتي تشتمل كل منها علي ر من العناصر هو $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$
- أما عدد التباديل المختلفة لعناصر المجموعة س مأخوذة راء راء هو ن ل ر ولو أجرينا علي كل مجموعة جزنية من المجموعات السابقة جميع التباديل الممكنة لكان عدد تباديل كل مجموعة هو $\underline{|\text{ر}}$

$$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times \underline{|\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$$

$$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} \quad \text{------} \quad (1)$$

نتيجة :-

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \ \underline{|\text{ن - ر}}}$$

- البرهان -

$$\because\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\underline{|\text{ر}}} \quad ، \quad ^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن - ر}}}$$

$$\therefore\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \ \underline{|\text{ن - ر}}}$$

نتيجة : (قانون التبسيط)

$${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$$

- البرهان -

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}\;|\underline{ن-(ن-ر)}} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}\;|\underline{ر}} = {}^{ن}ق_{ر}$$

ملاحظة : ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

- البرهان -

${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{ن-ن} = {}^{ن}ق_{٠}$. أي أن ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠}$.

$\therefore\; {}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

نتيجة : إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ $\therefore$ ر = هـ أ، ن = ر + هـ

- البرهان -

$\because\; {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ $\qquad \therefore$ ر = هـ

، $\because\; {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ $\qquad \therefore$ ن − ر = هـ $\qquad \therefore$ ن = ر + هـ

نتيجة:

النسبة بين ${}^{ن}ق_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر-١}$

$$\therefore\; \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

- البرهان -

$$\because\; {}^{ن}ق_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\;|\underline{ن-ر}} \quad ،\quad {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر-١}\;|\underline{ن-ر+١}}$$

$$\therefore\; \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\;|\underline{ن-ر}} \times \frac{|\underline{ر-١}\;|\underline{ن-ر+١}}{|\underline{ن}}$$

$$= \frac{|\underline{ر-١}\;(ن-ر+١)\;|\underline{ن-ر}}{ر\;|\underline{ر-١}\;|\underline{ن-ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

<u>مثال</u> : أوجد قيمة :

$$({}^{8}ق_{4} + {}^{9}ق_{2}) - (2)({}^{6}ق_{2} + {}^{7}ق_{3})$$

الحـــــــل

$({}^{8}ق_{4} + {}^{9}ق_{2}) - (2)({}^{6}ق_{2} + {}^{7}ق_{3})$

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$

$$\therefore \frac{5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4} + \frac{8\times9}{1\times2} - 2\times\left(\frac{5\times6}{1\times2} + \frac{5\times6\times7}{1\times2\times3}\right)$$

$$= (70 + 36) - 2\,(15 + 35) = 106 - 100 = 6$$

<u>مثال</u>: إذا كان : ${}^{20}ق_{5ر} = {}^{20}ق_{2ر-8}$ فما قيمة ${}^{12}ق_{ر-3}$ ؟

الحـــــــل

$\because {}^{20}ق_{5ر} = {}^{20}ق_{2ر-8}$ $\qquad \therefore 5$ ر

$\therefore 20 = 5ر + 2ر - 8$ $\qquad \therefore 12$

$\therefore {}^{12}ق_{ر-3} = {}^{12}ق_{4-3} = {}^{12}ق_{1} = 12$

<u>مثال</u> : إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-3} = 120$ أوجد ${}^{ن+1}ق_{4}$

الحـــــــل

$\because {}^{ن}ق_{ن-3} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-3)} = {}^{ن}ق_{3}$

$\therefore {}^{ن}ق_{3} = \frac{{}^{ن}ل_{3}}{\underline{|3}} = 120$ $\qquad \therefore {}^{ن}ل_{3} = \underline{|3} \times 120$

$\therefore {}^{ن}ل_{3} = 3\times2\times1\times120$ $\qquad \therefore {}^{ن}ل_{3} = 720$

$\therefore {}^{ن}ل_{3} = 10\times9\times8$ $\qquad \therefore {}^{10}ل_{3} = 10\times9\times8$

$\therefore ن = 10$

$$\therefore {}^{ن+1}ق_{4} = {}^{11}ق_{4} = \frac{8\times9\times10\times11}{1\times2\times3\times4} = 330$$

مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية

$$^{ن+١}ق_{ن-٢} + ٧ = ٧ن$$

الحل

تستخدم قانون التبسيط ∴ $^{ن+١}ق_{ن-٢} = {}^{ن+١}ق_{ن+١-(ن-٢)} = {}^{ن+١}ق_{٣}$

∴ $\frac{(ن+١)\times ن(ن-١)}{٣ \times ٢ \times ١} = ٧ن - ٧$

∴ $\frac{(ن+١)\times ن(ن-١)}{٣ \times ٢ \times ١} = ٧(ن - ١)$

∴ $ن^٢ + ن - ٤٢ = ٠$ ∴ $(ن-٦)(ن+٧) = ٠$ ∴ $ن = ٦$

مثال :

إذا كان : $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨ : ٣$ ، $^{٧}ق_{ر} = {}^{٧}ق_{٣ر-٥}$ فأوجد قيمة ن ، ر

الحل

∵ $^{٧}ق_{ر} = {}^{٧}ق_{٣ر-٥}$ ∴ $٧ = ر + ٣ر - ٥$

∴ $٤ر = ١٢$ ∴ $ر = ٣$

، ∵ $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٨ : ٣$ (نستخدم قانون النسبة)

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ٣ + ١}{٣} = \frac{٨}{٣}$

∴ $\frac{ن - ٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$ ∴ $ن - ٢ = ٨$ ∴ $ن = ١٠$

مثال : إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١٥ : ٤٢ : ٩١$ فأوجد قيمتي ن ، ر

الحل

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٢}{٥}$ ∴ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{١٤}{٥}$

∴ $\frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{١٤}{٥}$ ∴ $٥ن - ٥ر = ١٤ر + ١٤$

∴ $٥ن - ١٩ر = ١٤$ ---- (١)

∵ ، $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٩١}{٤٢}$ ∴ $\frac{ن-(ر+٢)+١}{ر+٢} = \frac{١٣}{٦}$

∴ $\frac{ن-ر-١}{ر+٢} = \frac{١٣}{٦}$ ∴ ٦ ن – ٦ ر – ٦ = ١٣ ر + ٢٦

∴ ٦ ن – ١٩ ر = ٣٢ ---- (٢) بضرب طرفي (١) في -١ وإضافتها إلي (٢)

∴ ن = ١٨ ، ر = ٤

<u>مثال</u> : حل المعادلة :

$${}^{س+١}ل_{٣} = ١٠ \times {}^{س+١}ق_{٥}$$ ، حيث س ∈ ط

الحـــــل

∴ $(س+١)\,س\,(س-١) = \frac{١٠(س+١)\,س(س-١)\,(س-٢)\,(س-٣)}{٥\times٤\times٣\times٢\times١}$

باختصار الطرفين ∴ $١ = (س-٢)\,(س-٣) \times \frac{١}{١٢}$

∴ $(س-٢)\,(س-٣) = ١٢$ ∴ $س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠$

∴ س = ٦ أ، س = -١ (مرفوض)

<u>مثال</u> : إذا كان $^{م+ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{١} = ٣$ أوجد قيمة $^{م}ق_{م-ن}$

الحـــــل

∵ $^{ن}ق_{١} = ٣$ ∴ ن = ٣

∴ $^{م+٣}ل_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}ل_{٣}$

∴ م + ٣ = ١٠ ∴ م = ٧

∴ $^{م}ق_{م-ن} = {}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣} = \frac{٧\times٦\times٥}{٣\times٢\times١} = ٣٥$

تمرين (٢)

(١) احسب نتيجة كل مما يأتي :

[أ] $^{١٣}ق_{٦}$ [ب] $^{٢٠}ق_{٤}$ [ج] $^{٢٠}ق_{١٧}$ [ء] $^{١٠٠}ق_{٩٨}$

(٢) إذا كان $^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ أوجد قيمة ن

(٣) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٢}$ ٣٠ ن أوجد قيمة $^{ن}ق_{١٠}$

(٤) إذا كان $^{م+ن}ق_{٢} = ٥٦$ ، $^{م}ق_{٢} = ٣$ أوجد قيمة $\underline{|ن + م}$

(٥) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة $^{٢ن}ق_{ن+٥}$

(٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر^{٢} + ٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ وكان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد $^{ن}ق_{٧ر+٣}$

(٧) أثبت أن : $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١}$ ومن ثم

[أ] $\frac{^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{^{١٨}ق_{٥}}$

[ب] أثبت أن : $^{ن}ق_{ر+١} + ٢\,{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$

(٨) إذا كان $^{ن}ق_{٤}$ ، $^{ن}ق_{٥}$ ، $^{ن}ق_{٦}$ في تتابع حسابي أوجد قيمة ن

(٩) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ثم أوجد $\frac{^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$

(١٠) إذا علم أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$ فأوجد قيمة كل من ن ، ر

نظرية ذات الحدين

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن

$$(أ+ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\,ب^{1}\,أ^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\,ب^{2}\,أ^{ن-2} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\,ب^{ر}\,أ^{ن-ر} + \dots + ب^{ن} \quad \text{—(1)}$$

ملحوظة هامة :

إذا وضعنا في القانون السابق (- ب) بدلاً من ب في كلا الطرفين فإن

$$(أ-ب)^{ن} = أ^{ن} - {}^{ن}ق_{1}\,ب\,أ^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\,ب^{2}\,أ^{ن-2} - \dots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-ب)^{ر}\,أ^{ن-ر} + \dots + (-ب)^{ن} \quad \text{—(2)}$$

ملاحظات علي مفكوك ذات الحدين :

(١) عدد حدود المفكوك يساوي (ن+١) أي يزيد علي الأس بمقدار ١

(٢) الدليل الذي تحت ق يقل عن رتبة الحد بقدر ١ وهو نفسه أس ب

(٣) تتناقص قوة أ تدريجياً وتزيد قوة ب تدريجياً بحيث يكون مجموع القوتين ن في كل حد .

(٤) في مفكوك $(أ-ب)^{ن}$ تكون الحدود الفردية الرتبة موجبة والحدود الزوجية الرتبة سالبة.

نتيجة : بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

أولاً : $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = 2\,أ^{ن} + 2\,{}^{ن}ق_{2}\,ب^{2}\,أ^{ن-2} + 2\,{}^{ن}ق_{4}\,ب^{4}\,أ^{ن-4} + \dots\dots$

$= 2\,[\,ح_{1} + ح_{3} + ح_{5} + \dots\dots\,]$

= ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة

ثانياً : $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = 2\,{}^{ن}ق_{1}\,ب^{1}\,أ^{ن-1} + 2\,{}^{ن}ق_{3}\,ب^{3}\,أ^{ن-3} + 2\,{}^{ن}ق_{5}\,ب^{5}\,أ^{ن-5} + \dots\dots$

$= 2\,[\,ح_{2} + ح_{4} + ح_{6} + \dots\dots\,]$

= ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة

أبسط صورة لنظرية ذات الحدين

إذا كانت س و ح ، ن عدد صحيح موجب فإن

$$(1+س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_{1}\,س + {}^{ن}ق_{2}\,س^{2} + \dots\dots + {}^{ن}ق_{ر}\,س^{ر} + \dots\dots + س^{ن}$$

، $(1-س)^{ن} = 1 - {}^{ن}ق_{1}\,س + {}^{ن}ق_{2}\,س^{2} + \dots\dots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-س)^{ر} + \dots\dots + (-س)^{ن}$

مثال: باستخدام نظرية ذات الحدين اوجد مفكوك كل مما يأتي:-

[١] $(٢أ + ٣ب)^{٥}$ [٣] $(س - \sqrt{٢})^{٦}$

[٢] $(س^{٢} + \frac{١}{٢ص})^{٤}$ [٤] $(١ + \sqrt{س})^{٥}$

[٥] $(\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} + (\frac{\sqrt{س}}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥}$

الحـــــل

[١] $(٢أ + ٣ب)^{٥} = (٢أ)^{٥} + {}^{٥}ق_{١}(٣ب)(٢أ)^{٤} + {}^{٥}ق_{٢}(٣ب)^{٢}(٢أ)^{٣} + {}^{٥}ق_{٣}(٣ب)^{٣}(٢أ)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٤}(٣ب)^{٤}(٢أ) + (٣ب)^{٥}$

$= ٣٢أ^{٥} + ٢٤٠أ^{٤}ب + ٧٢٠أ^{٣}ب^{٢} + ١٠٨٠أ^{٢}ب^{٣} + ٨١٠أب^{٤} + ٢٤٣ب^{٥}$

[٢] $(س^{٢} + \frac{١}{٢ص})^{٤} = (س^{٢})^{٤} + {}^{٤}ق_{١}(\frac{١}{٢ص})(س^{٢})^{٣} + {}^{٤}ق_{٢}(\frac{١}{٢ص})^{٢} \times (س^{٢})^{٢}$

$+ {}^{٤}ق_{٣}(\frac{١}{٢ص})^{٣}(س^{٢}) + (\frac{١}{٢ص})^{٤}$

$= س^{٨} + ٢\frac{س^{٦}}{ص} + \frac{٣}{٢}\frac{س^{٤}}{ص^{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢ص^{٣}} + \frac{١}{١٦ص^{٤}}$

[٣] $(س - \sqrt{٢})^{٦} = س^{٦} - {}^{٦}ق_{١}(\sqrt{٢})س^{٥} + {}^{٦}ق_{٢}(\sqrt{٢})س^{٤} - {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{٢})س^{٣}$

$+ {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{٢})س^{٢} + {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{٢})س + (\sqrt{٢})^{٦}$

$= س^{٦} - ٦\sqrt{٢}س^{٥} + ٣٠س^{٤} - ٤٠\sqrt{٢}س^{٣} + ٦٠س^{٢} - ١٢\sqrt{٢}س + ٨$

[٤] $(١ + \sqrt{س})^{٥} = ١ + {}^{٥}ق_{١}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٢}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٣}(\sqrt{س}) + {}^{٥}ق_{٤}(\sqrt{س})$

$+ (\sqrt{س})^{٥}$

$= ١ + ٥\sqrt{س} + ١٠س\sqrt{س} + ٥س^{٢} + س^{٢}\sqrt{س}$

[٥] $(\frac{\sqrt{س}}{٢} + \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} + (\frac{\sqrt{س}}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{س}})^{٥} = ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥})$

$= ٢[(\frac{\sqrt{س}}{٢})^{٥} + {}^{٥}ق_{٢}(\frac{٢}{\sqrt{س}})^{٢} + {}^{٥}ق_{٤}(\frac{\sqrt{س}}{٢})^{٤}(\frac{٢}{\sqrt{س}})]$

$= ٢[\frac{س^{٢}\sqrt{س}}{٢} + ١٠\frac{\sqrt{س}}{٢} + ٥ \times \frac{٨}{س\sqrt{س}}]$

مثال : باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الجواب إلي ٣ أرقام عشرية :

[أ] $(٠,٩٦)^{٥}$ [ب] $(١,٠٠٣)^{٦} - (٠,٩٩٧)^{٦}$

الحل

[أ] $(٠,٩٦)^{٥} = (١ - ٠,٠٤)^{٥} = ١ - {}^{٥}\text{ق}_{١}(٠,٠٤) + {}^{٥}\text{ق}_{٢}(٠,٠٤)^{٢} - {}^{٥}\text{ق}_{٣}(٠,٠٤)^{٣}$

$= ١ - ٠٢٠ + ٠,٠١٦٠ - ٠,٠٠٠٦٤٠$

$= ٠,٨١٥٣٦٠ = ٠,٨١٥$ تقريباً

[ب] $(١,٠٠٣)^{٦} - (٠,٩٩٧)^{٦} = ٢(\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦})$

$= ٢\,[\,{}^{٦}\text{ق}_{١}(٠,٠٠٣) + {}^{٦}\text{ق}_{٣}(٠,٠٠٣)^{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٥}(٠,٠٠٣)^{٥}$

$= ٢\,[٦ \times ٠,٠٠٣] = ٠,٠٣٦$

مثال : فك $(\text{س}+٤\text{ص})^{٦}$ بنظرية ذات الحدين ثم استخدم المفكوك في إيجاد قيمة $(١,٠٠٤)^{٧}$ إلي أرقام عشرية .

الحل

$(\text{س}+٤\text{ص})^{٧} = \text{س}^{٧} + ٢٨\,\text{ص}\,\text{س}^{٦} + ٣٣٦\,\text{ص}^{٢}\text{س}^{٥} + ٢٢٤٠\,\text{ص}^{٣}\text{س}^{٤} + ٨٩٦٠\,\text{ص}^{٤}\text{س}^{٣} +$

$٢١٥٠٤\,\text{ص}^{٥}\text{س}^{٢} + ٢٨٦٧٢\,\text{ص}^{٦}\text{س} + ١٦٣٨٤\,\text{ص}^{٧}$

وبوضع س = ١ ، ص = ٠,٠٠١

$\therefore (١ + ٠,٠٠٤)^{٧} = ١ + ٢٨ \times ٠,٠٠١ + ٣٣٦(٠,٠٠١)^{٢} + ٢٤٠ < (٠,٠٠١)^{٣} + ٠$

$= ١,٠٢٨٣٣٨$ تقريباً

مثال : أوجد مفكوك $(\text{س}+٢)^{٦}$ باستخدام ذي الحدين ثم استدم المفكوك لإيجاد قيمة $\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦}$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية .

الحل

$(\text{س}+٢)^{٦} = \text{س}^{٦} - ٦ \times ٢\text{س}^{٥} + \frac{٦\times٥}{٢\times١}(٢)^{٢}\text{س}^{٤} + \frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}(٢)^{٣}\text{س}^{٣} + \frac{٦\times٥}{٢\times١}(٢)^{٤}\text{س}^{٢}$

$+ ٦ \times (٢)^{٥}\text{س} + ٢^{٦}$

$= \text{س}^{٦} + ١٢\,\text{س}^{٥} + ٦٠\text{س}^{٤} + ١٦٠\,\text{س}^{٣} + ٢٤٠\,\text{س}^{٢} + ١٩٢\,\text{س} + ٦٤$ ---(١)

$\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦} = (٢ + ٠,٠١)^{٦}$ بالتعويض في (١) عن س = ٠,٠١

$\therefore \left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^{٦} = ٦٤ + ١٩٢\,(٠,٠١) + ٢٤٠\,(٠,٠١)^{٢} + ...$

$= ٦٤ + ١,٩٢ + ٠,٠٢٤٠ = ٦٥,٩٤٤٠$

الحد العام في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$

نعلم أن :

$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} + \dots + \text{ب}^{\text{ن}}$

نلاحظ أن:-

$\text{ح}_{٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١}$ ، $\text{ح}_{٣} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢}$ ، $\text{ح}_{٤} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{\text{ن}-٣}$ وقياسا علي ذلك يكون:

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

أي $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثاني})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$ ويجب أخذ كل حد بإشارته

الحد الأوسط أو الحدين الأوسطيين في مفكوك ذات الحدين

نعلم أن عدد الحدود في مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{ن}+١$ لذا يكون لدينا حالتان :

أولاً : إذا كانت ن عدداً زوجيا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً ∴ يوجد حد أوسط واحد هو $\text{ح}_{\frac{\text{ن}}{٢}+١}$

ثانياً : إذا كانت ن عدداً فردياً :

فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً ∴ يوجد حدان أوسطان هما $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+١}{٢} + ١$

مثال: **أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} + \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$**

الحـــــل

الحد الأوسط هو $\text{ح}_{٦} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥}\left(\frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٥}\left(\frac{٢\text{س}}{٣}\right)^{٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{٥}$

$$\text{ح}_{٤} = {}^{١٠}\text{ق}_{٣}\left(\frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٣}\left(\frac{٢\text{س}}{٣}\right)^{٧} = \frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١} \times \frac{١٦\text{س}^{٤}}{٨١} = \frac{٦٤٠\text{س}^{٤}}{٢٧}$$

$$\frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٤}} = \frac{١٠\times٩\times٨\times٧\times٦}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} \times \frac{٢٧}{٦٤٠\times٣^{٤}} = \frac{٢١}{١٦٠}$$

مثال : في مفكوك $\left(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٥}$ أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويين ؟

الحـــــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$

$\therefore\ {}^{١٥}ق_{٧} \times ٢^{٩}\ س^{٩} = {}^{١٥}ق_{٨} \times ٢^{٦}\ س^{٦}$

$\therefore\ ٨\ س^{٨} = ١$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ س = \frac{١}{٢}$

مثال : إذا كان معامل الحد الذي ترتيبه ر+٤ في مفكوك $(١+س)^{١٧}$ يساوي معامل الحد الذي ترتيبه ٣ر+ ٣ في نفس المفكوك فأوجد قيمة ر

الحـــــــل

معامل $ح_{ر+٤} = {}^{١٧}ق_{ر+٣} = {}^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

$\therefore\ {}^{١٧}ق_{ر+٣} = {}^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

$\therefore$ ر+٣ = ٣ر+٢ $\qquad\qquad$ $\therefore\ ر = \frac{١}{٢}$ مرفوض

١٧ = ر +٣ +٣ر +٢ $\qquad\qquad$ $\therefore$ ر= ٣

مثال : إذا كان ضعف معامل الحادي عشر في مفكوك $(١+ س)^{ن}$ يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك $(١+ص)^{ن-١}$ أوجد قيمة ن

الحـــــــل

$٢ \times {}^{ن}ق_{١٠} = ٣ \times {}^{ن-١}ق_{٩}$

$\therefore\ ٢ \times \frac{\lfloor ن}{\lfloor ١٠ \ \lfloor ن-١٠} = ٣ \times \frac{\lfloor ن-١}{\lfloor ٩ \ \lfloor ن-١٠}$ $\qquad$ $\therefore\ \frac{٢ن \ \lfloor ن-١}{١٠ \ \lfloor ٩} = \frac{٣ \ \lfloor ن-١}{\lfloor ٩}$

$\therefore$ ن = ١٥

مثال : اثبت أن معامل الحد الأوسط في مفكوك $(١+ س)^{٢ن}$ يساوي مجموع معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك $(١+ س)^{٢ن-١}$

الحـــــــل

الحد الأوسط هو $ح_{\frac{٢ن}{٢}+١} = ح_{ن+١}$

معامل $ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_{ن} = \frac{\lfloor\underline{٢ن}}{\lfloor\underline{ن}\ \lfloor\underline{ن}} = \frac{٢\ \lfloor\underline{٢ن-١}}{\lfloor\underline{ن}\ ن\ \lfloor\underline{ن-١}}$

الحدان الأوسطان هما $\frac{٢ن-١+١}{٢} = ح_{ن}\ ،\ ح_{ن+١}$

مجموع معاملا الحدين الأوسطين $= \frac{\lfloor\underline{٢ن-١}}{\lfloor\underline{ن-١}\ \lfloor\underline{ن}} + \frac{\lfloor\underline{٢ن-١}}{\lfloor\underline{ن}\ \lfloor\underline{ن-١}} = \frac{٢\ \lfloor\underline{٢ن-١}}{\lfloor\underline{ن}\ ن\ \lfloor\underline{ن-١}}$

<u>مثال</u>: الحد الثالث في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية حيث ن عدد صحيح موجب هو $٢٨\ س^{٢}$ ، الحد الخامس من نفس المفكوك ١١٢٠ ـ أوجد قيمة كل من ن ، س .

الحـــــل

$ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}\ س^{٢} = ٢٨\ س^{٢}$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢\times١} = ٢٨$

$\therefore ن^{٢} - ن - ٥٦ = ٠$ $\therefore (ن-٨)(ن+٧) = ٠$

$\therefore ن = ٨$ $\because ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤}\ س^{٤} = ١١٢٠$

$\therefore س^{٤} = ١١٢٠ \times \frac{١\times٢\times٣\times٤}{٨\times٧\times٦\times٥} = ١٦$ $\therefore س = \pm ٢$

<u>مثال</u>: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣س+٥)^{٢ن+١}$ متساويين ـ أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب .

الحـــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

$\therefore {}^{٢ن+١}ق_{ن}\ (٥)^{ن+١}\ (٣س)^{ن} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١}\ (٥)^{ن}\ (٣س)^{ن+١}$

$\therefore ٣س = ٥$ $\therefore س = \frac{٥}{٣}$

<u>مثال</u>: في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية كان الحد الثاني $-\frac{١٠}{٣}$ والحد الثالث $\frac{٤٠}{٩}$ أوجد قيمتي ن ، س ثم أوجد الحد الرابع .

الحـــــل

$ح_{٢} = {}^{ن}ق_{١}\ س = -\frac{١٠}{٣}$ $\therefore ن\ س = -\frac{١٠}{٣}$ **---- (١)**

$ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}\ س^{٢} = \frac{٤٠}{٩}$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢\times١}\ س^{٢} = \frac{٤٠}{٩}$ **---- (٢)**

بتربيع (١) والقسمة علي (٢) $\therefore ن = ٥$ ، $س = -\frac{٢}{٣}$

$\therefore ح_{٤} = {}^{٥}ق_{٣}\ (-\frac{٢}{٣})^{٣} = -\frac{٨٠}{٢٧}$

إيجاد الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ في مفكوك ذات الحدين

١. نفرض أن الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ هو $ح_{ر+١}$

٢. نوجد $ح_{ر+١}$ في أبسط صورة .

٣. نساوي قوة س الناتجة في $ح_{ر+١}$ بالقوة المطلوبة (هـ) فنحصل علي قيمة (ر) ويكون الحد المشتمل علي $س^{هـ}$ هو $ح_{ر+١}$

٤. نعوض بقيمة (ر) التي حصلنا عليها في $ح_{ر+١}$ فنحصل علي الحد المشتمل علي $س^{هـ}$

ملاحظة:

الحد الخالي من س هو معامل س (لأن $س^{٠} = ١$)

مثال :

أوجد معامل $\frac{١}{س^{٨}}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{٢س^{٣}})^{١٢}$

الحـــــل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(-\frac{١}{٢س^{٣}}\right)^ر (س)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_ر \left(-\frac{١}{٢}\right)^ر س^{١٢-٤ر}$

بوضع ١٢ – ٤ر = - ٨ $\therefore$ ر = ٥

$\therefore ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥} \left(-\frac{١}{٢}\right)^{٥} س^{-٨}$ $\therefore$ معامل $س^{-٨} = -\frac{٩٩}{٤}$

مثال : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{٢}{س})^{١٠}$

الحـــــل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \left(-\frac{٢}{س}\right)^ر (س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر (-٢)^ر (س)^{١٠-٢ر}$

بوضع ١٠ – ٢ ر = ٠ $\therefore$ ر = ٥

الحد الخالي من س هو $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (س)^{٥} = -٨٠٦٤$

مثال: أوجد معامل $س^{١٤}$ في مفكوك $س^{٤} \left(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٥}$

الحـــــل

معامل $س^{١٤}$ في المفكوك هو معامل $س^{١٠}$ في مفكوك $\left(\frac{س^٢}{٢} + \frac{٢}{س^٣}\right)^{١٥}$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_ر \left(\frac{٢}{س^٣}\right)^ر \left(\frac{س^٢}{٢}\right)^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_ر \times ٢^{٢ر-١٥} \; س^{٣٠-٥ر}$$

بوضع $٣٠ - ٥ر = ١٠$ $\qquad \therefore ر = ٤$

معامل $ح_٥ = {}^{١٥}ق_ر \times ٢^{-٧} = \frac{١٣٦٥}{١٢٨}$

<u>مثال:</u> أثبت أن معامل $س^ن$ في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٣ن} = \frac{\underline{|٣ن}}{\underline{|٢ن}\;\underline{|ن}}$

الحـــــل

$$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر (س)^{٣ن-ر} = {}^{٣ن}ق_ر \; س^{٣ن-٢ر}$$

بوضع $٣ن - ٢ر = ر$ $\qquad \therefore ر = ن$

معامل $ح_{ن+١} = {}^{٣ن}ق_ر = \frac{\underline{|٣ن}}{\underline{|٢ن}\;\underline{|ن}}$

<u>مثال:</u> أوجد الحد المشتمل علي $س^٤$ في المقدار $\left(س^٢ + \frac{١}{س^٢}\right)^{١٢} - \left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٢}$

الحـــــل

الحد المشتمل علي $س^٤$ في مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س^٢}\right)^{١٢}$

$$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{١}{س^٢}\right)^ر (س^٢)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_ر \times س^{٢٤-٤ر}$$

$\therefore ٢٤ - ٤ر = ٤$ $\qquad \therefore ر = ٥$

$ح_٦ = {}^{١٢}ق_٥ \; س^٤$ ------ (١)

الحد المشتمل علي $س^٤$ في مفكوك $\left(س^٢ + \frac{١}{س}\right)^{١٢}$

$$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر (س)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_ر \times س^{١٢-٢ر}$$

$\therefore ١٢ - ٢ر = ٤$ $\qquad \therefore ر = ٤$

$ح_٥ = {}^{١٢}ق_٥ \, س^٤$ ------ (٢)   من (١) ، (٢)

∴ الحد المشتمل علي $س^٤$ في المقدار $= {}^{١٢}ق_٥ س^٤ - {}^{١٢}ق_٤ س^٤ = ٢٩٧ \, س^٤$

مثال:

إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فاثبت أن لا يوجد حد خالي من س في مفكوك $\left(س^٥ + \frac{١}{س^٢}\right)^{٢ن}$

إلا ذا كانت ن = ٧ أو مكرر لها . أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ٧

الحــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_ر \left(\frac{١}{س^٢}\right)^ر \left(س^٥\right)^{٢ن - ر}$

$= {}^{٢ن}ق_ر \, س^{١٠ن - ٧ر}$ بوضع ١٠ ن – ٧ ر = ٠

∴ $ر = \frac{١٠ن}{٧}$

∴ لا يوجد حد خالي من س إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها .

عندما ن = ٧   ∴ ر = ١٠

∴ $ح_{١١} = {}^{١٤}ق_{١٠} = {}^{١٤}ق_٤ = \frac{١١ \times ١٢ \times ١٣ \times ١٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ١٠٠١$

مثال: في مفكوك $\left(س^٣ + \frac{١}{س^٢}\right)^{٥ن}$ أثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذي يحتوي علي $س^{٥ن}$.

الحــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_ر \left(\frac{١}{س^٢}\right)^ر \left(س^٣\right)^{٥ن - ر} = {}^{٥ن}ق_ر \times س^{١٥ن - ٥ر}$

بوضع ١٥ ن – ٥ ر = ٠   ∴ ر = ٣ن

∴ الحد الخالي من س $= {}^{٥ن}ق_{٣ن} = {}^{٥ن}ق_{٢ن}$

بوضع ١٥ ن – ٥ ر = ٥ن

∴ ر = ٢ن   ∴ معامل $س^{٥ن} = {}^{٥ن}ق_{٢ن}$

<u>مثال</u> : اوجد قيمة أ التي تجعل معامل س^{٥} = معامل س^{١٥} في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٣}} \right)^{١٠}$

حيث أ موجبة .

الحـــــــل

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{٣}} \right)^{\text{ر}} \left(٢\text{س}^{٢} \right)^{١٠-\text{ر}}$$

$$= {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}}}{\text{س}^{٣\text{ر}}} \; (٢)^{١٠-\text{ر}} \; \text{س}^{٢٠-٢\text{ر}} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \, \text{أ}^{\text{ر}} \, (٢)^{١٠-\text{ر}} \; \text{س}^{٢٠-٥\text{ر}}$$

بوضع ٢٠ - ٥ ر = ٥ $\qquad$ $\therefore$ ر = ٣

$\therefore$ معامل س^{٥} = ^{١٠}ق$_{١}$ أ^{٣} ٢^{٧}

بوضع ٢٠ - ٥ ر = ١٥ $\qquad$ $\therefore$ ر = ١

معامل س^{١٥} = ^{١٠}ق$_{١}$ أ ٢^{٩}

$$\therefore \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} \text{أ}^{٣} \; ٢^{٧} = ١٠ \text{أ} \times ٢^{٩}$$

$\therefore$ ٣أ^{٢} = ١ $\qquad$ $\therefore$ أ = $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

تمرين (٣)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي :-

(١) $(\text{أ} + \text{ب})^{٥}$ (٢) $(\text{س} - ٢)^{٦}$

(٣) $(٢\text{س} + ٣\text{ص})^{٤}$ (٤) $(٣\text{أ} - ٢\text{ب})^{٥}$

(٥) $(\text{س} - \sqrt{٢})^{٦}$ (٦) $(١ - ٣\text{س})^{٤}$

(٧) $\left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥}$ (٨) $(\text{س}^{٢} - ١)^{٧}$

(٩) أوجد $\text{ح}_{٥}$ في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$

(١٠) أوجد $\text{ح}_{٦}$ في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

(١١) أوجد $\text{ح}_{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}\right)^{١١}$

(١٢) أوجد معامل $\text{ح}_{٦}$ في مفكوك $(٣\text{س} - ٢)^{٨}$

(١٣) أوجد معامل $\text{ح}_{٧}$ في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٩}$

(١٤) أوجد معامل $\text{ح}_{٥}$ في مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٧}$

(١٥) أوجد معامل الحد الرائي في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{ن}}$

(١٦) أوجد معامل الحد النوني في مفكوك $(\text{س}^{٢} + \text{س}^{-٢})^{٢\text{ن}-١}$

(١٧) أوجد مفكوك $(\text{س}+٢)^{٥} - (\text{س}-٢)^{٥}$

(١٨) أوجد مفكوك $(١+\sqrt{\text{س}})^{٦} - (١-\sqrt{\text{س}})^{٦}$

(١٩) أوجد قيمة $(٠,٩٩٨)^{١٠}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

(٢٠) أوجد قيمة $(١,٠٢)^{٥} - (٠,٩٨)^{٥}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

تمرين (٤)

(١) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(س + س^{-١})^{١٠}$

(٢) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(٢س^{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٢}$

(٣) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{ص})^{٩}$

(٤) أوجد معامل $س^{٨}$ في مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س})^{١٢}$

(٥) أوجد معامل $س^{١١}$ في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{س})^{١٠}$

(٦) أوجد معامل $س^{٩}$ في مفكوك $(س^{٣} - \frac{١}{س^{٤}})^{١٠}$

(٧) أوجد معامل $س^{-٤}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{٨}$

(٨) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢}{س^{٢}})^{١٠}$

(٩) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{١}{٢س^{٢}})^{٩}$

(١٠) أثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(٢س^{٣} - \frac{٣}{س})^{٩}$

(١١) أوجد معامل س في مفكوك $(س + \frac{١}{س^{٢}})^{١٣}$

(١٢) أثبت أنه لا يوجد حد يحتوي علي $س^{٦}$ في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^{١١}$

(١٣) في مفكوك $(س + \frac{٣}{٢س^{٢}})^{١٢}$ أوجد :

أولاً : معامل $س^{٦}$ **ثانياً** : رتبة الحد الخالي من س

(١٤) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٥}$ حسب قوي س التنازلية . فاثبت أن $أ + ب س^{٢} = صفر$

(١٥) إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فاثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(س^{ن} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ الا إذا كانت ن = ٧ و مكررا للعدد ٧ وأوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٤

(١٦) أثبت أن مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ يحتوي علي حد خالي من س إذا كانت ن مضاعفا للعدد ٣ - ثم أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٢

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك ذات الحدين

$\because$ $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ر}\ س^{ن-ر}$ ------ (١)

$ح_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-1}\ أ^{ر-1}\ س^{ن-ر+1}$ ------ (٢) بقسمة (١) على (٢)

$$\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} \times \frac{أ^{ر}\ س^{ن-ر}}{أ^{ر-1}\ س^{ن-ر+1}}$$

$$= \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{أ^{ر-ر+1}}{س^{ن-ر+1-(ن-ر)}}$$

$$\therefore \frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{20-ر+1}{ر} \times \frac{أ}{س}$$

أي: $\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{الأول}}{\text{الثانى}}$

مثلاً: $\frac{ح_{5}}{ح_{4}} = \frac{ن-4+1}{4} \times \frac{أ}{س} = \frac{ن-3}{4} \times \frac{أ}{س}$

نتيجه:

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الأول}}$$

مثال: في مفكوك $(2+س)^{13}$ حسب قوي س التصاعدية وجد أن النسبة بين الحد الحادي عشر والحد العاشر هي ٣ : ١٠ أوجد قيمة س .

الحـــــل

$$\frac{ح_{11}}{ح_{10}} = \frac{13-10+1}{10} \times \frac{س}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore \frac{ح_{11}}{ح_{10}} = \frac{4}{10} \times \frac{س}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore س = \frac{3}{2}$$

مثال: في مفكوك $(٥ + ٤ س)^{١٦}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدية كانت نسبة أحد الحدود إلي الحد السابق له مباشرة كنسبة ١ : ٣ – أوجد رتبة هذين الحدين في المفكوك علماً بأن س = ١

الحـــــل

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{١٦-ر+١}{ر} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٣}$$

∴ $١٢\,(٧-ر) = ٥\,ر$ ∴ $٨٤ - ١٢\,ر = ٥\,ر$

$٢٠٤ = ١٧\,ر$ ∴ $ر = ١٢$

∴ الحدان هما $ح_{١٢}$ ، $ح_{١٣}$

مثال: إذا كانت النسب بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$ في مفكوك $(س+ص)^{٨}$ تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط = ١١٢٠ فأوجد كلا من س ، ص

الحـــــل

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{٨-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤}{١}$$

∴ ص = ٢س ---- (١)

$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤}\, ص^{٤}\, س^{٤} = ١١٢٠$ ومن (١)

∴ $\frac{٨\times٧\times٦\times٥}{٤\times٣\times٢\times١} \times ٢^{٤}\, س^{٤} .\, س^{٤} = ١١٢٠$

∴ $س^{٨} = ١$ ∴ $س = \pm ١$ ∴ $ص = \pm ٢$

مثال : في مفكوك $(١+ ٢س)^{ن}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوي س التصاعدية وجد في ثلاثة حدود متتالية أن نسبة معاملات أولها إلي ثانيها إلي ثالثها ١ : ٥ : ٢٠ أوجد قيمة ن وكذلك أوجد رتب هذه الحدود الثلاثة .

الحـــــل

نفرض أن الحدود هي $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{٢}{١} = \frac{٥}{١}$ ∴ $٢ن - ٧ر + ٢ = ٠$ --- (١)

∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} \times \frac{٢}{١} = \frac{٢٠}{٥}$ ∴ $ن - ٣ر - ٢ = ٠$ --- (٢)

من (١) ، (٢) ر = ٦ ، ن = ٢٠ ∴ الحدود هي $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$ ، $ح_{٨}$

<u>مثال</u>: في مفكوك $(١ + \text{م س})^{\text{ن}}$ إذا كانت نسبة معامل $\text{ح}_{٧}$ إلي معامل $\text{ح}_{٥}$ هي ٨ : ٥ ، قيمة معامل $\text{ح}_{٣}$ = ١١٢ معامل $\text{ح}_{١}$ فاثبت أن ن = ٨ ثم أوجد قيمة م

الحـــــل

$$\frac{\text{معامل ح}_{٧}}{\text{معامل ح}_{٥}} = \frac{\text{معامل ح}_{٧}}{\text{معامل ح}_{٦}} \times \frac{\text{معامل ح}_{٦}}{\text{معامل ح}_{٥}} = \frac{\text{ن}-٦+١}{٦} \times \frac{\text{م}}{١} \times \frac{\text{ن}-٥+١}{٥} \times \frac{\text{م}}{١}$$

$$= \frac{٨}{٥}$$

$$\therefore (\text{ن}-٥)(\text{ن}-٤)\,\text{م}^{٢} = ٤٨ \qquad \text{------}\ (١)$$

$$\frac{\text{معامل ح}_{٣}}{\text{معامل ح}_{١}} = \frac{\text{معامل ح}_{٣}}{\text{معامل ح}_{٢}} \times \frac{\text{معامل ح}_{٢}}{\text{معامل ح}_{١}} = \frac{\text{ن}-٢+١}{٢} \times \frac{\text{م}}{١} \times \frac{\text{ن}-١+١}{١} \times \frac{\text{م}}{١}$$

$$\therefore \text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{م}^{٢} = ٢٢٤ \qquad \text{----}\ (٢)$$ **بقسمة (١) علي (٢)**

$$\therefore \frac{\text{ن}^{٢} - ٩\text{ن} + ٢٠}{\text{ن}^{٢} - \text{ن}} = \frac{٤٨}{٢٢٤} = \frac{٣}{١}$$

$$\therefore ١١\,\text{ن}^{٢} - ١٢٣\,\text{ن} + ٢٨٠ = ٠ \qquad \therefore (\text{ن}-٨)(١١\text{ن} - ٣٥) = ٠$$

$\therefore$ ن = ٨ أ، $\text{ن} = \frac{٣٥}{١١}$ مرفوض بالتعويض في (١)

$$\therefore ٣ \times ٤ \times \text{م}^{٢} = ٤٨ \qquad \therefore \text{م} = \pm ٢$$

<u>مثـال</u>: فـي مفكـوك $(٢\text{س}+\text{ص})^{\text{ن}}$ حسـب قـوي س التنـازليـة وجـد أن $٩\text{ح}_{٢}$ ، $٩\text{ح}_{٤}$ ، $٤٤\text{ح}_{٦}$ تكـون متتابعة هندسية فما قيمة ن .

الحـــــل

$$\frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٢}} = \frac{٤٤\text{ح}_{٦}}{٩\text{ح}_{٤}} \qquad \therefore \frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٣}} \times \frac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٢}} = \frac{٤٤}{٩} \times \frac{\text{ح}_{٦}}{\text{ح}_{٥}} \times \frac{\text{ح}_{٥}}{\text{ح}_{٤}}$$

$$\therefore \frac{\text{ن}-٣+١}{٣} \times \frac{\text{ص}}{٢\text{س}} \times \frac{\text{ن}-٤+١}{٤} \times \frac{\text{ص}}{٢\text{س}}$$

$$= \frac{٤٤}{٩} \times \frac{\text{ن}-٥+١}{٥} \times \frac{\text{ص}}{٢\text{س}} \times \frac{\text{ن}-٤+١}{٤} \times \frac{\text{ص}}{٢\text{س}}$$

$$\therefore (\text{ن}-٢)(\text{ن}-١) = \frac{٢٢(\text{ن}-٤)(\text{ن}-٣)}{١٥}$$

$$\therefore ١٥(\text{ن}^{٢} - ٣\text{ن} + ٢) = ٢٢(\text{ن}^{٢} - ٧\text{ن} + ١٢)$$

وبعد الاختصار $\therefore$ ن = ١٣

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{٢ن+١}}$ متساويين أوجد قيمة س علما بأن ن عدد صحيح موجب .

الحــــــل

الحدان الأوسطان هما $\text{ح}_{\text{ن+١}}$ ، $\text{ح}_{\text{ن+٢}}$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ن+٢}}}{\text{ح}_{\text{ن+١}}} = \text{١} \qquad \therefore \frac{(\text{٢ن+١}) - (\text{ن+١}) + \text{١}}{\text{ن+١}} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ س}} = \text{١}$$

$$\therefore \text{أ س} = \text{ب} \qquad \therefore \text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$$

مثال: إذا كونت معاملات الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك $(\text{١} + \text{س})^{\text{ن}}$ متتابعة حسابية فأوجد ن ثم أذكر رتب الحدود الأخرى في المفكوك التي تكون معاملاتها نفس المتتابعة الحسابية السابقة .

الحــــــل

$\text{٢} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٤}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٦}}$ بقسمة الطرفين على ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}}$

$$\therefore \text{٢} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٤}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}}} + \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٦}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{٥}}}$$

$$\therefore \text{١٢}(\text{ن} - \text{٤}) = \text{٣٠} + (\text{ن} - \text{٥})(\text{ن} - \text{٤})$$

$$\therefore \text{ن}^{\text{٢}} - \text{٢١ ن} + \text{٩٨} = \text{٠} \qquad \therefore (\text{ن} - \text{٧})(\text{ن} - \text{١٤}) = \text{٠}$$

$\therefore$ ن = ٧ أ، ن = ١٤

$${}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٤}} = {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٣}} \text{ ، } {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٥}} = {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٢}} \text{ ، } {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{٦}} = {}^{\text{٧}}\text{ق}_{\text{١}}$$

$\therefore$ الحدود الأخرى هي $\text{ح}_{\text{٢}}$ ، $\text{ح}_{\text{٣}}$ ، $\text{ح}_{\text{٤}}$

تمرين (٥)

(١) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٢س+٣)^{١٧}$ متساويين . فما قيمة س .

(٢) إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ هي على الترتيب ١١٥٢٠ ، ١٥٣٦٠ ، ١٣٤٤٠ . أوجد قيمة كل من س ، ص ، ن .

(٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك $(س+ص)^{ن}$ هي ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ علي الترتيب . فما قيم س ، ص ، ن .

(٤) إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك $(١+س)^{ن}$ هي ٢٠ ، ١٩٠، ١١٤٠ . فما قيمة ن وما ترتيب تلك الحدود .

(٥) إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك $(١+س)^{ن}$ كنسبة ١٥ : ٢٤ : ٢٨ . فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود .

(٦) إذا كانت النسبة بين الحدين الثاني والثالث في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$ تساوي النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك $(أ+ب)^{ن+٣}$. فما قيمة ن .

(٧) في مفكوك $(١+م س)^{ن}$ إذا علم أن نسبة معامل الحد الرابع إلي معامل الحد السادس تساوي $\frac{١}{٤}$ ونسبة معامل الحد السادس إلي معامل الحد الثامن تساوي $\frac{٧}{٤}$ فأوجد قيمة كل من م ، ن .

(٨) في مفكوك $\left(٢س+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ . فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في المفكوك .

(٩) في مفكوك $(س+٣)^{ن}$ حسب قوي س التنازلية . وجد أن الحد العاشر = $\frac{٢}{٣}$ الحد التاسع ، $ح_{١٠} = \frac{١}{٤} ح_{١١}$. أوجد قيمة كل من ن ، س .

(١٠) في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية . وجد أن الحد الرابع $\frac{٢٥}{٣}$ الحد الثاني ، والحد الخامس يساوي الحد السادس . أوجد قيمة كل من ن ، س .