البــاب الخامس

التـــكامــــل

التكامل سبق التفاضل تاريخياً ، فلقد كان وليد الدراسات التى نشأت عند محاولة إيجاد طرق عامة لتعيين مساحات وحجوم الأشكال المنتظمة – التكامل في الواقع هو عملية جمع عدد كبير جداً من العناصر الدقيقة جداً – ولذا أشتقت علامة التكامل $\int$ من الحرف S وهو الحرف الأول في كلمة Sum التى تعنى الجمع ، وفي هذا الجزء سنعتبر أن التكامل هو عملية عكسية لعملية التفاضل . وهذا مفهوم يختلف كلية عن مفهوم الجمع .

∵ عملية التفاضل هى إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا علمت ص .

∴ عملية التكامل هى إيجاد ص إذا علم $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

مثلاً : إذا كانت ص = س^{3} ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\,\text{س}^{2}$

وبعكس العملية السابقة ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\,\text{س}^{2}$ ∴ ص = $\int 3\,\text{س}^{2}\ \text{ءس}$

وتقرأ " تكامل ٣ س^{2} بالنسبة إلي س " وفي كل عملية تكامل لابد من وجود الرمزين " $\int$ " وهى رمز التكامل وتقرأ تكامل ، (ء س) وتقرأ بالنسبة إلى س وهناك نوعان من التكامل هما:

[أ] التكامل المحدد. [ب] التكامل الغير محدد .

نظريات في التكامل الغير محدد:

نظرية (١) :

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \quad \text{حيث ن} \neq -1$$

، ث : يسمى ثابت التكامل يعتمد على شروط معينة .

ويسمى هذا التكامل بالتكامل غير المحدد لأنه لا يأخذ قيمة واحدة محددة بل يمكن أن يأخذ قيماً كثيرة تتوقف على قيمة الثابت (ث) . ويجدر الإشارة أن ناتج التكامل غير المحدد هو متغير وليست قيمة ثابتة .

البرهـــان

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}+\text{ث}\right)=\frac{(\text{ن}+1)\,\text{س}^{\text{ن}}}{(\text{ن}+1)}=\text{س}^{\text{ن}}$$

$$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ء س}=\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}+\text{ث}$$

∴ عملية التكامل للدالة $\text{س}^{\text{ن}}$ بالنسبة إلى س : زودنا الأس القديم (ن) واحد وقسمنا علي الأس الجديد (ن+ ١)

أمثـلـة :

$$\int \text{س}^{7}\,.\,\text{ء س}=\frac{\text{س}^{8}}{8}+\text{ث}$$

$$\int \text{س ء س}=\frac{\text{س}^{2}}{2}+\text{ث}\ ،\ \int \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{ء س}=\int \text{س}^{-2}\,\text{ء س}=\frac{\text{س}^{-1}}{-1}+\text{ث}$$

$$\int \text{س}^{\frac{3}{4}}\,.\,\text{ء س}=\frac{\text{س}^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+\text{ث}=\frac{4}{7}\,\text{س}^{\frac{7}{4}}+\text{ث}$$

ملاحظات :

(١) $\int \text{أ د(س) ء س}=\text{أ}\int \text{د(س) ء س}$ حيث أ مقدار ثابت

مثلا: $\int 2\,\text{س}^{3}\,\text{ء س}=2\int \text{س}^{3}\,\text{ء س}=3\times\frac{\text{س}^{4}}{4}+\text{ث}=\frac{3\text{س}^{4}}{4}+\text{ث}$

(٢) $\int \text{أ . ء س}=\text{أ س}+\text{ث}$

مثلا: $\int 8\ \text{ء س}=8\,\text{س}+\text{ث}\ ،\ \int\sqrt{5}\ \text{ء س}=\sqrt{5}\ \text{س}+\text{ث}$

(٣) $\int [\text{د}_1(\text{س})+\text{د}_2(\text{س})+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{دن (س)}]\ \text{ء س}$

مثلا: $\int (3\,\text{س}^{2}+7\,\text{س}+9)\ \text{ء س}$

$$=3\,\frac{\text{س}^{3}}{3}+\frac{7\text{س}^{2}}{2}+9\,\text{س}+\text{ث}$$

$$=\text{س}^{3}+\frac{7}{2}\,\text{س}^{2}+9\,\text{س}+\text{ث}$$

استنتاج :

(١) $\int \sqrt{\text{س}}\ \text{ء س}=\frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}+\text{ث}$

(٢) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ء س}=2\sqrt{\text{س}}+\text{ث}$

وبصفة عامة :

(١) $\int \sqrt[ن]{س}\ ءس = \frac{ن+١}{ن} س^{\frac{ن+١}{ن}} + ث = \frac{ن+١}{ن}\sqrt[ن]{س^{ن+١}} + ث$

(٢) $\int \frac{١}{\sqrt[ن]{س}}\ ءس = \frac{ن+١}{ن} س^{\frac{ن+١}{ن}} + ث = \frac{ن+١}{ن}\sqrt[ن]{س^{ن-١}} + ث$

مثلاً: $\int \sqrt[٣]{س}\ ءس = \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}} + ث$

$\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\ ءس = \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٢}} + ث$

ملاحظة :

$\int \sqrt[ن]{س^{م}}\ ءس$ يستحسن التحويل

$\int س^{\frac{ن}{م}}\ ءس = \frac{م}{ن+م} س^{\frac{ن+م}{م}} + ث$

مثلاً : $\int \sqrt[٣]{س^{٤}}\ ءس = \int س^{\frac{٣}{٤}}\ ءس = \frac{٤}{٤+٣} س^{\frac{٤+٣}{٤}} + ث = \frac{٤}{٧} س^{\frac{٤}{٧}} + ث$

مثال: أوجد التكاملات الآتية : -

(١) $\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤}\ ءس$ (٢) $\int س(٢ - ٣س)\ ءس$

(٣) $\int \frac{(٢+س)^{٢}}{\sqrt{س}}\ ءس$ (٤) $\int س^{٩}(س + \frac{١}{س})^{٢}\ ءس$

الحـــــل

(١) $\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤}\ ءس = \int \sqrt{(س^{٢})^{٢} - ٢س^{٢}(\frac{١}{س^{٢}}) + (\frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤}\ ءس$

$\int \sqrt{(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢} + ٤}\ ءس = \int (س^{٢} + س^{-٢})\ ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} + \frac{١}{-١}س^{-١} + ث = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{س} + ث$

(٢) $\int س(٢-٣س)\ ءس = \int ٢س - ٣س^{٢}\ ءس$

$= \frac{٢س^{٢}}{٢} - \frac{٣س^{٣}}{٣} + ث = س^{٢} - س^{٣} + ث$

(٣) $\int \frac{(٢+س)^{٢}}{\sqrt{س}}\ ءس = \int (\frac{٤ + ٤س + س^{٢}}{\sqrt{س}})\ ءس$

$$= \int \left(\frac{٤}{\sqrt{س}} + \frac{٤س}{\sqrt{س}} + \frac{س^{٢}}{\sqrt{س}} \right) ءس = \int ٤\, س^{-\frac{١}{٢}} + ٤\, س \times س^{-\frac{١}{٢}} + س^{٢} \times س^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= \int ٤\, س^{-\frac{١}{٢}} + ٤\, س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}}\, ءس = ٤ \times \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ٤ \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ث$$

$$= ٨\, س^{\frac{١}{٢}} + \frac{٨}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ث$$

$$= ٨\sqrt{س} + \frac{٨}{٣} س\sqrt{س} + \frac{٢}{٥} س^{٢}\sqrt{س} + ث$$

(٤) $$\int س^{٩} \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٣} ءس = \int س^{٩} \left(س^{٣} + ٣س + \frac{٣}{س} + \frac{١}{س^{٣}}\right) ءس$$

$$= \int \left(س^{١٢} + ٣س^{١٠} + ٣س^{٨} + س^{٦}\right) ءس$$

$$= \frac{س^{١٣}}{١٣} + \frac{٣س^{١١}}{١١} + \frac{٣س^{٩}}{٩} + \frac{س^{٧}}{٧} + ث$$

نظرية (٢)

$$\int (أس + ب)^{ن}\, ءس = \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{١}{أ} + ث$$

حيث (أس + ب) دالة خطية

مثلاً :
$$\int (٥س + ٤)^{٧}\, ءس = \frac{(٥س + ٤)^{٨}}{٥ + ٨} + ث$$
$$\int (٢ - ٣س)^{٤}\, ءس = \frac{(٢ - ٣س)^{٥}}{٥ \times -٣} + ث$$

∴ **تكامل دالة من الدرجة الأولى في متغير ما مرفوعة لأس ∈ ح -{-١} بالنسبة لذلك المتغير** $= \dfrac{(\text{دالة من الدرجة الأولى})^{\text{الأس} + ١}}{(\text{الأس} + ١) \times \text{معامل المتغير}} + ث$

أمثلة متنوعة:

(1) $\int \sqrt{4\text{س}+1}\ \text{ءس} = \int (4\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\ \text{ءس} = \frac{(4\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{4\times\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(2) $\int \text{س}\sqrt{\frac{2}{\text{س}^2} - \frac{3}{\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \sqrt{\text{س}^2\left(\frac{2}{\text{س}^2} - \frac{3}{\text{س}}\right)}\ \text{ءس}$

$= \int \sqrt{2-3\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{(2-3\text{س})^{\frac{3}{2}}}{-3\times\frac{3}{2}} + \text{ث} = -\frac{2}{9}(2-3\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(3) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[3]{(3\text{ص}+1)^2}} = \int (3\text{ص}+1)^{-\frac{2}{3}} + \text{ث} = \frac{(3\text{ص}+1)^{\frac{1}{3}}}{3\times\frac{1}{3}} + \text{ث}$

$= (3\text{ص}+1)^{\frac{1}{3}} + \text{ث} = \sqrt[3]{(3\text{ص}+1)} + \text{ث}$

(4) $\int \frac{10-5\text{س}}{\sqrt{2-\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \frac{5(2-\text{س})}{\sqrt{2-\text{س}}}\ \text{ءس} = \int \frac{5(2-\text{س})}{(2-\text{س})^{\frac{1}{2}}}\ \text{ءس}$

$= \int 5(2-\text{س})^{\frac{1}{2}}\ \text{ءس} = \frac{5(2-\text{س})^{\frac{3}{2}}}{-1\times\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{10}{3}(20\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(5) $\int \frac{6\ \text{ءس}}{\sqrt[3]{3\text{س}+4}} = \int 6(3\text{س}+4)^{-\frac{1}{3}} + \text{ث} = \frac{6(3\text{س}+4)^{\frac{2}{3}}}{3\times\frac{2}{3}} + \text{ث}$

$= 3\sqrt[3]{(4\text{س}+4)^2} + \text{ث}$

(6) $\int \frac{\text{س}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2\text{س}-1}}\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\int \frac{2\text{س}-1}{\sqrt{2\text{س}-1}}\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\int \sqrt{2\text{س}-1}\ \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\int (2\text{س}-1)^{\frac{1}{2}}\ \text{ءس} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{(2\text{س}-1)}{2} + \text{ث}$

$= \frac{1}{6}(2\text{س}-1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(7) $\int \frac{6}{\text{س}^{10}}(\text{س}^3 + 5\text{س}^2)^5\ \text{ءس} = \int 6\left[\frac{1}{\text{س}^2}(\text{س}^3 + 5\text{س}^2)\right]^5 = 6\int (\text{س}+3)^5\ \text{ءس}$

$= 6\times\frac{(\text{س}+5)^6}{6} + \text{ث} = (\text{س}+5)^6 + \text{ث}$

$$(٨)\quad \int (\text{س}-١)(٢\text{س}-٣)^{٧}\, \text{ء س}$$

نضع المقدار (س-١) على صورة المقدار (٢س-٣)

$$= \frac{١}{٢}\int (٢\text{س}-٢)(٢\text{س}-٣)^{٧}\, \text{ء س} = \frac{١}{٢}\int [(٢\text{س}-٣)+١]\,(٢\text{س}-٣)^{٧}\, \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (٢\text{س}-٣)^{٨} + (٢\text{س}-٣)^{٧}\, \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{(٢\text{س}-٣)^{٩}}{٩\times ٢} + \frac{(٢\text{س}-٣)^{٨}}{٨\times ٢}\right] + \text{ث}$$

<u>ملاحظة</u> : المقدار المضاف = المقدار الأصلى – المقدار المعدّل

$$(٩)\quad \int \frac{(٢\text{س}-١)}{(٤\text{س}+٣)^{٤}}\, \text{ء س} = \frac{١}{٢}\int \frac{(٤\text{س}-٢)}{(٤\text{س}+٣)}\, \text{ء س} = \frac{١}{٢}\int \frac{(٤\text{س}+٣)-٥}{(٤\text{س}+٣)^{٤}}\, \text{ء س}$$

المقدار المضاف = -٢ - (+٣) = -٥

$$= \frac{١}{٢}\int (٤\text{س}+٣)^{-٣} - ٥(٤\text{س}+٣)^{-٤}\, \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\frac{(٤\text{س}+٣)^{-٢}}{-٢\times ٤} - ٥\times\frac{(٤\text{س}+٣)^{-٣}}{-٣\times ٤}\right] + \text{ث}$$

$$= -\frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٨(٤\text{س}+٣)^{٢}} - \frac{٥}{١٢(٤\text{س}+٣)^{٣}}\right] + \text{ث}$$

<u>ملاحظات :</u>

١- إذا كانت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام والمقام مكون من حد واحد فقط – فإننا نقسم حدود البسط على المقام ثم نجرى عملية التكامل .

<u>أمثلة :</u>

$$(١)\quad \int \frac{\text{س}^{٢}+٣}{\text{س}^{٢}}\, \text{ء س} = \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \int \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\, \text{ء س} = \int ١ + ٣\text{س}^{-٢}\, \text{ء س}$$

$$= \text{س} + \frac{٣\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ث} = \text{س} - \frac{٣}{\text{س}} + \text{ث}$$

$$(٢)\quad \int \frac{(\text{س}+١)^{٣}-١}{٣\text{س}}\, \text{ء س} = \int \frac{\text{س}^{٣}+٣\text{س}^{٢}+٣\text{س}}{٣\text{س}}\, \text{ء س} = \int \frac{١}{٣}\text{س}^{٢} + \text{س} + ١$$

$$= \frac{١}{٩}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{ث}$$

$$(٣)\quad \int \frac{(١-\text{س})^{٢}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{ء س} = \int \frac{١-٢\text{س}+\text{س}^{٢}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}} = \int (\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} - ٢\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{س}^{\frac{١}{٢}})\, \text{ء س}$$

$$= -٢\text{س}^{-\frac{١}{٢}} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

٢- إذا كانت الدالة المراد تكاملها مكونة من بسط ومقام وكان المقام مكون منأكثر من حد فأننا نلجأ إلي تحليل البسط والمقام والاختصار لتحويل المقام إلي حد واحد فقط ثم نجرى عملية التكامل .

أمثلـــة :

(١) $$\int 24\,\text{س}^{3}\left[\frac{\text{س}^{3}-1}{\text{س}^{2}+\text{س}+1}\right]^{2}\text{ء س}$$

$$=\int 24\,\text{س}^{3}\left[\frac{(\text{س}-1)(\text{س}^{2}+\text{س}+1)}{(\text{س}^{2}+\text{س}+1)}\right]^{2}\text{ء س}$$

$$=\int 24\,\text{س}^{3}(\text{س}^{2}-2\text{س}+1)\,\text{ء س}=\int(24\,\text{س}^{5}-48\,\text{س}^{4}+24\,\text{س}^{3})\,\text{ء س}$$

$$=4\,\text{س}^{6}-\frac{48}{5}\text{س}^{5}+6\,\text{س}^{4}+\text{ث}$$

(٢) $$\int\frac{\text{س}^{3}-\text{س}}{\text{س}+1}\,\text{ء س}$$

$$=\int\frac{\text{س}(\text{س}-1)(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)}\,\text{ء س}=\int(\text{س}^{2}-\text{س})\,\text{ء س}=\frac{1}{3}\text{س}^{3}-\frac{1}{2}\text{س}^{2}+\text{ث}$$

(٣) $$\int\frac{(\text{س}^{2}+3\text{س})^{5}}{\text{س}^{5}}\,\text{ء س}$$

$$=\int\frac{\text{س}^{5}(\text{س}+3)^{5}}{\text{س}^{5}}\,\text{ء س}=\frac{1}{6}(\text{س}+3)^{6}+\text{ث}$$

(٤) $$\int(\text{س}\sqrt{\text{س}}-8)(\sqrt{\text{س}}-2)^{-1}\,\text{ء س}$$

$$=\int\frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}-8}{\text{س}^{\frac{3}{2}}-2}\,\text{ء س}=\int\frac{(\text{س}^{\frac{1}{2}}-2)(\text{س}+2\text{س}^{\frac{1}{2}}+4)}{(\text{س}^{\frac{1}{2}}-2)}\,\text{ء س}$$

$$=\int(\text{س}+2\,\text{س}^{\frac{1}{2}}+4)\,\text{ء س}=\frac{1}{2}\text{س}^{2}+\frac{4}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}+4\,\text{س}+\text{ث}$$

$$=\frac{1}{2}\text{س}^{2}+\frac{4}{3}\text{س}\sqrt{\text{س}}+4\,\text{س}+\text{ث}$$

٣- إذا كانت الدالة المراد تكاملها محتوية على جذور تربيعية للمتغير س في المقام المكون من حدين أو أكثر فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق الجذر للتخلص من الجذور في المقام .

امثلـــــة :

(١) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{س}+٢} - \sqrt{\text{س}}}$

$\int \frac{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+٢} - \sqrt{\text{س}}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}} \text{ ء س}$

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}+٢-\text{س}} \text{ ء س} = \frac{١}{٢} \int \left(\sqrt{\text{س}+٢} + \sqrt{\text{س}}\right) \text{ ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{س}+٢} \text{ ء س} + \frac{١}{٢} \int \sqrt{\text{س}} \text{ ء س} = \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} (\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} \text{س} + \text{ث}$

$= \frac{٣}{٤} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

(٢) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}(\text{س}-١)}{\sqrt{\text{س}} - ١} \text{ ء س}$

المقدار $= \int \frac{\sqrt{\text{س}}(\sqrt{\text{س}}+١)(\sqrt{\text{س}}-١)}{(\sqrt{\text{س}} - ١)} = \int (\text{س} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}) \text{ ء س}$

$= \frac{١}{٢} \text{س}^٢ + \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = \frac{١}{٢} \text{س}^٢ + \frac{٢}{٣} \text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

تمرين (٩)

❖ **احسب التكاملات الآتية:**

(١) $\int ٥\,\text{س}\ \text{ءس}$

(٢) $\int \frac{\text{ءس}}{٨}$

(٣) $\int \frac{\text{ب}^{٢}\,\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}\ \text{ءس}$ حيث أ ، ب ثابتان

(٤) $\int (٣\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)\ \text{ءس}$

(٥) $\int (٤\,\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} - ٥)\ \text{ءس}$

(٦) $\int (٢\,\text{س}^{٧} - ٦\text{س}^{٣} + ٨\,\text{س} + ١)\ \text{ءس}$

(٧) $\int (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)\ \text{ءس}$

(٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{م}^{٢}\text{س}}{\text{س}}\ \text{ءس}$

(٩) $\int (\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب})\ \text{ءس}$ حيث أ، ب ثابتان

(١٠) $\int \sqrt{\text{س}}\,(١ + \sqrt{\text{س}})\ \text{ءس}$

(١١) $\int \frac{١ + \text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

(١٢) $\int \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}\ \text{ءس}$

(١٣) $\int (\sqrt{\text{س}} - ١)^{٢}\ \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{ءن}}{\sqrt[٣]{\text{ن}^{٤}}}$

(١٥) $\int (٧\text{س} - ٣)^{٨}\ \text{ءس}$

(١٦) $\int (٢ - \text{س})^{٩}\ \text{ءس}$

(١٧) $\int \left[\frac{\text{س} + ٢}{٣}\right]^{\frac{١}{٤}}\ \text{ءس}$

(١٨) $\int (\text{س}^{٢} + ٢)^{٣}\ \text{ءس}$

(١٩) $\int (\sqrt{٢\,\text{س} + ٧})\ \text{ءس}$

(٢٠) $\int \frac{٥}{(٢\text{س} - ١)^{٥}}\ \text{ءس}$

(٢١) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt[٣]{(\text{س} + ٩)^{٢}}}$

(٢٢) $\int \text{س}^{٥}\left(١ - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥}\ \text{ءس}$

(٢٣) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}\ \text{ءس}$

(٢٤) $\int \text{س}\sqrt{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}}}\ \text{ءس}$

(٢٥) $\int (٢\text{س} + ١١)\sqrt{٢\text{س} + ١١}\ \text{ءس}$

تكامل بعض الدوال المثلثية

١. $\int$ جا س . ءس ⇐ - جتا س + ث

٢. $\int$ جا(أ س+ب) ءس ⇐ $\frac{\text{- جتا (أ س+ب)}}{\text{أ}}$ + ث

٣. $\int$ جا أ س ءس ⇐ $\frac{\text{- جتا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٤. $\int$ جتا س ءس ⇐ جا س + ث

٥. $\int$ جتا (أ س+ب) ءس ⇐ $\frac{\text{جا (أ س + ب)}}{\text{أ}}$ + ث

٦. $\int$ جتا أ س ءس ⇐ $\frac{\text{جا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٧. $\int$ قا^{٢}س ءس ⇐ ظا س + ث

٨. $\int$ قا^{٢} أ س ءس ⇐ $\frac{\text{ظا أ س}}{\text{أ}}$ + ث

٩. $\int$ قا^{٢} (أ س + ب) ءس ⇐ $\frac{\text{ظا (أ س + ب)}}{\text{أ}}$ + ث

• **ملحوظة :**

(١) جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

(٢) ١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

(٣) ١ + ظا^{٢} س = ق^{٢} س

(٤) ١ + ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س

(٥) جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

(٦) جتا ٢س = جتا^{٢}س - جا^{٢}س = ١ - ٢جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س - ١

(٧) جا^{٢} س = ١ - جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

(٨) جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

• أمثلة:

(١) $\int$ ١ + ظا^{٢} ٢ س ءس

= $\int$ قا^{٢} ٢س . ءس = $\frac{\text{ظا ٢ س}}{٢}$ + ث

$$(٢)\quad \int \frac{\text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{١ - حتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{١ - حتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ - حتاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{(١ - حتا س) (١ + حتاس)}}{\text{(١ - حتاس)}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{(١ + حتا س)}\ \text{ءس} = \text{س + حاس + ث}$$

$$(٣)\quad \int \frac{\text{حتا ٢س}}{\text{حتاس + حاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{حتاس + حاس}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{(حتاس - حاس) (حتاس + حاس)}}{\text{(حتاس + حاس)}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{(حتا س} - \text{حا س)}\ \text{ءس} = \text{حاس + حتا س + ث}$$

$$(٤)\quad \int \frac{٣}{\text{١ - حا}^{٢}\ \text{٢س}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{٣}{\text{حتا}^{٢}\ \text{٢س}}\ \text{ءس} = \int \text{٣ قا}^{٢}\ \text{٢س}\ \text{ءس} = \frac{٣}{٢}\ \text{طا ٢س + ث}$$

$$(٥)\quad \int \text{(١ - ٢حا}^{٢}\ \text{س)}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{حتا٢ س}\ \text{ءس} = \frac{٣}{٢}\ \text{حا٢س + ث}$$

$$(٦)\quad \int \frac{\text{حا}^{٢}\ \text{٢س}}{\text{١+ حتا س}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{١ - حتا}^{٢}\text{س}}{\text{١+ حتا س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{(١ - حتا س) (١ + حتاس)}}{\text{(١+ حتا س)}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{(١ - حتاس)}\ \text{ءس} = \text{س حا س + ث}$$

$$(٧)\quad \int \frac{\text{حا ٢س}}{\text{حتا س}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{٢ حاس حتاس}}{\text{حتا س}}\ \text{ءس} = \int \text{٢حاس}\ \text{ءس} = \text{-٢ حتاس + ث}$$

$$(٨)\quad \int \text{طا}^{٢}\ \text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{(قا}^{٢}\ \text{س - ١)}\ \text{ءس} = \text{طا س} - \text{س + ث}$$

(٩) $\int$ (١- حا^{٢} س) ءس

$= \int$ جتا^{٢} س دس $= \int (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$ جتا ٢س) دس

$= \frac{١}{٢}$ س $+ \frac{١}{٤}$ جا ٢س + ث

(١٠) $\int$ ٢ جا^{٢} س ءس

$= \int$ ٢ ($\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ حتا٢ س) ءس

$= \int$ (١- حتا٢ س) ءس = س - $\frac{١}{٢}$ حا٢س + ث

تمرين (١٠)

❖ <u>أوجد التكاملات الآتية:-</u>

(١) $\int$ ٤ حاس حتاس ءس

(٢) $\int$ حا $\frac{١}{٤}$ س ءس

(٣) $\int$ حتا $\frac{١}{٥}$ س ءس

(٤) $\int$ قا^{٢} ٢س ءس

(٥) $\int$ حا ($\frac{١}{٥}$ س+١) ءس

(٦) $\int$ حتا (٣س-١) ءس

(٧) $\int$ قا^{٢} ($\frac{١}{٥}$ س-١) ءس

(٨) $\int$ [حا(٤س+١) + حتا(٤س+١)] ءس

(٩) $\int$ [٨حتا س- ٤قا^{٢} س] ءس

(١٠) $\int$ [٦حتاس- ٢قا^{٢} س] ء س

(١١) $\int$ حتا (٣س+٥) ء س

(١٢) $\int \frac{\text{س حتا س + ٢حتاس}}{\text{س + ٢}}$ ءس

بعض تطبيقات التكامل

درسنا كيف نجرى عملية التفاضل لدالة ما . أي إيجاد ميل المماس لهذه الدالة وعرفنا أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل أى أنه إذا علم ميل المماس لمنحنى فإنه يمكن إيجاد معادلة هذا المنحنى بإجراء عملية التكامل لميل المماس .

إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $\frac{ءص}{ءس} =$ م فإن معادلة المنحنى هي:

ص = $\int$ م . ءس ويمكن تعيين ثابت التكامل بمعرفة شروط معينة .

مثال: إذا كان ميل المنحنى عند أى نقطة عليه (س، ص) هو ٢س+٩ – أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١،٥) .

الحـــــــــل

$\because$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + ٩

$\therefore$ ص = $\int$ (٢س+٩) ءس = س^{٢} + ٩س + ث

ولتعيين الثابت ث $\because$ المنحنى يمر بالنقطة (١،٥) تحقق معادلته

$\therefore$ ٥ = ١ + ٩ + ث $\therefore$ ث = -٥

$\therefore$ معادلة المنحنى ص = س^{٢} + ٩س -٥

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (-١، ٦) وميل المماس له عند أي نقطة عليه يساوى (س+٢) (٣س-٢) .

الحـــــــــل

$\frac{ءص}{ءس}$ = (س+٢) (٣س-٢) = ٣س^{٢} + ٤س - ٤

$\therefore$ ص = $\int$ (٣س^{٢} + ٤س – ٤) ءس = س^{٣} + ٢س^{٢} – ٤س + ث

ولتعيين الثابت ث المنحنى يمر بالنقطة (-١، ٦) تحققه

$\therefore$ ٦ = -١ + ٢ + ٤ث $\therefore$ ث = ١

$\therefore$ معادلة المنحنى ص = س^{٣} + ٢س^{٢} – ٤س +١

مثال: ميل منحنى ما عند أى نقطة عليه يتناسب طرديا مع مربع الحداثى السينى للنقطة – فإذا كان الميل عند النقطة (١، ٣) الواقعة علي المنحنى هو ٦ – فأوجد معادلة المنحنى .

الحـــــــل

∵ ميل المنحنى $\frac{دص}{دس} \alpha$ س^2 ∴ $\frac{دص}{دس}$ = أ س^2 حيث أ ثابت

$[\frac{دص}{دس}] = 6$ ∴ أ = 6 ∴ $\frac{دص}{دس}$ = 6س^2

∴ ص = ∫ 6 س^2 . دس ∴ ص = 2س^3 + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (1 ، 3) ∴ 3 = 2 + ث ∴ ث = 1

∴ معادلة المنحنى ص = 2س^3 + 1

مثال: إذا علم أن $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = 6 وكان لمنحنى الدالة ص = د(س) نقطة انقلاب هى (1، 2) وقيمة عظمى محلية عند س = -1 ـ أوجد معادلة المنحنى .

الحـــــــل

$\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ∫ 6 دس = 6س + ث نقطة انقلاب (1، 2)

0 = 6س + ث 0 = 6 + ث ∴ ث = -6

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = 6س - 6 ∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ∫ 6س - 6 دس

∴ $\frac{دص}{دس}$ = 3 س^2 - 6س + ث$_1$ ∴ $[\frac{دص}{دس}]_{س = -1}$ = 0

∴ 0 = 9 + ث$_1$ ∴ ث$_1$ = -9 ∴ $\frac{دص}{دس}$ = 3 س^2 - 6س + 9

ص = ∫ (3 س^2 - 6س + 9) دس = 3 س^3 - 6س^2 + 9س + ث$_2$

(1، 2) تحقق المعادلة ∴ 2 = -11 + ث$_2$ ∴ ث$_2$ = 13

∴ س = 3 س^3 - 6س^2 + 9س + 13

مثال: أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (-1 ، 3) وميل المماس له عند أى نقطة (س، ص) عليه يساوى $\frac{4س - 1}{2ص}$.

الحـــــــل

$\frac{دص}{دس} = \frac{4س - 1}{2 ص}$ ∴ ∫ 2ص . د ص = ∫ (4س - 1) دس

، ص^2 = 2س^2 – س + ث لتعيين الثابت يمر بالنقطة (-1 ، 3)

∴ 9 = 2 + 1 + ث ∴ ث = 6

∴ معادلة المنحنى ص = 2س^2 – س + 6

مثال: خزان مياه على شكل متوازى مستطيلات أبعاده ١، ٢، ٣ متر يصب فيه الماء بمعدل (٢ن+١) م^{٣} / دقيقة – أوجد الزمن الذي يمتلئ بعده الخزان .

الحـــــــل

نفرض أن حجم الخزان ح

، ∵ الماء يصب فيه بمعدل (٢ن+ ١) م^{٣} / دقيقة ∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = (٢ن+ ١)

بإجراء التكامل $\int \frac{ءح}{ءن}$. ءن = $\int$ (٢ن + ١) ءن

∴ ح = $\frac{٢ن^{٢}}{٢}$ + ن + ث أي أن ح = ن^{٢} + ن + ث

ولكن عند بدء الصب فإن ن = صفر كأن ح = صفر

∴ ٠ = ٠ + ٠ + ث ∴ ث = ٠

∴ ح = ن^{٢} + ن وعندما يمتلئ الخزان فإن حجم الماء ح = ٦

∴ ٦ = ن^{٢} + ن ∴ ن^{٢} + ن – ٦ = ٠

∴ (ن-٢) (ن+٣) = ٠ ∴ ن = ٢ ، ن = -٣ ∴ يمتلئ الخزان بعد ٢ دقيقة .

مثال: إذا كان ميل المماس م = حتا س للمنحنى عند أي نقطة (س،ص) – فأوجد معادلة المنحنى إذا كان يمر بنقطة الأصل .

الحـــــــل

∵ م = $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا س

∴ ص = $\int$ حتاس ءس = حا + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٠) ∴ ٠ = حا٠ + ث

∴ ث = ٠ ∴ المعادلة هى ص = حا س

مثال: معدل تغير ميل المماس لمنحنى = ٢(٣س-٥) – فأوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمر بالنقطتين (١،٥) ، (٢، -٣) .

الحـــــــل

∵ $\frac{ءم}{ءس}$ = (٦س-١٠) ∴ م = ٣ س^{٢} -١٠س + ث$_{١}$

ص = ٣ س^{٢} -١٠س + ث$_{١}$ س + ث$_{٢}$ ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١،٥)

∴ ٥ = ١- ٥ + ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ ∴ ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ = ٩ ----- (١)

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢، -٣)

∴ -٣ = ٨- ٢٠+٢ ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ ∴ ٢ث$_{١}$ + ث$_{٢}$ = ٩ ---- (٢)

بالطرح ∴ ث$_{١}$ = ٠ ، ث$_{٢}$ = ٩

تمرين (١١)

(١) أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى تساوى $3 - 2س^{-2} + 2س^{-3}$ حيث $س \neq 0$ علماً بأن الدالة تساوى ٢ عندما $س = \frac{1}{2}$

(٢) أوجد الدالة التى مشتقتها الأولي تساوى $\frac{8س^{3} - 1}{2س - 1}$ حيث $س \neq \frac{1}{2}$ علماً بأن الدالة تساوى ١٠ عندما س =١

(٣) إذا كانت $\frac{دص}{دس} = 12س^{5} - 49(7س - 12)^{6}$ وكانت ص = ٠ عندما س=٢ ـ فأوجد ص بدلالة س .

(٤) إذا كانت $\frac{دص}{دس} = \frac{2س + 7}{3 - 2ص}$ وكانت ص =٣ عندما س= -١ فأوجد العلاقة بين س، ص.

(٥) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة ($\frac{1}{2}$ ، ٣) وميل المماس عند أي نقطة عليه هو $(1 - \frac{2}{س^{2}})$ حيث $س \neq 0$

(٦) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى $\frac{س}{ص}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٣،-٢) .

(٧) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه احداثيها السينى س هو $3س^{2} - 6س - 2$ ـ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٣،-٢) .

(٨) منحنى ميل العمودى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى س هو $\frac{-1}{2س - 6}$ أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (٤ ، ٥) .

(٩) منحنى ميل العمودى عند أي نقطة عليه (س،ص) هو ٣ ـ ٢ س أوجد معادلته إذا كان يمر بالنقطة (١ ، ٣) .

(١٠) منحنى يمر بالنقطة (١،٠) وميله عند أي نقطة عليه يساوى $(2س - \frac{1}{2}س^{2})$ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى للمنحنى عند النقطة التى احداثيها السينى ٣ .

(١١) منحنى يمر بالنقطة (٠، ١٠) وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى ٣(س^{٢} − ٦س +٥) – أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية له.

(١٢) إذا كان ميل منحنى عند أى نقطة عليه يتعين بالعلاقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= س^{٢} + ٢س −٨ وللمنحنى قيمة عظمى محلية تساوى ٢٦$\frac{٢}{٣}$ – فأوجد القيمة الصغرى المحلية له.

(١٣) إذا كان ميل منحنى عند أي نقطة عليه هو ٣(س-١) (س+١) وله قيمة صغرى محلية تساوى-٢. فأوجد القيمة العظمى المحلية له.

(١٤) إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة في مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٠,٠١٥ ن^{٢} + ٠,٠٢ ن حيث م المساحة بالمتر المربع، ن الزمن بالدقيقة – فأوجد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة إذا علم أن:
م = ٩٠ مترا مربعا عندما ن = ١٠ دقائق .

(١٥) في تجربة ما كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز ح (مقدرة بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط الواقع عليها ص (مقدرة بالنيوتن / متر مربع) يعطى بالعلاقة $\frac{\text{ءح}}{\text{ءص}}$ = $\frac{-١}{\text{ص}^{٢}}$
وكان ح = ١٢م^{٣} عندما ص = $\frac{١}{٢}$ نيوتن / م^{٢} – أوجد العلاقة بين الحجم والضغط .

(١٦) يقوم مجموعة من العمال بحفر حفرة من التراب فإذا كان معدل حجم التراب المرفوع بالمتر المكعب في الساعة يتعين بالعلاقة $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ١٠ - $\frac{٢}{٣}$ ن ، أحسب حجم التراب المرفوع في ٣ ساعات .

(١٧) اشتركت متسابقتان لمدة أربع دقائق في الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة $\frac{\text{ءك}}{\text{ءن}}$= -٦ن^{٢} + ١٢ن + ٩٠ كلمة / دقيقة حيث ك عدد الكلمات التى تكتبها خلال ومن ن دقيقة وسرعة المتسابقة الثانية تعطى من العلاقة $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$
= -٦ن^{٢} + ١٥ن + ٨٥ كلمة/ دقيقة حيث ل عدد الكلمات التى تكتبها خلال زمن ن دقيقة
- أي المتسابقتين تكتب كلمات أكثر من الأخري .

إجابات التمارين

أولاً: إجابة تمارين الجبر

حلول تمرين (١)

(١) $\because \underline{|ن} = 24 = 1\times2\times3\times4$

$\therefore \underline{|ن} = \underline{|4} \Rightarrow ن = 4$

$\therefore {}^{2ن}ل_3 = {}^{8}ل_3 = 8\times7\times6 = 336$

(٢) $\because {}^{8}ل_ر = 6720 = 8\times7\times6\times5\times4$

$\therefore {}^{8}ل_ر = {}^{8}ل_5 \Rightarrow ر = 5$

$\therefore \underline{|ر+1} = \underline{|6}$

$= 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

(٣) $\because {}^{ن}ل_4 = 14\times{}^{ن-2}ل_3$

$\therefore \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-4}} = 14\times\dfrac{\underline{|ن-2}}{\underline{|ن-5}}$

$\therefore \dfrac{ن(ن-1)\underline{|ن-2}}{(ن-4)\underline{|ن-5}} = 14\times\dfrac{\underline{|ن-2}}{\underline{|ن-5}}$

$\because \dfrac{ن^2-ن}{ن-4} = 14$

$\therefore ن^2-ن = 14ن-56$

$ن^2-15ن+56 = 0$

$(ن-7)(ن-8) =$ صفر

$\therefore ن = 8$ أ، $ن = 7$

(٤) $\because \underline{|ن+1} : \underline{|ن-1} = 72$

$\therefore \dfrac{\underline{|ن+1}}{\underline{|ن-1}} = 72$

$\therefore {}^{ن+1}ل_{ن+1-(ن-1)} = 72$

${}^{ن+1}ل_2 = 72 = 9\times8$

$\therefore {}^{ن+1}ل_2 = {}^{9}ل_2$

$\because ن+1 = 9 \qquad \therefore ن = 8$

المقدار $= {}^{ن}ل_0 + {}^{ن}ل_1 + {}^{ن}ل_2$

$= {}^{8}ل_0 + {}^{8}ل_1 + {}^{8}ل_2 = 1+8+8\times7$

$= 1+8+56 = 65$

(٥) $\because \underline{|ر} = 720$

$= 1\times2\times3\times4\times5\times6$

$\underline{|ن} = \underline{|4}$

$\because {}^{ن}ل_ر = 60480$

$\therefore {}^{ن}ل_6 = 60480 = 9\times8\times7\times6\times5\times4$

${}^{ن}ل_6 = {}^{9}ل_6 \qquad \therefore ن = 9$

$\therefore {}^{ن+1}ل_{ر-1} = {}^{10}ل_5$

$= 10\times9\times8\times7\times6 = 30240$

(٦) الطرف الأيسر $= {}^{ن-1}ل_ر + ر\;{}^{ن-1}ل_{ر-1}$

$= \dfrac{\underline{|ن-1}}{\underline{|ن-1-ر}} + ر\times\dfrac{\underline{|ن-1}}{\underline{|ن-ر}}$

$= \underline{|ن-1}\left[\dfrac{1}{\underline{|ن-1-ر}} + \dfrac{ر}{\underline{|ن-ر}}\right]$

الأيسر $= \underline{|ن-1}\left[\dfrac{1}{\underline{|ن-1-ر}} + \dfrac{ر}{(ن-ر)\underline{|ن-ر}}\right]$

$= \underline{|ن-1}\left[\dfrac{ن-ر+ر}{(ن-ر)\underline{|ن-1-ر}}\right]$

$= \dfrac{ن\underline{|ن-1}}{\underline{|ن-ر}} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} = {}^{ن}ل_ر =$ الطرف الأيمن

(٧) ∵ $^{٢ن+١}ل_{٤} \div {}^{٢ن-١}ل_{٣} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $\frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٣}} \div \frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٤}} = \frac{٧٢}{٥}$

$\frac{\underline{|٢ن+١}}{\underline{|٢ن-٣}} \times \frac{\underline{|٢ن-٤}}{\underline{|٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $\frac{(٢ن+١)\times ٢ن\ \underline{|٢ن-١} \times \underline{|ن-٤}}{(٢ن+٣)\ \underline{|٢ن-٤} \times \underline{|٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $\frac{٤ن^{٢} + ٢ن}{٢ن + ٣} = \frac{٧٢}{٥}$

∴ $٢٠ن^{٢} + ١٠ن = ١٤٤ن + ٢١٦$

∴ $٢٠ن^{٢} - ١٣٤ن - ٢١٦ = ٠$

∴ $١٠ن^{٢} - ٦٧ن - ١٠٨ = ٠$

∴ $(ن - ٤)(١٠ن - ٢٧) = ٠$

$ن = ٤$ أ، $ن = \frac{٢٧}{١٠}$ مرفوض

∴ $\underline{|ن} = \underline{|٤} = ٤\times٣\times٢\times١$

∴ $\underline{|ن} = ٢٤$

(٨) ∵ $^{٩}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠ = ٩\times٨\times٧\times٦\times٥\times٤$

∴ $^{٩}ل_{ر} = {}^{٩}ل_{٦}$ ∴ $ر = ٦$

∴ $\underline{|ر} = \underline{|٦} = ٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ٧٢٠$

(٩) $\underline{|١٠} = ١٠\times٩\times٨\times \dots \times٣\times٢\times١$

$= (١\times٣\times٥\times٧\times٩)\times(٢\times٤\times٦\times٨\times١٠)$

$= (١\times٣\times٥\times٧\times٩)\times٢^{٥}(١\times٢\times٣\times٤\times٥)$

$= (١\times٣\times٥\times٧\times٩)\times٢^{٥}\ \underline{|٥}$

(١٠) $\underline{|٢ن} = ٢ن(٢ن-١)(٢ن-٢)(٢ن-٣)$

$\times \dots\dots \times٤\times٣\times٢\times١$

$= [١\times٣\times٥\times \dots (٢ن-١)]$

$\times [٢\times٤\times \dots \times(٢ن-٢)\times ٢ن]$

∴ $\underline{|٢ن} = [١\times٣\times٢\times \dots (٢ن-١)]$

$\times ٢^{ن}[١\times٢\times \dots \times(ن-١)\times ن]$

∴ $\underline{|٢ن} = [١\times٣\times٥\times \dots \times(٢ن-١)]\times٢^{ن}\ \underline{|ن}$

(١١) ∵ $^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$

∴ $^{س+ص}ل_{٤} = ٦\times٥\times٤\times٣ = {}^{٦}ل_{٤}$

∴ $س + ص = ٦$ ---- (١)

∵ $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$

$= ١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧$

∴ $\underline{|٢س+ص} = \underline{|٧}$

∴ $٢س + ص = ٧$ ---- (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ $س = ١$

من (١) ∴ $ص = ٥$

∴ $^{ص}ل_{س} = {}^{٥}ل_{١} = ٥$

(١٢) $^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$

∴ $\frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-ر}} = ٤ \times \frac{\underline{|٦}}{\underline{|٦-ر+١}}$

∴ $\frac{١}{\underline{|٦-ر}} = \frac{٤}{(٧-ر)\ \underline{|٦-ر}}$

∴ $٧ - ر = ٤$ ∴ $ر = ٣$

المقدار $= \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٥}} + \frac{\underline{|٣}}{\underline{|٤}} + \frac{\underline{|١}}{\underline{|٢}}$

$= \frac{\underline{|٤}}{٥\underline{|٤}} + \frac{\underline{|٣}}{٤\underline{|٣}} + \frac{\underline{|١}}{٢\underline{|١}}$

$= \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{٤ + ٥ + ١٠}{٢٠}$

$= \frac{١٩}{٢٠}$

(١٣) ∵ س = {س: س ∈ ط، ١ ≤ س ≤ ٧}

∴ س = {١،٢،٣،٤،٥،٦،٧}

∵ ص = {(أ ، ب) : أ، ب ∈ ص، أ ≠ ب}

عناصر من مجموعة أزواج مرتبة

∴ عدد عناصر ص = $^{٧}ل_{٢}$ = ٧×٦ = ٤٢

(١٤) ∵ س={س: س ∈ ص ، -٣ ≤ س ≤ ٤}

∴ س = {-٣ ، -٢، -١، ٠ ، ١، ٢، ٣، ٤}

∵ ع = {(أ، ب، ج) : أ، ب، ج ∈ س

، أ ≠ ب ≠ ج }

عناصر ع ثلاثيات مرتبة

عدد عناصر ع = $^{٨}ل_{٣}$ = ٨×٧×٦ = ٣٣٦

(١٥) ∵ $^{ن+١}ل_{٣} \div \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-٢} = ٧$

∴ $\frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ن+١-٣} \times \frac{\lfloor ن-٢}{\lfloor ن} = ٧$

∴ $\frac{(ن+١)\lfloor ن}{\lfloor ن-٢} \times \frac{\lfloor ن-٢}{\lfloor ن} = ٧$

∴ ن+١ = ٧ ∴ ن = ٦

أسئلة تمرين (٦)

(١) [أ] $^{١٣}ق_{٦} = \frac{١٣×١٢×١١×١٠×٩×٨}{٦×٥×٤×٣×٢×١}$

= ١٧١٦

[ب] $^{٢٠}ق_{٤} = \frac{٢٠×١٩×١٨×١٧}{٤×٣×٢×١} = ٤٨٤٥$

[ج] $^{٢٠}ق_{١٧} = {}^{٢٠}ق_{٣}$

$= \frac{٢٠×١٩×١٨}{٣×٢×١} = ١١٤٠$

[د] $^{١٠٠}ق_{٩٨} = {}^{١٠٠}ق_{٢}$

$= \frac{١٠٠×٩٩}{٢×١} = ٤٩٥٠$

(٢) ∵ $^{ن}ق_{٢}$ = ٤٣٥

∴ $\frac{^{ن}ل_{٢}}{\lfloor ٢} = ٤٣٥$

∴ $\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢×١} = ٤٣٥$

∴ $^{ن}ل_{٢}$ = ٨٧٠ = ٣٠ × ٢٩

∴ $^{ن}ل_{٢} = {}^{٣٠}ل_{٢}$ ∴ ن = ٣٠

(٣) ∵ $^{ن}ق_{٣} = ٣٠\frac{١}{٣}$ ن

∴ $^{ن}ق_{٣} = \frac{٩١}{٣}$ ن

∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{\lfloor ٣} = \frac{٩١}{٣}$ ن

∴ $\frac{^{ن}ل_{٣}}{٣×٢×١} = \frac{٩١}{٣}$ ن

∴ $^{ن}ل_{٣} = ٣ × ٢ × \frac{٩١}{٣}$ ن

∴ $^{ن}ل_{٣}$ = ١٨٢ ن

∴ ن (ن-١) (ن-٢) = ١٨٢ ن

∴ $ن^{٢}$ – ٣ن+٢ = ١٨٢

∴ (ن -١٥) (ن+١٢) = ٠

∴ ن = ١٥ أ، ن = -١٢ مرفوض

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١٠} = {}^{١٥}\text{ق}_{١٠}$

$= {}^{١٥}\text{ق}_{٥}$

$= \dfrac{١٥\times١٤\times١٣\times١٢\times١١}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ٣٠٠٣$

(٤) $\because {}^{\text{م}}\text{ق}_{٢} = ٣$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{م}}\text{ل}_{٢}}{\lfloor ٢} = ٣ \qquad \therefore {}^{\text{م}}\text{ل}_{٢} = ٣\times٢$

$\therefore {}^{\text{م}}\text{ل}_{٢} = {}^{٣}\text{ل}_{٢} \qquad \therefore \text{م} = ٣$ ---(١)

$\because {}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ٥٦$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٣}}{\lfloor ٣} = ٥٦$

$\therefore {}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٣\times٢\times١\times٥٦$

$\therefore {}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٨\times٧\times٦ = {}^{٨}\text{ل}_{٣}$

$\therefore \text{م}+\text{ن} = ٨$

من(١) $\therefore ٣+\text{ن} = ٨ \qquad \therefore \text{ن} = ٥$

$\therefore \lfloor \text{ن}+\text{م} = \lfloor ٨ = ٤٠٣٢٠$

(٥) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ١٢٠$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}}{\lfloor ٣} = ١٢٠$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٣\times٢\times١\times١٢٠$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١٠\times٩\times٨$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ل}_{٣} \qquad \therefore \text{ن} = ١٠$

$\therefore {}^{٢\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}+٥} = {}^{٢٠}\text{ق}_{١٥} = {}^{٢٠}\text{ق}_{٥}$

$= \dfrac{٢٠\times١٩\times١٨\times١٧\times١٦}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ١٥٥٠٤$

(٦) $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣} = ١٢٠$

$\therefore \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}}{\lfloor ٣} = ١٢٠$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٣\times٢\times١\times١٢٠$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ١٠\times٩\times٨$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = {}^{١٠}\text{ل}_{٣} \qquad \therefore \text{ن} = ١٠$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}^٢+٢\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢\text{ر}+٥}$

$\therefore {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}^٢+٢\text{ر}} = {}^{١٠}\text{ق}_{٢\text{ر}+٥}$

إما $\text{ر}^٢+٢\text{ر}+٢\text{ر}+٥=١٠$ أ، $\text{ر}^٢+٢\text{ر}=٢\text{ر}+٥$

$\therefore \text{ر}^٢+٤\text{ر}-٥=٠$ | $\therefore \text{ر}^٢ = ٥$

$(\text{ر}+٥)(\text{ر}-١)=٠$ | $\therefore \text{ر} = \pm\sqrt{٥}$ مرفوض

$\therefore \text{ر}=١$ أ، $\text{ر}=-٥$ مرفوض

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧+٣\text{ر}} = {}^{١٠}\text{ق}_{٧+٣}$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{١٠} = ١$

(٧) الأيمن $= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}$

$= \dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن}-\text{ر}\ \lfloor \text{ر}} + \dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن}-\text{ر}-١\ \lfloor \text{ر}+١}$

$= \dfrac{\lfloor \text{ن}\,(\text{ر}+١) + \lfloor \text{ن}\,(\text{ن}-\text{ر})}{\lfloor \text{ن}-\text{ر}\ \lfloor \text{ر}+١}$

$\therefore$ الأيمن $= \dfrac{\lfloor \text{ن}\,(\text{ر}+١+\text{ن}-\text{ر})}{\lfloor \text{ن}-\text{ر}\ \lfloor \text{ر}+١}$

$= \dfrac{\lfloor \text{ن}\,(\text{ن}-\text{ر})}{\lfloor \text{ن}-\text{ر}\ \lfloor \text{ر}+١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ = الطرف الأيسر

(أ) المقدار $= \dfrac{{}^{١٧}\text{ق}_{٦} + {}^{١٧}\text{ق}_{٥}}{{}^{١٨}\text{ق}_{٥}} = \dfrac{{}^{١٨}\text{ق}_{٦}}{{}^{١٨}\text{ق}_{٥}}$

$= \dfrac{١٨-٥}{٦} = \dfrac{١٣}{٦}$

(ب) الأيمن = ${}^{ن}ق_{ر+1} + 2\,{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1}$

= $({}^{ن}ق_{ر+1} + {}^{ن}ق_{ر}) + ({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1})$

= ${}^{ن+1}ق_{ر+1} + {}^{ن+1}ق_{ر}$

= ${}^{ن+2}ق_{ر+1}$ = الأيسر

(8) ∵ ${}^{ن}ق_{4}$ ، ${}^{ن}ق_{5}$ ، ${}^{ن}ق_{6}$ في تتابع حسابي

∴ $2 \times {}^{ن}ق_{5} = {}^{ن}ق_{4} + {}^{ن}ق_{6}$

بالقسمة على ${}^{ن}ق_{5}$ للطرفين

∴ $2 = \frac{{}^{ن}ق_{4}}{{}^{ن}ق_{5}} + \frac{{}^{ن}ق_{6}}{{}^{ن}ق_{5}}$ ---(1)

$\frac{{}^{ن}ق_{6}}{{}^{ن}ق_{5}} = \frac{ن-5}{6}$

، $\frac{{}^{ن}ق_{5}}{{}^{ن}ق_{4}} = \frac{ن-4}{5}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{4}}{{}^{ن}ق_{5}} = \frac{5}{ن-4}$

من (1) ∴ $2 = \frac{5}{ن-4} + \frac{ن-5}{6}$

بضرب الطرفين × 6 (ن- 4)

∴ $12(ن-4) = 30 + (ن-5)(ن-4)$

$12ن - 48 = 30 + ن^2 - 9ن + 20$

∴ $ن^2 - 21ن + 98 = 0$

$(ن-7)(ن-14) = 0$

إما ن = 7 أو ن = 14

(9) الطرف الأيمن = $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}}$

= $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} \div \frac{\lfloor ن-1}{\lfloor ن-ر \lfloor ر-1}$

= $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر \lfloor ر} \times \frac{\lfloor ن-ر \lfloor ر-1}{\lfloor ن-1}$

= $\frac{ن \lfloor ن-1}{\lfloor ن-ر \times ر \lfloor ر-1} \times \frac{\lfloor ن-ر \lfloor ر-1}{\lfloor ن-1}$

= $\frac{ن}{ر}$ = الطرف الأيسر

المقدار = $\frac{{}^{25}ق_{4} + {}^{24}ق_{3}}{{}^{24}ق_{3} + {}^{23}ق_{2}}$

بقسمة كل من البسط والمقام على ${}^{24}ق_{3}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{{}^{25}ق_{4}}{{}^{24}ق_{3}} + 1}{1 + \frac{{}^{23}ق_{2}}{{}^{24}ق_{3}}}$

ولكن $\frac{{}^{25}ق_{4}}{{}^{24}ق_{3}} = \frac{25}{4}$

كذلك $\frac{{}^{24}ق_{3}}{{}^{23}ق_{2}} = \frac{24}{3}$

∴ المقدار = $\frac{\frac{25}{4}+1}{1+\frac{3}{24}}$ بالضرب × $\frac{24}{24}$

= $\frac{150+24}{24+3} = \frac{174}{27} = \frac{58}{9}$

(10) ∵ ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+2} : {}^{ن}ق_{ر+4} = 3 : 14 : 14$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+2}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{14}{3}$

بضرب الطرف الأيمن × $\frac{{}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر+1}}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+2}}{{}^{ن}ق_{ر+1}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{14}{3}$

∴ $\frac{ن-(ر+1)}{ر+2} \times \frac{ن-ر}{ر+1} = \frac{14}{3}$

∴ $\frac{(ن-ر)(ن-ر+1)}{(ر+2)(ر+1)} = \frac{14}{3}$ ---- (1)

كذلك $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٤}}{{}^{ن}ق_{ر+٢}} = \frac{١٤}{١٤} = ١$

∴ الطرف الأيمن × $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٣}}{{}^{ن}ق_{ر+٣}}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٤}}{{}^{ن}ق_{ر+٣}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر+٣}}{{}^{ن}ق_{ر+٢}} = ١$

∴ $\frac{(ن-ر-٢)(ن-ر-٣)}{(ر+٤)\,(ر+٣)} = ١$

∴ (ن- ر-٢) (ن- ر-٣) = (ر+٤) (ر+٣)

∴ ${}^{ن-ر-٢}ل_{٢} = {}^{ر+٤}ل_{٢}$

∴ ن- ر-٢ = ر + ٤

∴ ن = ٢ر +٦ ---- (٢)

بالتعويض في(١)

∴ $\frac{(٢ر+٦-ر)\,(٢ر+٦-ر-١)}{(ر+٢)\,(ر+١)} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{(ر+٦)\,(ر+٥)}{(ر+٢)\,(ر+١)} = \frac{١٤}{٣}$

∴ ١٤(ر^{٢} +٣ر+٢) = ٣(ر^{٢} +١١ر+٣٠)

∴ ١٤ر^{٢} +٤٢ر+ ٢٨ = ٣ر^{٢} +٣٣ر+٩٠

∴ ١١ر^{٢} + ٩ر -٦٢= ٠

∴ (ر-٢) (١١ر+٣١) = ٠

∴ ر = ٢ أو ر = - $\frac{٣١}{١١}$ مرفوض

من (٢)

∴ ن = ٤+٦ ∴ ن = ١٠

حلول تمرين (٣)

١) (أ+ب)^{٥} = أ^{٥}+ ^{٥}ق$_{١}$ أ^{٤} ب+ ^{٥}ق$_{٢}$ أ^{٣} ب^{٢}

+ ^{٤}ق$_{٢}$ (٢س)^{٢} (٣ص)^{٢}

+ ^{٤}ق$_{٣}$ (٢س) (٣ص)^{٣} + (٣ص)^{٤}

^{٤}ق$_{١}$ = ^{٤}ق$_{٣}$ = ٤

٤ ق ٢ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = ٦

∴ (أ+ب)^{٥} = أ^{٥}+ ٥ أ^{٤} ب + ١٠ أ^{٣} ب^{٢}

+ ١٠أ^{٢} ب^{٣} + ٥أ ب^{٤} + ب^{٥}

٢) (س-٢)^{٦}= س^{٦}- ^{٦}ق$_{١}$ س^{٥}×٢ + ^{٦}ق$_{٢}$ س^{٤}(٢)^{٢}

- ^{٦}ق$_{٣}$ س^{٣} (٢)^{٣}+ ^{٦}ق$_{٤}$ س^{٢} (٢)^{٤}

- ^{٦}ق$_{٣}$ س^{٣} (٢)^{٥} + (٢)^{٦}

^{٦}ق$_{١}$ = ^{٦}ق$_{٥}$ = ٦

^{٦}ق$_{٢}$ = ^{٦}ق$_{٤}$ = $\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}$ = ١٥

^{٦}ق$_{٣}$ = $\frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}$ = ٢٠

∴ (س-٢)^{٦} = س^{٦}- ٦س^{٥}×٢ + ١٥س^{٤}×٤

- ٢٠س^{٣}×٨ + ١٥س^{٢}×١٦

- ٦س×٣٢ + ٦٤

∴ (س-٢)^{٦} = س^{٦}- ١٢س^{٥}+٦٠س^{٤}- ١٦٠س^{٣}

+٢٤٠س^{٢}- ١٩٢س + ٦٤

٣) (٢س+٣ص)^{٤}=(٢س)^{٤} + ^{٤}ق$_{١}$(٢س)^{٣}(٣ص)

+ ^{٤}ق$_{٢}$(٢س)^{٢}(٣ص)^{٢} + ^{٤}ق$_{٣}$(٢س)(٣ص)^{٣}

+ (٣س)^{٤}

ق$_{١}^{٤}$ = ق$_{٣}^{٤}$ = ٤

ق$_{٢}^{٤}$ = $\frac{٤\times٣}{٢\times١}$ = ٦

∴ (٢س+٣ص)^{٤} = ١٦س^{٤} + ٤ × ٨ س^{٣} × ٣ص + ٦ × ٤س^{٢} × ٩ص^{٢} + ٤ × ٢س × ٢٧ص^{٣} + ٨١ص^{٤}

∴ (٢س+٣ص)^{٤} = ١٦س^{٤} + ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٢١٦س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}

٤) (٣أ - ٢ب)^{٥} = (٣أ)^{٥} - ق$_{١}^{٥}$(٣أ)^{٤} (٢ب) + ق$_{٢}^{٥}$(٣أ)^{٣}(٢ب)^{٢} - ق$_{٣}^{٥}$(٣أ)^{٢}(٢س)^{٣} + ق$_{٤}^{٥}$(٣أ) (٢ب)^{٤} - (٢ب)^{٥}

ق$_{١}^{٥}$ = ق$_{٤}^{٥}$ = ٥

ق$_{٢}^{٥}$ = ق$_{٣}^{٥}$ = $\frac{٥\times٤}{٢\times١}$ = ١٠

∴ (٣أ - ٢ب)^{٥} = ٢٤٣ - ٥ × ٨١أ^{٤} × ٢ب + ١٠ × ٢٧أ^{٣} × ٤ب^{٢} - ١٠ × ٩أ^{٢} × ٨ب^{٣} + ٥ × ٣أ × ١٦ب^{٤} - ٣٢ب^{٥}

∴ (٣أ - ٢ب)^{٥} = ٢٤٣أ^{٥} - ٨١٠أ^{٤}ب + ١٠٨٠أ^{٣}ب^{٢} - ٧٢٠أ^{٢}ب^{٣} + ٢٤٠أب^{٤} - ٣٢ب^{٥}

٥) (س - $\sqrt{٢}$)^{٦} = س^{٦} - ق$_{١}^{٦}$ س^{٥}($\sqrt{٢}$) + ق$_{٢}^{٦}$س^{٤}($\sqrt{٢}$)^{٢} - ق$_{٣}^{٦}$ س^{٣}($\sqrt{٢}$)^{٣} + ق$_{٤}^{٦}$س^{٢}($\sqrt{٢}$)^{٤} - ق$_{٥}^{٦}$ س ($\sqrt{٢}$)^{٥} + ($\sqrt{٢}$)^{٦}

ق$_{١}^{٦}$ = ق$_{٥}^{٦}$ = ٦

ق$_{٢}^{٦}$ = ق$_{٤}^{٦}$ = $\frac{٦\times٥}{٢\times١}$ = ١٥

ق$_{٣}^{٦}$ = ق$_{٤}^{٦}$ = $\frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}$ = ٢٠

(س-$\sqrt{٢}$)^{٦} = س^{٦} - ٦س^{٥} × $\sqrt{٢}$ + ١٥س^{٤} × ٢ - ٢٠س^{٣} × ٢$\sqrt{٢}$ + ١٥س^{٢} × ٤ - ٦س × ٤$\sqrt{٢}$ + ٨

(س-$\sqrt{٢}$)^{٦} = س^{٦} - ٦$\sqrt{٢}$س^{٥} + ٣٠س^{٤} - ٤٠$\sqrt{٢}$ س^{٣} + ٦٠س^{٢} - ٢٤$\sqrt{٢}$س + ٨

٦) (١-٣س)^{٤} = ١ - ق$_{١}^{٤}$(٣س) + ق$_{٢}^{٤}$(٣س)^{٢} - ق$_{٣}^{٤}$(٣س)^{٣} + (٣س)^{٤}

ق$_{١}^{٤}$ = ق$_{٣}^{٤}$ = ٤

ق$_{٢}^{٤}$ = $\frac{٤\times٣}{٢\times١}$ = ٦

(١-٣س)^{٤} = ١ - ٤ × ٣س + ٦ × ٩س^{٢} - ٤ × ٢٧س^{٣} + ٨١ س^{٤}

(١-٣س)^{٤} = ١ - ١٢س + ٥٤س^{٢} - ١٠٨س^{٣} + ٨١ س^{٤}

٧) ($\frac{س}{٢}$ - $\frac{٣}{س}$)^{٥} = ($\frac{س}{٢}$)^{٥} - ق$_{١}^{٥}$($\frac{س}{٢}$)^{٤} ($\frac{٣}{س}$) + ق$_{٢}^{٥}$($\frac{س}{٢}$)^{٣}($\frac{٣}{س}$)^{٢} - ق$_{٣}^{٥}$($\frac{س}{٢}$)^{٢}($\frac{٣}{س}$)^{٣} + ق$_{٤}^{٥}$($\frac{س}{٢}$) ($\frac{٣}{س}$)^{٤} - ($\frac{ط٧}{٩}$)^{٥}

ق$_{١}^{٥}$ = ق$_{٤}^{٥}$ = ٥

ق$_{٢}^{٥}$ = ق$_{٣}^{٥}$ = $\frac{٥\times٤}{٢\times١}$ = ١٠

$\therefore \left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥} = \frac{\text{س}^{٥}}{٣٢} - ٥ \times \frac{\text{س}^{٤}}{١٦} \times \frac{٣}{\text{س}} + ١٠ \times \frac{\text{س}^{٣}}{٨} \times \frac{٩}{\text{س}^{٢}} - ١٠ \times \frac{\text{س}^{٢}}{٤} \times \frac{٢٧}{\text{س}^{٣}} + ٥ \times \frac{\text{س}}{٢} \times \frac{٨١}{\text{س}^{٤}} - \frac{٢٤٣}{\text{س}^{٥}}$

$\therefore \left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥} = \frac{١}{٣٢}\text{س}^{٥} - \frac{١٥}{١٦}\text{س}^{٣} + \frac{٤٥}{٤}\text{س} - \frac{١٣٥}{٢\text{س}} + \frac{٤٠٥}{٢\text{س}^{٣}} - \frac{١٤٣}{\text{س}^{٥}}$

٨) $(\text{س}^{٢}-١)^{٧} = (\text{س}^{٢})^{٧} - {}^{٧}\text{ق}_{١}(\text{س}^{٢})^{٦} + {}^{٧}\text{ق}_{٢}(\text{س}^{٢})^{٥}$

$- {}^{٧}\text{ق}_{٣}(\text{س}^{٢})^{٤} + {}^{٧}\text{ق}_{٤}(\text{س}^{٢})^{٣} - {}^{٧}\text{ق}_{٥}(\text{س}^{٢})^{٢}$

$- {}^{٧}\text{ق}_{٦}(\text{س}^{٢}) - ١$

${}^{٧}\text{ق}_{١} = {}^{٧}\text{ق}_{٦} = ٧$

${}^{٧}\text{ق}_{٢} = {}^{٧}\text{ق}_{٥} = \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} = ٢١$

${}^{٧}\text{ق}_{٣} = {}^{٧}\text{ق}_{٤} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

$\therefore (\text{س}^{٢}-١)^{٧} = \text{س}^{١٤} - ٧\text{س}^{١٢} + ٢١\text{س}^{١٠}$

$- ٣٥\text{س}^{٨} + ٣٥\text{س}^{٦} - ٢١\text{س}^{٤} + ٧\text{س}^{٢} - ١$

٩) في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}}(\text{س})^{٩-\text{ر}}(\text{س}^{-١})^{\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{٩-٢\text{ر}}$

بوضع ر = ٤

$\therefore \text{ح}_{٥} = {}^{٩}\text{ق}_{٤}\,\text{س}^{٩-٨}$

$\therefore \text{ح}_{٥} = {}^{٩}\text{ق}_{٤}\,\text{س} = ١٢٦\text{س}$

١٠) في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{٢\text{س}}{٣}\right)^{١٠-\text{ر}}\left(-\frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠-٢\text{ر}} \times \text{س}^{١٠-٢\text{ر}}$

بوضع ر = ٥

$\therefore \text{ح}_{٦} = (-١)^{٥} \times {}^{١٠}\text{ق}_{٥}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١٠-١٠} \times \text{س}^{١٠-١٠}$

$= -{}^{١٠}\text{ق}_{٥} = -٢٥٢$

١١) في مفكوك $\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}\right)^{١١}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{١١-\text{ر}}\left(-\frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}\right)^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{١١-٢\text{ر}}$

بوضع ر = ٣

$\therefore \text{ح}_{٤} = -{}^{١١}\text{ق}_{٣}\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{١١-٦}$

$\therefore \text{ح}_{٤} = -{}^{١١}\text{ق}_{٣} \times \frac{٣٢}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}}} = -٥٢٨٠\,\text{س}^{-\frac{٥}{٢}}$

١٢) في مفكوك $(٣\text{س}-٢)^{٨}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}(٣\text{س})^{٨-\text{ر}}(-٢)^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}(٣)^{٨-\text{ر}}(٢)^{\text{ر}}\,\text{س}^{٨-\text{ر}}$

$\therefore$ معامل $\text{ح}_{\text{ر}+١} = (-١)^{\text{ر}} \times {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}}(٣)^{٨-\text{ر}}(٢)^{\text{ر}}$

بوضع ر = ٥

معامل $\text{ح}_{٦} = (-١)^{٥} \times {}^{٨}\text{ق}_{٥}(٣)^{٨-٥}(٢)^{٥}$

$= -{}^{٨}\text{ق}_{٥} \times ٢٧ \times ٣٢ = -٤٨٣٨٤$

١٣) في مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٩}$

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\ (٢س^{٢})^{٩-ر} \left(\frac{٣}{٢س}\right)^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{٩}ق_{ر}\ (٢س^{٢})^{٩-٢ر}\ (٣)^{ر}\ (س)^{١٨-٣ر}$

$\therefore$ معامل $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٩}ق_{ر} (٢)^{٩-٢ر} (٣)^{ر}$

بوضع ر = ٦

$\therefore$ معامل $ح_{٧} = (-١)^{٦} \times {}^{٩}ق_{٦} (٢)^{٩-١٢} (٣)^{٦}$

ولكن ${}^{٩}ق_{٦} = {}^{٩}ق_{٣}$

$\therefore$ معامل $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٣} \times ٢^{-٣} \times ٣^{٦}$

$= {}^{٩}ق_{٣} \times \frac{٣^{٦}}{٢^{٣}}$

١٤) **في مفكوك** $\left(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٣}{س}\right)^{٧}$

$ح_{ر+١} = {}^{٧}ق_{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{٧-ر} \left(-\frac{٣}{س}\right)^{ر}$

$\therefore ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٧}ق_{ر} \times (٢)^{ر-٧}$
$(٣)^{ر} س^{١٤-٣ر}$

معامل $ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٧}ق_{ر} \times ٢^{ر-٧} \times ٣^{ر}$

بوضع ر = ٤

معامل $ح_{٤} = (-١)^{٤} \times {}^{٧}ق_{٤} \times ٢^{٤-٧} \times ٣^{٤}$

ولكن ${}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}$

$\therefore$ معامل $ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٣} \times \frac{٣^{٤}}{٢^{٣}}$

١٥) **في مفكوك** $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢ن}$

$ح_{ر} = {}^{٢ن}ق_{ر-١} (س)^{٢ن-ر+١} (س^{-١})^{ر-١}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر-١} (س)^{٢ن-٢ر+٢}$

$\therefore$ معامل $ح_{ر} = {}^{٢ن}ق_{ر-١}$

$= \frac{\lfloor ٢ن}{\lfloor ر-١ \ \lfloor ٢ن-ر+١}$

١٦) **في مفكوك** $(س^{٢} + س^{-٢})^{٢ن-١}$

$ح_{ن} = {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} (س^{٢})^{٢ن-١-ن+١} (س^{-٢})^{ن-١}$

$= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١}\ س^{٢ن} \times س^{-٢ن+٢}$

$= {}^{٢ن-١}ق_{ن-١}\ س^{٢ن+٢}$

$\therefore$ معامل $ح_{ن} = {}^{٢ن-١}ق_{ن-١} = \frac{\lfloor ٢ن-١}{\lfloor ن \ \lfloor ن-١}$

١٧) $(س+٢)^{٥} = س^{٥} + {}^{٥}ق_{١}س^{٤} \times ٢ + {}^{٥}ق_{٢}س^{٣}(٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}س^{٢}(٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}س(٢)^{٤} - (٢)^{٥}$

بالطرح $\therefore (س+٢)^{٥} - (س-٢)^{٥}$

$= ٢[{}^{٥}ق_{١}س^{٤} \times ٢ + {}^{٥}ق_{٣}س^{٢}(٢)^{٣} + (٢)^{٥}]$

$= ٢(١٠س^{٤} + ٨٠س^{٢} + ٣٢)$

$= ٤(٥س^{٤} + ٤٠س^{٢} + ١٦)$

١٨) $(١+\sqrt{س})^{٦} = ١ + {}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٢}(\sqrt{س})^{٢}$

$+ {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{س})^{٤}$

$+ {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}(\sqrt{س})^{٦}$

$(١-\sqrt{س})^{٦} = ١ - {}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٢}(\sqrt{س})^{٢}$

$+ {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}(\sqrt{س})^{٤}$

$+ {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}(\sqrt{س})^{٦}$

بالطرح $\therefore (١+\sqrt{س})^{٦} - (١-\sqrt{س})^{٦}$

$= ٢[{}^{٦}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٦}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}(\sqrt{س})^{٥}]$

$= ٢[٦\sqrt{س} + ٢٠س\sqrt{س} + ٦س^{٢}\sqrt{س}]$

$= ٤\sqrt{س}(٣ + ١٠س + ٣س^{٢})$

١٩) $(٠,٩٩٨)^{١٠} = (١ - ٠,٠٠٢)^{١٠}$

$= ١ - {}^{١٠}ق_{١}(٠,٠٠٢) + {}^{١٠}ق_{٢}(٠,٠٠٢)^{٢}$

$- {}^{١٠}ق_{٣}(٠,٠٠٢)^{٣} + ...$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١ - ١٠ \times ٠,٠٠٢ + ٤٥ \times ٠,٠٠٠٠٠٤ - ١٢٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٨$

$+ ....$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١ - ٠,٠٢ + ٠,٠٠٠١٨٠ - ٠,٠٠٠٠٠٠٩٦٠ + ...$

$\therefore (٠,٩٩٨)^{١٠} = ١,٠٠٠١٨ - ٠,٢٠٠٠٠٩٦$

$= ٠,٩٨٠١٧٩٠٤ \approx ٠,٩٨٠١٨$

٢٠) $(١,٠٢)^{٥} = (١ + ٠,٠٢)^{٥}$

$= ١ + {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}(٠,٠٢)^{٤}$

$+ ....$

$(٠,٩٨)^{٥} = (١ - ٠,٠٢)^{٥}$

$= ١ - {}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٢}(٠,٠٢)^{٢}$

$+ {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤}(٠,٠٢)^{٤}$

$+ ....$

بالطرح $(١,٠٢)^{٥} - (٠,٩٨)^{٥}$

$= ٢[{}^{٥}ق_{١}(٠,٠٢) + {}^{٥}ق_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + ...]$

$= ٢(٥ \times ٠,٠٢ + ١٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٨ + ...)$

$= ٢(٠,١٠ + ٠,٠٠٠٠٨٠ + ...)$

$= ٢(٠,١٠٠٠٠٨ + ...)$

$\approx ٠,٢٠٠٠١٦$

حلول تمرين (٤)

(١) عدد الحدود = ١٠+١ = ١١

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط = $\frac{١١+١}{٢} = ٦$

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر}(س)^{١٠-ر}(س^{-١})^{ر} = {}^{١٠}ق_{ر}(س^{-١})^{ر}$

بوضع ر = ٥

$\therefore$ الحد الأوسط = $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}(س)^{١٠-١٠}$

$= {}^{١٠}ق_{٥}$

$\therefore$ الحد الأوسط = ٢٥٢

(٢) عدد الحدود = ١٢+١ = ١٣

$\therefore$ رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٣+١}{٢} = ٦$

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر}(٢س^{٣})^{١٢-ر}\left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر}(٢)^{١٢-٢ر}(س)^{٣٦-٤ر}$

بوضع ر = ٦

$\therefore$ الحد الأوسط = $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}(٢)^{١٢-١٢}(س)^{٣٦-٢٤}$

$= {}^{١٢}ق_{٦}(٢)^{صفر}س^{١٢}$

$= {}^{١٢}ق_{٦}س^{١٢}$

(٣) عدد الحدود = ٩+١ = ١٠

$\therefore$ رتبة الحدين الأوسطين ٥، ٦

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر}\left(\frac{س}{٢}\right)^{٩-ر}\left(-\frac{٣}{ص}\right)^{ر}$

$\therefore ح_{ر+١} = (-١)^{ر} \times {}^{٩}ق_{ر}(٢)^{ر-٩}(٣)^{ر}(س)^{٩-ر}$

$\times (ص)^{-ر}$

بوضع ر = ٤

$ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤}(٢)^{-٥}(٣)^{٤}س^{٥} \times ص^{-٤}$

$ح_٥ = ١٢٦ \times \frac{٨١}{٣٢} \times \frac{س^٥}{ص^٤}$

$ح_٥ = \frac{٥١٠٣\ س^٥}{٣٢\ ص^٤}$

بوضع ر = ٥

$ح_٦ = - \times {}^{٩}ق_٥ \ (٢)^{-٤} \ (٣)^{٥} \ (س)^{٤} \ (ص)^{-٥}$

$= -١٢٦ \times \frac{٢٤٣}{١٦} \times \frac{س^٤}{ص^٥}$

$ح_٦ = - \frac{١٥٣٠٩\ س^٤}{٨\ ص^٥}$

(٤) $ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر (\frac{٢س}{٣})^{١٢-ر} (-\frac{٣}{س})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{١٢}ق_ر \ (٢)^{١٢-ر} \ (٣)^{٢ر-١٢}$

$\times \ س^{١٢-٢ر}$

لإيجاد معامل $س^٨$ نضع أس س = ٨

$\therefore ١٢ - ٢ر = ٨ \qquad \therefore ر = ٢$

$\therefore$ معامل $س^٨ = (-١)^{٢} \times {}^{١٢}ق_٢ (٢)^{١٠} \ (٣)^{-٨}$

$= {}^{١٢}ق_٢ \times \frac{٢^{١٠}}{٣^{٨}}$

(٥) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \ (\frac{س^٢}{٢})^{١٠-ر} \ (-\frac{١}{س})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{١٠}ق_ر (٢)^{ر-١٠} (س)^{٢٠-٣ر}$

بوضع أس س = ١١

$\therefore ٢٠ - ٣ر = ١١$

$\therefore ٣ر = ٩ \qquad \therefore ر = ٣$

$\therefore$ معامل $س^{١١} = (-١)^{٣} \ (٢)^{٣-١٠} \times {}^{١٠}ق_٣$

$= - {}^{١٠}ق_٣ (\frac{١}{٢})^{٧}$

(٦) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر (س^٣)^{١٠-ر} (-س^{-٤})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{١٠}ق_ر \ س^{٣٠-٧ر}$

بوضع أس س = ٩

$\therefore ٣٠ - ٧ر = ٩ \qquad \therefore ر = ٣$

$\therefore$ معامل $س^٩ = (-١)^{٣} \times {}^{١٠}ق_٣ = - {}^{١٠}ق_٣$

(٧) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \ (س^٣)^{١٠-ر} \ (-س^{-١})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{٨}ق_ر \ س^{٨-٣ر}$

بوضع أس س = -٤

$\therefore ٨ - ٣ر = -٤ \qquad \therefore ر = ٤$

$\therefore$ معامل $س^{-٤} = + {}^{٨}ق_٤$

(٨) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \ (\frac{س^٣}{٣})^{١٠-ر} \ (\frac{٢}{س^٢})^{ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر \ (٣)^{ر-١٠} \ (٢)^{ر} \ (س)^{٣٠-٥ر}$

لإيجاد الحد الخالى من س نضع أس س = صفر

$\therefore ٣٠ - ٥ر = ٠ \qquad \therefore ر = ٦$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ح_٧ = {}^{١٠}ق_٦ \ (٣)^{-٤} (٢)^{٦}$

$\therefore$ الحد الخالى من س $= {}^{١٠}ق_٤ \times \frac{٢^٦}{٣^٤}$

(٩) $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_ر \ (س)^{٩-ر} \ (-\frac{١}{٢س^٢})^{ر}$

$= (-١)^{ر} \times {}^{٩}ق_ر \ (٢)^{-ر} \ (س)^{٩-٣ر}$

لإيجاد الحد الخالى من س نضع أس س = ٠

$\therefore ٩ - ٣ر = ٠ \qquad \therefore ر = ٣$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو

$ح_٤ = (-١)^{٣} \times {}^{٩}ق_٣ \times (٢)^{-٣} = - {}^{٩}ق_٣ \times \frac{١}{٨}$

(١٠) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} \, (٢\text{س}^{٣})^{٩-\text{ر}} \, (-\frac{٣}{\text{س}})^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{٩}\text{ق}_{\text{ر}} (٢)^{٩-\text{ر}} \, (٣)^{\text{ر}} \, (\text{س})^{٢٧-٤\text{ر}}$

بوضع أس س = صفر

∴ ٢٧-٤ ر = ٠ ∴ $\text{ر} = \frac{٢٧}{٤} \notin \text{ص}^{+}$

∴ لا يوجد حد خال من س

(١١) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٣}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س})^{١٣-\text{ر}} \, (-\frac{١}{\text{س}^{٢}})^{\text{ر}}$

$= {}^{١٣}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س})^{١٣-٣\text{ر}}$

لإيجاد معامل س نضع أس س = ١

١٣- ٣ر = ٠ ∴ ر = ٤

معامل س = $^{١٣}\text{ق}_{٤}$

(١٢) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\frac{\text{س}}{٢})^{١١-\text{ر}} \, (-\frac{٣}{\text{س}})^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}} (٢)^{\text{ر}-١١} \, (٣)^{\text{ر}} \, \text{س}^{١١-٢\text{ر}}$

بوضع أس س = ٦ ∴ ١١-٢ر= ٦

$\text{ر} = \frac{٥}{٢} \notin \text{ط}$

∴ لا يوجد حد يشتمل على $\text{س}^{٦}$

(١٣) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س})^{١٢-\text{ر}} \, (\frac{٣}{٢\text{س}^{٢}})^{\text{ر}}$

$= {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}} \, (٣)^{\text{ر}} \, (٢)^{-\text{ر}} \, (\text{س})^{١٢-٣\text{ر}}$

أولا: بوضع أس س = ٦

∴ ١٢- ٣ ر = ٦ ∴ ر = ٢

∴ معامل $\text{س}^{٦} = {}^{١٢}\text{ق}_{٢} \, (٣)^{٢} \, (٢)^{-٢}$

$= \frac{٩}{٤} \times {}^{١٢}\text{ق}_{٢}$

ثانيا: بوضع أس س= صفر

∴ ١٢-٣ ر= ٠ ∴ ر = ٤

∴ الحد الخالي من س هو $\text{ح}_{٥}$

(١٤) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س})^{١٥-\text{ر}} \, (-\frac{١}{\text{س}})^{\text{ر}}$

$= (-١)^{\text{ر}} \times {}^{١٥}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س})^{١٥-٢\text{ر}}$

عدد الحدود = ١٥-١ = ١٦

رتبة الحدان الأوسطان ٨، ٩

بوضع ر =٧ ∴ أ = $\text{ح}_{٨} = -{}^{١٥}\text{ق}_{٧} \, \text{س}$

بوضع ر =٨ ∴ أ = $\text{ح}_{٩} = -{}^{١٥}\text{ق}_{٨} \, \text{س}^{-١}$

الطرف الأيمن = $\text{أ} + \text{ب} \, \text{س}^{٢}$

$= -{}^{١٥}\text{ق}_{٧} \, \text{س} + {}^{١٥}\text{ق}_{٨} \, \text{س}^{-١} \times \text{س}^{٢}$

$= -{}^{١٥}\text{ق}_{٧} \, \text{س} + {}^{١٥}\text{ق}_{٨} \, \text{س}$

ولكن $^{١٥}\text{ق}_{٧} = {}^{١٥}\text{ق}_{٨}$ ∴ الطرف الأيمن = ٠

(١٥) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س}^{٥})^{\text{ن}-\text{ر}} \, (\frac{٣}{\text{س}^{٢}})^{\text{ر}}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \, \text{س}^{٥\text{ن}-٧\text{ر}}$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

٥ ن- ٧ر =٠ ∴ $\text{ر} = \frac{٥\text{ن}}{٧}$

ولكي يوجد حد خالي من س ∴ ر ∈ ط

∴ ن = ٧ أو مكرر للعدد ٧

عندما ن = ١٤ ∴ ر = ١٠

∴ الحد الخالي من س = $^{١٤}\text{ق}_{١٠} = {}^{١٤}\text{ق}_{٤}$

(١٦) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \, (\text{س}^{٢})^{\text{ن}-\text{ر}} \, (\frac{١}{\text{س}})^{\text{ر}}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \, \text{س}^{٢\text{ن}-٣\text{ر}}$

لإيجاد الحد الخالي من س نضع أس س = صفر

∴ ٢ ن – ٣ ر = ٠ ∴ $\text{ر} = \frac{٢\text{ن}}{٣}$

ولكن يوجد حد خالي من س ∴ ر ∈ ط

∴ يجب أن يكون مضاعف للعدد ٣

عندما ن= ١٢ ∴ ر= ٨

∴ الحد الخالي من س = $^{١٢}\text{ق}_{٨} = {}^{١٢}\text{ق}_{٤}$

حلـول تمـريـن (٥)

(١) عدد الحدود = ١٧+١ =١٨

∴ رتبة الحدين الأوسطين ٩ ، ١٠

∵ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{٣}{٢س}$

بوضع ر = ٩

∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{١٧-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{٢س}$

$= \frac{\cancel{٩}}{\cancel{٩}} \times \frac{٣}{٢س}$

∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{٣}{٢س}$

ولكن ح٩ = ح١٠   ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = ١$

∴ $\frac{٣}{٢س} = ١$ ∴ ٢س = ٣

∴ س = $\frac{٣}{٢}$

(٢) ∵ ح٣ = ١١٥٢٠ ، ح٤ = ١٥٣٦٠

، ح٥ = ١٣٤٤٠

، ∵ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ص}{س}$

بوضع ر = ٣

∴ $\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ن-٢}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٥٣٦٠}{١١٥٢٠}$ --- (١)

بوضع ر = ٤

∴ $\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{ن-٤+١}{٤} \times \frac{ص}{س}$

∴ $\frac{ن-٣}{٤} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٣٤٤٠}{١٥٣٦٠}$ --- (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

∴ $\frac{ن-٣}{٤} \times \frac{٣}{ن-٢} = \frac{١٣٤٤٠}{١٥٣٦٠} \times \frac{١١٥٢٠}{١٥٣٦٠}$

∴ $\frac{\cancel{٣}(ن-٣)}{\cancel{٤}(ن-٢)} = \frac{\cancel{٢١}^{٧}}{\cancel{٣٢}^{٨}}$

∴ ٨(ن-٣) = ٧(ن-٢)

٨ن – ٢٤ = ٧ن - ١٤   ∴ ن = ١٠

بالتعويض في (١)

$\frac{١٠-٢}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٥٣٦٠}{١١٥٢٠}$

$\frac{٨}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$

∴ ٢ص = س   ---- (٣)

ولكن ح٣ = ١١٥٢٠

∴ $^{ن}ق_{٢} \times (س)^{ن-٢} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$

∴ $^{١٠}ق_{٢} \times (س)^{١٠-٢} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$

∴ $\frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} \times س^{٨} ص^{٢} = ١١٥٢٠$

بالتعويض من (٣) عن س = ٢ص

∴ $\frac{٩٠}{٢} \times (٢ص)^{٨} \times ص^{٢} = ١١٥٢٠$

∴ $٩ \times ١٢٨ ص^{١٠} = ١١٥٢٠$

∴ ص = ± ١   ∴ س = ± ٢

(٣) ∵ ح٢ = ٢٤٠ ، ح٣ = ٧٢٠ ، ح٤ = ١٠٨٠

∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ص}{س}$

بوضع ر = ٢

$\therefore \frac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٢}} = \frac{\text{ن- ٢+١}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ن- ١}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$ --- (١)

بوضع ر = ٣

$\therefore \frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٣}} = \frac{\text{ن- ٣+١}}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ن- ٢}}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠}$ --- (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

$\therefore \frac{\text{ن- ٢}}{٣} \times \frac{\text{ن- ١}}{٢} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} \times \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$

$\therefore \frac{٢\text{(ن- ٢)}}{٣\text{(ن- ١)}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ٤(ن-٢) = ٣(ن-١)

$\therefore$ ٤ن- ٨ = ٣ن ـ ٣

$\therefore$ ن = ٥

من(١) $\frac{\text{٥-١}}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$

$\therefore ٢ \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٣$

$\therefore$ ٢ص= ٣ س $\therefore$ ص = $\frac{٣}{٢}$س

$\because$ ح$_{١}$ = ٢٤٠

$\therefore$ ^{٥}ق$_{١}$× س^{٤} × ص = ٢٤

$\therefore$ ٥ ($\frac{٣}{٢}$) س^{٥} = ٢٤٠

$\therefore \frac{٢٤٠ \times ٢}{٥ \times ٣} \times$ س^{٥} = ٢٤٠

$\therefore$ س^{٥} = ٣٢ $\therefore$ س = ٢

$\therefore$ ص = $\frac{٣}{٢} \times ٢$ $\therefore$ ص = ٣

(٤) نفرض أن رتب الحدود هى ر، ر+١ ، ر+٢

$\because$ ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ × (١)$^{ن-ر}$ × س^{ر}

$\therefore$ معامل ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$

$\because$ معامل ح$_{ر}$ = ٢٠

$\therefore$ ^{ن}ق$_{ر-١}$ = ٢٠ ----- (١)

$\because$ معامل ح$_{ر+١}$ = ١٩٠

$\therefore$ ^{ن}ق$_{ر-١}$ = ١٩٠ ----- (٢)

$\because$ معامل ح$_{ر+٢}$ = ١١٤٠

$\therefore$ ^{ن}ق$_{ر-١}$ = ١١٤٠ ----- (٣)

بقسمة (٢) ÷ (١) $\therefore \frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر-١}}} = \frac{١٩٠}{٢٠}$

$\therefore \frac{\text{ن-ر+١}}{\text{ر}} = \frac{١٩}{٢}$

$\therefore$ ٢ن-٢ ر+٢ = ١٩ر ← ٢ن = ٢١ر-٢

بقسمة (٣) ÷ (٢) $\therefore \frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر+١}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{١١٤٠}{١٩٠}$

$\therefore \frac{\text{ن-ر}}{\text{ر+١}} = ٦$

ن- ر = ٦ر+٦ ← ن = ٧ر + ٦

بالتعويض من(٥) في (٤)

$\therefore$ ٢ (٧ر +٦) = ٢١ر-٢

$\therefore$ ١٤ر +١٢ = ٢١ر- ٢

$\therefore$ ٧ر = ١٤ $\therefore$ ر = ٢

بالتعويض فى (٥) $\therefore$ ن = ١٤+ ٦ = ٢٠

ملحوظة : يمكن الحل مباشرة باستخدام النسبة بين معاملى حدين متتاليين كما يلي :

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثانى}}$$

(٥) نفرض أن رتب الحدود ر، ر+١ ، ر+٢

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{\text{معامل الأول}}{\text{معامل الثانى}}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{ن-ر+1}{ر} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$$

∴ ٥ن - ٥ر + ٥ = ٨ر

∴ ٥ن = ١٣ر - ٥

$$\therefore ن = \frac{1}{5}(13ر - 5) \quad \text{---- (1)}$$

$$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{ر+2}}{\text{معامل } ح_{ر+1}} = \frac{ن-(ر+1)ر}{ر+1} \times \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{ن-ر}{ر+1} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$$

∴ ٦ن - ٦ر = ٧ر + ٧

∴ ٦ن = ١٣ر + ٧ بالتعويض من(١)×(٢)

$$\therefore 6 \times \frac{1}{5}(13ر - 5) = 13ر + 7$$

∴ ٦ (١٣ر - ٥) = ٥ (١٣ر + ٧)

٧٨ر - ٣٠ = ٦٥ر + ٣٥

∴ ١٣ر = ٦٥ ← ∴ ر = ٥

$$\text{من (1)} \therefore ن = \frac{1}{5}(13 \times 5 - 5)$$

∴ ن = ١٣ - ١ ∴ ن = ١٢

∴ ترتيب الحدود ٥، ٦، ٧

(٦) في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

بوضع ر = ٢

$$\therefore \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{ن-2+1}{2} \times \frac{ب}{أ}$$

$$\therefore \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{ن+1}{2} \times \frac{ب}{أ} \quad \text{---- (1)}$$

في مفكوك $(أ + ب)^{ن+3}$

$$\frac{ح'_{ر+1}}{ح'_{ر}} = \frac{ن+3-ر+1}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

بوضع ر = ٣

$$\therefore \frac{ح'_4}{ح'_3} = \frac{ن+3-3+1}{3} \times \frac{ب}{أ}$$

$$\therefore \frac{ح'_4}{ح'_3} = \frac{ن+1}{3} \times \frac{ب}{أ} \quad \text{--- (2)}$$

$$\because \frac{ح_3}{ح_2} = \frac{ح'_4}{ح'_3}$$

$$\therefore \frac{ن-1}{2} \times \frac{ب}{أ} = \frac{ن+1}{3} \times \frac{ب}{أ}$$

∴ ٢ (ن+١) = ٣ (ن -١)

∴ ٢ن + ٢ = ٣ن - ٣

∴ ن = ٥

(٧) في مفكوك $(1 + م\,س)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{م}{1} \quad \text{---- (1)}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_6}{\text{معامل } ح_4} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_6}{\text{معامل } ح_5} \times \frac{\text{معامل } ح_5}{\text{معامل } ح_4} = 4$$

$\therefore \frac{\text{ن}-5+1}{5} \times \frac{\text{م}}{1} \times \frac{\text{ن}-4+1}{4} \times \frac{\text{م}}{1} = 4$

$\therefore (\text{ن}-4)(\text{ن}-3)\,\text{م}^2 = 80$ ---- (٢)

$\frac{\text{معامل ح}_8}{\text{معامل ح}_6} = \frac{4}{7}$

$\frac{\text{معامل ح}_8}{\text{معامل ح}_7} \times \frac{\text{معامل ح}_7}{\text{معامل ح}_6} = \frac{4}{7}$

$\therefore \frac{\text{ن}-7+1}{7} \times \frac{\text{م}}{1} \times \frac{\text{ن}-6+1}{6} \times \frac{\text{م}}{1} = \frac{4}{7}$

$\therefore (\text{ن}-6)(\text{ن}-5)\,\text{م}^2 = 24$ ---- (٣)

بقسمة (٢) ÷ (٣)

$\therefore \frac{(\text{ن}-4)(\text{ن}-3)}{(\text{ن}-6)(\text{ن}-5)} = \frac{80}{24}$

$\therefore \frac{\text{ن}^2 - 7\text{ن} + 12}{\text{ن}^2 - 11\text{ن} + 30} = \frac{10}{3}$

$\therefore 10\text{ن}^2 - 110\text{ن} + 300 = 3\text{ن}^2 - 21\text{ن} + 36$

$\therefore 7\text{ن}^2 - 89\text{ن} + 264 = 0$

$\therefore (\text{ن}-8)(7\text{ن}-33) = 0$

$\therefore \text{ن} = 8$ أ، $\text{ن} = \frac{33}{7} \notin \text{ص}^+$ مرفوض

من(٢) $4 \times 5\,\text{م}^2 = 80$

$\therefore \text{م}^2 = 4 \quad \therefore \text{م} = \pm 2$

(٨) في مفكوك $(2\text{س} + 3\text{س}^{-2})^{\text{ن}}$

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{3\text{س}^{-2}}{2\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{3}{2\text{س}^3}$

$\because \text{ح}_9 = \text{ح}_{10} \quad \therefore \frac{\text{ح}_{10}}{\text{ح}_9} = 1$

بوضع ر = ٩

$\frac{\text{ح}_{10}}{\text{ح}_9} = \frac{\text{ن}-9+1}{9} \times \frac{3}{2\text{س}^3}$

$\therefore \frac{\text{ن}-8}{6\text{س}^3} = 1 \Leftarrow \text{ن} - 8 = 6\text{س}^3$ --- (١)

بوضع ر = ٦

$\therefore \frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6} = \frac{\text{ن}-6+1}{6} \times \frac{3}{2\text{س}^3}$

ولكن $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6} = \frac{15}{8}$

$\therefore \frac{\text{ن}-5}{4\text{س}^3} = \frac{15}{8}$

$\therefore 2(\text{ن}-5) = 15\,\text{س}^3$ ---- (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١)

$\therefore \frac{2(\text{ن}-5)}{(\text{ن}-8)} = \frac{15\text{س}^3}{6\,\text{س}^3}$

$\therefore \frac{2(\text{ن}-5)}{(\text{ن}-8)} = \frac{5}{2}$

$\therefore 5(\text{ن}-8) = 4(\text{ن}-5)$

$5\text{ن} - 40 = 4\text{ن} - 20 \quad \therefore \text{ن} = 20$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{20}\text{ق}_{\text{ر}}\,(2\text{س})^{20-\text{ر}}\,(3\text{س}^{-2})^{\text{ر}}$

$= {}^{20}\text{ق}_{\text{ر}}\,(2)^{20-\text{ر}}\,(3)^{\text{ر}}\,(\text{س})^{20-3\text{ر}}$

بوضع أس س = صفر $\therefore 20 - 3\text{ر} = 0$

$\therefore 3\text{ر} = 20 \Leftarrow \text{ر} = \frac{20}{3} \notin \text{ط}$

لا يوجد حد خالى من س في المفكوك

(٩) في مفكوك $(س+٣)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{٣}{س}$$

$\because ح_{١٠} = \frac{٢}{٣} ح_{٩} \quad \therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{٢}{٣}$

بوضع ر = ٩

$$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = \frac{ن-٩+١}{٩} \times \frac{٣}{س}$$

$$\therefore \frac{ن-٨}{٣} \times \frac{١}{س} = \frac{٢}{٣}$$

$٢س = ن - ٨$ ---- (١)

$\because ح_{١٥} = \frac{١}{٤} ح_{١٤} \quad \therefore \frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{١}{٤}$

بوضع ر = ١٤

$$\therefore \frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{ن-١٤+١}{١٤} \times \frac{٣}{س}$$

$$\therefore \frac{ن-١٣}{١٤} \times \frac{٣}{س} = \frac{١}{٤}$$

$س = \frac{٦}{٧}(ن-١٣)$ ---- (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢)

$$\therefore ٢ = \frac{(ن-٨)}{(ن-١٣)} \times \frac{٦}{٧}$$

$\therefore ١٢ن - ١٥٦ = ٧ن - ٥٦$

$\therefore ٥ن = ١٠٠ \quad \therefore ن = ٢٠$

من (١) $٢س = ٢٠ - ٨ \quad \therefore ٢س = ١٢$

$\therefore س = ٦$

(١٠) في مفكوك $(١+س)^{ن}$

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{س}{١}$$

$\because ح_{٤} = \frac{٢٥}{٣} ح_{٢} \quad \therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٢}} = \frac{٢٥}{٣}$

$$\therefore \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} \times \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٢٥}{٣}$$

$$\therefore \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{س}{١} \times \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{س}{١} = \frac{٢٥}{٣}$$

$\therefore (ن-٢)(ن-١)س^{٢} = ٥٠$ ----- (١)

$\because ح_{٥} = ح_{٦} \quad \therefore \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ١$

$$\therefore \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{س}{١} = ١$$

$\therefore (ن-٤)س = ٥$

بتربيع الطرفين

$\therefore (ن-٤)^{٢}س^{٢} = ٢٥$ ---- (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢)

$$\therefore \frac{(ن-٢)(ن-١)}{(ن-٤)^{٢}} = ٢$$

$\therefore ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ٢ن^{٢} - ١٦ن + ٣٢$

$\therefore ن^{٢} - ١٣ن + ٣٠ = ٠$

$\therefore (ن-٣)(ن-١٠) = ٠$

$\therefore ن = ٣$ مرفوض $\quad \therefore ن = ١٠$

$$\therefore س = \frac{٥}{٦}$$

حلول تمرين (٦)

١) (٥+٢ت) + (٥-٤ت) = ١٠ - ٢ت

٢) (٢ - ٥ت) (٣+ ٦ت) = ٣٦ - ٣ت

٣) (٣ - ٢ت) (٢ - ت)^{٢}

= (٣-٢ت) (٣-٤ت) = ١ - ١٨ت

٤) مجموع متتابعة حسابية حيث أ = ت

، ء = ت ، ن = ٢١

∴ ج$_{٢١}$ = [٢ت + ٢٠ت]

= ٢١ × ١١ ت = ٢٣١ ت

٥) س - ٣ص = ٩ ، ٢س + ٣ص = ٠

∴ س = ٣ ، ص = -٢

٦) س+ ص ت = ٢ت - ٢

∴ س = -٢ ، ص = ٢

٧) (١+ت)^{٢} = ١+ ٢ت + ت^{٢} = ٢ ت

∴ (١+ت)^{٤} = (٢ت)^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤

، (١-ت)^{٢} = ١ - ٢ت + ت^{٢} = -٢ت

∴ (١-ت)^{٤} = (-٢ ت)^{٢} = ٤ت^{٢} = -٤

∴ الطرفان متساويان

٨) ٢س - ص = ٩ ---- (١)

، س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠ ---- (٢)

من (٢) س = ٣ أ

، من (١) ص = -٣ أو -١١

٩) ع^{٢}، = (- $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)^{٢}

= $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

= - $\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ع$_{٢}$

ع$^{٢}_{٢}$ = (- $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)^{٢}

= $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

= - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ع$_{١}$

١٠) س^{٢} = -٥ ∴ س = ± $\sqrt{٥}$

= ± $\sqrt{٥}$ ت

حلول تمرين (٧)

(١) س+ت ص = ١٥ - ت - ٢٨ ت^{٢} = ٤٣ - ت

∴ س = ٤٣ ، ص = -١

(٢) (٣س + ٥ص - ٤) + ت(-٢س + ٣ص + ٩) = ٠

∴ ٣س + ٥ص - ٤ = ٠ ---- (١)

-٢س + ٣ص + ٩ = ٠ --- (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ س = ٣ ، ص = -١

(٣) ٢س - ٣ت ص = $\frac{(٢ - ت)(٤ - ٤ت + ت^{٢})}{١ + ٢ت}$

٢س - ٣ت ص = $\frac{٦ - ١١ت + ٤ت^{٢}}{١ + ٢ت}$

= $\frac{٢ - ١١ت}{١ + ٢ت}$ × $\frac{١ - ٢ت}{١ - ٢ت}$

= $\frac{-٢٠ - ١٥ت}{١ - ٤ت^{٢}}$ = -٤ - ٣ت

∵ ٢س = -٤ ∴ س = -٢

-٣ ص = -٣ ∴ ص = ١

(٤) $\frac{(س + ت ص)(١ - ت) + (٢س + ٣ت ص)(١ + ت)}{(١ + ٢ت)}$ = $\frac{٧}{٢}$

∴ (٣س + ٢ص - ٧) + ت (س + ٤ص) = ٠

$\therefore ٣\text{س} - ٢\text{ص} - ٧ = ٠$ ——— (١)

$، \text{س} + ٤\text{ص} = ٠$ ——— (٢)

من (١)، (٢) $\therefore \text{س} = ٢ ، \text{ص} = -\frac{١}{٢}$

(٥) $\frac{\text{س}^٢ + \text{ص}^٢}{\text{س} - \text{ت ص}} \times \frac{\text{س} + \text{ت ص}}{\text{س} + \text{ت ص}}$

$= \frac{-١ + ٣\text{ت}}{٩ + ٦\text{ت} + \text{ت}^٢} + \frac{-٣ + \text{ت}}{١ + ٦\text{ت} + ٩\text{ت}^٢}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{-١ + ٣\text{ت}}{٨ + ٦\text{ت}} \times \frac{-٣ + \text{ت}}{-٨ + ٦\text{ت}}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{-١ + ٣\text{ت}}{٨ + ٦\text{ت}} \times \frac{٨ - ٦\text{ت}}{٨ - ٦\text{ت}}$

$+ \frac{-٣ + \text{ت}}{-٨ + ٦\text{ت}} \times \frac{-٨ - ٦\text{ت}}{-٨ - ٦\text{ت}}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{١٠ + ٣٠\text{ت}}{١٠٠} + \frac{٣٠ + ١٠\text{ت}}{١٠٠}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{٤٠ + ٤٠\text{ت}}{١٠٠}$

$\therefore \text{س} = ٤\text{ر} ، \text{ص} = ٤\text{ر}$

(٦) $\frac{١ + ٣\text{ت} + ٢\text{ت}^٢ + ٤ + ٤\text{ت} + \text{ت}^٢}{٢ + ٥\text{ت} + ٢\text{ت}^٢} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ت}}{\text{س} - \text{ص} + \text{ت}}$

$\therefore \frac{٢ + ٧\text{ت}}{٥\text{ت}} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ت}}{\text{س} - \text{ص} + \text{ت}}$

$\therefore ٢\text{س} - ٢\text{ص} + ٢\text{ت} + ٧\text{ت س} - ٧\text{ت ص} + ٧\text{ت}^٢$

$= ٥\text{ت س} + ٥\text{ت ص} + ٥\text{ت}^٢$

$\therefore (٢\text{س} - ٢\text{ص} - ٢) + \text{ت}(٢\text{س} - ١٢\text{ص} + ٢) = ٠$

$\therefore \text{س} - \text{ص} - ١ = ٠ ، \text{س} - ٦\text{ص} + ١ = ٠$

$\therefore \text{ص} = \frac{٢}{٥} ، \text{س} = \frac{٧}{٥}$

(٧) $\frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} - \text{ب ت}} \times \frac{\text{أ} + \text{ب ت}}{\text{أ} + \text{ب ت}} = \text{س} + \text{ت ص}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{\text{أ}^٢ + ٢\text{أب ت} + \text{ب}^٢\text{ت}^٢}{\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢\text{ت}^٢}$

$\therefore \text{س} = \frac{\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢} ، \text{ص} = \frac{٢\text{أب}}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}$

$\therefore \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \frac{(\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢)^٢ + ٤\text{أ}^٢\text{ب}^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢}$

$= \frac{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢}{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢)^٢} = ١$

(٨) $\text{أ} + \text{ب ت} = \frac{٢ + \text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}$

$= \frac{٢ + ٣\text{ت} - ١}{١ - \text{ت}^٢} = \frac{١ + ٣\text{ت}}{٢}$

$\therefore \text{أ} = \frac{١}{٢} ، \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ٢(\text{أ}^٣ + \text{ب}^٣) = ٢(\frac{١}{٨} + \frac{٢٧}{٨}) = ٧$

(٩) $(\text{س} + \text{ت ص})^٢ + ١٠ \frac{(١ - ٢\text{ت})}{١ + ٢\text{ت}} \times \frac{١ - ٢\text{ت}}{١ - ٢\text{ت}} + ٢١ = ٠$

$(\text{س}^٢ - \text{ص}^٢ + ٢\text{ت س ص}) + ٢(١ - ٤\text{ت} + ٤\text{ت}^٢) + ٢١ = ٠$

$\therefore (\text{س}^٢ - \text{ص}^٢) + ٢\text{ت س ص} = ١٥ + ٨\text{ت}$

$\therefore \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = -١٥$ ---- (١) ، $٢\text{س ص} = ٨$ ---- (٢)

بحل (١) ، (٢)

$\therefore \text{س} = \pm ١ ، \text{ص} = \pm ٤$

(١٠) $\because$ ل + ن ت جذراً للمعادلة

$\therefore$ فهو يحقق معادلتها

$\text{أ}(\text{ل} + \text{ن ت})^٢ + \text{ب}(\text{ل} + \text{ن ت}) + \text{جـ} = ٠$

$\therefore \text{أ}(\text{ل}^٢ + ٢\text{ن ل ت} + \text{ن}^٢\text{ت}^٢) + \text{ب ل} + \text{ب ن ت}$

$+ \text{جـ} = ٠$

(١) ل = $\sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

∴ جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ تقع في الربع الثانى

∴ هـ = ١٨٠° - ٤٥° = ١٣٥°

= $\frac{١٣٥}{١٨٠}$ × ط = $\frac{٣}{٤}$ ط

∴ -١ + ت = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣}{٤}$ ط + ت جا $\frac{٣}{٤}$ ط)

(٢) ل = $\sqrt{٣+١}$ = ٢

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = $-\frac{١}{٢}$

∴ هـ^ = ٣٣٠° = $\frac{١١ط}{٦}$

∴ $\sqrt{٣}$ - ت = ٢ (جتا $\frac{١١ط}{٦}$ + ت جا $\frac{١١ط}{٦}$)

(٣) ل $\sqrt{٤+٤}$ = ٢$\sqrt{٢}$

جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ١٣٥° = $\frac{٣ط}{٤}$

∴ -٢ + ٢ت = ٢$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٤}$)

(٤) ل = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}$ = ١

جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = $\frac{ط}{٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ٢ (جتا $\frac{ط}{٣}$ + ت جا $\frac{ط}{٣}$)

(٥) ل = $\sqrt{١٨+١٨}$ = ٦

جتا هـ = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٦}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = $\frac{ط}{٤}$

٣$\sqrt{٢}$ + ٣$\sqrt{٢}$ ت = ٦ (جتا $\frac{ط}{٤}$ + ت جا $\frac{ط}{٤}$)

(٦) ل = $\sqrt{٠ + ٤}$ = ٢

جتا هـ = ٠ ، جا هـ = ١

∴ هـ = $\frac{ط}{٢}$

٢ ت = ٢ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

(٧) جتا ١٢٠° = - جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا ١٢٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ الصورة الجبرية هى ٢$\sqrt{٣}$ ($-\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)

= $-\sqrt{٣}$ + ٣ ت

(٨) $\frac{٥ط}{٤}$ = ٥ × $\frac{١٨٠}{٤}$ = ٢٢٥°

جتا ٢٢٥° = - جتا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حا ٢٢٥° = - جا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

الصورة الجبرية : $\sqrt{٢}$ ($-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت)

= -١ - ت

(٩) $\frac{١١ط}{٦}$ = $\frac{١١}{٦}$ × ١٨٠ = ٣٣٠°

جتا ٣٣٠° = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حا ٣٣٠° = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

الصورة الجبرية : $\sqrt{٢}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(١٠) $\frac{٥\text{ط}}{٦} = ٥ \times \frac{١٨٠}{٦} = ١٥٠°$

جتا ١٥٠ = جتا ١٥٠ = - جتا ٣٠ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا - ١٥٠ = - جا ١٥٠ = - جا ٣٠ = $-\frac{١}{٢}$

الصورة الجبرية هى ٦ $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}\right)$

$= -\frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٦}}{٢}$ ت

(١١) $\frac{-٥-\sqrt{٣}\text{ت}}{\sqrt{٣}-٢\text{ت}} \times \frac{\sqrt{٣}+٢\text{ت}}{\sqrt{٣}+٢\text{ت}} = \sqrt{٣} + \text{ت}$

ل = $\sqrt{٣ + ١} = ٢$

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ = ٣٠° = $\frac{\text{ط}}{٦}$

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{\text{ط}}{٦}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٦}$)

(١٢) $\frac{٦+٢\sqrt{٣}\text{ت}}{٣-\sqrt{٣}\text{ت}} \times \frac{٣+\sqrt{٣}\text{ت}}{٣+\sqrt{٣}\text{ت}}$

= ١ + $\sqrt{٣}$ ت

∴ ل = $\sqrt{١ + ٣} = ٢$ ، جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ٦٠ = $\frac{\text{ط}}{٣}$

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{\text{ط}}{٣}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٣}$)

(١٣) $\frac{٨(٢+\sqrt{٣}\text{ت})}{٥-\sqrt{٣}\text{ت}} \times \frac{٥+\sqrt{٣}\text{ت}}{٥+\sqrt{٣}\text{ت}} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\text{ت}$

∴ ل = $\sqrt{٤ + ١٢} = ٤$

جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٦٠ = $\frac{\text{ط}}{٣}$

∴ العدد = ٢ (جتا $\frac{\text{ط}}{٣}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٣}$)

(١٤) $\frac{\sqrt{٣}-\text{ت}}{٠+٢\text{ت}} = \frac{\sqrt{٣}-\text{ت}}{٢\text{ت}} \times \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{١+\sqrt{٣}\text{ت}}{-٢}$

$= -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

ل = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = ١$

، جتا هـ = $-\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ٢٤٠ = $\frac{٤\text{ط}}{٣}$

العدد = جتا $\frac{٤\text{ط}}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\text{ط}}{٣}$

(١٥) ل = $\sqrt{٤ + ٤} = ٢\sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{-٢}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥ = $\frac{٧\text{ط}}{٤}$

∴ ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

- ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (- جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ - ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

∴ - ع = ٢ $\sqrt{٢}$ [جتا (ط + $\frac{٧\text{ط}}{٤}$) + ت جا (ط + $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)]

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{١١\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{١١\text{ط}}{٤}$)

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣}{٤}$ ط + ت جا $\frac{٣}{٤}$ ط)

، $\bar{\text{ع}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ ط + ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ ط)

= ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\text{ط}}{٤}$ ط + ت جا $\frac{\text{ط}}{٤}$ ط)

، $\frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا } \frac{٧\text{ط}}{٤} + \text{ت جا } \frac{٧\text{ط}}{٤})}$

$\times \frac{(\text{جتا } \frac{٧\text{ط}}{٤} - \text{ت جا } \frac{٧\text{ط}}{٤})}{(\text{جتا } \frac{٧\text{ط}}{٤} - \text{ت جا } \frac{٧\text{ط}}{٤})}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ = ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

= $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

(١٦) $\text{ع}_١$ = -٣ + ٤ت + ٢ - ٣ت = -١ + ت

ل = $\sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ ، جتا $\text{هـ}_١ = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، جا $\text{هـ}_١ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $\text{هـ}_١ = \frac{٣\text{ط}}{٤}$

(١٧) العدد = ٣(- جتا٦٠ - ت جا٦٠)

= ٣ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

المقياس = ٣٠ ، والسعة = ٢٤٠

(١٨) العدد = ٤ [جتا (٣٦٠ - ١٥٠)

+ ت جا(٣٦٠ - ١٥٠)]

= ٤ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١٠)

∴ المقياس = ٤ ، والسعة = ٢١٠

(١٩) العدد = ٢(- جا٢١٠ + ت جا٢١٠)

= ٢(جا ٣٠ - ت جتا٣٠)

= ٢ (جتا٦٠ - ت جا ٦٠)

= ٢(جتا٣٠٠ + ت جا٣٠٠)

∴ المقياس = ٢ ، السعة = ٣٠٠

(٢٠) العدد = ل [جتا(٩٠ + هـ) + ت جا(٩٠ + هـ)]

∴ المقياس = ل ، السعة = ط/٢ + هـ

حل تمارين عامة (٣)

(١) ع١ ع٢ = ١٢ [(جتا ط/٣ + ط/٦) + ت جا(ط/٣ + ط/٦)]

= ١٢ (جتا ط/٢ + ت جا ط/٢)

ع١ ÷ ع٢ = ٣ [(جتا ط/٣ - ط/٦) + ت جا(ط/٣ - ط/٦)]

= ٣ (جتا ط/٦ + ت جا ط/٦)

(٢) ع١ = ٤ [جتا (- ط/٢) + ت جا (- ط/٢)]

ع١ ع٢ = ٣٢ [جتا(ط/٤ - ط/٢) + ت جا(ط/٤ - ط/٢)]

= ٣٢ (جتا- ط/٤ - ت جا ط/٤)

= ٣٢ (جتا ط/٤ - ت جا ط/٤)

ع١ ع٢ = ٢ [جتا(ط/٤ + ط/٢) + ت جا (ط/٤ + ط/٢)]

= ٢ (جتا ٣ط/٤ + ت جا ٣ط/٤)

(٣) ع١ = ١٠(جتا٦٠ + ت جا٦٠)

، ع٢ = ٥ (- جا ٦٠ - ت جتا ٦٠)

= ٥ [جتا(٢٧٠ - ٦٠) + ت جا(٢٧٠ - ٦٠)]

= ٥ (جتا٢١٠ + ت جا٢١٠)

ع١ ع٢ = ٥٠(جتا٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

ع١ ÷ ع٢ = ٢ [جتا(٦٠ - ٢١٠) + ت جا(٦٠ - ٢١٠)]

= ٢ [جتا- ١٥٠ + ت جا- ١٥٠]

= ٢ (جتا٢١٠ + ت جا ٢١٠)

(٤) ع١ = ل١ [جتا(- هـ) + ت جا(- هـ)]

ع١ ع٢ = ل١ ل٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°)

ع١/ع٢ = ل١/ل٢ [جتا(هـ + هـ) + ت جا (هـ + هـ)]

= ل١/ل٢ (جتا٢ هـ + ت جا ٢ هـ)

(٥) ع' = ١/٢ [جتا(أ - ط/٢) + ت جا (أ - ط/٢)]

= ١/٢ (جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط)

١/ع = √٢ [جتا(- ٣ط/٤) + ت جا (-٣ط/٤)]

(٦) ع = ١/٤ [جتا(أ - ط/٢) + ت جا (أ - ط/٢)]

ع' = ١/٤ [جتا (٢أ - ط) + ت جا (٢أ - ط)

١/ع = ٢ [جتا(ط/٢ - أ) + ت جا (ط/٢ - أ)

(٧) $|ع_{١}| = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}} = ١$

، جتا هـ = $-\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ هـ = $\frac{٢ط}{٣}$

$\therefore$ $ع_{١}$ = جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$

بالمثل $ع_{٢}$ = جتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٤ط}{٣}$

$\therefore$ $ع_{١}^{٢}$ = جتا (٢ × $\frac{٢ط}{٣}$) + ت جا (٢ × $\frac{٢ط}{٣}$) = $ع_{٢}$

، $ع_{٢}^{٢}$ = جتا (٢ × $\frac{٤ط}{٣}$) + ت جا (٢ × $\frac{٤ط}{٣}$)

= جتا $\frac{٨ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٨ط}{٣}$

= جتا $\frac{٢}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٢}{٣}$ ط = $ع_{١}$

، $ع_{١}^{٣}$ = جتا (٣ × $\frac{٢ط}{٣}$) + ت جا (٣ × $\frac{٢ط}{٣}$)

= جتا ٢ط + ت جا ٢ط = جتا ٠ + ت جا ٠ = ١.

، $ع_{٢}^{٣}$ = جتا (٣ × $\frac{٤ط}{٣}$) + ت جا (٣ × $\frac{٤ط}{٣}$)

= جتا ٤ ط + ت جا ٤ ط

= جتا ٠ + ت جا ٠ = ١

$\therefore$ $ع_{١}^{٣}$ = $ع_{٢}^{٣}$ = ١

(٨) جا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، جتا هـ = $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

$ع_{١}$ = ٤ | جتا(-٣هـ) + ت جا (-٣هـ) |

، $ع_{٢}$ = ٢ (- جتاهـ + ت جاهـ)

= ٢ | جتا(ط - هـ) + ت جا (ط - هـ)

$\therefore$ $ع_{١}^{٢}$ = ١٦ | جتا(-٦هـ) + ت جا(-٦هـ) |

، $ع_{٢}^{٤}$ = ١٦ | جتا(٤ط - ٤هـ) + ت جا (٤ط - ٤هـ) |

$\therefore$ $ع_{١}^{٢}$ ÷ $ع_{٢}^{٤}$ = جتا - (٤ط + ٢هـ) + ت جا -

(٤ط + ٢هـ) | = جتا-٢هـ + ت جا- ٢هـ (الصورة المثلثية)

جتا٢هـ = ٢جتا^{٢} هـ - ١ = ٢ × $\frac{٤}{٥}$ - ١ = $\frac{٣}{٥}$

، جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ = ٢ × - $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ × $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٤}{٥}$

$\therefore$ $ع_{١}^{٢}$ ÷ $ع_{٢}^{٤}$ = $\frac{٣}{٥}$ - $\frac{٤}{٥}$ ت

(٩) | س | = $\sqrt{٣ + ١}$ = ٢ ، جتاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ٣٠° $\therefore$ س = ٢ (جتا٣٠ + ت جا٣٠)

| ص | = $\sqrt{١ + ١}$ = $\sqrt{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جاهـ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore$ هـ = ٣٦٠ _ ٤٥ = ٣١٥

$\therefore$ ص = $\sqrt{٢}$ | جتا (٣١٥ + ت جا ٣١٥)

$\therefore$ $\frac{ص}{س}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | جتا (٣١٥ - ٣٠) + ت جا(٣١٥ - ٣٠) |

= $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جتا ٢٨٥ + ت جا ٢٨٥)

$\therefore$ $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$ = ($\frac{ص}{س}$)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ (جتا٥٧٠ + ت جا ٥٧٠)

= $\frac{١}{٢}$ (جتا٢١٠ + ت جا ٢١٠)

(١٠) المقدار = $\frac{(\text{جتا } \frac{٦ط}{٤} + \text{ت جا } \frac{٦ط}{٤})(\text{جتا } \frac{٥ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٣})}{\text{جتا } \frac{٤ط}{٩} + \text{ت جا } \frac{٤ط}{٩}}$

= جتا($\frac{٦ط}{٤}$ + $\frac{٥ط}{٣}$ - $\frac{٤ط}{٩}$) + ت جا($\frac{٦ط}{٤}$ + $\frac{٥ط}{٣}$ - $\frac{٤ط}{١٦}$)

= جتا ($\frac{٥ط}{٢}$) + ت جا ($\frac{٥ط}{٢}$)

= جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$

(١١) راجع التمثيل البياني لمقياس وسعة .

(١٢) حاصل ضرب عددين مركبين وخارج .

(١٣) قسمة عددين مركبين .

(١) س = ٠ ، ص = -٢ ∴ |ع| = ٢

جتا هـ = ٠ ، جا هـ = ١ ∴ هـ = $\frac{ط}{٢}$

∴ ٢ت = ٢ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

∴ الجذور التربيعية للعدد ٢ ت

= $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٢}$ + ت جا $\frac{ط}{٢}$)

= $\sqrt{٢}$ [جتا ($\frac{(\frac{ط}{٢} + ٢ر ط)}{٢}$) + ت جا ($\frac{(\frac{ط}{٢} + ٢ر ط)}{٢}$)]

حيث ر = ٠ ، ١

∴ الجذرين التربيعين هما

$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{ط}{٤}$ + ت جا $\frac{ط}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ت × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) = ١ + ت

، $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٥ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٤}$)

= $\sqrt{٢}$ (- $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) -١ - ت

(٢) نفرض أن ع = -١ - ٣ ت

∴ |ع| = ٢ ، جتا هـ = - $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = $\frac{٥ط}{٣}$

∴ -١ - $\sqrt{٣}$ت = ٢جتا ($\frac{٥ط}{٣}$) + ت جا ($\frac{٥ط}{٣}$)

∴ الجذران التربيعيان للعدد هما

$\sqrt{٢}$ [جتا ($\frac{٥ط}{٦}$ + ر ط) + ت جا ($\frac{٥ط}{٦}$ + ر ط)

حيث ر = ٠ ، ١

= $\sqrt{٢}$ (- $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت) ، ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ ت)

(٣) نفرض أن ع = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

|ع| = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤

جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ جاهـ = ١٢٠°

(-٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت)$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢[جتا ٦٠ + رط) + ت جا (٦٠ + ر ط)

حيث ر = ٠ ، ١

= ١٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

، ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

= ± ٢ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت)

= ± (١ + $\sqrt{٣}$ ت)

(٤) ٤ (جتا $\frac{ط}{٣}$ - ت جا $\frac{ط}{٣}$) = ٤[جتا (- $\frac{ط}{٣}$) + ت جا (- $\frac{ط}{٣}$)]

∴ الجذرين التربيعين هما

٢[جتا (- $\frac{ط}{٦}$ + ر ط) + ت جا (- $\frac{ط}{٦}$ + ر ط)

حيث ر = ٠ ، ١ ∴ الجذران هما

٢[جتا (- $\frac{ط}{٦}$) + ت جا (- $\frac{ط}{٦}$)] = $\sqrt{٣}$ - ت

، ٢ [جتا $\frac{٥ط}{٦}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٦}$] = - $\sqrt{٣}$ + ت

(٥) الجذران التربيعيان هما

٣ [جتا (١٥٠ + ١٨٠ر) + ت جا (١٥٠ + ١٨٠ر)

حيث ر = ٠ ، ١

∴ الجذران هما ± ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ ت)

(٦) $\frac{-٨}{١ + \sqrt{٣} ت}$ = $\frac{-٨}{١ + \sqrt{٣} ت}$ × $\frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - \sqrt{٣} ت}$

= -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

مقياس العدد = ٤ ، جتا هـ = - $\frac{١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ = ١٢٠°

∴ العدد = ٤ [جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠]

∴ الجذرين هما ٢ [جتا (٦٠ + ١٨٠ ر)

+ ت جا (١٦٠ + ١٨٠ ر)]

حيث ر = ٠ ، ١

أي هما $\pm$ (١ + $\sqrt{\text{٣}}$ ت)

(٧) س + ت ص = $\sqrt{\text{-٨-٦ت}}$

∴ س$^{\text{٢}}$ - ص$^{\text{٢}}$ + ٢ت س ص = -٨-٦ ت

∴ س$^{\text{٢}}$ - ص$^{\text{٢}}$ = -٨ -- (١) ، ٢س ص = -٦ -- (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٠٠ ∴ س$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ١٠ -- (٣)

بجمع (١) ، (٣) ∴ ٢س$^{\text{٢}}$ = ٢ س$^{\text{٢}}$ = ١

∴ س = $\pm$ ١

بطرح (١) من (٢) ∴ ٢ص$^{\text{٢}}$ = ١٨

∴ ص$^{\text{٢}}$ = ٩ ∴ ص = $\pm$ ٣

من (٢) س، ص مختلفتان في الإشارة

∴ $\sqrt{\text{-٨-٦ت}}$ = $\pm$ (١ - ٣ ت)

(٨) مثل مسألة (٧) والجواب $\pm$ (٣ - ٢ ت)

(٩) $\frac{\text{-٧+ت}}{\text{١+ت}} = \frac{\text{-٧+ت}}{\text{١+ت}} \times \frac{\text{١-ت}}{\text{١-ت}}$

$= \frac{\text{-٧+٨ت-ت}^{\text{٢}}}{\text{١+ت}^{\text{٢}}} = \frac{\text{-٦+٨ت}}{\text{٢}}$

=٣ + ٤ ت وتكمل مثل مسألة (٧)

والجواب [$\pm$ (١ + ٢ ت)]

(١٠) $\frac{\text{٣١+١٧ت}}{\text{١-ت}} = \frac{\text{٣١+١٧ت}}{\text{١-ت}} \times \frac{\text{١+ت}}{\text{١+ت}}$

$= \frac{\text{٣١+٤٨ت+١٧ت}^{\text{٢}}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٤+٤٨ت}}{\text{٢}}$

= ٧ + ٢٤ ت

وتكمل كمسألة (٧) والجواب [$\pm$ (٤ + ٣ ت)]

(١١) ع = $\sqrt{\text{٣+٤ت}}$ = $\pm$ (٢ + ت)

كما في مسألة (٧)

∴ ع$^{\text{-١}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ = $\pm$ ($\frac{\text{١}}{\text{٢+ت}} \times \frac{\text{٢-ت}}{\text{٢-ت}}$)

= $\pm$ $\frac{\text{٢-ت}}{\text{٥}}$

∴ ع + ٥ ع$^{\text{-١}}$ = $\pm$ [(٢+ت) + $\frac{\text{٥(٢-ت)}}{\text{٥}}$]

= $\pm$ ٤

(١٢) (س+ت ص)$^{\text{٢}}$ = -٨ $\frac{\text{(١-ت)}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ - ١٥

(س+ت ص)$^{\text{٢}}$ = -٤ × -٢ ت - ١٥

(س+ت ص)$^{\text{٢}}$ = -١٥ + ٨ ت

بإكمال الحل ∴ س = $\pm$ ١ ، ص = $\pm$ ٤

(١٣) س+ت ص = $\frac{\text{٧-٤ت}}{\text{٢+ت}} \times \frac{\text{٢-ت}}{\text{٢-ت}}$

$= \frac{\text{١٤-١٥ت+٤ت}^{\text{٢}}}{\text{٥}}$ = ٢ - ٣ ت

∴ س = ٢ ، ص = -٣

∴ $\sqrt{\text{٢س-ت ص}}$ = $\sqrt{\text{٤+٣ت}}$

وتكمل كما سبق والجواب

$\pm$ $\frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$ (٣ + ت)

(١٤) س = $\frac{\text{١+٢ت}}{\text{١-ت}} = \frac{\text{١+٢ت}}{\text{١-ت}} \times \frac{\text{١+ت}}{\text{١+ت}} = \frac{\text{١+٣ت+٢ت}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$

= $\frac{\text{-١+٣ ت}}{\text{٢}}$

ص = $\frac{\text{١-٢ت}}{\text{١+ت}}$ × $\frac{\text{١-ت}}{\text{١-ت}}$

= $\frac{\text{١+٣ت+٢ت}^{٢}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{-١-٣ ت}}{\text{٢}}$

$\sqrt{\text{س + ٣ص}}$ = $\sqrt{\frac{\text{-٥+١٥ت -٣-٩ت}}{\text{٢}}}$

= $\sqrt{\text{-٤ + ٣ت}}$ وتكمل كما سبق

والجواب ± $\frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}$ (١+٣ ت)

(١٥) بقسمة طرفي المعادلة على ٢+ت

∴ س² - $\frac{\text{٣(١+٣ت)}}{\text{(٢+ت)}}$ س- $\frac{\text{٤(١-٣ت)}}{\text{ت+٢}}$ = صفر

∴ س² - $\frac{\text{٣(١+٣ت)}}{\text{(٢+ت)}}$ × $\frac{\text{(٢-ت)}}{\text{(٢-ت)}}$ س - ٤

$\frac{\text{٤(١-٣ت)}}{\text{٢+ت}}$ × $\frac{\text{(٢-ت)}}{\text{(٢-ت)}}$ = صفر

∴ س² - $\frac{\text{٣(٥+٥ت)}}{\text{٥}}$ س- $\frac{\text{٤(-٥ت)}}{\text{٥}}$ = ٠

∴ س²-٣ (١+ت) س+ ٤ ت = ٠

∴ س = $\frac{\text{٣(١+ت)} \pm \sqrt{\text{٩(١+ت)}^{٢}\text{-٤×٤ت}}}{\text{٢}}$

= $\frac{\text{٣+٣ ت} \pm \sqrt{\text{٢}}\text{ت}}{\text{٢}}$

مما سبق $\sqrt{\text{٢ ت}}$ = ± (١+ت)

∴ س = $\frac{\text{٣+٣ت -١-ت}}{\text{٢}}$ = ١ + ت

∴ مجموعة الحل = {٢+٢ ت ، ١+ت}

(١٦) المقياس = ٢ جتاهـ = - $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ هـ = ١٥٠°

∴ (- $\sqrt{\text{٣}}$ + ت)³ = ٨ (جتا٤٥٠+ت جا ٤٥٠)

= ٨ (جتا٩٠ + ت جا ٩٠)

∴ (- $\sqrt{\text{٣}}$ + ت)$^{\frac{٣}{٥}}$ = $\sqrt[٥]{\text{٨}}$ (جتا٩٠+ت جا٩٠)$^{\frac{١}{٥}}$

= $\sqrt[٥]{\text{٨}}$ [جتا (١٨ +٧٢ر) + ت جا (١٨ +٧٢ر)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ قيم المقدار = $\sqrt[٥]{\text{٨}}$ (جتا ١٨+ت جا ١٨)

$\sqrt[٥]{\text{٨}}$ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) ، $\sqrt[٥]{\text{٨}}$

(جتا ١٦٢° + ت جا ١٦٢°) ، $\sqrt[٥]{\text{٨}}$

(جتا ٢٣٤° + ت جا ٢٣٤°) ، $\sqrt[٥]{\text{٨}}$

(جتا ٣٠٦° + ت جا ٣٠٦°)

(١٧) - ٦٤ ت = ٦٤× - ت = ٦٤ (جتا٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)

∴ (-٦٤ت)$^{\frac{١}{٦}}$ = ٢ | جتا (٤٥ + ٦٠ر)

+ ت جا(٤٥ + ٦٠ر)]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وتكمل كالسابق

(١٨) مقياس ١+ت = $\sqrt{\text{٢}}$ ، جتا هـ = $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

جا هـ = $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$ ∴ هـ = ٤٥°

∴ ١+ت = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا٤٥ + ت جا ٤٥)

(١+ت)² = ٢ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

(١+ت)$^{\frac{٢}{٣}}$ = $\sqrt[٣]{\text{٢}}$ | جتا (٣٠+١٢٠ر) +

ت جا (٣٠ +١٢٠ر)] حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

(١٩) ٣٢ = ٣٢× ١ = ٣٢(جتا٠ + ت جا ٠)

(٣٢)$^{\frac{١}{٥}}$ = ٢ [جتا٧٢ر + ت جا ٧٢ر]

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وتكمل

(٢٠) $\text{س}^5 = -1 = \text{جتا ط} + \text{ت جا ط}$

$\text{س} = (\text{جتا } 180 + \text{ت جا } 180)$

$= [\text{جتا}(36 + \text{ر} \times 72) + \text{ت جا}(36 + \text{ر} \times 72)]$

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤ وتكمل

(٢١) $\text{ع}^5 = 1 - \sqrt{3}\,\text{ت} = 2\left(\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{3}\right)$

$\therefore \text{ع} = \sqrt[5]{2}\left(\text{جتا}\frac{5\text{ط}}{3} + \text{ت جا}\frac{5\text{ط}}{3}\right)$

$= \sqrt[5]{2}\left[\text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{3} + \frac{2\text{ر ط}}{5}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{\text{ط}}{3} + \frac{2\text{ر ط}}{5}\right)\right]$

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

حلول تمارين (١١)

١) $\text{الأيمن} = [11\omega + 2(1+\omega^2)][11\omega^2 + 2(1+\omega)]$

$= (11\omega - 2\omega)(11\omega^2 - 2\omega^2)$

$= 9\omega \times 9\omega^2 = 81\omega^3 = 81 = \text{الأيسر}$

٢) $\text{الأيمن} = \left(\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{1}{1+\omega}\right)^2$

$= \left(-\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)^2$

$= (-\omega^2 + \omega)^2 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^2 = -3 = \text{الأيسر}$

٣) $\text{الأيمن} = \left(2 + \frac{1}{\omega}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right)^2$

$= (2 + \omega^2)^2 - (1 - \omega)^2$

$= 4 + 4\omega^2 + \omega - (1 - 2\omega + \omega^2)$

$= 3 + 3\omega + 3\omega^2 = \text{صفر} = \text{الأيسر}$

٤) $\text{الأيمن} = \frac{[11\omega + 2(1+\omega^2)][11\omega^2 + 2(1+\omega)]}{[(1+\omega^2) - 2\omega][(1+\omega) - 5\omega^2]}$

$= \frac{(11\omega - 2\omega)(11\omega^2 - 2\omega^2)}{(-\omega - 2\omega)(-\omega^2 - 5\omega^2)}$

$= \frac{9\omega \times 9\omega^2}{-3\omega \times -6\omega^2} = \frac{9}{2} = \text{الأيسر}$

٥) الأيمن =

$\pm\sqrt{3}\,\text{ت}\left[\frac{(\omega - 3)(4 + 2\omega^2) - (\omega^2 - 3)(4 + 2\omega)}{(4 + 2\omega)(4 + 2\omega^2)}\right]$

$= \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$\frac{4\omega + 2\omega^3 - 12 - 6\omega^2 - 4\omega^2 - 2\omega^3 + 12 + 6\omega}{16 + 8\omega + 8\omega^2 + 4\omega^3}$

$= \pm\sqrt{3}\,\text{ت} \times \frac{10\omega - 10\omega^2}{20 + 8(\omega + \omega^2)}$

$= \pm\frac{\sqrt{3}\,\text{ت} \times 10(\omega - \omega^2)}{20 + 8(\omega + \omega^2)}$

$= \pm\frac{\sqrt{3}\,\text{ت} \times 10 \times \pm\sqrt{3}\,\text{ت}}{12}$

$= \frac{5}{2}\text{ت}^2 = -\frac{5}{2} = \text{الأيسر}$

٦) $\text{الأيمن} = (5 + \omega)$

$\left[\frac{1}{5 + 4\omega + 3(-1-\omega)} - \frac{1}{3\omega + 2(-1-\omega)}\right]$

$= (5 + \omega)\left(\frac{1}{2 + \omega} - \frac{1}{-2 + \omega}\right)$

$=(٥+\omega)\left(\quad - \quad\right)$

$=(٥+\omega)\left[\frac{٢-\omega+٢+\omega}{(٢+\omega)(٢-\omega)}\right]$

$=(٥+\omega)\left(\frac{٤}{٤-\omega^٢}\right)$

$=(٥+\omega)\left(\frac{٤}{٤-(-١-\omega)}\right)$

$=(٥+\omega)\times\frac{٤}{٥+\omega}=٤=$ الأيسر

٧) الأيمن $=\left[\frac{١}{١+٢(\omega-\omega^٢)}-\frac{١}{١-٢(\omega-\omega^٢)}\right]$

$=\left[\frac{١}{١+٢\sqrt{٣}ت}-\frac{١}{١-٢\sqrt{٣}ت}\right]^٢$

$=\left[\frac{١-٢\sqrt{٣}ت-١-٢\sqrt{٣}ت}{(١+٢\sqrt{٣}ت)(١-٢\sqrt{٣}ت)}\right]^٢$

$=\left(\frac{-٤\sqrt{٣}ت}{١-١٢ت^٢}\right)^٢=\frac{٤٨ت^٢}{١٦٩}$

$=\frac{-٤٨}{١٦٩}=$ الأيسر

٨) الأيمن $=(أ+ب\omega^٢)(أ+ب\omega)$

$=أ^٢+أب\omega+أب\omega^٢+ب^٢\omega^٣$

$=أ^٢+أب(\omega+\omega^٢)+ب^٢$

$=(أ^٢+ب^٢)-أب$

$=(أ-ب)^٢+٢أب-أب$

$=(أ-ب)^٢+أب=$ الأيسر

٩) المقدار $=(١+٣\omega^٢-٤\omega)(١+٣\omega-٤\omega^٢)$

$=[١+٣(-١-\omega)-٤\omega]\,[١+٣\omega-٤(-١-\omega)]$

$=(-٢-٧\omega)(٥+٧\omega)$

$=-١٠-٤٩\omega-٤٩\omega^٢=-١٠-٤٩(\omega+\omega^٢)$

$=٣٩=$ عدد حقيقي

١٠) المقدار $=\left(\frac{أ+١}{أ+٢أ\omega+\omega+أ(-\omega-١)}\right)^٦$

$=\left(\frac{أ+١}{أ+\omega+أ\omega-أ}\right)^٦$

$=\left[\frac{أ+١}{\omega(أ+١)}\right]^٦=(\omega^٢)^٦=\omega^{١٢}=١$

وهذا لا يتوقف علي قيمة أ

١١) الأيمن $=\left[\frac{٥\omega^٣-٣\omega^٢}{٥\omega-٣}-\frac{٢\omega^٣-٧\omega}{٢\omega^٢-٧}\right]^٤$

$=\left[\frac{\omega^٢(٥\omega-٣)}{٥\omega-٣}-\frac{\omega(٢\omega^٢-٧)}{٢\omega^٢-٧}\right]^٤$

$=(\omega^٢-\omega)^٤=(\pm\sqrt{٣}ت)^٤=٩=$ الأيسر

١٢) المتتابعة هندسية

$ج_ن=\frac{١[١-\omega^ن]}{١-\omega}$

عندما ن = ٣ م $\therefore$ $ج_{٣م}=\frac{١-\omega^{٣م}}{١-\omega}=\frac{١-١}{١-\omega}=٠$

عندما ن = ٣م + ١

$ج_{٣م+١}=\frac{١-\omega^{٣م+١}}{١-\omega}=\frac{١-١}{١-\omega}=١$

عندما ن = ٣م + ٢

$ج_{٣م+٢}=\frac{١-\omega^{٣م+٢}}{١-\omega}=\frac{١-\omega^٢}{١-\omega}$

$=\frac{(١-\omega)(١+\omega)}{١-\omega}=١+\omega=-\omega^٢$

١٣) $س = \omega$

الأيمن $= \omega^{23} + \omega^{16} + \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

= الأيسر

١٤) $س^2 + [2\omega + (1+\omega^2)][(1+\omega) - 2\omega^2] = 0$

$س^2 + (2\omega - \omega)(-\omega^2 - 2\omega^2) = 0$

$س^2 + \omega \times \omega^2 =$ صفر ، $س^2 + 1 = 0$

$س^2 = -1$ $\therefore س^2 = ت^2$ $\therefore س = \pm ت$

١٥) المقدار = ($ت + ت^3 + ت^5$ ...... إلى ٨ حدود)

+ ($\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 +$ .... إلى ٧ حدود)

$= \frac{ت(1-ت^{16})}{1-ت^2} + \frac{\omega^2(1-\omega^{14})}{1-\omega^2}$

$= \frac{ت(1-1)}{2} + \frac{\omega^2(1-\omega^2)}{1-\omega^2} = \omega^2$

١٦) المقدار = ($\omega + \omega^3 + \omega^5 +$ ...... إلى ١٢ حدا)

+ ($ت^2 + ت^4 + ت^6$ .... إلى ١١ حدا)

$= \frac{\omega(1-\omega^{24})}{1-\omega^2} + \frac{ت^2(1-ت^{22})}{1-ت^2}$

$= \frac{\omega(0)}{1-\omega^2} + \frac{-1(1-ت^2)}{1-ت^2} = -1$

١٧) المقدار $= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$= (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$

$= [(1-\omega)(1-\omega^2)]^2 = (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2$

$= [1-(\omega+\omega^2)+1]^2 = 9$

١٨) الجذران هما $[(1+\omega) - \omega^2]^3$

، $[(1+\omega^2) - \omega]^3$

أي هما $(-2\omega^2)^3$ ، $(-2\omega)^3$

أي $-8\omega^6$ ، $-8\omega^3$

أي -8 ، -8

مجموع الجذرين $= -8 - 8 = -16$

حاصل ضرب الجذرين $= -8 \times -8 = 64$

$\therefore$ المعادلة هي : $س^2 + 16س + 64 = 0$

١٩) $س + ت ص = [ت^3 - (\omega + \omega^2)]^6$

$= [-ت + 1]^6 = [(1-ت)^2]^3$

$= (-2ت)^3 = -8ت^3 = 8ت$

$\therefore س = 0$ ، $ص = 8$

٢٠) $(1-ت)(س + ت ص)$

$= 19 \left| \frac{5+3\omega^2+2-3\omega^2}{(2-3\omega^2)(5+3\omega^2)} \right|$

$(1-ت)(س + ت ص) = 19 \times \frac{7}{10 - 9\omega^2 - 9\omega^4}$

$(1-ت)(س + ت ص) = 19 \times \frac{7}{10 - 9(\omega^2 + \omega)}$

$\therefore س + ت ص = \frac{7}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت}$

$س + ت ص = \frac{7 + 7ت}{2}$

$\therefore س = \frac{7}{2}$ ، $ص = \frac{7}{2}$

٢١) $س^2 = -\omega$ $\therefore س^2 = ت^2 \omega^4$

$\therefore س = \pm ت \omega^2$

(١) (أ) ٢س = -٢

س + ٣ = ٢ ⟸ س = -١

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$

(ب) ٢س - ص = ١ ، س + ٣ص = ٤ ، ٥س - ٢ص = ٣

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & ٤ \\ ٥ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$

(جـ) ٣ - ص = ٣ ، ٣س + ٢ص = ٤ ، -س + ٣ص = -٥

∴ المحدد هو $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ & -٥ \end{vmatrix}$

(٢) (أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (١ \times -١) - (٢ \times ٥) = -١١$

(ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} = (٢ \times ٥) - (٠ \times ٠) = ١٠$

(جـ) $\begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = (١ \times ٤) - (-٢ \times -٢) = ٠$

(د) $\begin{vmatrix} ٠ & س \\ -س & ٠ \end{vmatrix} = (٠ \times ٠) - (س \times -س) = س^٢$

(و) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{vmatrix} = (٠ \times -٢) - (٠ \times ٠) =$ صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = (١ \times ٠) - (٤ \times ٢) = -٨$

(٣) (أ)

$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٠ \\ ٥ & -١ & -٣ \end{vmatrix}$ بفك المحدد عن طريق عناصر الصف الأول

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} - ٠ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} + ٠ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$

$= ١ - ١٢ - ٠ + ٠ = -١٢$

(ب) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$= ١ \times (١ - ٦) - ٢ \times (٣ - ٤) + ٣ \times (٩ - ٢)$

$= -٥ + ٢ + ٢١ = ١٨$

(جـ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} - ٠ \times \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{vmatrix} + ٠ \times \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$

= ١ × -١ - صفر + صفر = -١

(د) $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= ١ \times \begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٨ & ٩ \end{vmatrix} - ٢ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٦ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix} + ٣ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix}$

= ١ × -٣ - ٢ × -٦ + ٣ × -٣ = صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= ٠ \times \begin{vmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} - ١ \times \begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} + ٢ \times \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

= صفر − ١ × ٦ − ٢ × −٣ = صفر

(و) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر ص١

$= ٢ \times \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} - ٠ \times \begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} + ٠ \times \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$

= ٢ × −٤ − صفر + صفر = −٨

(٤) (أ) $\begin{vmatrix} -٢س & س^٢ \\ س^٢ & س \end{vmatrix} = -١$

∴ $س^٤ + ٢س^٢ = -١$

∴ $س^٤ + ٢س^٢ + ١$ = صفر

∴ $(س^٢ + ١)^٢$ = صفر

∴ $(س^٢ + ١)$ = صفر

∴ $س^٢ = -١$ ∴ $س = \pm \sqrt{-١}$

∴ س ليس لها حل في ح

(ب) $\begin{vmatrix} ١ & س \\ س & ٣ \end{vmatrix} = -١$

∴ $س^٢ - ٣ = ١$

∴ $س^٢ = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$

(ج) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س \\ س & س & ١ \\ س & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣$ س

بفك المحدد عن طريق عناصر الصف الأول

∴ $س \times \begin{vmatrix} س & س \\ س & ٢ \end{vmatrix} = ٣$ س

∴ $س(س^٢ - ٢س) = ٣$ س

∴ $س(س^٢ - ٢س - ٣)$ = صفر

∴ س (س − ٣) (س + ١) = صفر

∴ س = صفر أ، ٣ أ، −١

حلول تمرين (٣ - ٢)

(١) (أ) $\begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix}$ باستخدام خاصية مرور المحدد

$= \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(ب) $\begin{vmatrix} -٥ & ٦ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ بتبديل عناصر ص١، ص٢

$= - \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix}$

بضرب إشارة المحدد × ص٢

$= \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(ج) $\begin{vmatrix} ٤ & -٤ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$ ص١ − ص٢

$= \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(د) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ -١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & -٦ & -٤ \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر ص١

$= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ - صفر + صفر

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(هـ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر العمود الأول $ع_1$

$= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ - صفر + صفر

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(و) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ بالفك عن طريق عناصر $ص_1$

$= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$ + صفر

(لاحظ أن المحدد الثاني ينعدم لأن $ص_1 \equiv ص_2$)

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ = المحدد المطلوب

(٢) (أ) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ص_1 \equiv ص_2$)

(ب) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن جميع عناصر $ص_2$ أصفار)

(ج) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن عناصر $ص_2$ = ٢ × عناصر $ص_1$)

(د) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

∵ المحدد = مدوره

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

بإخراج -١ مشترك من كل من $ص_1$، $ص_2$، $ص_3$ لمحدد الطرف الأيسر

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر

(هـ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $ص_2 - 3ص_1$ ، $ص_3 - 4ص_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ص_2 \equiv ص_3$)

(و) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ = صفر (لأن $ع_2 = -2 ع_3$)

(٣) (أ) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{س} \\ \text{١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$ بتبديل عناصر $\text{ع}_{\text{١}}$ ، $\text{ع}_{\text{٢}}$

$$= - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{س} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{س} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}} \\ \text{ص}_{\text{٣}} - \text{س} \times \text{ص}_{\text{١}} \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١-س} & \text{س-١} & \text{٠} \\ \text{١-س}^{\text{٢}} & \text{١-س} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

بإخراج (١-س) مشترك من كل من عناصر $\text{ص}_{\text{٢}}$، $\text{ص}_{\text{٣}}$

$$= -(\text{١-س})^{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١-} & \text{٠} \\ \text{١+س} & \text{١} & \text{٠} \end{vmatrix} \quad \text{ص}_{\text{٣}} + \text{ص}_{\text{٢}}$$

$$= (\text{١-س})^{\text{٢}} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١-} & \text{٠} \\ \text{٢+س} & \text{١} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

المحدد بالصورة المثلثية العليا

∴ قيمته = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$= -(\text{١-س})^{\text{٢}} \times -(\text{٢+س})$

$= (\text{١-٢س+س}^{\text{٢}})(\text{٢+س})$

$= \text{س}^{\text{٣}} - \text{٣س} + \text{٢}$

(ب) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص+ع} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ع}_{\text{١}} + \text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{٣}}$

$$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{٢س+ص+ع} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{س+٢ص+ع} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{س+ص+٢ع} \end{vmatrix}$$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$$= \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س+ص+ع} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{س+ص+ع} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{س+ص+ع} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بإخراج (س+ص+ع) مشترك من $\text{ع}_{\text{١}}$ للمحدد الأول

وإخراج س مشترك من $\text{ص}_{\text{١}}$ للمحدد الثانى

$$= (\text{س+ص+ع}) \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{١} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{١} \end{vmatrix} + \text{س} \times \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ص} & \text{س+ع} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بإجراء $\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}$ ، $\text{ص}_{\text{٣}} - \text{ص}_{\text{١}}$ للمحدد الأول

وكذلك $\text{ع}_{\text{٢}} - \text{ع}_{\text{١}}$ ، $\text{ع}_{\text{٣}} - \text{ع}_{\text{١}}$ للمحدد الثانى

$$= (\text{س+ص+ع}) \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ص-س} & \text{ع} & \text{٠} \\ \text{ص} & \text{ع-س} & \text{٠} \end{vmatrix} + \text{س} \times \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{س+ع-ص} & \text{ص} \\ \text{س+ص-ع} & \text{٠} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بفك المحدد الأول عن طريق عناصر $\text{ع}_{\text{١}}$ والمحدد

الثانى بالصورة المثلثية السفلى أى أن قيمته تساوى

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$= (\text{س+ص+ع}) \times \text{١} \begin{vmatrix} \text{ص-س} & \text{ع} \\ \text{ص} & \text{ع-س} \end{vmatrix}$$

$+ \text{س}(\text{س+ع-ص})(\text{س+ص-ع})$

$= (\text{س+ص+ع}) [\text{ع ص} - (\text{ع-س})(\text{ص-س})]$

$+ \text{س}(\text{س+ع-ص})(\text{س+ص-ع}) = \text{٤س ص ع}$

(ج) $\begin{vmatrix} ٦ & -٥ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٥ \\ ٠ & ٢ & -٦ \end{vmatrix}$ المحدد قيمته = صفر

انظر طريقة الحل في (٢) (٥)

(٤) (أ) الطرف الأيمن $\begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢ & \text{ب} & ١ \\ \text{جـ}^٢ & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$

$= \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢-\text{أ}^٢ & \text{ب}-\text{أ} & ٠ \\ \text{جـ}^٢-\text{أ}^٢ & \text{جـ}-\text{أ} & ٠ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}^٢+\text{ب}\text{أ}+\text{أ}^٢) & \text{ب}-\text{أ} & ٠ \\ (\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}^٢+\text{جـ}\text{أ}+\text{أ}^٢) & \text{جـ}-\text{أ} & ٠ \end{vmatrix}$

بإخراج (ب - أ) مشترك من $\text{ص}_٢$

، (جـ - أ) مشترك من $\text{ص}_٣$

$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢+\text{ب}\text{أ}+\text{أ}^٢ & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^٢+\text{جـ}\text{أ}+\text{أ}^٢ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ص}_٣ - \text{ص}_٢$

$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢+\text{ب}\text{أ}+\text{أ}^٢ & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^٢-\text{ب}^٢+\text{جـ}\text{أ}-\text{ب}\text{أ} & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

بإخراج (جـ - ب) مشترك من $\text{ص}_٣$

$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب}) \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{أ} & ١ \\ \text{ب}^٢+\text{ب}\text{أ}+\text{أ}^٢ & ١ & ٠ \\ \text{جـ}+\text{ب}+\text{أ} & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

المحدد بالصورة المثلثية قيمته تساوى حاصل ضرب

عناصر القطر الرئيسي

$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب})(\text{جـ}+\text{ب}+\text{أ})$

$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})$ = الأيسر

(ب) الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{س} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{أ} & \text{أ} \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$

$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ٢\text{أ}+\text{س} \\ \text{أ} & \text{س} & ٠ \\ \text{س} & \text{أ} & ٢\text{أ}+\text{س} \end{vmatrix}$

بإخراج (٢أ + س) مشترك من $\text{ع}_١$

$= (٢\text{أ}+\text{س}) \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & \text{أ} & ١ \end{vmatrix}$ $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$

$= (٢\text{أ}+\text{س}) \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ١ \\ ٠ & \text{س}-\text{أ} & ٠ \\ \text{س}-\text{أ} & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ المحدد بالصورة المثلثية

$= (٢\text{أ}+\text{س})(\text{س}-\text{أ})^٢$ = الطرف الأيسر

(جـ) الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & ١+\text{س}^٢ \\ \text{س} & ١+\text{س}^٢ & \text{س} \\ ١+\text{س}^٢ & \text{س} & ٠ \end{vmatrix}$

بإجراء $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$

$= \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & ١+\text{س}+\text{س}^٢ \\ \text{س} & ١+\text{س}^٢ & ١+٢\text{س}+\text{س}^٢ \\ ١+\text{س}^٢ & \text{س} & ١+\text{س}+\text{س}^٢ \end{vmatrix}$

بتحويل المحدد إلى مجموع محددين

$= \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & ١+\text{س}+\text{س}^٢ \\ \text{س} & ١+\text{س}^٢ & ١+\text{س}+\text{س}^٢ \\ ١+\text{س}^٢ & \text{س} & ١+\text{س}+\text{س}^٢ \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} \cdot & \text{س} & \cdot \\ \text{س} & \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} \\ \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} & \cdot \end{vmatrix}$$

بإخراج $(\text{١}+\text{س}+\text{س}^{\text{٢}})$ مشترك من $\text{ع}_{\text{١}}$ للأول

وتبديل عناصر $\text{ص}_{\text{١}}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}}$ للمحدد الثانى

$$= (\text{١}+\text{س}+\text{س}^{\text{٢}})\begin{vmatrix} \cdot & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{١} \\ \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} \\ \cdot & \text{س} & \cdot \\ \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} & \cdot \end{vmatrix}$$

بإجراء $\text{ص}_{\text{٢}}-\text{ص}_{\text{١}}$ ، $\text{ص}_{\text{٣}}-\text{ص}_{\text{١}}$ للمحدد الأول

وكذلك $\text{ص}_{\text{٣}}-\text{ص}_{\text{٢}}$ للمحدد الثانى

$$= (\text{١}+\text{س}+\text{س}^{\text{٢}})\begin{vmatrix} \cdot & \text{س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١}+\text{س}^{\text{٢}}-\text{س} & \cdot \\ \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \text{س} \\ \cdot & \text{س} & \cdot \\ \text{١}+\text{س}^{\text{٢}} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

لاحظ أن كلاً من المحددين بالصورة المثلثية

$= (\text{١}+\text{س}+\text{س}^{\text{٢}})(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}-\text{س})(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})-\text{س}^{\text{٢}}(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})$

$= (\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})[(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}+\text{س})(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}}-\text{س})-\text{س}^{\text{٢}}]$

$= (\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})[(\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}-\text{س}^{\text{٢}}-\text{س}^{\text{٢}}]$

$= (\text{١}+\text{س}^{\text{٢}})(\text{١}+\text{٢}\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}^{\text{٤}}-\text{٢}\text{س}^{\text{٢}})$

$= \text{١}+\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}^{\text{٤}}+\text{س}^{\text{٦}}$ = الطرف الأيسر

(٥) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{جـ} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ك} & \text{ع} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ ء}-\text{ب جـ})(\text{س ك}-\text{ع ص})$

الطرف الأيسر $= \begin{vmatrix} \text{أ ص}+\text{ب ك} & \text{أ س}+\text{ب ع} \\ \text{جـ ص}+\text{ء ك} & \text{جـ س}+\text{ء ع} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ س}+\text{ب ع})(\text{جـ ص}+\text{ء ك})-(\text{جـ س}+\text{ء ع})(\text{أ ص}+\text{ب ك})$

$= \text{أ س ء ك}-\text{أ ء ص ع}-\text{ب جـ س ك}+\text{ب جـ ص ع}$

$= \text{س ك}(\text{أ ء}-\text{ب جـ})-\text{ص ع}(\text{أ ء}-\text{ب جـ})$

$= (\text{أ ء}-\text{ب جـ})(\text{س ك}-\text{ص ع})$ = الطرف الأيمن

<u>تعميم القاعدة لمحدد الدرجة الثالثة:</u>

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ق} & \text{ى} & \text{ر} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{ح} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{أع}+\text{ب ن}+\text{جـ ق} & \text{أص}+\text{ب م}+\text{جـ ى} & \text{أس}+\text{ب ل}+\text{جـ ر} \\ \text{ء ع}+\text{هـ ن}+\text{و ق} & \text{ء ص}+\text{هـ م}+\text{و ى} & \text{ء س}+\text{هـ ل}+\text{و ر} \\ \text{ح ع}+\text{ط ن}+\text{ك ق} & \text{ح ص}+\text{ط م}+\text{ك ى} & \text{ح س}+\text{ط ل}+\text{ك ر} \end{vmatrix}$$

(٦) (أ) لكى تكون س عامل ∴ الصفر جذر

أى أن : $\begin{vmatrix} \text{ك} & \cdot \\ \text{١} & \cdot \end{vmatrix}$ = صفر

وهذه المعادلة تتحقق لجميع قيم ك ∈ ح

(ب) $\begin{vmatrix} \text{ك} & \cdot \\ \text{٢} & \text{ك} \end{vmatrix}$ = صفر

$\therefore -\text{ك}^{\text{٢}} = \cdot \quad \leftarrow \quad \text{ك}^{\text{٢}} = \cdot \quad \therefore \text{ك} = \cdot$

(جـ) $\begin{vmatrix} \cdot & \text{١} & \cdot \\ \text{٣} & \text{٢} & -\text{٣} \\ -\text{ك} & \text{٥} & \text{ك} \end{vmatrix}$ = صفر

وهذا يتحقق دائما بغض النظر ع قيمة ك وذلك لأن عناصر $\text{ع}_{\text{١}}$ = - عناصر $\text{ع}_{\text{٣}}$ فتنعدم قيمة المحدد

∴ المعادلة تتحقق لجميع قيم ك ∈ ح

(د) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & \text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

بإجراء ص٢ + ص١ ، ص٣ - ص١

∴ $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & \text{ك}-4 \end{vmatrix} =$ صفر

بإجراء ص٣ - $\frac{1}{2}$ ص٢

∴ $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \text{ك}-7 \end{vmatrix} =$ صفر

المحدد بالصورة المثلثية قيمته = حاصل ضرب القطر الرئيسي

∴ $-4(\text{ك}-7) = 0 \Leftarrow \text{ك} = 7$

(هـ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \text{ك} \\ 0 & \text{ك} & 0 \end{vmatrix} =$ صفر ص٢ - ص١

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \text{ك}-1 \\ 0 & \text{ك} & 0 \end{vmatrix} = 0$ بتبديل ص٢ ، ص٣

$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \text{ك} & 0 \\ 0 & 0 & \text{ك}-1 \end{vmatrix} =$ المحدد بالصورة المثلثية

∴ $-\text{ك}(\text{ك}-1) = 0 \Leftarrow \text{ك} = 0$ أو $\text{ك} = 1$

(و) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \text{ك}-1 \\ 0 & \text{ك} & 0 \end{vmatrix} = 0$ بتبديل ص١ ، ص٢

$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \text{ك} \\ 0 & \text{ك} & 3 \end{vmatrix} = 0$ ص٢ - ٢ ص١

$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \text{ك}-2 \\ 0 & \text{ك} & 3 \end{vmatrix} =$ صفر

ص٣ - ك × ص٢

$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \text{ك}-2 \\ 0 & 0 & 3-\text{ك}^2+2\text{ك} \end{vmatrix} =$ صفر

المحدد بالصورة المثلثية

∴ $-3(3-\text{ك}^2+2\text{ك}) = 0$

∴ $\text{ك}^2 - 2\text{ك} - 3 = 0$

$(\text{ك}-3)(\text{ك}+1) = 0$

∴ ك = ٣ أو ك = -١ (يصحح الجواب بالكتاب)

أسئلة تمرينات (٤-١)

(١) (أ) ٢س + ص = ٢

٣س + ٢ص = ٥

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-5 = -1$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10-6 = 4$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1$

$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4$

(ب) -س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ١

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$

$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$

(جـ) س + ٥ص = ٥ ، ٢س + ص = ٠

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{5}{-9} = -\frac{5}{9}$

$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-10}{-9} = \frac{10}{9}$

(د) ٢س - ٥ص = ١ ، -س + ص = ٢

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{11}{-3} = -\frac{11}{3}$

$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{5}{-3} = \frac{5}{3}$

(٢) (أ) س + ٣ص + ٢ع = ١٣

٢س - ص + ع = ٣

٣س + ص - ع = ٢

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 50$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 75$

$\text{س} = \frac{25}{25} = 1$ ، $\text{ص} = \frac{50}{25} = 2$ ، $\text{ع} = \frac{75}{25} = 3$

∴ مجموعة الحل (١، ٢، ٣)

(ب) ٢س + ص - ٢ع = ١٠

٣س + ٢ص + ٢ع = ١

٥س + ٤ص + ٣ع = ٤

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -14$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 21$

$\text{س} = \frac{-7}{-7}$ ، $\text{ص} = \frac{-14}{-7}$ ، $\text{ع} = \frac{21}{-7}$

∴ مجموعة الحل (١ ، ٢ ، -٣)

(جـ) س + ٢ص - ٣ع = ٦

٢س - ص - ٤ع = ٢

٤س + ٣ص - ٢ع = ١٤

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -40$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 14 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -80$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 14 & -2 \end{vmatrix} = -80$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 14 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$\text{س} = \frac{-80}{-40}$ ، $\text{ص} = \frac{-80}{-40}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{صفر}}{-40}$

∴ مجموعة الحل (٢ ، ٢ ، ٠)

(د) س + ٢ص + ٣ع = ٦

٢س - ص + ع = -٣

-س - ٢ص + ٢ع = -١٠

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -50$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -25$$

$\text{س} = \frac{25}{-25}$ ، $\text{ص} = \frac{-50}{-25}$ ، $\text{ع} = \frac{-25}{-25}$

∴ مجموعة الحل (-١ ، ٢ ، ١)

(هـ) ٢س + ص + ٣ع = -٢

٣س - ٢ص - ٢ع = ٧

س - ص - ع = ١

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

$\text{س} = \frac{-16}{-16}$ ، $\text{ص} = \frac{16}{-16}$ ، $\text{ع} = \frac{16}{-16}$

∴ مجموعة الحل (١ ، -١ ، -١)

(و) ٢ع = ٥ ، ٣ص = -١ ، ٥س = ١

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -75$$

$\text{س} = \frac{-6}{-30}$ ، $\text{ص} = \frac{10}{-30}$ ، $\text{ع} = \frac{-75}{-30}$

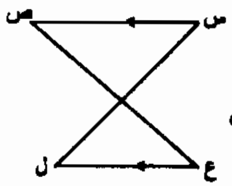
∴ مجموعة الحل = $\left(\frac{1}{5} ، -\frac{1}{3} ، \frac{5}{2} \right)$

ثانياً : إجابة تمارين الهندسة الفراغية

حلول تمرين (١)

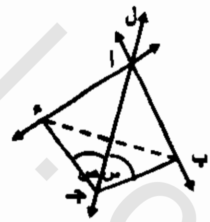
(١) ١- ✓ ٢- ✓ ٣- ✓ ٤- ×
٥- ✓ ٦- × ٧- × ٨- ✓
٩- ✓ ١٠- ✓

(٢)



∵ س ص // ع ل
∴ س ص ، ع ل يعينان
مستوياً وليكن ص
∴ س ص ⊂ ص ع
، $\overline{\text{ع ل}}$ ⊂ ص ∴ س،ص، ع، ل ∈ ص — (١)
∵ ص، ع ∈ ص ∴ $\overline{\text{ص ع}}$ ⊂ ص
ع ، ل ∈ ص ∴ $\overline{\text{ع ل}}$ ⊂ ص
ل ، س ∈ ص ∴ ل س ⊂ ص
∴ س ص، ص ع ، ع ل ، ل س ⊂ ص
∴ $\overline{\text{س ص}}$ ،$\overline{\text{ص ع}}$،$\overline{\text{ع ل}}$،$\overline{\text{ل س}}$ يحويها مستوى واحد

(٣)



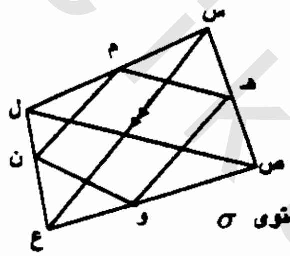
نفرض أن المستويات هى س، ص، ع والمستقيمات هى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ∴ المطلوب إثبات أن أ ∈ للمستويين المتقاطعين في ل وهما س، ص
∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ (خط تقاطع المستويين س ، ع)
∴ أ ∈ س ، ∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ (خط تقاطع)
∴ أ ∈ ص ∴ أ ∈ للمستويين س، ص
∴ أ ∈ خط التقاطع ل

(٤) ١. $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ٢. $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ٣. $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$
٤. $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ٥. ⊃ ، ⊃ ٦. {جـ}

حلول تمرين (٢)

(١) أ- ✓ ب- × جـ- × د- ×
هـ - × و- ✓ س- ×

(٢)

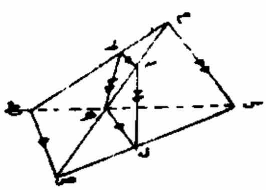


∵ $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ // المستوى σ
، $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ⊂ المستوى س ص ع
المستوى σ ∩ المستوى س ص ع = س ص ع = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$
∴ $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ∴ $\frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}}$ — (١)
∵ $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ // المستوى σ ، ص ل ⊂ المستوى س ص ل
المستوى س ص ل ∩ المستوى σ = $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$
∴ $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ م}}$

$\frac{\text{س هـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}}$ — (٢) من (١)، (٢) بالجمع

$\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ م}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{ص هـ}}{\text{س ص}} + \frac{\text{س هـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س ص}} = ١$

(٣)



$\overleftrightarrow{\text{م س}}$ // المستوى ن ل هـ ط ، $\overleftrightarrow{\text{م س}}$ ⊂ المستوى م س ص

والمستوى م س ص ∩ المستوى ن ل هـ ط = ن ل

∴ م س // ن ل بالمثل م س // ط هـ

∴ ن ل // ط هـ ـــ (١)

∴ ع ص // المستوى ن ل هـ ط

ع ص ⊃ المستوى س ص ع ، المستوى ن ل هـ ط

∩ المستوى س ص ع = ل هـ

∴ ع ص // ل هـ

بالمثل ع ص // ن ط ∴ ل هـ // ن ط ـــ (٢)

من(١) ، (٢) ∴ الشكل ل ن ط هـ متوازى أضلاع

من هندسة الشكل ∴ ل ن // س م ، ل ن = $\frac{١}{٢}$ م س

، ل هـ = $\frac{١}{٢}$ ص ع

محيط متوازى الأضلاع = ٢ [ل ن + ل هـ]

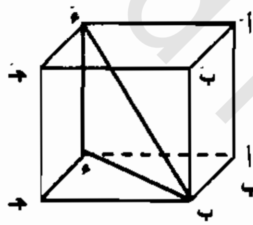
= ٢ [$\frac{١}{٢}$ م س + $\frac{١}{٢}$ ص ع] = ٢ × $\frac{١}{٢}$ [م س + ص ع]

= م س + ص ع ∴ ن ل = م س

، ل هـ = ص ع ∴ م س = ص ع

∴ ن ل = ل هـ وهما ضلعان متجاوران في متوازى الأضلاع

(٤)



∵ ء ءَ ⊥ المستوى

أ ب جـ ء ∴ ء ءَ ⊥ ء ب

$\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + \overline{ء ب}^٢$

من Δ ب ء ءَ ، $\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + (\overline{ء جـ}^٢ + \overline{جـ ب}^٢)$

القائم في جـ ، $\overline{ب ءَ}^٢ = \overline{ء ءَ}^٢ + \overline{ء جـ}^٢ + \overline{ء أ}^٢$

لأن جـ ب = ء أ

(٥) س ∈ المستوى أ َ بَ جـَ لأن س ∈ أ َ جـَ ، س ∈

المستوى أ ب جـ لأن س ∈ أ جـ

∴ س ∈ لكل من المستويين أ ب جـ ، أ َ بَ جـَ وبالمثل

ص ∈ لكل من المستويين أ ب جـ ، أ َ بَ جـَ

∴ س ص هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أ َ بَ جـَ

، ∵ ع ∈ المستوى أ َ بَ جـَ لأن ع ∈ بَ جـَ

، ع ∈ المستوى أ ب جـ لأن ع ∈ ب جـ

∴ ع ∈ س ص

∴ س، ع ، ص على إستقامة واحدة .

تمارين (٢)

(١) أ) أ ب // جـ ء

ب) متوازى مستطيلات

جـ) شبه منحرف

(٢) ∵ أب // جـ ء ∴ أ ب ، جـ ء يعينان

مستوى ع وهو يقطع المستويين س، ص المتوازيين

في أ جـ ، ب ء ∴ أ جـ // ب ء

∴ أ ب // جـ ء ، أ جـ // ب ء

الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع ومنه أ ب = جـ ء

(٣) ء م = ويوازى هـ و

∴ الشكل م ء هـ و متوازي أضلاع

∴ م و // ء هـ الواقع في المستوى س

∴ م و // المستوى س

(٤) ء هـ مستقيم واصل بين منتصفى الضلعين ن أ، ن ب

في Δ ن أ ب

∴ ء هـ // أ ب ويساوى نصفه

∴ ء هـ // المستقيم أ ب الواقع في المستوى م أ ب

∴ ء هـ // المستوى م أ ب .

(٥) ∵ ك ء // هـ م فهما يعينان مستوى ص

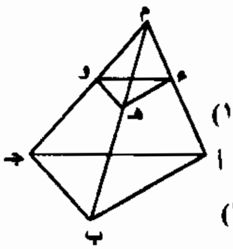
∵ ك هـ // المستوى س ومر به المستوى ص

الذي يقطع المستوى س في ء م

∴ ك هـ // ء م ∵ ك ء // هـ م ، ك ء // هـ م

∴ الشكل ك ء م هـ متوازي أضلاع

(٦)



∵ م ء / ء أ = م هـ / هـ ب

∴ ء هـ // أ ب —— (١)

∴ م هـ / هـ ب = م و / و جـ

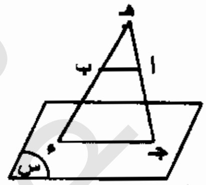
∴ هـ و // ب جـ —— (٢)

من (١) ، (٢)

∴ المستقيمان ء هـ ، هـ و متقاطعان في هـ ، أ ب ، ب جـ متقاطعان في ب

∴ المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ

(٧) ∵ هـ أ ، هـ ب متقاطعان في هـ



∴ هـ أ ، هـ ب يعينان مستوى واحد هو هـ جـ ء

∵ أ ب // المستوى س ، أ ب ⊂ المستوى هـ جـ ء

، المستوى س يقطع المستوى هـ جـ ء ، المستوى س يقطع المستوى هـ جـ ء في جـ ء ∴ أ ب // جـ ء

∴ الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف ∵ أ ب // جـ ء

في △ هـ جـ ء ∴ △ هـ أ ب يشابه △ هـ جـ ء

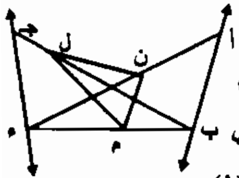
∴ م △ هـ أ ب / م △ هـ جـ ء = (أ ب / جـ ء)^2

= م △ هـ أ ب / ٣٦ = (½ جـ ء / جـ ء)^2

∴ م △ هـ أ ب / ٤ = ٤ / ١ ∴ م △ هـ أ ب = ١٦ سم^2

∴ مساحة الشكل أ جـ ء ب = ٣٦ - ١٦ = ٢٠ سم^2

(٨) أولاً:



أ ب // المستوى ن ل م

، أ ب ⊂ المستوى أ ب ء

ويقطع المستوى ن ل م في ن م ∴ أ ب // ن م —— (١)

ثانياً: ∵ جـ ء // المستوى ن ل م ، جـ ء ⊂ المستوى ب جـ ء ويقطع المستوى ن ل م في ل م

∴ جـ ء // ل م ∴ جـ ء // ل م —— (٢)

ثالثاً: في △ أ ب ء

∵ ن م تنصف ب ء ، ن م // أ ب

∴ ن م تنصف أ ء ، ن م = ½ أ ب —— (٣)

△ ب جـ ء ل م // جـ ء ، ل م تنصف ب ء

∴ ل م تنصف ب جـ ∴ ل م = ½ جـ ء —— (٤)

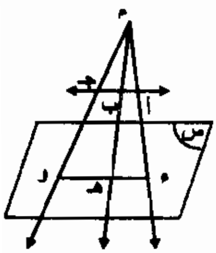
∴ بجمع (٣) ، (٤)

∴ ن م + ل م = ½ (أ ب + جـ ء)

في △ ن م ل ن ل < (ن م + م ل)

∴ ن ل < ½ (أ ب + جـ ء)

(٩)



∵ أ ب // س

، أ ب ⊂ المستوى

م ء هـ ، ∵ س ∩

المستوى م ء هـ = ء هـ

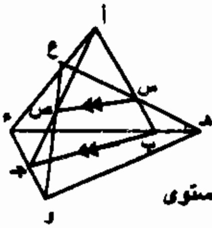
∴ أ ب // ء هـ

∴ م أ / م هـ = م جـ / م ن = ب جـ / هـ و —— (١)

وبالمثل ب جـ // هـ و

∴ م ب / م هـ = م جـ / م ن = ب جـ / هـ و —— (٢)

من (١) ، (٢) أ ب / ء هـ = ب جـ / هـ و ∴ أ ب / ب جـ = ء هـ / هـ و



(١٠) ∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

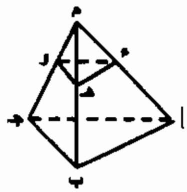
، $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \subset$ المستوى ع هـ و

، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \subset$ المستوى ء هـ و

∵ المستوى ع هـ و $\cap$ المستوى ء هـ و = $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{س ص}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

حلول تمرين (٤)



(١) ∵ $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ —— (١)

، ∵ $\frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ —— (٢)

∴ المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ <u>أولاً</u>

، في Δ م أ ب : ∵ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{١}{٤}$ —— (٣)

في Δ م ب جـ : ∵ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{١}{٤}$ —— (٤)

في Δ م أ جـ : ∵ $\overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٤}$ —— (٥)

من (٣)، (٤)، (٥)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}}$

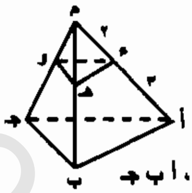
∴ ΔΔ ء هـ و ، أ ب جـ متشابهان

∴ $\frac{\text{م } \Delta \text{ ء هـ و}}{\text{م } \Delta \text{ أ ب جـ}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}}\right)^{٢} = \frac{١}{١٦}$

∵ م (Δ ء هـ و) = ٩ سم

∴ م (Δ أ ب جـ) = ٩ × ١٦ = ١٤٤

(٢)



∵ المستوى م أ ب قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{ء هـ}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٥} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}}$ —— (١)

، ∵ المستوى م ب جـ قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٢}{٥}$ —— (٢)

∵ المستوى م أ جـ قطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{\text{ء و}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}} = \frac{٢}{٥}$ —— (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء و}}{\text{أ جـ}}$

∴ Δ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ <u>أولاً</u>

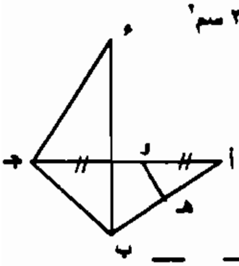
، ∵ ء هـ و يشابه Δ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{م } \Delta \text{ ء هـ و}}{\text{م } \Delta \text{ أ ب جـ}} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{أ ب}}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$

، ∵ $\frac{\text{م } \Delta \text{ ء هـ و}}{١٥٠} = \frac{٤}{٢٥}$

∴ م (Δ ء هـ و) = ٢٤ سم²

(٣) Δ أ ب جـ



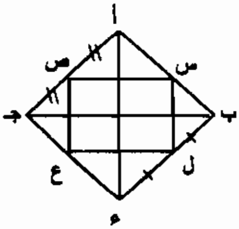
∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ الواقع في المستوى ء ب جـ

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // المستوى ء ب جـ

(٤) في Δ أ ب جـ ∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$



، ص منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ

وبالمثل Δ ء ب جـ

∴ $\overline{\text{ل ع}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ع ل = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ، س ص = ل ع

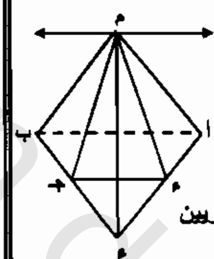
∴ الشكل س ص ع ل متوازى أضلاع

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ الواقع في المستوى س ص ع ل

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ // المستوى س ص ع ل

وبنفس الطريقة نثبت $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // المستوى س ص ع ل

(٥) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = { هـ }



∴ هـ تقع في كل المستويين

م أ ء ، م ب جـ

، ∵ م تقع في كل من المستويين

∴ $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ هو خط تقاطعهما

، ∵ أنهما يشتركن في رأس م

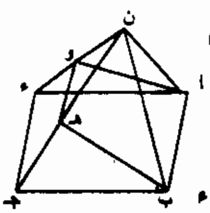
∴ يتقاطعان في مستقيم يمر بنقطة م

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ومر بهما المستويان

∴ خط تقاطعهما يوازى كلا منهما

∴ خط تقاطع المستويين هو مستقيم يمر بنقطة م

ويوازى كلا من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$



(٦) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ الواقع

في المستوى ن جـ ء

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ن جـ ء

∵ المستوى أ ب هـ و يحتوى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع المستوى

ن جـ ء في $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

∵ ن جـ = ن ء ∴ ن هـ = ن و

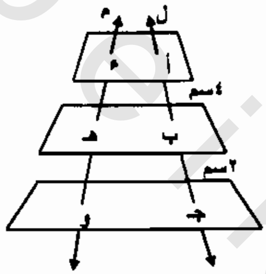
∵ ق(∠ أ ن و) = ق(∠ ب ن هـ) من تطابق

ΔΔ ن أ ء ، ن ب جـ ∴ Δ أ ن و ينطبق Δ ب ن هـ

∴ أ هـ = ب و

∴ أ ب هـ و شبه منحرف متساوى الساقين

(٧)

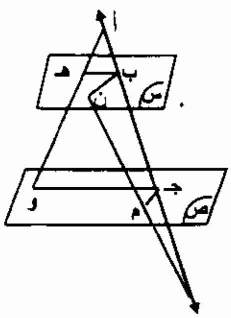


∴ س// ص // ع

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$ ∴ $\frac{1}{2} = \frac{\text{ء هـ}}{3}$

∴ ء هـ = ٦ سم

(٨)



∵ المستوى أ جـ و قطع

المستويين المتوازيين

س، ص في $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$

∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ و}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{1}{3}$ ----- (١)

∵ المستوى ء ب ن قطع المستويين المتوازيين س،

ص في $\overline{\text{جـ م}}$ ، $\overline{\text{ب ن}}$ ∴ $\overline{\text{جـ م}}$ // $\overline{\text{ب ن}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{م جـ}} = \frac{8}{5}$ ----- (٢)

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} \times \frac{\text{ب ن}}{\text{جـ م}} = \frac{2}{5}$

∴ ٥ ب هـ . ب ن = ٢ جـ و . جـ م

(١) [أ] أ أ َ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

[ب] ء أ َ ⊥ المستوى أ ب ب َ أ َ

[جـ] ب َ أ َ ⊥ المستوى أ ء ء َ أ َ

[ء] ∵ أ أ َ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ أ أ َ ⊥ أ مستقيم فيه

∴ أ أ َ ⊥ ب ء ∴ أ أ َ ⊥ ب َ ء َ

(٢) (ب جـ)٢ = (أ ب)٢ + (أ جـ)٢

(م جـ)٢ = (أ م)٢ + (أ جـ)٢

∴ Δ م أ جـ قائم ∴ أ جـ ⊥ أ م

∵ أ جـ ⊥ أ ب ∴ أ جـ ⊥ كل من أ م ، أ ب

∴ أ جـ ⊥ المستوى أ م ب

أ جـ ⊥ المستوى أ م ب

(٣) أ ب جـ يطابق Δ ء ب جـ

فيهما { ء ب = أ جـ ، ب جـ مشترك
ق(< أ ب جـ) = ق(< ء ب جـ) = ٩٠ ° }

، ∵ ب جـ ⊥ أ ب ، ب جـ ⊥ ء ب

∴ ب جـ ⊥ كل من أ ب ، ء ب

∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب ء

، ∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب و

، في Δ أ ب ء: ب أ = ب ء

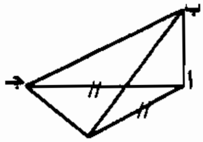
ب هـ تنصف أ ء في هـ ∴ ب هـ ⊥ أ ء

∴ ب هـ ⊥ أ ء —— (١)

∵ ب جـ ⊥ المستوى أ ب ء ∴ ب جـ ⊥ أ ء —— (٢)

من (١)، (٢) ∴ أ ء ⊥ كل من ب جـ ، ب هـ

∴ أ ء ⊥ المستوى أ ب جـ



(٤) ∵ أ ب ⊥ المستوى أ جـ ء

∴ أ ب ⊥ أ جـ

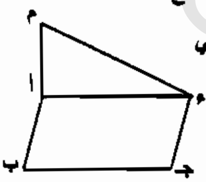
∴ ب جـ = ل √٢ ∵ أ جـ ⊥ المستوى ب أ ء

∴ أ جـ ⊥ أ ء ∴ جـ ء = ل √٢

∴ أ ء ⊥ المستوى ب أ جـ ∴ أ ء ⊥ أ ب

∴ ب ء = ل √٢ ∴ ب جـ = جـ ء = ب ء = ل √٢

∴ Δ ب جـ ء متساوى الأضلاع



(٥) [أ] م أ ليست عمودية على المستوى أ ب جـ ء لأن

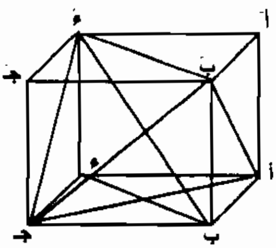
م أ ⊥ أ ب الواقعة فيه فقط

[ب] ∵ أ ب ⊥ أ ء ، أ م

∴ أ ب ⊥ المستوى م أ ء

[جـ] ء جـ // ب أ ، ب أ ⊥ المستوى م أ ء

∴ ء جـ ⊥ المستوى م أ ء



(٦) ١] من هندسة الشكل

ء َ أ = ء َ جـ

= جـ أ = ل √٢

∴ Δ ء َ أ جـ متساوى الأضلاع

مساحة Δ ء َ أ جـ = √٣ / ٢ × مربع طول ضلعه

= √٣ / ٢ × ٢ ل٢ = √٣ / ٢ ل٢

٢] ∵ أ ب ⊥ ب ب َ ، ب جـ من خواص المكعب

∴ أ ب ⊥ الوجه ب جـ جـ َ ب َ ∴ أ ب ⊥ ب َ جـ

٣] ∵ ء ء َ ⊥ القاعدة أ ب جـ ء ∴ ء ء َ ⊥ أ جـ

أ جـ ⊥ ء ء َ ∴ أ جـ ⊥ ب ء

∴ أ جـ ⊥ كل من ب ء ، ء ء َ

∴ أجـ ⊥ المستوى ب ء ء ∴ أجـ ⊥ ءَ ب

٤] في Δ أ أَ جـ : (أَ جـ)^2 = ل^2 + ٢ ل^2 = ٣ ل^2

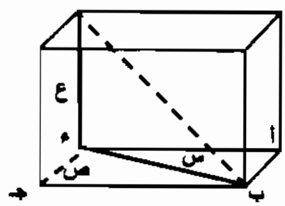
∴ أَ جـ = ل √٢ ، Δ ءَ ء ب فيه

(ءَ ب)^2 = √ل^2 + ٢ ل^2 = ل √٣

في Δ بَ ب جـ فيه بَ ء = ل √٣

∴ أَ جـ = ءَ ب = بَ ء = ل √٣

(٧)



∵ ب جـ ⊥ كل من ب بَ ، ب أ

∴ ب جـ ⊥ المستوى أ ب بَ أَ

∵ أَ ب ⊂ للمستوى أ ب بَ أَ

∴ أَ ب ⊥ ب جـ

في Δ ب جـ ء : (ب ء)^2 = س^2 + ص^2

∵ ءَ ء ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∴ ءَ ء ⊥ ب ء

في Δ ءَ ء ب : (ءَ ب)^2 = (ب ء)^2 + (ءَ ء)^2

= س^2 + ص^2 + ع^2

∴ ءَ ب = √(س^2 + ص^2 + ع^2)

∴ طول القطر = √(٦٤ + ٣٦ + ٥٧٦) = ٢٦ سم

إجابات تمرين (٦)

(١) ∵ جـ م ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ جـ ب مسقط م ب علي المستوى أ ب جـ

، ∵ جـ ب ⊥ ب أ

∴ م ب ⊥ ب أ (نظرية) **أولاً**

في Δ م ب أ القائم في ب

∵ ء منتصف م أ ∴ ب ء = ½ أ م ---- (١)

، ∵ جـ م ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ جـ م ⊥ جـ أ

∴ م جـ أ قائم الزاوية في جـ

، ∵ ء منتصف أ م ∴ جـ ء = ½ م أ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ب ء = جـ ء

∴ Δ ء جـ ب متساوى الساقين

(٢) ∵ ب ء ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ جـ ب مسقط ء هـ

علي المستوى أ ب جـ ، ∵ ء هـ ⊥ ب أ

∴ جـ ب ⊥ ب أ ∴ ب هـ = ½ أ ب

∴ ب هـ = ٨ سم

، ∵ ب ء ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ ب ء ⊥ ب هـ

∴ Δ ء ب هـ قائم الزاوية في ب

∴ (م ب)^2 = (ء ب)^2 + (ب هـ)^2 = ٢٢٥ + ٦٤

∴ م ب = ١٧ سم

(٣) (ب جـ)^2 = (١٥)^2 + (٢٠)^2 = ٦٢٥ ، ∴ ب جـ = ٢٥

في Δ Δ أ ب ء ، جـ ب أ

أب / جـ ب = ١٥ / ٢٥ = ٣ / ٥ ، ب ء / أ ب = ٩ / ١٥ = ٣ / ٥

∴ أب / جـ ب = ب ء / أ ب ، < ب مشتركة ∴ Δ Δ متشابهان

∴ ق(< أ ء ب) = ق(< جـ أ ب) = ٩٠

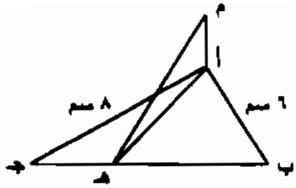
∴ أ ء ⊥ ب جـ ، أ ء هو مسقط م ء على مستو Δ أ ب جـ

∴ م ء ⊥ ب جـ ، (أ ء)^2 = (١٥)^2 - (٩)^2 = ١٤٤

في Δ أ ب ء ∴ أ ء = ١٢ سم ، أ م = أ ء في Δ

القائم م أ ء ∴ ق(< أ ء م) = ٤٥°

(٤)



∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م أ ⊥ أ هـ

، ∵ أ هـ هو مسقط المائل م هـ ، م هـ ⊥ ب جـ

∴ أ هـ ⊥ ب جـ في Δ أ ب جـ

∴ أ ب × أ جـ = ب جـ × أ هـ

∴ أ هـ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨ سم

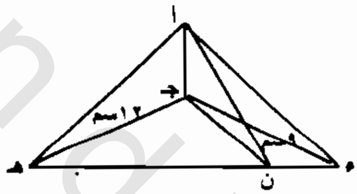
∵ Δ م أ هـ قائم في أ

∴ (م هـ)^٢ = (م أ)^٢ + (أ هـ)^٢

= (٣,٦)^٢ + (٤,٨)^٢ = ٣٦

∴ م هـ = ٦ سم

(٥)



∵ (ء هـ)^٢ = (٩)^٢ + (١٢)^٢ = ٢٢٥

∴ ء هـ = ١٥ سم

∵ مساحة Δ أ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ ء × أ ن

∴ ٩٦ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × أ ن

∴ أ ن = ١٢,٨

∵ أ جـ ⊥ المستوى جـ ء هـ

∴ أ ن (المائل) ⊥ ء هـ ∴ مسقط جـ ن ⊥ ءهـ

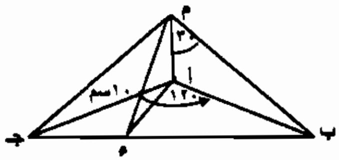
∴ جـ ن = $\frac{٩ \times ١٢}{١٥}$ = ٧,٢

∴ (أ جـ)^٢ = (١٢,٨)^٢ + (٧,٢)^٢ = ١١٢

∴ أ جـ = $\sqrt{١١٢}$ = ١٠,٥٨

أ هـ = $\sqrt{١١٢ + ١٤٤}$ = ١٦

(٦)



∵ م أ ⊥ المستوى ∴ م أ ⊥ أ ب

∴ م أ ب قائم الزاوية ∵ ق(∠ ب م أ) = ٣٠°

∴ م ب = ٢٠ سم ∴ م أ = ١٠$\sqrt{٣}$

∵ Δ أ ء ب قائم ، ∠ ب أ ء = ٦٠°

∴ ∠ أ ب ء = ٣٠° ∴ أ ء = ٥ سم

∵ م أ ⊥ المستوى ∴ م ء مائل

∵ مسقط أ ء ⊥ ب جـ ∴ م ء ⊥ ب جـ

∴ م ء يمثل ارتفاع Δ م ب جـ

∵ Δ م أ ء قائم ∴ (م ء)^٢ = (١٠$\sqrt{٣}$)^٢ + (٥)^٢

∴ م ء = $\sqrt{٣٢٥}$ ، ∵ ب جـ = ١٠$\sqrt{٣}$

∴ مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠$\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣٢٥}$

(٧) **أولاً**: (أ) ∵ ن أ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

∵ ن أ ⊥ ب ء —— (١)

∴ القطران في المربع متعامدان

∴ أ جـ + ب ء —— (٢)

من(١) ، (٢) ∵ ب ء ⊥ كل من م أ ، أ ن

∴ ب ء ⊥ المستوى ن أ م

(ب) ∵ أ ب ⊥ ب جـ ، أ ب مسقط المائل ن ب

∴ ن ب ⊥ ب جـ

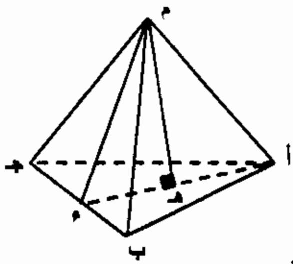
ثانياً: في Δ ن أ ب ق(∠ أ) = ٩٠°

∴ (ن ب)^٢ = (ن أ)^٢ + (أ ب)^٢ = (٥)^٢ + (١٢)^٢

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ ن ب = ١٣ سم

(٨)



∵ م أ ⊥ كل من م ب ، م جـ

∴ م أ ⊥ المستوى م ب جـ **أولاً**

∴ م أ ⊥ م ء لأن م ء ⊂ المستوى م ب جـ

∵ م هـ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م هـ ⊥ أ ء

∴ Δ م أ ء قائم في م ∴ م هـ ⊥ أ ء

∴ Δ (م هـ)² = أ هـ . ء هـ **ثانياً**

، ∵ م أ ⊥ المستوى م ب جـ

∴ م أ ⊥ ب جـ

∵ أ هـ مسقط أ م على المستوى أ ب جـ

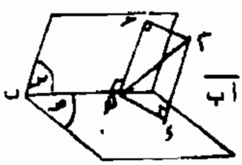
∴ أ هـ ⊥ ب جـ ∴ أ ء ⊥ ب جـ

، ∵ ء هـ مسقط م ء على المستوى أ ب جـ

، ء هـ ⊥ ب جـ ∴ م ء ⊥ ب جـ

تمارين عامة (٧)

(١) نرسم م هـ



∵ جـ هـ مسقط م هـ

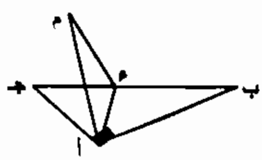
على س، ∵ جـ هـ ⊥ أ ب

∴ م هـ ⊥ أ ب

، ء هـ مسقط م هـ على ص

، ∵ م هـ ⊥ أ ب ∴ ء هـ ⊥ أ ب

(٢)



نفرض أن أ جـ = ل

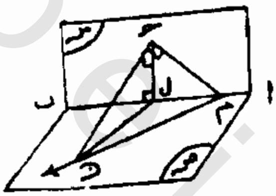
∴ أ ب = ٢ ل ∴ (ب جـ)² = ل² + ٤ل² = ٥ل²

∴ ب جـ = ل√٥ ، ء أ مسقط م ء

، ∵ م ء ⊥ ب جـ ∴ ء أ ⊥ ب جـ

، ∵ ق(<أ) = ٩٠° ∴ (ب أ)² = ب ء × ب جـ

(٣) ∵ ن جـ ⊥ س



∴ ن جـ ⊥ جـ م

، ن جـ ⊥ جـ ل

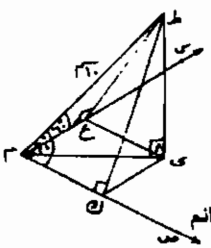
، جـ ل مسقط ن ل

∴ جـ ل ⊥ أ ب ∴ ن ل ⊥ أ ب

∴ جا (<ن م ل) × جا (<ن ل جـ)

= (ن ل / ن م) × (جـ ن / ن ل) = جـ ن / ن م ، جا (<ن م جـ) = جـ ن / ن م

(٤) ى ك مسقط ط ك



∵ ط ك ⊥ م ص

∴ ى ك ⊥ م ص

بالمثل ى ع ⊥ م س

∴ زوايا المضلع م ع ى ك قوائم

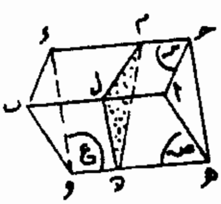
، ع م = م ك = ١٠ جتا ٦٠° = ٥ سم

∴ م ع ى ك مربع ∴ ى م = ٥√٢ سم

∴ جتا (<ط م ى) = ٥√٢ / ١٠ = ١ / √٢

∴ ق(<ط م ى) = ٤٥°

(٥)



∵ أ ب // ع

∴ أ ب // جـ ء

وبالمثل أ ب // هـ و ∴ جـ ء // هـ و

نرسم مستو عموديا على أ ب فيكون عموديا

على جـ ء ، هـ و ويقطعها في ل ، م ، ن

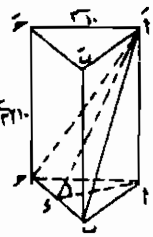
ويكون أ ب ⊥ كل من ل م ، ل ن

، جـ ء ⊥ كل من ن ل ، ن م

∴ الزوايا ل، م ، ن هى الزوايا المستوية

لمقاييس الزوايا الزوجية ومجموع قياساتها = ١٨٠°

(٦) ∵ أ أَ ⊥ مستوى القاعدة



∴ أ أَ ⊥ أ جـ

∵ ظا (< أَ جـ أ) = ١٠ √٣ / ١٠

= √٣

∴ ق (< أَ جـ أ) = ٦٠°

نرسم أ ء ⊥ ب جـ يقطعه في ء ثم نرسم أَ ء

∵ أ ء ⊥ ب جـ ∴ ء منتصف ب جـ

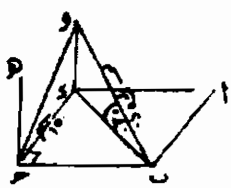
، ∵ أ ب = أ جـ ∴ أَ ء ⊥ ب جـ

∴ ق(< أ - ب جـ - أَ) = ق(< أَ ء أ)

، ∵ أَ ء = ١٠ جا ٦٠° ∴ أ ء = ٥ √٣

∴ ظا (< أَ ء أ) = أ أَ / ء أ = ١٠ √٣ / ٥ √٣ = ٢

(٧)



نرسم ء ب ، و جـ

ب ء مسقط ب و

ب ء = ٢٠ √٣ جتا ٣٠° = ٣٠ سم

∵ ء و ⊥ مستوى المستطيل

∴ ء و ⊥ ب ء ، ء و ⊥ ء جـ

∴ < ب ء جـ هى الزاوية المستوية لمقياس الزاوية

الزوجية حيث :

جتا (< ب ء جـ) = ١٥ / ٣٠ = ١ / ٢

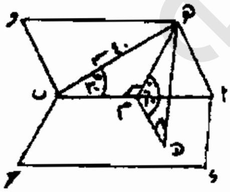
∴ ق (< ب ء جـ) = ٦٠°

∵ ء و = ٢٠ √٣ جا ٣٠° = ١٠ √٣ سم

∴ م (Δ ب ء و) = ١ / ٢ × ٣٠ × ١٠ √٣

= ١٥٠ √٣ سم²

(٨)



نرسم هـ م ⊥ أ ب

يقطعه في م ـ ثم نرسم

م ن وهو مسقط هـ م

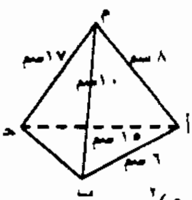
∴ م ن ⊥ أ ب

∴ ق (< هـ م ن) = ٦٠°

، هـ م = ٤٠ جا ٣٠ = ٢٠ سم ، هـ ن = هـ م جا ٦٠°

∴ هـ ن = ٢٠ × √٣ / ٢ = ١٠ √٣ سم

(٩) (م أ)² + (أ ب)² = ٦٤+٣٦



= ١٠٠ = (م ب)²

∴ م أ ⊥ أ ب

بالمثل (م أ)² + (أ جـ)² = (م جـ)²

∴ م أ ⊥ أ جـ ∴ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

∵ م أ محتوى في كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ

∴ كل من المستويين م أ ب ، م أ جـ ⊥ المستوى أ ب جـ

(١٠) أ ب قطر ∴ ب ء ⊥ أ ء

، ∵ أ جـ ⊥ مستوى الدائرة

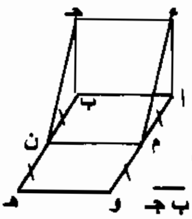
∴ أ جـ ⊥ ب ء

∴ ب ء ⊥ المستوى جـ أ ء

، ∵ ب ء محتوى في المستوى ب ء جـ

∴ المستوى ب ء جـ ⊥ المستوى جـ أ ء

(١١) م ن // أ ب ، أ ب // ء جـ



∴ م ن // ء جـ

، م ن = أ ب = ء جـ

∴ جـ ء م ن متوازي أضلاع

∵ أ ب ⊥ ب هـ ، أ ب ⊥ ب جـ

∴ أ ب ⊥ المستوى جـ ب ن

∴ أ ب ⊥ ن جـ ∴ م ن ⊥ ن جـ

∴ جـ ء م ن مستطيل

∵ ب جـ ⊥ ء جـ ، ن جـ ⊥ ء جـ

∴ < ب جـ ن هي الزاوية المستوية لمقياس الزاوية

الزوجية ، ظا (ب جـ ن) = $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٢}$

(١٢) نرسم هـ م ⊥ أ ب

يقطعه في م حيث م منتصف

أ ب ثم نرسم م و

و م مسقط هـ م

∴ و م ⊥ أ ب

∴ ق(< و - م ب - هـ) = ق(< هـ م و) = ٦٠°

∴ م و = $\frac{١}{٢}$ م هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ أ و ⊥ و ب ، ∵ أ و ⊥ هـ و

∴ أ و ⊥ المستوى ب هـ و

∴ المستوى هـ و أ ⊥ المستوى هـ و ب

(١٣) أ ء ⊥ المستوى س

∴ أ ء ⊥ ب ء

، ∵ ق(< أ ب ء) = ٤٥°

∴ أ ء = ب ء ، أ جـ = ب جـ

، ء جـ مشترك ∴ Δ أ ء جـ ≡ Δ ب ء جـ

∴ ق (< ب ء جـ) = ق(أ ء جـ) = ٩٠°

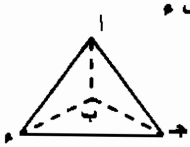
∴ جـ ء ⊥ المستوى أ ب ء

∴ المستوى أ ء ب ⊥ أ ء جـ

(١٤) ∵ المستويين أ ب جـ ، أ ب ء

متقاطعان في أ ب وعموديان

علي المستوى ب جـ ء



∴ أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء

∴ أ ب ⊥ جـ ب ، ب ء

∴ (أ ب)^2 = (أ جـ)^2 - (جـ ب)^2 = (أ ء)^2 - (ب ء)^2

∴ (أ جـ)^2 - (أ ء)^2 = (جـ ب)^2 - (ب ء)^2

(١٥) ∵ ن م ⊥ مستوى الدائرة

∴ ن م ⊥ جـ أ ، نصف القطر

م أ ⊥ المماس جـ أ

∴ جـ أ ⊥ المستوى م أ ن

والمستوى ن جـ ب مار به

∴ المستوى ن جـ ب ⊥ المستوى م أ ن

ثالثاً : إجابة تمارين التفاضل والتكامل

(١) نهاس←(١)$^{+}$ د₁(س) = نهاس←١$^{+}$ ٣ = ٣

نها د₂ (س) = نهاس←(١)$^{-}$ س+ ٢ = ٣

∴ للدالة نهاية عندما س = ١

∴ نهاس←١ د(س) = ٣

(٢) نهاس←-٢$^{+}$ د₁(س) = نهاس←-٢$^{+}$ ٢س+٣ = -١

نهاس←-٢$^{+}$ د₂(س) = نهاس←-٢$^{+}$ س^{2} +٢ = ٦

∴ الدالة ليس لها وجود

(٣) نهاس←١$^{+}$ د₁(س) = ٣

نهاس←١$^{-}$ د₂(س) = ٣

∴ نهاس←١ د(س) = ٣

(٤) نهاس←٢$^{-}$ د₁(س) = ١

نهاس←٢$^{+}$ د₂ (س) = ٣

∴ الدالة ليس لها وجود

(٥) نهاس←(١)$^{-}$ د(س) = ٣، نهاس←(١)$^{+}$ د(س) = ٣

∴ نهاس←١ د (س) = ٣

(٦) نهاس←(٠)$^{-}$ د(س) = -١، نهاس←(٠)$^{+}$ د(س) = ١

∴ الدالة ليس لها وجود

(٧) مجال الدالة (-١، ٧) يوجد نهاية للدالة عند س = ٣، ٥ ، نها د(٢) ليس لها وجود ، ولا يمكن إيجاد النهاية لعدم معرفة سلوك الدالة في القيم أقل من -١

- لا توجد س في النطاق كذلك عند د(٧)

(٨) د(٣)$^{-}$ = نهاس←٣$^{-}$ (س- ٣) × نها $\frac{\text{جا (س-٣)}^{2}}{\text{(س- ٣)}^{2}}$

= ٠ × ١ = ٠

د (٣)$^{+}$ = نهاس←٣$^{+}$ (س- ٣) × نها $\frac{\text{جا (س-٣)}^{2}}{\text{(س- ٣)}^{2}}$

= ٠ × ١ = ٠

∴ د(٣)$^{-}$ = د (٣)$^{+}$ ∴ نهاس←٣ د(س) = صفر

(٩) د(٠)$^{-}$ = نها $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ - نها $\frac{\text{٥ س}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{١ - ٥}}{\text{٣ + ١}}$ = -١

نهاس←٠ $\frac{\text{س×٠}}{\text{س}}$ + نهاس←٠ $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

، د(٠)$^{+}$ = نهاس←٠ .(٣س- ١) = -١

∴ نهاس←٠ د(س) = -١

(١٠) د(-١)$^{-}$ ليس لها وجود، د(-١)$^{+}$ = نها (٥-٢س) = ٧

∴ د(س) = ٧ ، د(٢)$^{-}$ = ١ ، د(٢)$^{+}$ = -١٣

∴ لا يوجد نهاية عند س = ٢ ، د(٥)$^{+}$ ليس لها وجود ، د(٥)$^{-}$ = $\frac{١٣}{٨}$.

(١) نهاس←(١)$^{+}$ د₁(س) = ٢×١ = ٢

نهاس←(١)$^{-}$ د₂ (س) = ١-١ +٢ = ٢

∴ نهاس←١$^{+}$ د₁ (س) = نهاس←١$^{-}$ د₂ (س)

(٢) نعيد تعريف الدالة بدون مقياس

∴ د(س) = $\frac{\text{(س-٣) (س-٤)}}{\text{(س-٣)}}$ ∴ د(س)= س-٤

س < ٤ ، د(س) = ١ س = ٣

د(س) – (س-٤) ٣ < س < ٤

نهاس←٣$^{+}$ د(س) = نهاس←٣$^{+}$ (- س+ ٤) = ١

نهاس←٣$^{-}$ د(س) = -١ ، د(٣) = ١

∴ نها د(س) ≠ د (٣) الدالة غير متصلة من اليسار ، نها$_{س \leftarrow ٣}$ د(س) = د (٣)

(٣) نها$_{س \leftarrow -١}$ $\frac{س(س+١)}{(س+١)(س^{٢}-س+١)} = \frac{-١}{٣}$

∴ ك = $-\frac{١}{٣}$

(٤) د(٣) = ٦ ∈ ح

∴ نها$_{س \leftarrow ٣}$ $\frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ = ٦ = د(٣)

∴ د(س) متصلة عند س = ٣

(٥) د(٤) = $\frac{١}{٣}$ ∈ ح

نها$_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{\sqrt{٢س+١}-٣}{س-٤} \times \frac{\sqrt{٢س-١}+٣}{\sqrt{٢س-١}+٣}$

= نها$_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{٢}{\sqrt{٢س+١}+٣} = \frac{١}{٣}$

∴ الدالة متصلة

(٦) نها$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س^{٢}-٤}{٢س-٤}$ = نها$_{س \leftarrow ٢}$ $\frac{س+٢}{٢}$ = ٢

∴ ك = ٢

(٧) د(٢) = ٤ ∈ ح ، نها$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ د(س) = ٢أ + ٢

∵ الدالة متصلة ∴ ٤ = ٢أ + ٢ ∴ أ = ١

(٨) $\begin{cases} \frac{س^{٢}}{|س|} & ، (س > ٠) \\ \frac{س^{٢}}{-س} & س < ٠ \end{cases}$

= $\begin{cases} س & ، س > ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$

د(س) غير معرفة عند س = ٠ ∴ غير متصلة

د(س) = س^{٢} - | س |

∴ د(س) = $\begin{cases} س^{٢}-س & ، س \le ٠ \\ س^{٢}+س & ، س < ٠ \end{cases}$

نها$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ (س^{٢}+ س) = ٠ + ٠ = ٠

د(٠) = ٠ ∴ الدالة متصلة عند س = ٠

(٩) د(١)$^{-}$ = د (١) = ٢

نها$_{س \leftarrow ١^{-}}$ (س^{٢} + ب س + ٣)

= نها$_{س \leftarrow ١^{+}}$ (أ س + ب) = ٧

∴ ٤ + ب = ٧ ، أ + ب = ٧

∴ ب = ٣ ، أ = ٤

(١٠) د(٣) = ٩-٩+٢ = ٢

، د(٣$^{-}$) = نها$_{س \leftarrow ٣}$ (س^{٢} - ٣س + ٢) = ٢

، د(٣)$^{+}$ = ٢ ∴ د متصلة عند س = ٣ ، د(٤) = ٢

د(٤$^{-}$) = ٢ ، د(٤$^{+}$) = ٢ ∴ الدالة متصلة

(١١) الدالة متصلة عند س = م

نها$_{س \leftarrow م}$ د(س) = $\frac{٧}{٣}$ (م)^{٢} = $\frac{٢٨}{٣}$

∴ م^{٢} = ٤ ∴ م = $\pm \sqrt{٢}$

(١٢) د(س) = $\begin{cases} \frac{س-٤}{س+٤} \\ -\frac{٥}{٣} \end{cases}$ نها$_{س \leftarrow -١}$ = $-\frac{٥}{٣}$ = د (-١)

∴ الدالة متصلة

(١) ∵ الدالة متصلة ∴ د(٢^-) = د(٢^+) = د(٢)

∴ ١ ـ $\frac{١}{٤}$ × ٢ = $\frac{أ}{٢}$ ∴ أ = ١

د‌َ(٢^-) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{١ - \frac{١}{٢}(٢+هـ) - \frac{١}{٢}}{هـ}$ = ـ $\frac{١}{٤}$

د‌َ(٢^+) = نها$_{هـ \to ٠^+}$ $\frac{\frac{١}{٢+هـ} - \frac{١}{٢}}{هـ}$ = ـ $\frac{١}{٤}$

∴ د‌َ(٢^-) = د‌َ(٢^+) ∴ الدالة قابلة للإشتقاق

(٢) ∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د(٢^-) = د(٢^+) = د(٢) = ٥

د(٢^-) = ٤ + ٢أ ـ ١ = ٥ ∴ أ = ١

، د(٢^+) = أ + ٢ب = ٥ ∴ ب = ٢

∴ د(س) = $\begin{cases} س^٢ + س - ١ & \text{عندما } س < ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \\ ١ + ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$

∴ د‌َ(٢^-) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ ×

= $\frac{(٢+هـ)^٢ + (٢+هـ) - ١ - ٥}{هـ}$ = نها$_{هـ \to ٠^-}$ ٥ + هـ = ٥

، د‌َ(٢^+) = $\frac{٢هـ}{هـ}$ = ٢

، ∵ د‌َ(٢^+) ≠ د‌َ(٢^-)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٣) ∵ الدالة متصلة عند س=١ ∴ د(٢^-) = د(٢^+)

∴ ١+أ = ٢ ⇐ أ = ١

، د‌َ(١^+) = نها$_{هـ \to ٠^+}$ $\frac{(١+هـ)+١-٢}{هـ}$ = ١

د‌َ(١^-) = ـ١ ∴ د‌َ(١^+) ≠ د‌َ(١^-)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

(٤) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ د‌َ(١^+) = د‌َ(١^-)

∴ ٢ = ٢أ ∴ أ = ١

∵ الدالة قابلة للاشتقاق فإنها تكون متصلة عند

النقطة س = ١ ∴ د(١^+) = د(١^-)

∴ صفر = ٢أ + ب ∴ ب = ـ٢ ∴ أ = ١

(٥) د‌َ(١^-) = ٢ ، د‌َ(١^+) = ٢ ∴ د‌َ(٦) =

د(١^-) = د(١) ∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د‌َ(١^-) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{(١+هـ)^٢ + ١ - ٢}{هـ}$ = ٢

د‌َ(١^+) = نها $\frac{١ + هـ + ١ - ٢}{هـ}$ = ١

∴ الدالة متصلة وغير قابلة للإشتقاق

(٦) د(١) = ١ = د(١^-) ، د(١^+) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ نها$_{س \to ١}$ د(س) = ١ = د(١) ∴ الدالة متصلة

د‌َ(١^-) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{١ + هـ - ١}{هـ}$ = ١ ،

، د‌َ(١^+) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{\frac{١}{٢} + هـ + \frac{١}{٢}هـ^٢ + \frac{١}{٢} - ١}{هـ}$ = ١

∴ د‌َ(١^-) = د‌َ(١^+)

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س= ١

، د‌َ(س) = $\begin{cases} ١ & س \leq ١ \\ س & س > ١ \end{cases}$

، د‌ً(١^-) = نها$_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{١ - ١}{هـ}$ = صفر

د‌ً(١^+) = نها $\frac{١ + هـ - ١}{هـ}$ = ١

∴ د‌ً(١^-) ≠ د‌ً(١^+)

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق مرة ثانية

(٧) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق مرتين عن س = ١

فهي متصلة عند س = ١ أي نها$_{\text{س} \to ١}$ د(س)

= نها$_{\text{س} \to ١^-}$ = د(١) = ١

، ∵ د(س) = أ س^٢ + ب+ جـ =١

∴ أ + ب + جـ = ١ —— (١)

، ∵ د(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ & \text{س} < ١ \\ \text{أس}^٢ + \text{ب س} + \text{جـ} & \text{س} \geq ١ \end{cases}$

∴ دَ (س) = $\begin{cases} \text{٣س} & \text{س} < ١ \\ \text{٢ أ س} + \text{ب} & \text{س} > ١ \end{cases}$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

∴ نها$_{\text{هـ} \to ٠^-}$ $\frac{\text{د(١+هـ)- د(١)}}{\text{هـ}}$ = نها$_{\text{هـ} \to ٠^+}$

∴ نها$_{\text{هـ} \to ٠^-}$ $\frac{\text{(١+هـ)}^٣ \text{- ١}}{\text{(١+هـ)- ١}}$ = نها$_{\text{هـ} \to ٠^+}$ د(س)

∴ ٣= نها $\frac{\text{أ+ب + جـ + ٢أ هـ + أ هـ}^٢\text{+ ب هـ -١}}{\text{هـ}}$

ولكن من (١) أ + ب + جـ = ١

∴ ٣= نها$_{\text{هـ} \to ٠^+}$ $\frac{\text{١+٢أ هـ + أ هـ}^٢\text{+ ب هـ - ١}}{\text{هـ}}$

٣= نها $\frac{\text{هـ (٢أ+ أ هـ + ب)}}{\text{هـ}}$

∴ ٣ = ٢ أ + ب ∴ ٢أ + ب= ٣ —— (٢)

وتكون دَ (س) = $\begin{cases} \text{٣س}^٢ & \text{س} < ١ \\ ٣ & \text{س} = ١ \\ \text{٢أس + ب} & \text{س} > ١ \end{cases}$

لأن دَ (س) قابلة للاشتقاق عند س= ١

وتكون دَ (س) متصلة عند س = ١

، دَ (١) = نها$_{\text{هـ} \to ٠^-}$ $\frac{\text{٣(١+هـ)}^٢\text{- ٣}}{\text{هـ}}$

= نها$_{\text{هـ} \to ٠^+}$ $\frac{\text{٢(١+هـ) + ب-٣}}{\text{هـ}}$

∴ ٢أ = ٦ ∴ أ = ٣ بالتعويض في (٢)

∴ ٦+ ب = ٣ ∴ ب = -٣

بالتعويض في (١) ∴ ٣- ٣+ جـ = ١

∴ جـ = ١

(٨) بحث اتصال الدالة عند س = ١

د(١) = ١ ، د(١$^-$) = ١ ، د (١$^+$) =١

∴ نها$_{\text{س} \to ١}$ د(س) =١= د (١) ∴ الدالة متصلة

بحث الاشتقاق : دَ(١$^-$) = صفر

، دَ (١$^+$) = صفر ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

عند س = ١ ، دَ (١) = ٠

(٩) د(١) = ٢(١)^٢- ٣ =-١

∴ دَ(١$^-$) = نها$_{\text{هـ} \to ٠^+}$ $\frac{\text{هـ (٤+٢هـ)}}{\text{هـ}}$ = ٤ —— (١)

دَ(١$^-$) = ٤ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق

∴ فهي متصلة عند س =١

(١٠) بالقسمة المطولة ينتج أن :

د(س) = $\frac{\text{(س-٣) (س}^٢\text{+٢س+١)}}{\text{س-٣}}$

= س^٢+٢س+١ ، نها$_{\text{س} \to ٣}$ س^٢+٢س+١ = ١٦

∴ أ = ١٦ ∴ د(س) = س^٢+٢س+١

دَ (س) = ٢س+٢ ∴ دَ (٣) = ٨

د(٣) = ١٦ ∴ النقطة (٣، ١٦)

∴ ميل العمودى = - $\frac{١}{٨}$ ∴ معادلة العمودى

ص- ١٦= - $\frac{١}{٨}$ (س- ٣)

٨ ص + س = ١٣١

(١) ٢س + ٢ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ - ٥ + ٣ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٥ - ٢س}}{\text{٢ص + ٣}}$

(٢) ٢س + (س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ص × ١) - ٣ص^{٢} $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٢س + ص}}{\text{٣ص}^{٢}\text{ - س}}$

∴ صَ عند (٢، ٣) = $\frac{\text{٢×٢+٣}}{\text{٣×٩-٢}} = \frac{٧}{٢٥}$

(٣) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ر}}$ = صَ = س^{٤} + ٣س^{٣} - ٦س^{٢} + ٧

∴ صً = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س

∴ صً = -٤ + ٩ + ١٢ = ١٧

(٤) ٣ص^{٢} صَ = $\frac{\text{(س}^{٢}\text{+١)×٠ - ٢×٢س}}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}}$

٣ص^{٢} صَ = $\frac{\text{-٤س}}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}}$

ص^{٣} = $\left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}\text{+١}}\right)^{٢}$ = $\frac{٤}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}}$

الطرف الأيمن = ٣ص^{٢} صَ + س ص^{٣} = ٠

$\frac{\text{-٤س}}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}} + \frac{٤}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}}$ = صفر

(٥) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ جـ (س - جـ)

الأيمن = ٨جـ^{٣}(س - جـ)^{٣} - ٤س جـ (س - جـ)^{٢}

× ٢ جـ (س - جـ) + ٨ جـ^{٢} (س - جـ)^{٤}

= ٨جـ^{٢}(س - جـ)^{٣} [جـ - س + س - جـ] = صفر

(٦) س ص = أ س^{٢} + ب

س صَ + ص × ١ = ٢أ س ، س صً + صَ × ١ + صَ = ٢أ

∴ س صً + ٢صَ = ٢أ

(٧) ٦ص^{٢} صَ = ٦س

ص^{٢} صً + صَ × ٢ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ١

∴ ص^{٢} صً + ٢ص(صَ)^{٢} = ١

ص^{٢} صَ + ٢ص = $\frac{١}{\text{ص}}$

(٨) صَ $\sqrt{\text{١ + س}^{٢}}$ + $\frac{\text{ص س}}{\sqrt{\text{١ + س}^{٢}}}$ = ٠

(١ + س^{٢}) صَ + س ص = ٠

∴ ٢س صَ + صً (١ + س^{٢}) + س + ص س = ٠

∴ (١ + س^{٢}) صً + ٣س صَ + ص = ٠

(٩) ∵ ٣ص جا س + ٥ص^{٢} جتا س - س^{٣} = ٠

٣ (ص جتا س + جا س $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$) + ٥

[ص^{٢}(- جا س) + جتا س × ٢ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$] - ٣س^{٢} = ٠

(٣جا س + ١٥ص جتا س) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٥ ص^{٢} جا س

- ٣ص جتا س + ٣ س^{٢}

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٥ص}^{٢}\text{ جا س - ٣ص جتا س + ٣س}^{٢}}{\text{٣جا س + ١٠ص جتا س}}$

(١٠) ∵ س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٢٠٠ ---- (١)

٢س + ٨ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{- س}}{\text{٤ ص}}$ —— (٢)

وعند (٢، ٢) ∴ صَ = - $\frac{١}{٤}$ —— (٣)

∴ معادلة المماس

(ص - ٢) = - $\frac{١}{٤}$ (س - ٢)

معادلة العمودي ص - ٢ = ٤(س - ٢)

(١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤س^{٣} + ٦س

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،-٢)}$ = ٤×١ + ٦×١ = ١٠

(٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{٢\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،١)} = \frac{-١}{٢}$

(٣) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى س

∴ ٢س - (س × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص×١) + ٢ص × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (- س + ٢ص) ص - ٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص - ٢س}}{\text{٢ص - س}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(٣،٦)} = \frac{٣-١٢}{٦-٦} = \frac{-٩}{٠}$ = غير معرف

(٤) لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ صفر = (س-١) (س+٢) (س-٣)

∴ س = ١ أ، س = -٢ أ، س = ٣

∴ نقط التقاطع هى (١،٠) ، (-٢،٠) ، (٣،٠)

∵ ص = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٦

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} - ٤س - ٥

∴ ميل المماس عند (١،٠) م$_{١}$ = ٣-٤-٥ = -٦

∴ ميل المماس عند (-٢،٠) م$_{٢}$ = ١٢+٨-٥ = ١٥

∴ ميل المماس عند (٣،٠) م$_{٣}$ = ٢٧-١٢-٥ = ١٠

(٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢} - ٢س ولكن ميل المماس = ظا هـ

∴ ظا هـ$_{١}$ = ٣-٢ = ١ ق(< هـ$_{١}$) = ٤٥°

∴ س = ١ أ، س = ٤

، ظا هـ$_{٢}$ = ٠-٠ = ٠ ق(< هـ$_{٢}$) = صفر°

(٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٤}{(\text{س}+١)}$

∴ ظا هـ = $\frac{-٤}{(١+١)^{٢}} = \frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ق(< هـ) = ١٣٥°

(٧) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢س + ٢ص × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ - ٢ + ٦ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ص+٦) = ٢-٢س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢-٢س}}{\text{٢ص+٦}}$

عند (٣،-١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٤}{٤}$ = -١

∴ ظا هـ = -١ ∴ ق(< هـ) = ١٣٥°

(٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦س^{٢} - ٦س - ١٢

عندما يكون المماس // محور السينات ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ ٦س^{٢} - ٦س - ١٢ = ٠ بالقسمة ÷ ٦ والتحليل

∴ (س-٢) (س+١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = -١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هى (٢،-١٩) ، (-١،٨)

(٩) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٢س-٣) (٢س-٦) + س^{٢} - ٦س + ٣) × ٢

لاحظ أن مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

∴ صفر = ٤س^{٢} - ١٨س + ١٨ + ٢س^{٢} - ١٢س + ٦

صفر = ٦(س^{٢} - ٥س + ٤) ∴ (س-١) (س-٤) = ٠

أى أن : ٣أ + ٢ب - ٢ = ظا١٣٥° = -١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هى (١، ٢) ، (٤، -٢٥)

(١٠) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{(س-٢)} \times \text{-٢-} \text{(١-٢س)} \times \text{١}}{\text{(س-٢)}^{٢}}$

∵ المماس // المستقيم

∴ ميل المماس = ميل المستقيم

لاحظ أن ميل المستقيم = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{\text{-٣}}{\text{-١}}$ =٣

∴ ٣ = $\frac{\text{٣}}{\text{(س-٢)}^{٢}}$ ∴ (س-٢)^{٢} = ١

∴ (س-٢)= ± ١ ⟸ س=٣ أ، س= ١

من معادلة المنحنى ∴ النقط هى (٣، -٥) ، (١، ١)

(١١) صَ = ٣س^{٢}- ٣

__أولاً:__ ميل المستقيم ٣س+ ص= ٥ هو -٣

∴ ٣س^{٢}-٣ =-٣ ⟸ س= ٠

من معادلة المنحنى ∴ النقطة هى (٠، ٥)

__ثانياً:__ ميل المستقيم س+٩ص- ٤٨= ٠ هو $\frac{\text{-١}}{\text{٩}}$

∴ ميل العمودى هو ٩

∴ ٣س^{٢}-٣ = ٩ ⟸ س^{٢}= ٤ ∴ س = ± ٢

من معادلة المنحنى ∴ النقط هى (٢، ٧) ، (-٢، ٣)

(١٢) ∵ النقطة (١، ٢) ∈ للمنحنى ∴ تحقق معادلته

∴ ٢= أ + ب- ٢+٦

∴ أ+ ب = -٢ ـــــ (١)

صَ= ٣أ س^{٢}+ ٢ب س -٢

ميل المماس عند (١، ٢) هو م = ٣أ + ٢ب- ٢

∴ م = ظا هـ ⟸ ٣أ + ٢ب- ٢= ظا $\frac{\text{٣ ط}}{\text{٤}}$

∴ ٣أ+ ٢ ب = ١ ـــ (٢)

بضرب طرفى (١) × -٢ والجمع مع طرفى (٢)

∴ أ = ٥ من (١) ∴ ب =- ٧

(١٣) المنحنى الأول = صَ = ٣أ س^{٢} + ب

ميل المماس عند (-١، ٢) م$_{١}$ = ٣أ+ ب

المنحنى الثاني = صَ = ٢ جـ س- ١

ميل المماس عند (-١، ٢) م$_{٢}$ = -٢جـ - ١

∵ المماس مشترك ∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$

٣ أ+ ب = -٢جـ-١ ـــ (١)

∵ (-١، ٢) ∈ للمنحنى الأول ∴ تحقق معادلته

∴ ٢ = - أ - ب ⟸ أ + ب = -٢

∵ (-١، ٢) ∈ للمنحنى الثانى ∴ تحقق معادلته

∴ ٢= جـ + ١ ⟸ جـ =١

بطرح (٢) من (١) ∴ ٢أ = -٢ جـ +١

∴ ٢أ = -١ ، أ = $\frac{\text{-١}}{\text{٢}}$ من (٢) ∴ ب = $\frac{\text{-٣}}{\text{٢}}$

(١٤) [أ] صَ = ٣س^{٢}+ ٤س-٤

ميل المماس م = صَ$_{(١، -٤)}$ = ٣

∴ متجه إتجاه المماس هو (١، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى $\overleftarrow{ر}$= (١، -٤) + ك (٣، ١)

ميل العمودى = $\frac{\text{-١}}{\text{٣}}$

∴ متجه إتجاه العمودى هو (٣، -١)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى $\overleftarrow{ر}$= (١، -٤) + ك (٣، -١)

[ب] ص' = ((١ - س) × ١ - (١ + س) × -١) ÷ (١ - س)^٢

ص'(٢ ، -٣) = ٢ ÷ ١ = ٢

معادلة المماس هى ص + ٣ = ٢(س - ٢)

أى: ٢س - ص - ٧ = ٠

معادلة العمودى هى ص + ٣ = - ١/٢ (س - ٢)

أى : س + ٢ص + ٤ = ٠

[ج] عندما س = ٢أ ∴ ص = ٨أ^٣ ÷ (٤أ^٢ + ٤أ^٢) = أ

∴ النقطة هى (٢أ ، أ)

ص' = (-٨أ^٣ × ٢س) ÷ (٤أ^٢ + ٤أ^٢)^٢

∴ ميل المماس عند (٢أ ، أ) م = -٣٢أ^٤ ÷ ٦٤أ^٤ = -١/٢

∴ متجه إتجاه المماس هو (٢ ، -١)

∴ متجه إتجاه العمودى هو (١ ، ٢)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى ر = (٢أ ، أ) + ك (٢ ، -١)

∴ المعادلة المتجهة للعمودى هى ر = (٢أ ، أ) + ك (١ ، ٢)

[ء] بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢س + ٢ص ص' + ٢ - ٣ص' = ٠

∴ ص' = (-٢س - ٢) ÷ (٢ص - ٣)

ميل المماس م = ص'(-٢ ، ١) = -٢

معادلة المماس هى ص - ١ = -٢(س + ٢)

أى: ٢س + ص + ٣ = ٠

معادلة العمودى هى ص - ١ = ١/٢ (س + ٢)

أى : س - ٢ص + ٤ = ٠

[هـ] عندما س = ٣ ∴ ص = -٨

∴ النقطة هى (٣ ، -٨)

ص' = ٣س^٢ - ٦س - ١

ميل المماس م = ٢٧ - ١٨ - ١ = ٨

∴ متجه إتجاه المماس هو (١ ، ٨)

∴ المعادلة المتجهة للمماس هى ر = (٣ ، -٨) + ك (١ ، ٨)

∴ متجه إتجاه العمودى هو (٨ ، -١)

∴ المعادلة المتجهة للعمودى هى ر = (٣ ، -٨) + ك (٨ ، -١)

(١٥) ص' = ٢ - ٥س^٢

ص'(١ ، ١/٣) = ٢ - ٥ = -٣

∴ ميل المماس = -٣ ∴ ميل العمودى = ١/٣

∴ معادلة العمودى هى ص - ١/٣ = ١/٣ (س - ١)

أى : س - ٣ص = ٠

∵ (٠ ، ٠) تحقق معادلة العمودى

∴ فهو يمر بنقطة الأصل

(١٦) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س ∴ ٢ص ص' = ٢٠

∴ ص ص' = ١٠

∵ المماس يصنع مع السينات زاوية ط/٤ = ٤٥°

∴ ص' = ظا ٤٥° = ١ ∴ ص = ١٠

من معادلة المنحنى: س = ٥ ∴ النقطة هى (٥ ، ١٠)

∴ معادلة المماس هى : ص - ١٠ = ١ × (س - ٥)

أى : س - ص - ٥ = ٠

(١٧) بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢س + ٢ص ص' = ٠ ⟸ ص' = -س/ص

متجه إتجاه المستقيم هو (٣ ، -٢) ∴ ميله = -٢/٣

∴ المماس // المستقيم ∴ ميل المماس = ميل المستقيم

∴ -س/ص = -٢/٣ ∴ ص = ٣/٢ س

بالتعويض فى معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ($\frac{٣}{٢}$ س)^{٢} = ٥٢ ⟸ ٣س^{٢} = ٥٢×٤

∴ س^{٢} = ١٦ ⟸ س = ± ٤ ، ص = ± ٦

∴ النقطة هى (± ٤ ، ± ٦)

معادلة المماس هى : ص- ٦ = $\frac{-٢}{٣}$ (س-٤)

أى : ٢س+ ٣ص- ٢٦ = ٠

معادلة المماس الثانى هى : ص+ ٦ = $\frac{-٢}{٣}$ (س+٤)

أى : ٢س+ ٣ص+ ٢٦ = ٠

(١٨) صَ = ٤س^{٣} – ٣

ميل المستقيم = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٢٩}$

∵ المماس ⊥ المستقيم ∴ ميل المماس = ٢٩

∴ ٢٩ = ٤س^{٣} – ٣ ⟸ س^{٣} = ٨

∴ س = ٢ من معادلة المنحنى ∴ ص= ١٠

∴ معادلة المماس هى : ص- ١٠ = ٢٩ (س-٢)

أى : ٢٩س- ص- ٤٨ = ٠

(١٩) المنحنى الأول صَ = ٤س- ٣

المنحنى الثانى صَ = ٢س- ٣ عند النقطة (١، ٧)

ميل المماس للمنحنى الأول م$_{١}$ = ٤-٣= ١

ميل المماس للمنحنى الثانى م$_{٢}$ = ٢-٣ = -١

∴ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ١ × -١ = -١

∵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = -١ ∴ المماسان متعامدان

أى أن المنحنيان على التعامد عند النقطة (١، ٧)

لاحظ أن (١، ٧) تحقق المعادلتين فهى نقطة تقاطع

(٢٠) في البداية نوجد نقطة التقاطع

∴ س^{٢}- س+٢ = ٣س- س^{٢}

∴ ٢س^{٢}- ٤س + ٢ = ٠

أى أن : س^{٢}- ٢س + ١ = ٠

(س-١)^{٢} = ٠ س-١ = ٠ ∴ س= ١

∴ المنحنيان يتقاطعان في نقطة واحدة

بالتعويض في أى من المنحنيين ∴ ص= ٢

∴ نقطة التقاطع هى (١، ٢)

المنحنى الأول ص= س^{٢}- س+٢

∴ صَ = ٢س- ١

ميل المماس عند (١، ٢) م$_{١}$ = ٢-١= ١

المنحنى الثانى ص= ٣س- س^{٢}

∴ صَ = ٣- ٢س

ميل المماس عند (١، ٢) م$_{٢}$ = ٣- ٢= ١

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ∴ المنحنيان تماسان

معادلة المماس المشترك

ص- ٢ = ١× (س-١) أى : س- ص+١ = ٠

(١) بإجراء الإشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

∴ م س× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ + س× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ +ص× $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ +٢ص× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

عند النقطة (-١، ٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠,١

∴ ٢ ×-٢× ٠,١+(-١)× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ +٣× ٠,١+٢×٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

∴ ٥ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = -٠,١ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = -٠,٠٢

(٢) ءص/ءن = ٢س × ءس/ءن + ٤ × ءس/ءن

∵ سرعة الإحداثي الصادي = ضعف سرعة الإحداثي السيني

∴ ءص/ءن = ٢ × ءس/ءن

∴ ٢ × ءس/ءن = ٢س × ءس/ءن + ٤ × ءس/ءن

بقسمة الطرفين ÷ ءس/ءن ∴ س = -١

من معادلة المنحنى ∴ ص = -٦

∴ النقطة هي (-١ ، -٦)

(٣) بإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة إلى ن

∴ ٢س × ءس/ءن + ٢ص × ءص/ءن + ٤ ءس/ءن - ٨ ءص/ءن = ٠

∵ ءص/ءن = ءس/ءن بالقسمة على أي منها

∴ ٢س + ٢ص + ٤ - ٨ = ٠

∴ ص = ٢ - س ، من معادلة المنحنى

∴ س^٢ + (٢ - س^٢) = ٤س - ٨(٢ - س) = ١٠٨

∴ ٢س^٢ + ٨س - ١٢٠ = ٠

∴ س^٢ + ٤س - ٦٠ = ٠

∴ (س + ١٠)(س - ٦) = ٠

∴ س = -١٠ أ، س = ٦

من معادلة المنحنى ص = ١٢ أ، ص = -٤

∴ النقط هي (-١٠ ، ١٢) أ، (٦ ، -٤)

(٤) نفرض أن الطول س ، العرض (س - ٢٠)

∵ الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ث

∴ ءس/ءن = -٠,٠٢٥ عندما س - ٢٠ = ٨٠

أى ان : ءس/ءن = -٠,٠٢٥ عندما س = ١٠٠

نفرض أن المساحة م = س(س - ٢٠)

∴ م = س^٢ - ٢٠ س

بإجراء الإشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ ءم/ءن = ٢س. ءس/ءن - ٢٠ ءس/ءن

∴ ءم/ءن = ٢ × ١٠٠ × -٠,٠٢٥ - ٢٠ × -٠,٠٢٥

= -٥ + ٠,٥ = -٤,٥ سم^٢/ث

(٥) مساحة الموجة الدائرية م = ط نق^٢ حيث ط ثابت

∴ ءم/ءن = ٢ ط نق × ءنق/ءن

∵ ءنق/ءن = ٢ سم/ث

بعد ١٠ ثانية نق = صفر + ٢ × ١٠ = ٢٠

لاحظ أن نصف قطر الموجة في البداية = صفر

∴ ءم/ءن = ٢ط × ٢٠ × ٢ = ٨٠ ط سم^٢/ث

(٦) نفرض أن الطرف السفلى للسلم يبتعد عن الحائط بمقدار س

وأن الطرف العلوى للسلم يبتعد عن الأرض بمقدار ص

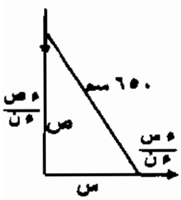
∴ سرعة الطرف السفلى ءس/ءن = + ٣٠ سم/ث

، سرعة الطرف العلوى ءص/ءن

∴ ءس/ءن = + ٣٠ سم/ث عندما س = ٢٥٠ سم

المطلوب ءص/ءن

من الشكل



س^٢ + ص^٢ = (٦٥٠)^٢

∴ ٢س. ءس/ءن + ٢ص. ءص/ءن = ٠

∴ ءص/ءن = - س/ص . ءس/ءن ----- (١)

عندما س = ٢٥٠

∴ ص^٢ = (٦٥٠)^٢ - (٢٥٠)^٢ ∴ ص = ٦٠٠

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\frac{٢٥٠}{٦٠٠} \times ٣٠ = -\frac{٢٥}{٢}$ سم/ق

عندما $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

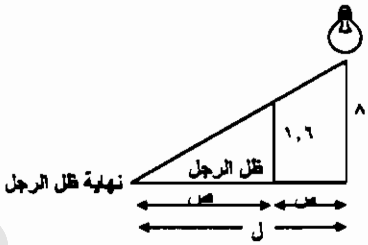
من (١) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ١$ $\therefore$ ص = س

$\therefore$ س^٢ + ص^٢ = (٦٥٠)^٢

$\therefore$ ٢ص^٢ = (٦٥٠)^٢

$\therefore$ ص = $\frac{٦٥٠}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٣٢٥\sqrt{٢}$ سم

(٧) [أ]



نفرض أن الرجل بعد عن الحائط بمقدار س

$\therefore$ سرعة الرجل $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$ متر/ق

ونفرض أن طول ظل الرجل = ص

$\therefore$ المطلوب معدل إزدياد طول الرجل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

من تشابه المثلثين بالشكل $\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س+ص}} = \frac{١,٦}{٨}$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س+ص}} = \frac{١}{٥} \Leftarrow$ ٤ص = س

$\therefore ٤\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ متر/ق

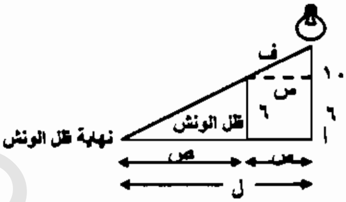
[ب] نفرض أن نهاية ظل الرجل تبعد عن الحائط بمقدار ل

$\therefore$ ل = س + ص

$\therefore \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$ متر/دقيقة

(٨) [أ]



نعوض أن الونش يبعد عن النقطة الثابتة أ (أسفل المصباح) بمقدار س

$\therefore$ سرعة الونش $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٥$ متر/ث

لاحظ أن الونش يتحرك في اتجاه أ أي أن س تتناقص فتكون $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ سالبة .

المطلوب : معدل تحرك نهاية ظل الونش أي $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

من الشكل $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{١٠}{١٦} \Leftarrow$ ل = $\frac{٨}{٥}$ س

$\therefore \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \frac{٨}{٥} \times -٥ = -٨$ متر/ث

[ب] المطلوب : معدل تحرك طول ظل الونش أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

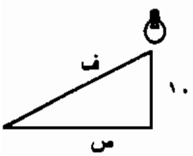
من التشابه $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{٦}{١٦} \Leftarrow$ ص = $\frac{٣}{٨}$ ل

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٨} \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٨} \times -٨ = -٣$ متر/ث

[ج] المطلوب $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ عندما س = ١٠ متر

من الشكل : ف^٢ = س^٢ + ١٠٠



$\therefore ٢\text{ف} \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{س}}{\text{ف}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

عندما س = ١٠ $\Leftarrow$ ف^٢ = ٢٠٠ $\therefore$ ف = ١٠$\sqrt{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{١٠}{١٠\sqrt{٢}} \times -٥ = -\frac{٥}{٢}\sqrt{٢}$ متر/ث

(٩) ح = ط نق$_١^٢$ ـ ط نق$_٢^٢$ = ط (نق$_١^٢$ ـ نق$_٢^٢$)

$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ط (٢نق$_١$ $\frac{\text{ءنق}_١}{\text{ءن}}$ ـ ٢ نق$_٢$ $\frac{\text{ءنق}_٢}{\text{ءن}}$)

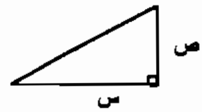
= ط (٢×٧× ـ٠,١ ـ ٢×٤×٠,٢)

$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ـ٣ط سم^٢/ث

(١٠) بعد ن ثانية يكون :

س = ٨ - ١ × ن

ص = ٦ + ٢ × ن



مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س ص

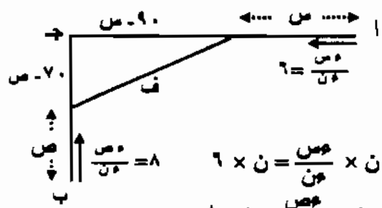
م = $\frac{١}{٢}$ (٨ - ن) (٦ + ٢ن)

∴ م = ٢٤ + ٥ ن - ن^٢

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٥ - ٢ ن

بعد دقيقتين ∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٥ - ٢×٢ = ١ سم^٢/ ث

(١١)



س = ن × $\frac{دس}{دن}$ = ن × ٦

، ص = ن × $\frac{دص}{دن}$ = ن × ٨

من الشكل : ف^٢ = (٩٠ - س)^٢ + (٧٠ - ص)^٢

= (٩٠ - ٦ن)^٢ + (٧٠ - ٨ن)^٢

∴ ف^٢ = ١٠٠ (ن^٢ - ٢٢ن + ١٣٠) —— (١)

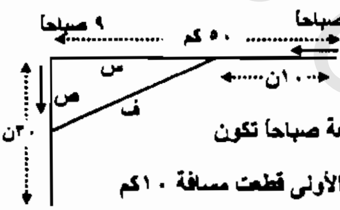
∴ ٢ ف . $\frac{دف}{دن}$ = ١٠٠ (٢ن - ٢٢)

∴ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{١٠٠}{ف}$ (ن - ١١)

عندما ن = ٨ من (١) ∴ ف = ٣٠ $\sqrt{٢}$

∴ $\frac{دف}{دن}$ = $\frac{١٠٠}{٣٠\sqrt{٢}}$ (٨ - ١١) = - ٥ $\sqrt{٢}$ متر/ ث

(١٢)



في التاسعة صباحاً تكون

السفينة الأولى قطعت مسافة ١٠كم

فتكون المسافة بينها وبين الميناء ٥٠كم

وتكون إزاحة الأولى ١٠ن و إزاحة الثانية ٣٠ ن

ف^٢ = س^٢ + ص^٢

∴ ف^٢ = (٥٠ - ١٠ن)^٢ + (٣٠ن)^٢

∴ ف^٢ = ١٠٠٠ن^٢ - ١٠٠٠ن + ٢٥٠٠ —— (١)

∴ ٢ ف $\frac{دف}{دن}$ = ٢٠٠٠ن - ١٠٠٠

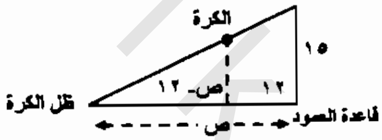
في الساعة العاشرة صباحاً تكون ن = ١

من (١) ∴ ف^٢ = ٢٥٠٠ ⟸ ف = ٥٠

∴ ٢×٥٠ $\frac{دف}{دن}$ = ٢٠٠٠ - ١٠٠٠

∴ $\frac{دف}{دن}$ = ١٠ كم / ساعة (الإشارة موجبة أي أنهما يتباعدان)

(١٣)



المطلوب هو : $\frac{دص}{دن}$

من الشكل $\frac{ص - ١٢}{ص}$ = $\frac{ف}{١٥}$

∴ ص ف = ١٥ ص - ١٨٠

ص (ف - ١٥) = - ١٨٠

∴ ص = - $\frac{١٨٠}{ف - ١٥}$

∴ $\frac{دص}{دن}$ = + $\frac{١٨٠}{(ف - ١٥)^٢}$ × $\frac{دف}{دن}$

عند منتصف الثانية الأولى

المسافة المقطوعة ف = السرعة $\frac{دف}{دن}$ عند منتصف تلك الثانية

∴ $\frac{دص}{دن}$ = $\frac{١٨٠}{(ف - ١٥)^٢}$ × ٥ = ٩ مترات تقريباً

الجواب تقريبي لأننا اعتبرنا أن سرعة الكرة ثابتة تقريباً

(١٤) [أ] نفرض أن نصف القطر الخارجي نق$_١$

و أن نصف القطر الداخلي نق$_٢$

∴ ح = $\frac{٤}{٣}$ ط (نق$_١^٣$ - نق$_٢^٣$)

∴ $\frac{دح}{دن}$ = $\frac{٤}{٣}$ ط (٣ نق$_١^٢$ $\frac{د نق_١}{دن}$ - ٣ نق$_٢^٢$ $\frac{د نق_٢}{دن}$)

= $\frac{٤}{٣}$ ط × ٣ (نق١^{٢} $\frac{ءنق١}{ءن}$ - نق٢^{٢} $\frac{ءنق٢}{ءن}$)

ولكن حجم المادة ثابت ∴ $\frac{ءح}{دن}$ = صفر

∴ نق١^{٢}. $\frac{ءنق١}{ءن}$ = نق٢^{٢}. $\frac{ءنق٢}{ءن}$

∴ ٨١ $\frac{ءنق١}{ءن}$ = ٩ × ١

∴ $\frac{ءنق١}{ءن}$ = $\frac{١}{٩}$ سم / ث

[ب] مساحة السطح الخارجي م = ٤ ط نق١^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٤ط × ٢ نق × $\frac{ءنق١}{ءن}$

= ٤ ط × ٢ × ٩ × $\frac{١}{٩}$

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ٨ ط سم^{٢}/ ث

[ج] نفرض أن سمك مادة الكرة س سم

∴ س = نق١ − نق٢

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{ءنق١}{ءن}$ - $\frac{ءنق٢}{ءن}$

= $\frac{١}{٩}$ - ١ = - $\frac{٨}{٩}$ سم / ث

(١٥) نفرض أن عرض القاعدة س فيكون طولها

(س+٢) ويكون ارتفاع متوازى المستطيلات ٣ س

حجم متوازى المستطيلات ح= س(س+٢) × ٣س

∴ ح = ٣س^{٣} + ٦س^{٢}

∴ $\frac{ءح}{ءن}$ = ٩س^{٢}. $\frac{ءس}{ءن}$ + ١٢ س . $\frac{ءس}{ءن}$

∴ ٠,٦ = (٩س^{٢} + ١٢س) × ٠,٠١

∴ ٣س^{٢} + ٤س- ٢٠ = ٠

∴ (س-٢) (٣س+ ١٠) = ٠

∴ س = ٢ أ، س= $\frac{-١٠}{٣}$ مرفوض

∴ الأبعاد هى ٢، ٤، ٦

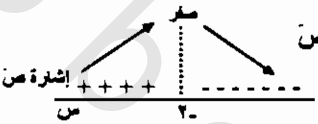
حلول تمرين (٧)

(١) ص= ١-٤س- س^{٢}

صَ = -٤- ٢س

صَ= ٠ عندما س= -٢

نبحث إشارة صَ

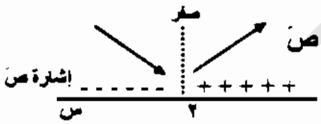


الدالة متزايدة فى]- ∞ ، -٢[ومتناقصة في]-٢، ∞ [

(٢) ص= (س-٢)^{٢} ، صَ = ٢(س-٢)

صَ = ٠ عندما س =٢

نبحث إشارة صَ



متناقصة فى]- ∞ ،٢] ومتزايدة فى [٢، ∞ [

(٣) صَ = ٣(س+٤)^{٢} مربع كامل موجب واضح أن

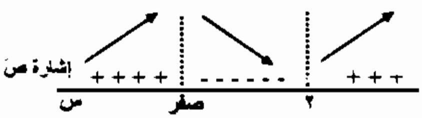
صَ ≥ ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة متزايدة على ح

(٤) د(س) = س^{٣}- ٣س^{٢}

دَ(س) = ٣س^{٢}- ٦س ، دَ(س) = ٣س(س-٢)

دَ(س) = ٠ عندما س= ٠ ، ٢



متزايدة فى] -∞ ،٠[∪] ٢، ∞ [

متناقصة فى] ٠ ،٢[

(٥) ص= $\frac{س}{س-٢}$ حيث س ≠ ٢

صَ = $\frac{(س-٢)×١ - س×١}{(س-٢)^{٢}}$

∴ صَ = $\frac{-٢}{(س-٢)^٢}$ لاحظ المقام موجب

∴ صَ < ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة متناقصة علي ح- {٢}

(٦) ص = $\frac{١}{٣}$ س- $\sqrt[٣]{س}$

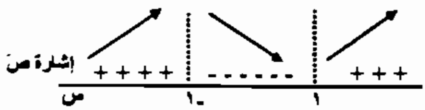
صَ = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$ حيث س ≠ ٠

صَ = $\frac{\sqrt[٣]{س^٢}-١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}}$

صَ = ٠ عندما $\sqrt[٣]{س^٢}$ -١ = ٠

أى ($\sqrt[٣]{س}$ - ١) ($\sqrt[٣]{س}$ +١) = ٠

أى س= ١ أو س= -١



متزايدة فى]-∞،-١[∪]١، ∞[

متناقصة فى]-١ ، ١[

(٧) ص = س | س |

∴ ص = { س² س ≥ ١ ؛ - س² س < ١ }

∴ صَ = { ٢س س > ٠ ؛ - ٢س س < ٠ }

من ذلك فإن صَ ≥ ٠ لكل س ∈ ح

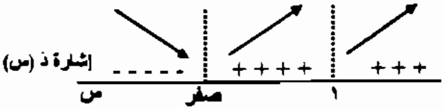
∴ الدالة متزايدة على ح

(٨) د (س) = { س²+٢ س ≤ ١ ؛ ٢ س+١ س > ١ }

∴ دَ (س) = { ٢س س < ١ ؛ ٢ س > ١ }

دَ (س) = ٠ عندما ٦(س+٢) (س-١) = ٠

نبحث إشارة دَ (س)



متناقصة فى]-∞، ٠[

متزايدة فى]٠، ١[∪]١، ∞[

حلول تمرين (٨)

(١) [i] ص= س² + ٤س+ ٦

∴ صَ = ٢س+٤ ، صً = ٢

صَ = ٠ عندما س= $\frac{١}{٢}$ ، صً < ٠

∴ عند س = توجد عظمى محلية هى:

ص = ٢+ $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ القيمة العظمى المحلية = $\frac{٩}{٤}$

[ii] ص = س³- ٣س²+ ٣ س+ ٢

∴ صَ = ٣س²- ٦س+ ٣ ، صً = ٦س- ٦

صَ= ٠ عندما ٣(س-١)² = ٠

أى س = ١ ولكن صً = ٦- ٦ =٠ ،

∴ لا توجد عظمى أو صغرى محلية عند نقطة الإنقلاب صً = ٠

صً = ٠ عندما س = ١

ص = ١-٣+٣+٢ = ٣

∴ النقطة (١، ٣) نقطة إنقلاب

[iv] د(س) = ٢س³+ ٣س²- ١٢ س + ٥

∴ دَ(س) = ٦س²+ ٦س- ١٢

∴ دً (س) = ١٢س + ٦

[vi] د(س) = س (س-١)²

أى : س= -٢ أ، س= ١

عند س= -٢ دً(س) = -١٨<٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية هى د(-٢) = ٢٥

عند س = ١ دً (س) = ١٨> ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية هى د(١) = -٢

∴ القيمة العظمى المحلية = ٥

، الصغرى المحلية = -٢

عند نقطة الإنقلاب دً(س) = ٠

دً (س) = ٠ عندما س = - $\frac{١}{٢}$

د(- $\frac{١}{٢}$) = ٢× - $\frac{١}{٨}$ +٣× $\frac{١}{٤}$ - ٦+٥ = $\frac{٢٣}{٢}$

∴ نقطة الانقلاب هى (- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢٣}{٢}$)

[v] ص= ٢س^{٣}- ٣س^{٢}+ ١

∴ صً = ٦س^{٢}- ٦س ، صً = ١٢س- ٦

صً = ٠ عندما ٦س (س-١) = ٠

أى : س= ٠ أ، س= ١

عند س =٠ صً = -٦<٠

∴ عند س= ٠ توجد قيمة عظمى محلية هى ص=١

∴ القيمة العظمى المحلية= ١، الصغرى المحلية = ٠

عند الانقلاب صً = ٠

∴ ١٢س- ٦ = ٠ ∴ س= $\frac{١}{٢}$

عند س= $\frac{١}{٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ نقطة الانقلاب ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

[viii] ٣ص= س^{٣}-٣س^{٢}- ٩س + ١٥

∴ د(س) = س(س^{٢}-٢س+١)

∴ د(س) = س^{٣}- س^{٢}+ س

دً (س) = ٣س^{٢}- ٤س + ١ ، دً (س) = ٦س- ٤

دً (س) = ٠ عندما ٣س^{٢}- ٤س + ١ = ٠

أى : (٣س-١) (س- ١) = ٠

أى : س= $\frac{١}{٣}$ أ، س= ١

∴ عند س = $\frac{١}{٣}$ توجد قيمة عظمى محلية هى

د($\frac{١}{٣}$) = $\frac{٤}{٢٧}$ عند س= ١ ، دً(١)= ٢ > ٠

∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية هى د(١)=٠

عند نقطة الانقلاب دً(س) = ٠ أى ٦س-٤= ٠

أى س = $\frac{٢}{٣}$ د($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٢}{٢٧}$

[vii] د(س) = $\frac{س^{٢}}{س-١}$ حيث س ≠ ١

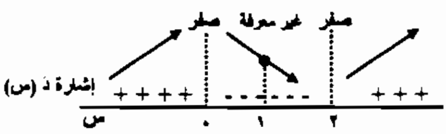
∴ دً (س) = $\frac{(س-١)× ٢س- س^{٢}×١}{(س-١)^{٢}}$

∴ دً(س) = $\frac{س(س-٢)}{(س-١)^{٢}}$

∴ دً(س) = ٠ عندما س(س-٢) = ٠

أى س= ٠ أ، س= ٢

نبحث إشارة دً(س) على خط الأعداد



عند س= ٠ توجد قيمة عظمى محلية هى د(٠) = ٠

عند س=٢ توجد قيمة صغرى محلية هى د(٢) = ٤

دً (س) = $\frac{٢}{(س-١)^{٣}}$ ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

د(٣) = ٢٧ - ٨١+ ٤٥ = -٩

∴ ٣ صَ = ٣س^{٢} - ٦س - ٩

∴ صَ = س^{٢} - ٢س - ٣

صً = ٢س - ٢

صَ = ٠ عندما س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

أى : (س-٣) (س+١) = ٠

أى : س= ٣ أو س= -١

عند س= ٣ ∴ صً = ٤ > ٠

∴ عند س= ٣ توجد صغرى محلية = -١٢

عند س= -١ ∴ صً = -٤ < ٠

∴ عند س= -١ توجد عظمى محلية = $\frac{٢٠}{٣}$

توجد نقطة انقلاب عندما صً = ٠

أى عندما ٢س-٢ = ٠ أى س= ١

عند س =١ ∴ ص = $\frac{٤}{٣}$

∴ نقطة الانقلاب هو (١، $\frac{٤}{٣}$)

[ix] د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س

∴ دَ (س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ١٥

، دً (س) = ٦س - ١٨

دَ (س) = ٠ عندما ٣(س-١) (س-٥)

أى: س= ١ أو س= ٥

عند س = ١ ∴ دً (١) = -١٢ < ٠

∴ توجد عظمى محلية = د(١) = ٧

عند س= ٥ ∴ دً (٥) = ١٢ > ٠

∴ توجد صغرى محلية = د(٥) = -٢٥

عند نقطة الانقلاب دً (س) = ٠ أى س= ٣

∴ نقطة الانقلاب هى (٣، -٩)

[x] د(س) = س + $\frac{٤}{س-١}$ حيث س ≠

∴ دَ (س) = ١ - $\frac{٤}{(س-١)^{٢}}$ = $\frac{(س-١)^{٢}-}{(س-١)^{٢}}$

دً (س) = + $\frac{٨}{(س-١)^{٣}}$

دَ (س) = ٠ عندما (س-١)^{٢} - ٤ = ٠

أى : س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠

أى : (س-٣) (س+١) = ٠

∴ دَ(س) = ٠ عندما س= ٣ أو س= -١

عند س= ٣ ∴ دً (٣) = ١ > ٠

∴ عند س = ٣ توجد صغري محلية = د(٣) = ٥

عند س = -١ ∴ دً (-١) = -١ < ٠

∴ عند س= -١ توجد عظمى محلية = د(-١) = -٣

دً (س) = ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

[xi] د (س) = س|س-٤| .

∴ د (س) = $\begin{cases} \text{س(س-٤)} & \text{حيث س} \leq ٤ \\ \text{- س(س-٤)} & \text{حيث س} > ٤ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢}\text{- ٤س} & \text{، س} \leq ٤ \\ \text{- س}^{٢}\text{+٤س} & \text{، س} > ٤ \end{cases}$

∴ دَ (س) = $\begin{cases} \text{٢س-٤} & \text{، س} < ٤ \\ \text{- ٢س+٤} & \text{، س} > ٤ \end{cases}$

دً (س) = ٠ عندما س =٢

دً (س) = $\begin{cases} ٢ & \text{، س} < ٤ \\ -٢ & \text{، س} > ٤ \end{cases}$

∴ دً (٢) = -٢ < ٠

∴ عند س =٢ توجد قيمة عظمى محلية = د(٢) = ٤

[iii] ص= ٢س^{٣} +٣س^{٢} - ١٢س + ١ فى [-١٠، ١٢]

ولا توجد قيمة صغرى محلية "تصحح إجابة الكتاب"

واضح أن دَ (س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ لا توجد نقطة انقلاب

لاحظ أن عند س = ٤ دَ (٤^+) = ٤

، دَ (٤^-) = -٤

∴ عند س = ٤ توجد نقطة حرجة ولكنها ليست عظمى أو صغرى محلية

(٢) [i] ص = $س^٣$ في [-١، ٣]

∴ صَ = $٣س^٢$

صَ = ٠ عندما س = ٠

عند س = ٠ ص = ٠

عند س = -١ ص = -١

عند س = ٣ ص = ٢٧

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -١، العظمى المطلقة = ٢٧

[ii] ص = $٢س^٣ + ٣س^٢ - ١٢س + ١$ في [-١، ٥]

∴ صَ = $٦س^٢ + ٦س - ١٢$

صَ = ٠ عندما ٦(س-١) (س+٢) = ٠

أي عندما س = ١ أ، س = -٢

عند س = ١ ص = -٦

عند س = -٢ ص = ٢١

عند س = -١ ص = ١٤

عند س = ٥ ص = ٢٦٦

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -٦، العظمى المطلقة = ٢٦٦

∴ صَ = $٦س^٢ + ٦س - ١٢$

صَ = ٠ عندما ٦($س^٢$ + س - ٢) = ٠

أي: ٦(س+٢) (س-١) = ٠

أي: س = -٢ أ، ١

عند س = ١ ∴ ص = -٦

عند س = -٢ ص = ٢١

عند س = -١٠ ص = -١٥٧٩

عند س = ١٢ ص = ٣٧٤٥

∴ القيمة الصغرى المطلقة = -١٥٧٩، العظمى المطلقة = ٣٧٤٥

[iv] ص = $\frac{س}{س-١}$ في [٢، ٤]

∴ صَ = $\frac{(س-١)\times١ - س\times١}{(س-١)^٢} = \frac{-١}{(س-١)^٢}$

نلاحظ أن صَ ≠ ٠

∴ عند س = ٢ ص = ٢

عند س = ٤ ص = $\frac{٤}{٣}$

∴ القيمة الصغرى المطلقة $\frac{٤}{٣}$ ، العظمى المطلقة = ٢

[v] ص = س + $\frac{س}{س+٢}$ في [٠، ٣]

∴ صَ = ١ - $\frac{س}{(س+٢)^٢}$ ، = $\frac{س^٢ + ٤س + ٣}{(س-١)^٢}$

صَ = ٠ عندما $س^٢$ + ٤س + ٣ = ٠

أي: (س+١) (س+٣) = ٠ أي: س = -١ أ، -٣

ولكن {-١، -٣} ⊄ [٠، ٣]

عند س = ٠ ص = $\frac{١}{٢}$

عند س = ٣ ص = ٣ $\frac{١}{٥}$

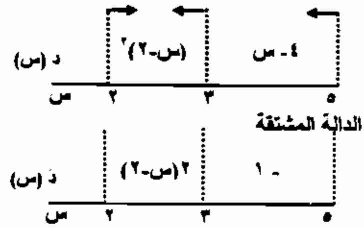
∴ القيمة الصغرى المطلقة $\frac{١}{٢}$ ، العظمى المطلقة $\frac{١٦}{٥}$

$\begin{cases} (س-٢)^٢ & ، س \geq ٣ \\ ٤ - س & ، س < ٤ \end{cases}$

[vi] د(س) =

في [٢، ٥]

هنا يجب تعريف الدالة على خط الأعداد



لاحظ أن دَ(٣) غير موجودة

حيث دَ (٣^+) = ـ١ ، دَ (٣^-) = ٢

أي أن دَ (٣^+) ≠ دَ (٣^-)

دَ(س) = ٠ عندما ٢(س-٢) = ٠

أي س = ٢

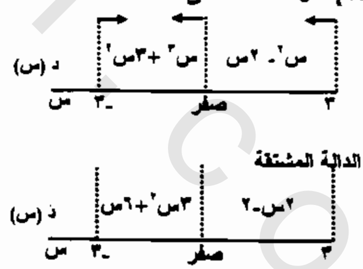
عند س = ٢ د(٢) = ٠

عند س = ٣ د(٣) = ١

عند س = ٥ د(٥) = ـ ١

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ـ١، العظمى المطلقة = ١

[vii] نعرف الدالة على خط الأعداد



دَ(س) = ٠ عندما ٢س-٢ = ٠ أي س= ١

، عندما $٣س^٢$ + ٦س = ٠ أي ٣س (س+٢) = ٠

أي س=٠ أ، س= ـ٢

عند س= ١ د(١) = ـ١

عند س = ٠ د(٠) = ٠

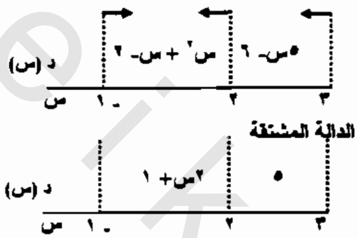
عند= ـ٢ د(ـ٢)= ٤

عند س= ـ٣ د(ـ٣) = ٠

عند س= ٣ د(٣) = ٣

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ـ١ ، العظمى المطلقة = ٤

[viii] نعرف الدالة على خط الأعداد



دَ (س) = ٠ عندما ٢س+ ١ = ٠

أي س = - $\frac{١}{٢}$

عند س = - $\frac{١}{٢}$ د(س) = - ٢ $\frac{١}{٤}$

عند س = ـ١ د(س) = ـ٢

عند س= ٢ د(٢) = ٤

عند س = ٣ د(٣) = ٩

∴ القيمة الصغرى المطلقة = - ٢ $\frac{١}{٤}$ ، العظمى المطلقة =٩

(٣) نفرض أن ص = س + $\frac{١}{س}$ حيث س> ٠

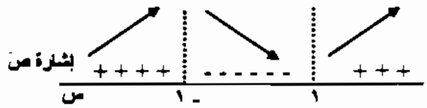
∴ صَ = ١- $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{س^٢-١}{س^٢}$

صَ = ٠ عندما $س^٢$-١ = ٠

أي (س-١) (س+١) = ٠

أي س=١ أ، س= ـ١ ولكن س

نبحث إشارة صَ على خط الأعداد



من إشارة صَ فإن ص أصغر ما يمكن

عندما س = ١

وعندئذ ص = ١ + $\frac{١}{١}$ = ٢

أى أقل قيمة لـ ص = ٢

$\therefore$ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

(٤) $\because$ د(س) = س^{٢} + ل س + م

$\therefore$ القيمة الصغرى = ٣ عندما س = ١

$\therefore$ النقطة (١، ٣) $\in$ لمنحنى الدالة

$\therefore$ ٣ = ١ + ل + م

$\therefore$ ل + م = ٢ —— (١)

دَ(س) = ٢س + ل

عند القيمة الصغرى المحلية دَ(١) = ٠

$\therefore$ ٠ = ٢ + ل $\Leftarrow$ ل = -٢

من (١) $\therefore$ م = ٤

(٥) $\because$ س^{٢}ص + أ س + ب ص = ٠

$\because$ (٢، $\frac{٥}{٢}$) نقطة انقلاب $\therefore$ $\in$ للمنحنى

$\therefore$ ٤ × $\frac{٥}{٢}$ + ٢أ + $\frac{٥}{٢}$ ب = ٠

$\therefore$ ٤أ + ٥ ب = -٢٠ —— (١)

ص(س^{٢} + ب) = - أ س

$\therefore$ ص = $\frac{- أ س}{س^{٢} + ب}$

$\therefore$ صَ = $\frac{أ س^{٢} - أ ب}{(س^{٢} + ب)^{٢}}$

، صً = $\frac{٢ أ س(س^{٢}+ب)(٣ب - س^{٢})}{(س^{٢} + ب)^{٤}}$

$\therefore$ صً = $\frac{٢ أ س(٣ب - س^{٢})}{(س^{٢} + ب)^{٣}}$

$\because$ (٥،٢) نقطة انقلاب

$\therefore$ صً = ٠ عندما س = ٢

$\therefore$ ٠ = $\frac{٤ أ (٣ب - ٤)}{(٤ + ب)^{٣}}$

$\therefore$ ٤ أ (٣ب - ٤) = ٠

$\therefore$ ب = $\frac{٤}{٣}$ ، أ = ٠

من (١) أ = - $\frac{٢٠}{٣}$ ، من (١) ب = -٤

وهذا مرفوض لأنه في هذه الحالة ص غير معرفة عند س = $\pm$ ٢

$\therefore$ ص = $\frac{٢٠ س}{٣(س^{٢} + \frac{٤}{٣})}$ أى أن ص = $\frac{٢٠س}{٣س^{٢} + ٤}$

(٦) نفرض أن عدد الأجهزة الزائدة س وأن الربح ص

الربح = عدد الأجهزة × ربح الجهاز الواحد

$\therefore$ ص = (٥٠ + س) (٣٠ - $\frac{١}{٢}$ س)

$\therefore$ ص = ١٥٠٠ + ٥ س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

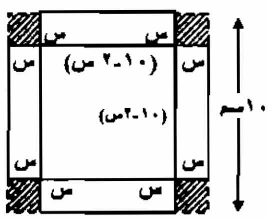
صَ = ٥ - س $\therefore$ صً = -١

صَ = ٠ عندما س = ٥ ، $\because$ صً سالب

$\therefore$ ص أكبر ما يمكن عندما س = ٥

$\therefore$ عدد الأجهزة الذي تحقق أكبر ربح = ٥٠ + ٥ = ٥٥

(٧) نفرض أن طول ضلع المربع المقطوع س



حجم العلبة ح = س(١٠-٢س)^{٢}

ح$'$ = س×٢(١٠-٢س) ×٢+(١٠-٢س)^{٢}×١

∴ ح$'$ = (١٠-٢س) (١٠-٦س)

ح$''$ = (١٠-٢س)×-٦+(١٠-٦س)×-٢

أى أن ح$''$ = ٢٤ س-٨٠

ح$'$ = ٠ عندما (١٠-٢س) (١٠-٦س) = ٠

أى س = ٥ أ، س= $\frac{٥}{٣}$

عند س = ٥ ∴ ح$''$ موجب

، عند س = $\frac{٥}{٣}$ ∴ ح$''$ سالب أى أن ح عظمى

∴ حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما يكون

طول ضلع المربع = $\frac{٥}{٣}$

(٨) نفرض أن العددين هما س، ١٦-س لاحظ أن

مجموعهما ١٦ وأن مجموع مربعيهما هو ص

∴ ص = س^{٢} + (١٦-س)^{٢}

∴ ص = ٢س^{٢}-٣٢س+٢٥٦

ص$'$ = ٤س-٣٢ ، ص$''$ = ٤

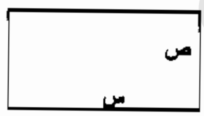
∴ ص$'$ = ٠ عندما ٤س-٣٢ = ٠

أى س = ٨ ∵ ص$''$ موجب

∴ ص أصغر ما يمكن عندما س= ٨

∴ العددان هما ٨ ، ٨

(٩) نفرض أن أبعاد المستطيل س، ص



∴ ٢س+٢ص = ل لاحظ أن ل(طول السلك) ثابت

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (ل-٢س)

نفرض مساحة المستطيل م = س ص

= س× $\frac{١}{٢}$(ل-٢س)

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ل س – س^{٢}

∴ م$'$ = $\frac{١}{٢}$ ل- ٢س ، م$''$ = -٢

م$'$ = ٠ عندما $\frac{١}{٢}$ل- ٢س = ٠

أى س = $\frac{١}{٤}$ ل

∵ م$''$ سالب

∴ م أكبر ما يمكن عندما س= $\frac{١}{٤}$ ل

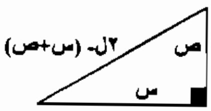
∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (ل- $\frac{٢}{٤}$ل) = $\frac{١}{٤}$ ل

∴ أبعاد المستطيل $\frac{١}{٤}$ل ، $\frac{١}{٤}$ ل

(١٠) نفرض أن طول ضلعى القائمة س، ص

∴ طول الضلع الثالث = ٢ل- (س+ص)

∵ المثلث قائم الزاوية



∴ س^{٢}+ ص^{٢}

= [٢ل- (س+ص)]^{٢}

∴ س^{٢}+ ص^{٢} = ٤ل^{٢}-٤ل(س+ص) + (س+ص)^{٢}

∴ ٤ل ص- ٢س ص = ٤ل^{٢}- ٤ل س

∴ ص = $\frac{٢ل(ل-س)}{(٢ل-س)}$ حيث ل ثابت ----- (١)

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س×ص

= $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{٢ل(ل-س)}{(٢ل-س)}$

∴ م = $\frac{ل^{٢}س-ل س^{٢}}{(٢ل-س)}$

∴ م$'$ = $\frac{(ل^{٢}-٢ل س)(٢ل-س)+(ل^{٢}س-ل س^{٢})}{(٢ل-س)^{٢}}$

∴ م$'$ = $\frac{ل(س^{٢}-٤ل س+٢ل^{٢})}{(٢ل-س)^{٢}}$

م$'$ = ٠ عندما ل(س^{٢}- ٤ل س +٢ل^{٢}) = ٠

أى $س^٢ - ٤ل\,س + ٢ل^٢ = ٠$

$س = \frac{٤ل \pm \sqrt{١٦ل^٢ - ٤\times١\times٢ل^٢}}{٢\times١}$

$س = \frac{٤ل \pm ٢ل\sqrt{٢}}{٢\times١}$

$س = ل(٢ \pm \sqrt{٢})$

ولكن س < ٢ ل طول السلك

∴ $س = ل(٢ - \sqrt{٢})$

من (١) ∴ $ص = ل(٢ - \sqrt{٢})$

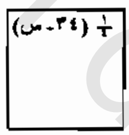
∴ طول الضلع الثالث $= ٢ل(\sqrt{٢} - ١)$

(١١) نفرض أن طول جزئى السلك س، ٣٤ - س

∴ ٢ط نق = س

∴ $نق = \frac{س}{٢ط}$

مساحة الدائرة $م_١ = ط\left(\frac{س}{٢ط}\right)^٢$



∴ $م_١ = \frac{١}{٤ط} س^٢$

محيط المربع = ٣٤ - س

∴ طول ضلعه $= \frac{١}{٤}(٣٤ - س)$

مساحة المربع $م_٢ = \frac{١}{١٦}(٣٤ - س)^٢$

مجموع مساحتى الشكلين $م = م_١ + م_٢$

∴ $م = \frac{١}{٤ط}س^٢ + \frac{١}{١٦}(٣٤ - س)^٢$

∴ $مَ = \frac{١}{٢ط}س + \frac{١}{٨}(٣٤ - س) \times -١$

∴ $مَ = \frac{١}{٢ط}س + \frac{١}{٨}(س - ٣٤)$

$مَ = \left(\frac{١}{٢ط} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}\right)س - \frac{١٧}{٤}$

$مَ = ٠$ عندما $س = \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

$مً = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{ط} + \frac{١}{٤}\right)$ موجب

∴ مجموع مساحتى الشكلين أقل ما يمكن عندما يكون

طول الجزء المثنى على شكل مربع $= \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

وطول الجزء المثنى على شكل دائرة $= ٣٤ - \frac{٣٤ط}{ط + ٤}$

$= \frac{١٣٦}{ط + ٤}$ "يصحح جواب الكتاب"

(١٢) ∵ التكاليف α $ع^٢$

∴ التكاليف = أ $ع^٢$ حيث أ ثابت

∴ $٢٥ = أ \times (٢٥)^٢$ ∴ $أ = \frac{١}{٢٥}$

∴ التكاليف $= \frac{١}{٢٥}ع^٢$

التكاليف الفعلية في الساعة $= \frac{١}{٢٥}ع^٢ + ١٠٠$

لاحظ أن التكلفة الإضافية ١٠٠

∴ تكاليف الكيلومتر الواحد ت $= \left(\frac{١}{٢٥}ع^٢ + ١٠٠\right) \div ع$

حيث ع هى المسافة المقطوعة من الساعة

∴ $ت = \frac{١}{٢٥}ع + \frac{١٠٠}{ع}$

∴ $تَ = \frac{١}{٢٥} - \frac{١٠٠}{ع^٢}$

$تً = + \frac{١٠٠\times٢ع}{ع^٤} = \frac{٢٠٠}{ع^٣}$

$تَ = ٠$ عندما $\frac{١}{٢٥} - \frac{١٠٠}{ع^٢} = ٠$

أى $ع^٢ = ٢٥٠٠$ $ع = \pm ٥٠$

عندما ع = ٥٠ ∴ تً موجب

∴ التكلفة للكيلومتر الواحد أقل ما يمكن عندما تكون

سرعة القاطرة ٥٠كم/ ساعة

(١٣) المساحة الكلية = المصلحة الجانبية + مساحة القاعدتين

∴ ٢٤ط = ٢ط نق ع + ٢ (ط نق²)

بالقسمة على ٢ط ∴ $ع = \frac{١٢ - نق^٢}{نق}$

حجم الأسطوانة ح = ط نق² ع

$= ط\,نق^٢ \times \frac{١٢ - نق^٢}{نق}$

∴ $ح = ١٢ ط نق - ط نق^{٣}$

∴ $ح' = ١٢ط - ٣ط نق^{٢}$

$ح'' = -٦ط نق$ سالب دائماً

$ح' = ٠$ عندما $١٢ط - ٣ط نق^{٢}$

أى $نق = \pm ٢$ السالب مرفوض

∴ الحجم أكبر ما يمكن عندما نصف القطر القاعدة = ٢

وارتفاعها $ع = \frac{١٢ - ٤}{٢} = ٤$

أكبر حجم $ح = ط \times (٢)^{٢} \times ٤ = ١٦$ ط سم^{٣}

(١٤) نفرض أن عرض العلبة س

∴ الارتفاع ٢س   الحجم (السعة) = ٩٠٠٠

∴ $س \times ٢س \times ص = ٩٠٠٠$ حيث ص طول قاعدتها

∴ $ص = \frac{٤٥٠٠}{س^{٢}}$

المساحة الكلية = ٢(س ص) + ٢(س×٢س)

+ ٢(ص× ٢س)

$م = ٤س^{٢} + ٦س ص$

∴ $م = ٤س^{٢} + ٦س \times \frac{٤٥٠٠}{س^{٢}}$

$م = ٤س^{٢} + \frac{٤٥٠٠ \times ٦}{س}$

$م' = ٨س - \frac{٤٥٠٠ \times ٦}{س^{٢}}$

$م'' = ٨ + \frac{٤٥٠٠ \times ١٢}{س^{٣}}$ موجب دائماً

$م' = ٠$ عندما $٨س - \frac{٤٥٠٠ \times ٦}{س^{٢}} = ٠$

أى   عندما   س = ١٥

∴ م أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد

١٥، ٢٠، ٣٠

(١٥) نفرض أن نصف القطر نق

∵ مجموع مساحتى الكرة والإسطوانة = ٢٥٠ط

∴ $٤ط نق^{٢} + ٢ط نق ع + ٢ط نق^{٢} = ٢٥٠ ط$

لاحظ المقصود هو المساحة الكلية للاسطوانة بالقسمة على ٢ ط

∴ $نق ع = ١٢٥ - ٣نق^{٢}$

∴ $ع = \frac{١٢٥}{نق} - ٣ نق$

مجموع الحجمين $ح = \frac{٣}{٤} ط نق^{٣} + ط نق^{٢} ع$

∴ $ح = \frac{٣}{٤} ط نق^{٣} + ١٢٥ط نق - ٣ ط نق^{٣}$

∴ $ح' = ٤ط نق^{٢} + ١٢٥ط - ٩ط نق^{٢}$

∴ $ح' = ١٢٥ط - ٥ط نق^{٢}$

$ح'' = -١٠ط نق$ سالب دائماً

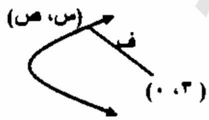
$ح' = ٠$ عندما $٤ط نق - ١٢٥ط - ٥ط نق^{٢} = ٠$

أى عندما $نق = \pm ٥$

ولكن نق = -٥ مرفوض

∴ ح أكبر ما يمكن عندما   نق = ٥

(١٦)



نفرض أن النقطة هى (س، ص) والمسافة ف

∴ $ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}$

∴ $ف^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩ + ص^{٢}$

(س،ص) ∈ للمنحنى   ∴ تحقق معادلته

∴ $ص^{٢} = ٤س + ٥$ —— (١)

∴ $ف^{٢} = س^{٢} - ٦س + ٩ + ٤س + ٥$

∴ $ف = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١٤}$

∴ $ف' = \frac{٢س - ٢}{٢\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١٤}}$

$ف' = ٠$ عندما $٢س - ٢ = ٠$ أى س = ١

$ف'' = \frac{١٣}{(س^{٢} - ٢س + ١٤)^{\frac{٣}{٢}}}$ موجب دائماً

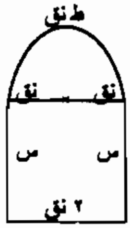
∴ ف أقل ما يمكن عندما س = ١

من (١) ص^{2} = ٩ ∴ ص = ± ٣

∴ النقط هي (١، ٣) ، (١، -٣)

(١٧) نفرض أن نصف قطر الدائرة = نق

وأن طول النافذة = س



محيط النافذة = ٦

∴ ٢نق + ٢س + ط نق = ٦

∴ س = (٦ - ط نق - ٢نق) × $\frac{1}{2}$

مساحة النافذة م = ٢ نق × س + $\frac{1}{2}$ ط نق^{2}

∴ م = نق (٦ - ط نق - ٢ نق) + $\frac{1}{2}$ ط نق^{2}

∴ م = ٦ نق – ٢نق^{2} - $\frac{1}{2}$ ط نق

م' = ٦ - ٤ نق - ط نق

م'' = -٤ - ط سالب دائماً

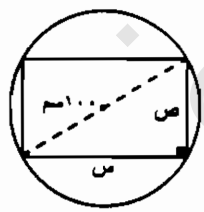
م' = ٠ عندما ٦ - ٤نق - ط نق = ٠

أي نق (٤ + ط) = ٦

∴ نق = $\frac{٦}{ط + ٤}$

م أكبر ما يمكن عندما نصف القطر = $\frac{٦}{ط + ٤}$

(١٨) نفرض أن بعدي المستطيل هما س، ص



من هندسة الشكل س^{2} + ص^{2} = ١٠٠٠٠ —— (١)

نفرض أن قوة الاحتمال ق

∴ ق α س × ص^{2}

∴ ق = أ س ص^{2} حيث أ ثابت

من (١) ص^{2} = ١٠٠٠٠ - س^{2}

∴ ق = أ س (١٠٠٠٠ - س^{2})

∴ ق = ١٠٠٠٠ أ س – أ س^{3}

ق' = ١٠٠٠٠ أ - ٣أ س^{2}

ق'' = -٣أ × ٢س = -٦ أ س سالب

ق' = ٠ عندما ١٠٠٠٠أ - ٣أس^{2} = ٠

أي عندما س^{2} = $\frac{١٠٠٠٠}{٣}$

أي س = ± $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

" الجواب السالب مرفوض حيث س طول "

س = $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$

والبعد الآخر ص = + ١٠٠٠٠ -

= ١٠٠ $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١٠٠\sqrt{٦}}{٣}$

∴ بعدي المستطيل $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠٠\sqrt{٦}}{٣}$ سم

(١٩) [أ]

ص = س^{3} - ٣س^{2} + ٣س

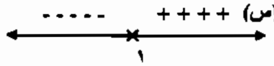
ص' = ٣س^{2} - ٦س + ٣

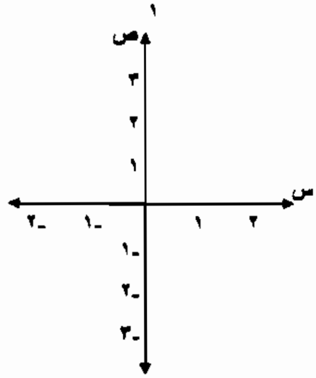
٣(س^{2} - ٢س + ١) = ٣(س - ١)^{2} > ٠ حيث س ≠ ١

ص' = ٠ عندما س = ١ ص'' = ٦ (س - ١)

ص' = ٠ عندما س = ١ ∴ (١، ١) نقطة إنقلاب

إشارة د'(س) ++++ -----





[ب] $\text{ص} = \text{س}^3 + 3\text{س} - 1$

$\text{ص}' = 3\text{س}^2 + 3 = 3(\text{س}^2 + 1) > 0$

$\text{ص}'' = 6\text{س}$

إشارة $\text{ص}''$

- - - - -　×　+ + + +

$\therefore$ (٠ ، -١) نقطة انقلاب

[ج] $\text{ص} = 2\text{س}^3 - 3\text{س}^2$

$\text{ص}' = 6\text{س}^2 - 6\text{س} = 6\text{س}(\text{س} - 1)$

$\text{ص}' = 0$ عندما $\text{س} = 0$ أ، $\text{س} = 1$

إشارة $\text{ص}'$

+ + + +　× (٠)　- - - - -　× (١)　+ + + +

(٠،٠) عظمى محلية ، (١،-١) صغرى محلية

$\text{ص}'' = 12\text{س} - 6 = 6(2\text{س} - 1)$

إشارة $\text{ص}''$

- - - - -　× ($\frac{1}{2}$)　+ + + +

($\frac{1}{2}$ ، - $\frac{1}{2}$) نقطة انقلاب

[ء] $\text{ص} = 3 - 3\text{س}^2 - 2\text{س}^3$

$\text{ص}' = -6\text{س} - 6\text{س}^2$

$= -6\text{س}(1 + \text{س})$

$\text{ص}'' = -6 - 12\text{س} = -6(1 + 2\text{س})$

إشارة $\text{ص}'$

- - - - - -　× (-١)　+ + + +　× (٠)　- - - - - -

إشارة $\text{ص}''$

- - - - -　× (- $\frac{1}{2}$)　+ + + +

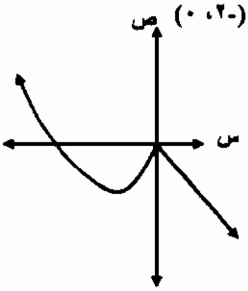
(٠، ٣) عظمى محلية ، (-١، ٢) صغرى محلية

، (- $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{2}$) نقطة انقلاب

[هـ] (-١، -١) صغرى محلية ، (٠،٠) عظمى محلية

نقط مساعدة (٠،٠) ، (-٢، ٠)

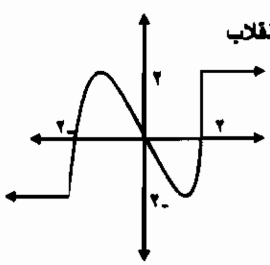
الدالة متصلة



[و] (-١، ٢) عظمى محلية ، (١،-٢) صغرى محلية

(٢،٢) عظمى محلية . (-٢،-٢) صغرى محلية

(٠،٠) نقطة الانقلاب



[ز] د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، س \le ٠ \\ س^{٤} + ٢س & ، س > ٠ \end{cases}$

الدالة متزايدة المنحنى

محدب لأعلى فى الفترة

]-∞ ، ٠[

ولأسفل فى]٠ ، ∞[

(٠،٠) نقطة انقلاب

** نقط مساعدة

(١، ٣) ، (-١،-٣)

[illegible] (٦)

(١) ∫ ٥س . ءس = $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} + ث

(٢) ∫ $\frac{ءس}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$. ءس = $\frac{١}{٨}$ س + ث

(٣) ∫ $\frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}$ س^{٢} . ءس = $\frac{ب^{٢}}{٣أ^{٢}}$ س^{٣} + ث حيث ا ، ب ثوابت

(٤) ∫ (٣س^{٢} - س + ١) = س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + س + ث

(٥) ∫ (٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س - ٥) . ءس

= س^{٤} - ٢س^{٣} + ٤س^{٢} - ٥س + ث

(٦) ∫ (٢س^{٧} - ٦س^{٣} + ٨س + ١) . ءس

= $\frac{١}{٤}$ س^{٨} - $\frac{٣}{٤}$ س^{٤} + ٤س^{٢} + س + ث

(٧) ∫ (س-٢) (س+١) (س-١) . ءس

= ∫ (س-٢) (س^{٢}-١) . ءس

= ∫ (س^{٣} - ٢س^{٢} - س + ٢) . ءس

= $\frac{١}{٤}$ س^{٤} - $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢س + ث

(٨) ∫ $\frac{س^{٢} + م^{٢}س}{س}$. ءس حيث م ثابت

= ∫ (س + م^{٢}) . ءس

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + م^{٢}س + ث

(٩) ∫ (س-أ) (س-ب) . ءس حيث أ، ب ثوابت

= ∫ (س^{٢} - أس - ب س + أ ب) . ءس

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ أ س^{٢} - $\frac{١}{٢}$ ب س^{٢} + أ ب + ث

(١٠) ∫ $\sqrt{س}$ (١ + $\sqrt{س}$) . ءس

= ∫ (س$^{\frac{١}{٢}}$ + س) . ءس

= $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث

(١١) ∫ $\frac{١ + س}{\sqrt{س}}$. ءس = ∫ س$^{-\frac{١}{٢}}$ (١ + س) . ءس

= ∫ (س$^{-\frac{١}{٢}}$ + س$^{\frac{١}{٢}}$) . ءس

= ٢ س$^{\frac{١}{٢}}$ + $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

(١٢) ∫ (س + $\frac{١}{س}$)^{٢} . ءس

= ∫ (س^{٢} + ٢ + س$^{-٢}$) . ءس

= $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + ٢س - س$^{-١}$ + ث

(١٣) ∫ ($\sqrt{س}$ - ١)^{٢} . ءس

= ∫ (س - ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + ١) . ءس

= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - $\frac{٤}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + س + ث

(١٤) ∫ $\frac{ءن}{\sqrt[٣]{ن^{٤}}}$ = ∫ ن$^{-\frac{٤}{٣}}$. ءن

= -٣ ن$^{-\frac{١}{٣}}$ + ث

(١٥) $\int (7\text{س}-3)^{8} \cdot \text{ء س}$ بالضرب $\times \frac{1}{7} \times 7$

$= \frac{1}{7} \times \int 7(7\text{س}-3)^{8} \cdot \text{ء س}$

لاحظ أن: $\int \text{هـ}'(\text{س}) \times [\text{هـ}(\text{س})]^{\text{ن}} \cdot \text{ء س}$

$= \frac{1}{\text{ن}+1} [\text{هـ}(\text{س})]^{\text{ن}+1} + \text{ث}$

المقدار $= \frac{1}{7} \times \frac{1}{9} (7\text{س}-3)^{9} + \text{ث}$

$= \frac{1}{63} (7\text{س}-3)^{9} + \text{ث}$

(١٦) $\int (2-\text{س})^{9} \cdot \text{ء س}$

$= - \int -(2-\text{س})^{9} \cdot \text{ء س}$

$= -\frac{1}{10} (2-\text{س})^{10} + \text{ث}$

(١٧) $\int \left(\frac{\text{س}+2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \text{ء س}$

$= 3 \times \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \text{ء س}$

$= 3 \times \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3}\text{س} + \frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{4}} + \text{ث}$

$= \frac{1}{3} \left(\frac{\text{س}+2}{3}\right)^{\frac{5}{4}} + \text{ث}$

(١٨) $\int (\text{س}^{2}+2)^{3} \cdot \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^{6} + 3\times\text{س}^{4}\times 2 + 3\times\text{س}^{2}\times 4 + 8) \cdot \text{ء س}$

$= \frac{1}{7}\text{س}^{7} + \frac{6}{5}\text{س}^{5} + 4\text{س}^{3} + 8\text{س} + \text{ث}$

(١٩) $\int \sqrt{2\text{س}+7} \cdot \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \int 2(2\text{س}+7)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ء س}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (2\text{س}+7)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{1}{3} (2\text{س}+7)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(٢٠) $\int \frac{5 \, \text{ء س}}{(2\text{س}-1)^{5}} = 5 \int (2\text{س}-1)^{-5} \cdot \text{ء س}$

$= 5 \times \frac{1}{2} \int 2(2\text{س}-1)^{-5} \cdot \text{ء س}$

$= \frac{5}{2} \times -\frac{1}{4} (2\text{س}-1)^{-4} + \text{ث}$

$= -\frac{5}{8} (2\text{س}-1)^{-4} + \text{ث}$

(٢١) $\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt[3]{(\text{س}+9)^{2}}} = \int (\text{س}+9)^{-\frac{2}{3}} \cdot \text{ء س}$

$= 3(\text{س}+9)^{\frac{1}{3}} + \text{ث}$

(٢٢) $\int \text{س}^{5} \left(1-\frac{3}{\text{س}}\right)^{5} \cdot \text{ء س}$

$= \int \left|\text{س}\left(1-\frac{3}{\text{س}}\right)\right|^{5} \cdot \text{ء س}$

$= \int (\text{س}-3)^{5} \cdot \text{ء س} = \frac{(\text{س}-3)^{6}}{6} + \text{ث}$

(٢٣) $\int \frac{\text{س}^{3}-27}{\text{س}-3} \cdot \text{ء س}$

$= \int \frac{(\text{س}-3)(\text{س}^{2}+3\text{س}+9)}{(\text{س}-3)} \cdot \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^{2}+3\text{س}+9) \cdot \text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \frac{3}{2}\text{س}^{2} + 9\text{س} + \text{ث}$

(٢٤) $\int (\text{س}) \sqrt{\frac{2}{\text{س}^{2}} - \frac{3}{\text{س}}} \;) \cdot \text{ء س}$

$= \int \sqrt{\text{س}^{2}\left(\frac{2}{\text{س}^{2}} - \frac{3}{\text{س}}\right)} \cdot \text{ء س}$

$= \int \sqrt{2-3\text{س}} \cdot \text{ء س}$

$= -\frac{1}{3} \int -3(2-3\text{س})^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ء س}$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} (2-3\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

$= -\frac{2}{9} (2-3\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

(٢٥) $\int (2\text{س}+11)\sqrt{2\text{س}+11} \cdot \text{ء س}$

= ∫ (٢س + ١١)^(٣/٢) . ءس

= ١/٢ ∫ ٢(٢س + ١١)^(٣/٢) . ءس

= ١/٢ × ٢/٥ (٢س + ١١)^(٥/٢) + ث

= ١/٥ (٢س + ١١)^(٥/٢) + ث

حلول تمارين ([illegible])

(١) ∫ ٢ (٢ جاس جتاس) . ءس

= ∫ ٢ جا٢س . ءس = - جتا ٢س + ث

(٢) -٤ جتا ١/٤ س + ث

(٣) ٥ جا ١/٥ س + ث

(٤) ١/٢ ظا ٢س + ث

(٥) - ٥ جتا (١/٥ س + ١) + ث

(٦) ١/٣ جا (٣س-١) + ث

(٧) ٥ ظا (١/٥ س-١) + ث

(٨) [- ١/٤ جتا (٤س+١) + ١/٤ جا (٤س+١)] + ث

(٩) [٨ جاس - ٤ ظاس] + ث

(١٠) [٦ جاس - ٢ظاس] + ٥

(١١) جا (٣س + ٥) + ث

(١٢) ∫ (س جتاس + ٢جتاس)/(س + ٢) . ءس = ∫ جتاس . ءس

= جاس + ث

أجوبة تمارين ([illegible])

(١) ءص/ءس = ٣ - ٢س^(-٢) + ٢س^(-٣) حيث س ≠ ٠

بإجراء التكامل بالنسبة للطرفين

∴ ص = ∫(٣ - ٢س^(-٢) + ٢س^(-٣)) . ءس

∴ ص = ٣س - ٢/(-١) س^(-١) + ٢/(-٢) س^(-٢) + ث

ص = ٣س + ٢/س - ١/س² + ث

ولكن ص = ٢ عندما س = ١/٢

∴ ٢ = ٣/٢ + ٤ - ٤ + ث ∴ ث = ١/٢

∴ ص = ٣س + ٢/س - ١/س² + ١/٢

(٢) ءص/ءس = (٨س³ - ١)/(٢س - ١)

= (٢س-١) (٤س²+٢س+١)/(٢س - ١)

∴ ءص/ءس = ٤ س² + ٢س + ١

∴ ص = ∫(٤س²+٢س+١) . ءس

∴ ص = ٤/٣ س³ + س² + س + ث

ص = ١٠ عندما س = ١

∴ ١٠ = ٤/٣ + ١ + ١ + ث ∴ ث = ٢٠/٣

∴ ص = ٤/٣ س³ + س² + س + ٢٠/٣

(٣) ص = ∫[١٢س^٥ - ٤٩ (٧س-١٢)^٦] . ءس

= ١٢/٦ س^٦ - ٤٩/٧ × ١/٧ (٧س-١٢)^٧ + ث

∴ ص = ٢س^٦ - (٧س - ١٢)^٧ + ث

ص = ٠ عندما س = ٢

$\therefore ٠ = ٢ \times ٦٤ - (١٤ - ١٢)^{٢} + \text{ث}$

$\therefore \text{ث} = ٠$

$\therefore \text{ص} = ٢\text{س}^{٦} - (٧\text{س} - ١٢)^{٢}$

(٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} + ٧}{٣ - ٢\text{ص}}$

$\therefore (٣ - ٢\text{ص}) \,.\, \text{ءص} = (٢\text{س} + ٧) \,.\, \text{ءس}$

$\therefore \int (٣ - ٢\text{ص}) \,.\, \text{ءص} = \int (٢\text{س} + ٧) \,.\, \text{ءس}$

$\therefore ٣\text{ص} - \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} + ٧\text{س} + \text{ث}$

$\text{ص} = ٣$ عند $\text{س} = ١$

$\therefore ٩ - ٩ = ١ + ٧ + \text{ث} \Rightarrow \text{ث} = -٨$

(٥) ميل المماس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ - ٢\text{س}^{-٢}$

$\therefore \text{ص} = \int (١ - ٢\text{س}^{-٢}) \,.\, \text{ءس}$

$\therefore \text{ص} = \text{س} + ٢\text{س}^{-١} + \text{ث}$

المنحنى يمر بالنقطة $(\frac{١}{٢} ، ٣)$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢}$ عند $\text{ص} = ٣$

$\therefore ٣ = \frac{١}{٢} + ٤ + \text{ث} \Rightarrow \text{ث} = -\frac{١}{٢}$

$\therefore \text{ص} = \text{س} + \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{٢}$ بالضرب $\times ٢\text{س}$

$\therefore ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\,\text{ص} - ٣\text{س} + ٤ = ٠$

(٦) ميل المماس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$\therefore \text{ص} \,.\, \text{ءص} = \text{س} \,.\, \text{ءس}$

$\therefore \int \text{ص} \,.\, \text{ءص} = \int \text{س} \,.\, \text{ءس}$

$\therefore \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ث}$

$\because (٣، -٢) \in$ للمنحنى $\therefore \text{ص} = -٢$ عند $\text{س} = ٣$

$\therefore ٢ = \frac{٩}{٢} + \text{ث} \Rightarrow \text{ث} = -\frac{٥}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{٥}{٢}$ بالضرب $\times ٢$

$\therefore \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} - ٥ = ٠$

(٧) ميل المماس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٢$

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{ث}$

$\because (٣، -٢) \in$ للمنحنى $\therefore \text{ص} = -٢$ عندما $\text{س} = ٣$

$\therefore -٢ = ٢٧ - ٢٧ - ٦ + \text{ث} \Rightarrow \text{ث} = ٤$

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤$

(٨) ميل العمودى $= \frac{-١}{٢\text{س} - ٦}$

ميل المماس $= \frac{-١}{\text{ميل العمودى}} = ٢\text{س} - ٦$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٦$ باجراء التكامل

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + \text{ث}$

$(٤،٥) \in$ للمنحنى $\therefore \text{ص} = ٥$ عندما $\text{س} = ٤$

$\therefore ٥ = ١٦ - ٢٤ + \text{ث} \Rightarrow \text{ث} = ١٣$

$\therefore \text{ص} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١٣$

(٩) ميل المماس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\sqrt{٣ - ٢\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \int -(٣ - ٢\text{س})^{-\frac{١}{٢}} \,.\, \text{ءس}$

$\therefore \text{ص} = -\frac{١}{-٢} \times ٢\,(٣ - ٢\text{س})^{\frac{١}{٦}} + \text{ث}$

$\therefore \text{ص} = \sqrt{٣ - ٢\text{س}} + \text{ث}$

$(١،٣) \in$ للمنحنى $\therefore \text{ص} = ٣$ عندما $\text{س} = ١$

∴ ٣ = $\sqrt{٣-٢}$ + ث ⟸ ث = ٢

∴ ص = $\sqrt{٣-٢}$ س + ٢

(١٠) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س - $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

∴ ص = س^{٢} - $\frac{١}{٦}$ س^{٣} + ث

∵ (٠،١) ∈ للمنحنى ∴ ص= ١ عندما س =٠

∴ ١ = ٠ + ث ⟸ ث = ١

∴ ص = س^{٢} - $\frac{١}{٦}$ س^{٣} + ١

عندما س = ٣ ∴ ص= ٩ - $\frac{٢٧}{٦}$ + ١ = $\frac{١١}{٢}$

∴ ميل المماس = ٢×٣ - $\frac{١}{٢}$ × ٩ = $\frac{٣}{٢}$

ميل العمودى = - $\frac{٢}{٣}$

معادلة المماس (ص- $\frac{١١}{٢}$) = $\frac{٣}{٢}$ (س-٣)

أى : ٣س- ٢ص+ ٢ = ٠

معادلة العمودى (ص- $\frac{١١}{٢}$) = $\frac{-٢}{٣}$ (س-٣)

أى : ٤س+ ٦ص- ٤٥ = ٠

(١١) ∵ ميل المماس = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣(س^{٢}- ٦س+٥)

∴ ص = س^{٣}- ٩س^{٢}+١٥س+ ث

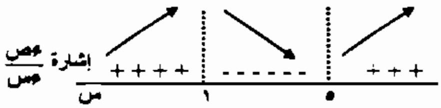
(٠،١٠) ∈ للمنحنى ∴ ص=١٠ عندما س =٠

∴ ث = ١٠

∴ ص = س^{٣}- ٩س^{٢}+١٥س + ١٠

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠ عندما ٣(س-١) (س-٥) = ٠

أى س= ١ أ، س= ٥



عند س =١ توجد عظمة محلية =١- ٩+١٥+١٠= ١٧

عند س = ٥ توجد صغرى محلية

= ١٢٥-٢٢٥+٧٥+١٠ = -١٥

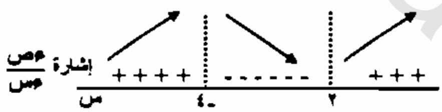
(١٢) ميل المنحنى $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^{٢}+ ٢س- ٨

∴ ص= $\frac{١}{٣}$ س^{٣}+ س^{٢}- ٨س + ث —— (١)

عند القيم الصغرى والعظمى المحلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

∴ س^{٢} + ٢س- ٨ = ٠

(س+٤) (س-٢) = ٠ ∴ س= -٤ أ، س= ٢



من اشارة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ توجد قيمة عظمى محلية = ٢٦ $\frac{٢}{٣}$

عند س = -٤

∴ (- ٤ ، $\frac{٨٠}{٣}$) ∈ للمنحنى

من (١)

∴ $\frac{٨٠}{٣}$ = - $\frac{٦٤}{٣}$ + ١٦+٣٢ + ث = ٠ ⟸ ث = ٠

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢}- ٨ س

عند س= ٢ توجد صغرى محلية = - $\frac{٢٨}{٣}$

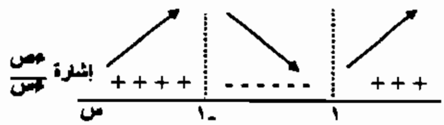
(١٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣(س-١) (س+١) = ٣س^{٢}- ٣

∴ ص = س^{٣}- ٣س+ ث —— (١)

عند القيم العظمى والصغرى المحلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

∴ ٣(س-١) (س+١) = ٠

∴ س= ١ أ، س = -١



∴ عند س= ١ توجد صغرى محلية = -٢

من (١) ∴ -٢ = ١-٣+ث ⇐ ث = ٠

∴ ص = س^{٣} - ٣س

العظمى المحلية عند س= -١

∴ العظمى المحلية = -١+٣ = ٢

(١٤) $\frac{ءم}{ءن}$ = ٠,٠١٥ن^{٢} + ٠,٠٢ن بإجراء التكامل

∴ م = ٠,٠٠٥ن^{٣} + ٠,٠١ن^{٢} + ث

ولكن م = ٩٠ عندما ن = ١٠

∴ ٩٠ = ٥+١ + ث ⇐ ث = ٨٤

∴ م = ٠,٠٠٥ن^{٣} + ٠,٠١ن^{٢} + ٨٤

عند بدء التسخين ن = ٠

∴ م = ٠ + ٠ + ٨٤ = ٨٤ م^{٣}

(١٥) $\frac{ءح}{ءض}$ = $\frac{-أ}{ض^{٢}}$ = -أ ض$^{-٢}$

∴ ح = -أ ∫ ض$^{-٢}$. ء ض

= أ ض$^{-١}$ + ث

أي أن ح = $\frac{أ}{ض}$ + ث

١٢ = $\frac{أ}{\frac{١}{٢}}$ + ث ⇐ ث = ١٢ - ٢أ

∴ ح = $\frac{أ}{ض}$ + ١٢ - ٢أ

(١٦) $\frac{ءح}{ءن}$ = ١٠ - $\frac{٢}{٣}$ن

∴ ح = ١٠ن - $\frac{ن^{٢}}{٣}$ + ث

عند بدء الزمن ن = ٠ كان ح = ١٠

∴ ٠ = ٠ - ٠ + ث ⇐ ث = ٠

∴ ح = ١٠ن - $\frac{ن^{٢}}{٣}$

عندما ن = ٣ ∴ ح = ٣٠-٣ = ٢٧ م^{٣}

(١٧) = -٦ن^{٢} + ١٢ن + ٩٠

∴ ك = -٢ن^{٣} + ٦ن^{٢} + ٩٠ن + ث،

عند ن = ٠ ك = ٠ ∴ ث، = ٠

∴ ك = -٢ن^{٣} + ٦ن^{٢} + ٩٠ن

بالمثل ينتج أن ل = -٢ن^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ن^{٢} + ٨٥ن

بالطرح ل-ك = $\frac{٣}{٢}$ن^{٢} - ٥ن

عند ن = ٤ ∴ ل-ك = ٤

∴ ل > ك

∴ الثانية تكتب أكثر