الباب السادس

معالجة النتائج البيانية المعملية
Treatment of Experimental Results

1.6 مقدمة.

2.6 الورق البياني.

1.2.6 الورقة البيانية الخطية.

2.2.6 الورقة شبه اللوغاريتمية.

3.2.6 الورق أللوغاريتمي.

3.6 تكاثر الأخطاء.

4.6 أيجاد المنحنى المناسب ـ طريقة المربعات الصغرى.

5.6 التكامل العددي.

1.5.6 قانون شبه المنحرف.

2.5.6 قانون سمبسون.

6.6 حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى باستخدام الطرق العددية.

1.6.6 طريقة بيكارد.

2.6.6 طريقة رانج ـ كوتا.

7.6 أمثلة وتمارين.

1.6مقـدمــة

إن تحليل العديد من المسائل الهندسية المختلفة وبذات مسائل الهندسة الكيميائية يرتبط باستخدام النتائج المحصلة من التجارب المعملية لبرهنة واثبات النظريـات والعلاقات النظرية الهندسية .

إن نقاط البيانات غالبا ما تكون غير دقيقة وغير مضـبوطة لـذا يسـتوجب الرجوع إلى طرق لغرض استخلاص معلومات دقيقة يمكن الاعتماد عليها بشـكل مؤكد ومعقول لتحقيق المعالجة الصحيحة.

يمكن تعلّم المعالجة الصحيحة وتمثيلها بيانيا باختيـار الإحـداثيات المناسـبة وإخضاع تلك النتائج للمشاهدة النظرية أو البصرية باستخدام أنواع مختلفـة مـن الورق البياني المستخدم في تمثيل تلك البيانات لإعطاء صـورة واضـحة عـن العلاقة بين مختلف العوامل التي تتحكم بعملية صناعية معينة و يمكـن كذلـك استخدام النتائج المعملية أو التجريبية لتحديد معدل قيمة متغير معـين أو معاملـة مجموعة من البـيـانات لإيجاد بعض القيم الإجمالية مثل إيجاد أو تحديد معـدل سرعة عبر مقطع عرضي لأنبوب أو غيرها من الوحدات الصناعية.

2.6 الـورق البيـانـي (Graph Paper)

يمكن تمثيل النتائج المعملية التجريبية على شكل جدول أو رسم بياني علـى الرغم من أن شكل الجدول قـد يعطي في بعض الأحيان صورة غير واضحة عن طبيعة العلاقة التي تربط بين المتغيرات إلا أن التمثيل البيـاني يعطـي الصـورة الدقيقة والكافية لسلوك المتغيرات وهي العوامل الرئيسية التي تـؤثر فـي سـير العملية الإنتاجية .

عندما تكون الطريقة البيانية في أغلب الأحيان دقيقة وصحيحة بشكل كافي ويكون هناك تمثيل جيد للنتائج التجريبية المعملية ، وهناك العديد من الأوراق البيانية والتي سيتم وصفها لاحقا بغية اختيار النوع الصحيح الذي يصلح لتمثيل بيانات كل مسألة على حدة.

1.2.6 الورقة البيانية الخطية (Linear Graph Paper)

وهي أكثر أنواع الورق البياني شيوعا في الاستعمال وهو الورق الذي يمكن تقسيم محوريه إلى تقسيمات مناسبة وبذلك يمكن معالجة أي متكاملة للقيم العددية للمتغير عن طريق اختيار التدريج المناسب ، كما هو معروف إن معادلة الخط المستقيم تكتب عادة بالشكل التالي :

$$y = mx + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-6)$$

حيث أن m هو الميل و c هي قيمة y عندما x تساوي صفر ، أي التقاطع مع المحور الرأسي .

ويمكن للخط المستقيم أن يمر بنقطة الأصل عندما c =0 أي أن :

$$y = m x$$

أما المعادلة العامة للمنحني على التدريجات الخطية للورقة البيانية فهي:

$$y = f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-6)$$

2.2.6 الورقــة شبــه اللوغاريتميـــة (Semi-Logarithmic Paper)

تظهر في بعض التطبيقات المعملية معادلات من النوع التالي :

$$y = A e^{-bx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3-6)$$

أو :

$$y = A e^{bx}$$

فإذا كـــان المطلـــوب الحصول على قيم كل من A و b من مجموعـــة مـــن القياسات للمتغيرين x و y ، يكون من المناسب جدا استعمال الصيغـــة البيـــانية اللوغاريتمية للمعادلة (3-6) والتي ستكون بالشكل التالي :

$$y = A e^{-bx} \quad \therefore \ln y = \ln A - bx \cdots\cdots\cdots (4-6)$$

$$or \quad Y = C + mx$$

وذلك بفرض أن :

$A = e^{C}$ أو $C = \ln A$

و أيضا $m = -b$ وبتعريف المتغير الجديد Y حيث إن:

$\ln y = Y$

فأن المعادلة (4-6) تصبح بالشكل التالي :

$$y = -bx + \ln A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-6)$$

وعند مقارنة المعادلة (5-6) مع المعادلة (1-6) نرى أن المعادلة هي لخط مستقيم ميله b - وعند رسم Y مقابل x سوف يكون ميل الخط هـــو b - ومقطعـــه مـــع المحور الصادي ln A.

يرسم هـذا النـوع من المعادلات على ورق بياني شبه لوغـاريتمي أحـد محوريه مرتب بشكل لوغاريتمي والآخـر مرتـب بشكـل خطي ويتـم تـمثيل قـيم y بشكل مباشر على الورق اللوغاريتمي دون الحاجة إلى حساب لوغـاريتم قيم y ويمكن أيضا حساب لوغاريتم y ورسم كـل من y و x على ورقـة بيانية خطية وسوف يساعد ذلك على اختصار الكثيـر مـن الوقـت لجدولـة قـيم y لوغاريتميا.

3.2.6 الـورق أللوغـاريتمي (Logarithmic Paper)

في بعض الأحيان يتضمن تحليل منظومة ما معلومة من النوع:

$$y = cx^n \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6-6)$$

حيث أن c, n هي ثوابت يندر تحديدها عمليا . يمكن في هذه الحالـة اسـتعمال الورق البياني اللوغاريتمي مباشرة لتمثيل هذه العلاقة بيانيا وبالتـالي تحديـد قيـم c و n حيث تكوّن النتـائج خطا مستقيما ميله هـو n و c هـو المقطـع المحصور عندما x تساوي صفر .

وهناك حل آخر يكمن في تحويل المعادلة (6-6) إلى معادلة خطية بنفس صـيغة معادلة الخط المستقيم وذلك بأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة (6-6) ولتصبح بالشكل التالي :

$$\ln y = \ln\left[cx^n\right] \Rightarrow \therefore \ln y = \ln c + \ln x^n \quad or \quad \ln y = \ln c + n\ln x$$

وبوضع C = ln c , X = ln x و Y = ln y وبالتعويض في المعادلـة أعـلاه نحصل على :

Y = m x + b

وهي معادلة لخط مستقيم حيث أن $m = n$ وهو الميل و C هو مقطع الخط المستقيم مع المحور الرأسي (محور الصادات) عندما $x = 0$ ويمكن في هذه الحالة تنفيذ الرسم على ورقة بيانية خطية مع ملاحظة أن لا تكون $x = 0$ حتى يتم تفادي نقطة الأصل .

مثـال (6 - 1)

تم الحصول على النتائج المعملية التالية في إحدى التجارب المختبرية :

قيمة y	8.6	6.3	4.3	1.7
قيمة x	1000	825	663	395

إن النتائج أعلاه تتبع العلاقة ($y = c\ x^n$) أي علاقة لوغاريتمية. تحقق من صحة ذلك واحسب قيم c و m.

الحـل :

يمكن التأكد من أن البيانات المعملية أعلاه تتبع العلاقة المعطاة عن طريق الرسم على ورقة لوغاريتمية (log–log) أو بأخذ لوغاريتم كل من y وx ورسمها على ورقة بيانية خطية كما موضح في الجدول التالي :

$Y = \ln y$ (4)	$X = \ln x$ (3)	قيمة y (2)	قيمة x (1)
2.1518	6.9078	8.6	1000
1.8406	6.7154	6.3	825
1.4586	6.4968	4.3	663
0.5306	5.8435	1.7	345

وعنــد رسم البيــانات فــي الجدول الأول على ورقة بيانية لوغاريتمية أو رســم البيانات في الجدول الثاني على ورقة بيانية خطية سنحصل في الحالتين على خط مستقيم ومن الرسم ينتج:

$$n = 1.66$$

وأن :

$$c = 8.91 \times 10^{-05}$$

أي أن العلاقة هي :

$$y = 8.91\,x\,10^{-05}\,(x^{1.66})$$

3.6 تكــاثر الأخطــاء (Propagation of Errors)

تتعرض بعض النتائج المعملية إلى عدم الدقة في بعض الأحيان عند قيــاس بعض المتغيرات مما ينتج عن ذلك أخطاء تتكرر بصورة مستمرة في عملية تحديد المتغــيرات عمليــا.وهناك العديد من مصادر الخطأ التي يجب تقييمها أو تحديدها قبل الإشارة بدقة إلى أي تحديد للنتائج العملية ، ويمكن تصنيف تلــك المصــادر كما يلي :

a. أخطاء القياس (Errors of Measurement)

وهذا النوع من الأخطاء ناتج عن تحديدات فيزيائية مثلا لقراءة تدريج مــاء ولعدم وجود آلة للقياس فإن مقيــاس الطــول بــوحدات الطول مثلا تؤدي إلــى قياس ارتفاع الماء عن طريق المشاهدة العينية أو استخدام أداة أخــرى للـــقياس وهذا سيؤدي حتما إلى وجود خطأ ملحوظ في القياس بنسبة معينة .

b. الأخطــاء الدقيقــة (Precision Errors)

وتكون هــذه الأخطاء مبنية على وجود أخطاء في قياسات الأجهزة وكمثـــال على ذلك نوع التدريجات الموجودة على محرار زئبقي زجاجـــي , نلاحـظ أن قراءة الزئبق ستكون بناء على درجة معـينـة (28 م° مثلا) وبســبب عـدم معايرة التدريج قد تكون قيمة الخطأ في القراءة بحدود (1م°) .

c. أخطــاء الطريقــة (Errors of Method)

وهذا النوع من الأخطاء يتضمن الأخطاء الناتجة عن الإهمال في قياس درجة الحرارة مثلا عند فرض ثبوت الجريان المولي و إهمال الخلط الرجعي أو فقــدان الحرارة في المفاعلات الأنبوبية ...الخ .
وعند تنفيذ النتائج التجريبية بيانيا يكون من الصعوبة في بعض الأحيــان تحديــد نوعية المنحنى.

4.6 إيجاد المنحني المناسب ـ طريقة المربعات الصغرى
(Curve Fittings - The Least Square Method)

للحصول على المنحنى المناسب وإلغاء الانحراف الكامل في النتائج المعمليــة أو التجريبية ، فان أفضــل طريقــة لتحقيــق ذلــك هــو باســتخدام طريقـــة المــربعات الصغــرى (Least Square Method) وغــالبا ما تستــخدم هــذه الطريقة لإيجاد أفضل خط مستقيم لمجموعة من البيانات المعملية وبذلك سوف يتم اشتــقاقــها من المعادلات والصيغ التي تحدد قيمة c و m التي تعطـــي أفضــل معدل للتربيعات الصغرى لقيم y و x في المعادلة التالية :

$$y = m x + c \quad \text{...} (7\text{-}6)$$

إن قيمة الخطأ لأي قيم ناتجة من معرفة زوج لقيم x و y يرمز له بـــ R_n ويمثـــل الفرق بين قيمتي x_n , y_n حيث إن n هو أي قيمة وتمثل بالمعادلة التالية :

$$y_n - m\,x_n - c = R_n \text{.......... ....} (8-6)$$

إن قيـــمة R_n قـــد تكون موجبة أو سالبة و للحصول على قيم موجبة للخطـــأ ، نقوم بتربيع المعادلة (6-8) حيث ينتج ما يلي :

$$y_n^2 + m^2 x_n^2 + c^2 - 2mx_n y_n - 2cy_n + 2cmx_n = R_n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9-6)$$

تمثل المعادلة أعلاه النقاط المعملية بصورة منفردة وعند جمعها مع بعضها نحصل على :

$$\sum_{n=1}^{N} y_n^2 + \sum_{n=1}^{N} m^2 x_n^2 + \sum_{n=1}^{N} c^2 - \sum_{n=1}^{N} 2mx_n y_n - \sum_{n=1}^{N} 2cy_n + \sum_{n=1}^{N} 2cmx_n = \sum_{n=1}^{N} R_n^2 \cdots (10-6)$$

أو :

$$\sum_{n=1}^{N} y_n^2 + m^2 \sum_{n=1}^{N} x_n^2 + \sum_{n=1}^{N} c^2 - 2m \sum_{n=1}^{N} x_n y_n - 2c \sum_{n=1}^{N} y_n + 2cm \sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} R_n^2 \cdots (11-6)$$

إن المعادلة الأخيرة تمثل التغير الذي يعطي مجموع مربعات الخطأ .

إن طريقة المربعات الصغرى تعطي أفضل خـــط مستـــقيم والذي تكون فيه مجموع مربعات الخطأ هي أقـــل ما يمكن . وتفترض هـــذه الصـــيغة أن قيمـــة مربعات الخطأ تكون أقل ما يمكن الحصول عليه عند أخذ تفاضل نسبة الخطـــأ q إلـــــى c و m ومســـــاواة قيمـــــة التفاضـــــل للصـــــفر

$$\frac{\partial q}{\partial m} = 2m\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} x_n y_n + 2c\sum_{n=1}^{N} x_n \text{.......... ....}(12-6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial c} = 2N\,c - 2\sum_{n=1}^{N} y_n - 2m\sum_{n=1}^{N} x_n \text{.......... ....}(13-6)$$

وللحصول على قيمة m ، c تفترض هذه النظرية أخيرا أن مفاضلة مجموع الخطأ يعطي أقل قيمة له عندما تكون قيمة التفاضل مساوية للصفر أي أن:

$$2m\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - 2\sum_{n=1}^{N} x_n y_n + 2c\sum_{n=1}^{N} x_n = 0 \text{.......... ...}(14-6)$$

$$2N\,c - 2\sum_{n=1}^{N} y_n + 2m\sum_{n=1}^{N} x_n = 0 \text{.......... ....}(15-6)$$

ولنفرض أن :

$$\sum_{n=1}^{N} x_n^2 = a \qquad \sum_{n=1}^{N} x_n y_n = b$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = d \qquad \sum_{n=1}^{N} y_n = e$$

بالتعويض في المعادلتين أعلاه :

$$2ma - 2b + 2cd = 0 \Rightarrow \therefore\ m = \frac{b - cd}{a} \text{.......... .}(16-6)$$

$$2Nc - 2c + 2md = 0 \text{.......... ....}(17-6)$$

ومن حل المعادلتين (6 - 16) و (6 -17) آنيا بالاستعانة بالقيم الأصلية نحصل على:

$$m = \frac{N\sum x_n y_n - \sum x_n \sum y_n}{N\sum x_n^2 - \left(\sum x_n\right)^2} \quad \text{.......... ....}(18-6)$$

$$c = \frac{\sum x_n^2 \sum y_n - \left(\sum x_n y_n\right)\left(\sum x_n\right)}{N\sum x_n^2 - \left(\sum x_n\right)^2} \quad \text{.......... ....}(19-6)$$

حيث أن N هو عدد النقاط ، ولنأخذ المثال التالي لنبين كيفية حل هذا النوع من المعادلات :

مثـــال (6 – 2)

استخدم طريقة المربعات الصغرى لإيجاد أفضل معادلة خط مستقيم يمر بالنقاط :

x	-1	- 0.1	0.2	1
y	1	1.099	0.808	1

الحـــل :

نرتب الجدول بالشكل التالي

x_n	y_n	$x_n y_n$	$\sum x_n^2$
- 1	1	- 1	1
- 0.1	1.099	- 0.1099	0.01
0.2	0.808	0.1616	0.04
1	1	1	1
$\sum x_n = 0.1$	$\sum y_n = 3.907$	$\sum x_n y_n = 0.0517$	$\sum x_n^2 = 2.05$

بما أن عدد النقاط في المسألة هو 4 ، بالتعويض فــي المعــادلات (6-18) ، (6-19) نحصل :

$$\therefore m=\frac{N\sum x_n y_n-(\sum x_n)(\sum y_n)}{N\sum x_n^2-(\sum x_n)^2}$$

$$\therefore m=\frac{(4)(0.0517)-(0.1)(3.907)}{(4)(2.05)-(0.1)^2}=\frac{0.2068-0.3907}{8.2-0.01}=-0.02245$$

$$\therefore c=\frac{\left(\sum x_n^2\right)\left(\sum y_n\right)-\left(\sum x_n y_n\right)\left(\sum x_n\right)}{N\left(\sum x_n^2\right)-\left(\sum x_n\right)^2}$$

$$\therefore c=\frac{(2.05)(3.907)-(0.0517)(0.1)}{(4)(2.05)-(0.1)^2}=\frac{8.00935-0.00517}{8.2-0.01}=0.9773$$

$$\therefore y=0.9773-0.02245x$$

وهي أفضل معادلة لخط مستقيم يمر بالنقاط المذكورة أعلاه .

مثـــال(6 - 3)

تسافر سيّـــارة على طريق مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها $V = b_1$ (m/sec)
ويعطى موقع تلك السيارة $y\,n$ عند أي زمن $t\,n$ وفقا للمعادلة التالية :

$$y\,n = b_0 + b_1\,t\,n$$

افرض أن القياسات كانت كالتالي :

t_n	0	3	5	8	10
y_n	200	230	240	270	290

حيث أن t_n هو الزمن عند أي موقع بالثانية و y_n هو المسافة التي تقطعهـــا السيّـــارة بالمتر. استخدم طريقة التربيعات الصغرى لغـــرض حســـاب ســـرعة السيّارة الثابتة (b_1) .

الحــل :

عند النظر إلى القياسات نجد أن t_n هي x_n والتي تعتمد عليها قيم y_n لـذلك نستخدم طريقة التربيعات الصغرى لاستخراج معادلة الخط المستقيم الـذي يمثـل معادلة حركة السيارة

t_n	y_n	$t_n y_n$	t_n^2
0	200	0	0
3	230	690	9
5	240	1200	25
8	270	2160	64
10	290	2900	100
$\sum x_n = 26$	$\sum y_n = 1230$	$\sum x_n y_n = 6950$	$\sum x_n^2 = 198$

عدد النقاط هو 5 ، لذا نستعمل نفس المعادلات السابقة ونجد أن :

$$\therefore b_1 = m = \frac{(5)(6950)-(26)(1230)}{(5)(198)-(26)^2} = \frac{34750-31980}{990-676} = \frac{2770}{314} = 8.821\frac{m}{sec}$$

$$\therefore b_0 = c = \frac{(198)(1230)-(6950)(26)}{(5)(198)-(26)^2} = \frac{243540-180700}{990-676} = \frac{62840}{314} = 200.127\,m$$

$$\therefore \quad y_n = 200.127 + 8.821 t_n$$

$$\therefore \quad b_1 = V = 8.821\frac{m}{sec}$$

وهي سرعة السيّارة الثابتة .

5.6 التكـــامل العـــددي (Numerical Integration)

يكون مـــن الضروري في بعض الحالات حساب تكامل معين بطريقة غيـــر تقليدية وذلك لصعوبة حل ذلك التكامل بالطرق الاعتيادية المعروفة وكمثـــال على ذلك فإن سرعة الجريان الحجمية لغـــاز خلال مسلك جريان مضـــلّع (duct) أو قناة , يمكن حسابها عن طريق فحص توزيع السرعة الخطية و بـــإجراء تكامـــل مناسب لهذا التوزيع ولقيم معينة ويمكن أيضا معرفة متوسط درجـــــة حـــــرارة السطح عن طريق إجراء تكامل لتوزيع درجة الحرارة المقاستـــة عبـــر الســـطح وتوزيعها على المساحة.

وإذا ظهر نوع صعب من التكاملات عند الحصول علـــى أحـــد المـــوديلات الرياضية مثل :

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

فيجب أن يتم حله عن طريق حسابه عدديا . إن معظم المســـائل التـــي ســـبق ذكرها يمكن أن تحل بطريقة بيانية عن طريق رسم المتغيرات الواحد مقابل الآخر على ورقة بيانية خطيـــة ومن ثم تحسب المساحة تحت المنحني لتـــــعطي قيمـــة التكامل وفي هذه الفقرة ستتم مناقشة بعض طرق حساب تلك المساحة .

1.5.6 قانون شبه المنحرف (Trapezium Rule)

وتعتمد هذه الطريقة على مبدأ تقسيم المساحة تحت المنحنـــي إلـــى أجـــزاء متساوية التباعد وكل منها على شكل شبه منحرف على أن تكون الدالة المطلـــوب تكاملها متصلة ، إن أبسط علاقة تتكون من حدين تتمثل بالمعادلة الخطية التالية :

$$y = a_0 + a_1 x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20-6)$$

وحيث أن تلك المعادلة تحتوي على معاملين هما(a_1,a_0) فستكون تلك معادلـــة خط مستقيم وإذا تم اعتبار أن هناك نقطتين (x_1 , y_1)، (x_2 , y_2) فيمكن حساب a_0 و a_1 كما يلي :

$$a_0 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \qquad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Big\} \cdots\cdots (21-6)$$

وعند تكامل المعادلة (6 - 20) بالنسبة لـــ x بين $x = x_1$ و $x = x_2$ فإن :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \left[a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2\right]_{x_1}^{x_2} = a_0(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} a_1\left[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\right] \cdots (22-6)$$

وإذا استخدمنا قيم a_0 و a_1 من المعادلة (6 -21) فإن :

$$I = x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{1}{2}(x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_1 y_1) = \frac{1}{2}(x_2 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1 y_1)$$

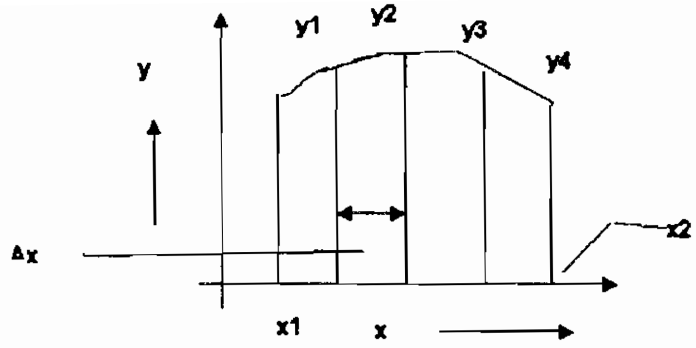
$$\therefore I = \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23-6)$$

$$= average weightx \;\; height$$

أو بعبارة أخرى مساحة شبه المنحرف الواحد هي :

$\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين) x الارتفاع

والشكل التالي يوضح تلك الحالة .



أن قيمة التكامل يمكن اعتمادها على أساس المتوسط الحسـابي للإحـداثيات مضروبا في المسافة بينهما وإذا كانت الفترات Δ x متساوية وكانت هناك أربعـة منها فيمكن كتابة التكامل كالتالي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y dx = 2\Delta x(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$= \frac{1}{8}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)(x_5 - x_1)\cdots\cdots\cdots(24-6)$$

وبذلك نصل إلى قاعدة شبه المنحرف , والتي تنص على ما يلي :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots\cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\cdots\cdots(25-6)$$

حيث إن n هو عدد التقسيمات التي تقسم إليها الفترة بين a و b

مثـــال (6 -4)

استخـــدم قـــاعدة شبه المنحرف لإيجاد قيمة التكامل التالي وقـــارن مـــع القيمـــة الفعلية للتكامل ، استخدم n = 4 .:

$$\int_1^2 x^2\, dx$$

الحل :

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.3333$$

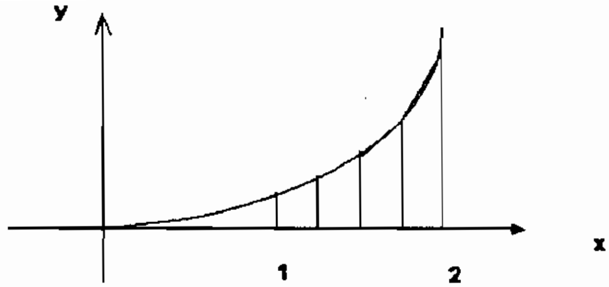
والآن فإن :

a =1 , b = 2 , n =4

وباستخدام المعادلة (6 - 25) فإن :

$$f(x_0)=f(1)=1 \quad , \quad f(x_1)=f(5/4)=25/16 \quad , \quad f(x_2)=f(6/4)=36/16$$
$$f(x_3)=f(7/4)=49/16 \quad , \quad f(x_4)=f(2)=4$$

$$\therefore \int_1^2 x^2 dx = \frac{2-1}{2(4)}\left[1+\frac{50}{16}+\frac{72}{16}+\frac{98}{16}+4\right] = \frac{1}{8}\left(5+\frac{220}{16}\right) = \frac{300}{128} \approx 2.34375$$



دقة طريــقة شبـــه المنحرف :

كلما كان n كبيرا , صغر العدد h , وتكون النتيجة أقرب ما يمكن إلـــى القيمـــة الفعلية .إن مقدار الخطأ في طريقة شبه المنحرف هو :

$$E = \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} f''(c) \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots .(26-6)$$

حيث إن E هو الخطأ في الطريقة و c عدد يقع بين a و b .

ففي المثال السابق :

$$f(x) = x^2 \qquad f''(x) = 2$$

ولأي عدد c بين 1و2 فإن المشتقة الثانية هي نفسها ولذلك فإن الخطأ E هو :

$$E = \frac{(2-1)^3(2)}{(12)(4)^2} = \frac{(1)(2)}{(12)(16)} = \frac{1}{96}$$

2.5.6 قـانـون سمبـسـون (Simpson Rule)

وهي طريقة تستخدم لتقريب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ وتعتمد على إيجاد المســاحة التي تحت القطع المكافئ الدالة الحاوية على ثلاثة حدود هي :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27-6)$$

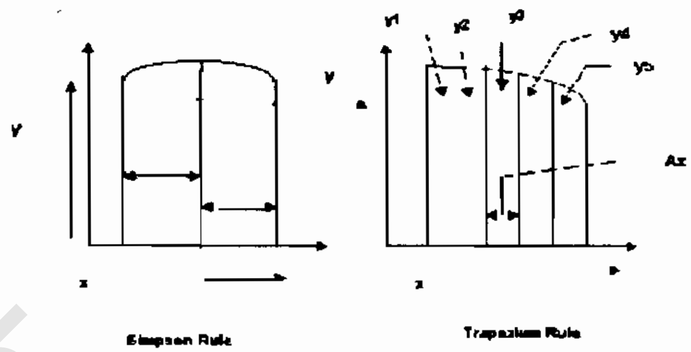
وهذه يمكن أن تلائم ثلاثة نقاط ويمكن أن نبين أن الدالة التكعيبية هي من النوع :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28-6)$$

والتي تمر خلال ثلاث نقاط متباعدة عن بعضها بمسافات متســاوية وكمـا يبـين الشكل (6 - 3).

إن النقاط الثلاثة سوف تكون لها نفس المساحة و إذا فرضنا أن h هي المسافة بين النقاط على المحور السيني فإن الطريقة التي يتميز بها قانون سمبسون هي في تغيير x إلى متغير جديـد بموجب الصيغة التالية :

$$z = \frac{x_1 - x_2}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29-6)$$



الشكل (6 - 3) حساب التكامل باستخدام كل من طريقة شبه المنحـــرف وقـــانون سمبسون والمعادلة (6 - 29) ستحول التكامل المطلوب إلى الصيغة التالية :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx = h \int_{-1}^{1} y\, dz ....(30-6)$$

وهناك إحداثيات ثلاثية y_3 , y_2 , y_1 وهي الآن عند z تســاوي 1-, 0 , 1.إن الدالة الموجودة في المعادلة (6 - 28) يمكن تحويلها باستخدام التعبير الموجود في معادلة (6 - 30) لتصبح بالشكل التالي :

$$y = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 ....(31-6)$$

حيث أن الثوابت b_0 , b_1 , b_2 , b_3 هي دوال لـــ a_0 , a_1 , a_2 , a_3 وهـــكذا وبإتباع نفس الطريقة يتم تعويض القيم الثلاثة لـــ z في المعادلة ينتج أن :

$$y_1 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 ....(32-6)$$

$$y_2 = b_0 ....(33-6)$$

$$y_3 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 ....(34-6)$$

إن تعويض المعادلات من (6 -31) إلى (6 - 34) في المعادلة (6 - 30) وحساب التكامل :

$$I=h\int_{-1}^{1}(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3)dz=h\left[b_0z+\frac{1}{2}b_1z^2+\frac{1}{3}b_2z^3+\frac{1}{4}b_3z^4\right]_{-1}^{1}=h\left(2b_0+\frac{2}{3}b_2\right)\cdots(35-6)$$

و بإضافة المعادلة (6 -32) إلى المعادلة (6 - 34) ينتج أن :

$$y_1+y_3=2b_0+2b_1$$

وباستخدام المعادلة(6 - 33) فإن :

$$y_1-2y_2+y_3=2b_2\ldots\ldots\ldots\ldots(37-6)$$

وبتعويض المعادلات (6 - 33) و(6 -37) في المعادلة (6 - 35) نحصل على :

$$I=h\left[2y_2+\frac{1}{3}(y_1-2y_2+y_3)\right]=\frac{1}{6}(y_1+4y_2+y_3)x2h\cdots\cdots(38-6)$$

$$\therefore I=(average\quad height)\quad x\quad (width)$$

ويمكن معــرفة متــوسط الارتــفاع عن طريق إضافة القيم النهائية إلى أربع إضافة للقيمة المركزية وقسمة النتيــجة النهائــية عــلى 6.يمكن تطبيق قــانون سمبسون لأي مجموعة نقاط ثلاثة و إضافة التكاملات الواحد للآخر بحيث أن :

$$I=\int_{x_1}^{x_7}y\,dx=\frac{1}{18}(y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+4y_6+y_7)(x_7-x_1)\cdots(39-6)$$

هذا إذا قسمت الفترات إلى 7 ويمكن أيضا تطبيق القانون لتســع نقــاط فتصــبح المعادلة أعلاه:

$$I=\frac{1}{24}\left[y_1+4y_2+3y_3+4y_4+2y_5+4y_6+2y_7+4y_8+y_9\right](x_9-x_1)\cdots(40-6)$$

ويمكن أيضا كتابة القانون بصيغته العامة وذلك بفرض أن *f* هي دالة متصلة على الفترة [a , b] , وقابلة للاشتقاق حتى الرتبة الرابعة على الفترة (a , b) , نقسم الفترة إلى n من الأجزاء المتساوية وطول كل منها هو h حيث إن n هـو عدد صحيح موجب زوجي .

$$x_0=a\ ,\ x_1=a+h\ ,\ldots\ldots\ldots,x_n=b\quad,\quad h=\frac{b-a}{n}$$

إذ أنه يمثل التكامل :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

مجموع المساحات A_0 , A_2 , ... , A_{n-2} وبذلك يكتب القانون بالشكل التالي :

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\cdots(41-6)$$

حيث إن n هو عدد صحيح زوجي .

يقدر الخطأ عند استخدام " طريقة سمبســـــون " كما يلي :

$$E=\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}f^{(4)}(c)\quad\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots.(42-6)$$

حيث إن c هو عدد بين a و b .

مثـــال (6-6)

استـــخدم طـــريقة سمبسون لحساب التكامل التالي $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$ مستخدما n = 8 .

الحل :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$$

ومن الدالة فإن :

$$f(x_0)=1 \quad ,f(x_1)=8/9 \quad ,f(x_2)=8/10 \quad ,f(x_3)=11/8 \quad ,f(x_4)=8/12$$
$$f(x_5)=8/13 \quad ,f(x_6)=8/14 \quad ,f(x_7)=8/15 \quad ,f(x_8)=8/15$$
$$\therefore \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{24}\left[1+4\left(\frac{8}{9}\right)+2\left(\frac{8}{10}\right)+4\left(\frac{8}{11}\right)+2\left(\frac{8}{12}\right)+4\left(\frac{8}{13}\right)+2\left(\frac{8}{14}\right)+4\left(\frac{8}{15}\right)+\frac{1}{2}\right]$$
$$=0.6932$$

مثـــال(6 -7)

أحسب قيمة التكامل العددي التالي $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ باستخدام الطرق التالية :

(أ) الطريقة التحليلية الاعتيادية .

(ب) طريقة شبه المنحرف (3 نقاط).

(ج) طريقة شبه المنحرف (9 نقاط) .

(د) طريقة سمبسون (3 نقاط)

(هـــ) طريقة سمبسون (9 نقاط)

وقارن بين نسبة الخطأ في الطرق المستخدمة .

الحـــــل :

(أ) لنفرض إن : $\sinh z = x$

أي أن : $dx = \cosh z \, dz$

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^4 \frac{\cosh z \, dz}{\sqrt{1+\sinh^2 z}} = \int_0^4 dz = [z]_0^4 = \sinh^{-1} 4 = 2.0947$$

(أ) نبدأ بعمل جدول للدالة بتسع نقاط وكما يلي :

x	$1+x^2$	$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
0.0	1.0	1.0000
0.5	1.25	0.89445
1.0	2.00	0.70711
1.5	3.25	0.55475
2.0	5.00	0.44722
2.5	7.25	0.37138
3.0	10.00	0.31623
3.5	13.25	0.27473
4.0	17.00	0.24254

$$(b)\ I = y_1 + 2y_2 + y_3 = 1.0000 + 2(0.44722) + 0.24254 = 2.1369$$

$$(c)\ I = \frac{1}{4}(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + 2y_8 + y_9)$$

$$= \frac{1}{4}(1.0000 + 0.24254) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0.89445 + 0.70711 + 0.55475 + 0.447722 + \\ 0.37138 + 0.31623 + 0.27473 \end{pmatrix}$$

$$= 2.0936$$

$$(d)\ I = \frac{1}{6}\left(y_1 + 4y_2 + y_3\right)\left(x_9 - x_1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1.0000\ + 1.7888\ + 0.24254\ \right)(4 - 0) = 2.0209$$

$$(e)\ I = \frac{1}{24}\left(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + 2y_7 + 4y_8 + y_9\right)(x_9 - x_1)$$

$$= \frac{1}{6}(1.0000 + 0.24254) + \frac{1}{3}(0.70711 + 0.447722 + 0.31623)$$

$$+ \frac{2}{3}(0.27475 + 0.89445 + 0.55475 + 0.37138) = 2.0941$$

وجدول المقارنة التـــالي يوضح نسبة الخطأ لكل طريقة مستخدمة من الطرق المذكورة أعلاه بالمقارنة مع الطريقة التحليلية .

الطريقة المستخدمة	النتيجة المحصلة	الخطأ المطلق	الخطأ النسبي المطلق
قانون شبه المنحرف (3 نقاط)	2.1369	0.0422	**2.1 %**
قانون شبه المنحرف (9 نقاط)	2.0936	- 0.0011	**0.05 %**
قانون سمبسون (3 نقاط)	2.0209	0.0738	**3.5 %**
قانون سمبسون (9 نقاط)	2.0941	- 0.0006	**0.03 %**

ومن هنا نستنتج أن قانون سمبسون (9 نقاط) هو أدق طريقة لحساب التكامـــل المطلوب .

6.6 حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى باستخدام الطرق العددية

هناك العديد من المسائل في الرياضيات لا يتوفر لها حل تحليلي معروف وهناك مسائل أخرى يكون حلها التحليلي مملاً والجواب قد يكون بصيغة متسلسلة غير منتهية والذي لا يمكن الوصول إليه إلاّ عن طريق استخدام حاسب آلي .

إن الطريقة العددية قد تكون الوحيدة لإنتاج حل منطقي للجزء الأول من المسألة , وربما قد تكون الطريقة الأكثر كفاءة لحل الجزء الثاني من المسألة، والأخطاء قد تكون هنا صعبة التعيين في بعض الحلول التحليلية والصورة قد تكون غير واضحة المعالم لأن الطرق العددية تبنى على أساس تقريب تعاقبي لذا فأن قانون سمبسون والطرق السابقة يمكن أن تفسّر على أنها حلول عددية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والتي من الصيغة :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (43-6)$$

وهذه الحلول تكون مفيدة إذا كانت الدالة f(x) ليست بسيطة.

إن العديد من المعادلات التفاضلية التي تم تناولها في الأبواب السابقة كان بالإمكان حلها ، ولكن عندما تكون المعادلة التفاضلية غير خطية والمتغيرات غير قابلة للفصل ، لا يمكن استخدام أي من الطرق السابقة للحل والدوال هي من النوع :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

وهناك طريقتان لحل المعادلات من هذا النوع , الأولى هي جبرية وتدعى طريقة " بيكارد " والثانية هي عددية وتدعى طريقة " رانج – كوتا " .

1.6.6 طريقـــة بيكــــارد (The Picard's Method)

وفي هذه الطريقة يتم فرض ظروف حدية للمعادلة التفاضلية من النوع :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \cdots (44 - 6)$$

مثلا $x = a$, $y = b$ لجعل الحل الخاص ممكنا للمعادلة و كتقريب أولي يمكن أن يحل b محل y في الطرف الأيمن من المعادلة بحيث أن :

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} = f(x, b) \cdots (45 - 6)$$

ثم نكامل المعادلة (6 - 45) بالنسبة لـــ x لنحصل على :

$$y^{(1)} = \int f(x,b)\, dx \cdots\cdots (46 - 6)$$

يمكن أن تستمر هذه العملية إلى ما لانهاية بوضع n محل b في الطرف الأيمـــن لتصبح المعادلة (6 - 45) بالشكل التالي :

$$y^{(n+1)} = \int f(x, y^{n})dx \cdots\cdots (47 - 6)$$

وبعد إكمال التكامل للمعادلة (6 -47) , نستخدم الظروف الحديـــة مـــرة أخـــرى لحساب ثابت التكامل .

مثال (8-6)

استخدم طريقة بيكارد لإيجاد الحل للمعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x} \qquad , \qquad x=1 \quad , \quad y=1$$

ثم أوجد قيمة y عندما x = 2 .

الحـــل :

بوضع y = 1 في الطرف الأيمن من المعادلة فإن :

$$\frac{dy^{(1)}}{dx}=\frac{x^2-1}{x}$$

$$\therefore\ y^{(1)}=\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-\ln x+C_1$$

والآن بوضع $y^{(1)} = 1$ عندما x = 1 و تعويضها في المعادلة ينتج أن :

$$C_1=\frac{1}{2}$$

و بتعويض $y^{(1)}$ في الطرف الأيمن من المعادلة نستنتج أن :

$$\frac{dy^{(2)}}{dx}=\frac{x^2-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2-\ln x)}{x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$$

وعند تكامل المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$y^{(2)}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C_2$$

وبتعويض الظروف الحية مرة أخرى في المعادلة نحصل على : $C_2=\frac{3}{4}$

$$\therefore\ y^{(2)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

وعند تــعويــض قــيمة أخرى لـــ (x) فإننا نحصل على :

$$y^{(3)} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{6}(\ln x)^3$$

وعند تعويض قيمة x = 2 نجد أن :

y (1) = 1.807, y (2) = 1.644 , y (3) = 1.670

من الواضح أن الجواب الصحيح يمكن معرفته لأن المعادلــة بالإمكــان تكاملهــا تحليليا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y}{x} \quad \Rightarrow \quad \therefore xdy = (x^2 - y)dx \quad \Rightarrow xdy - (x^2 - y)dx = 0$$

وهذه المعادلة يمكن حلها بطريقة العامل التكاملي ولذلك فإن الحل الخاص للمعادلة هو :

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3x}$$

وعند التعويض عن قيمة x = 2 نحصل على :

y = 1.667

إذن الحل الأقرب هو:

y (3) = 1.670

2.6.6 طريقــة رانــج – كــوتــا (The Runge - Kutta Method)

بدأً من النقطـــة (x_0, y_0) وبفـــرض أن الحـــل يحقــق صـــحة المعادلـــة (6 - 44) ، سنأخذ فترات متواصلة $(x = x_0 + h)$ ونجد قيمة y حيث إن h هو ثابت محدد ، إن حل المعادلة سيتكون من مجموعة من المنحنيات كل واحـــد لـــه قيمة معينة لثابت التكامل ولذلك سيكون الحل هو ما يلي :

$$y = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \qquad (48-6)$$

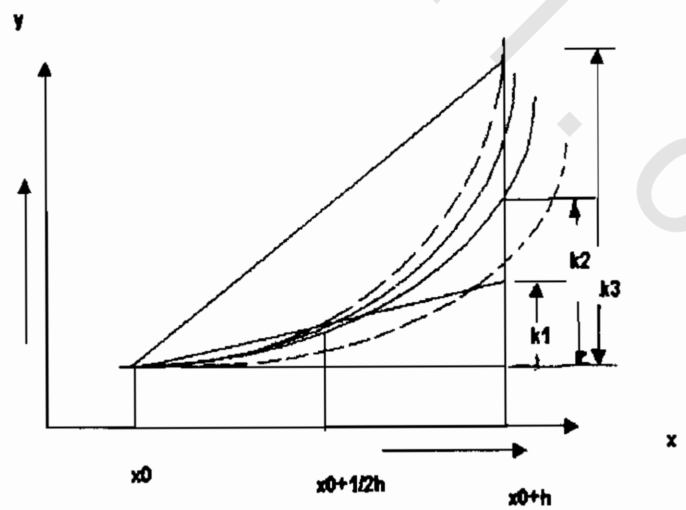
حيث إن k_1 , k_2 , k_3 تؤخذ من المعادلات التالية :

$$k_1 = h\ f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = h\ f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\ f(x_0 + h, y_0 + 2k_2 - k_1)$$

وهذه تعرف بصيغة رانج – كوتا من الرتبة الثالثة ، وإن الشكل التـــالي يوضـــح كيفية عمل هذه الطريقة .



شكل (6-3) طريقة رانج – كوتا لحل المعادلة التفاضلية

وكمثال على ذلك سنقوم بحل المثال السابق بهذه الطريقة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x} \qquad at \ \ x=1 \quad , \quad y=1$$

وإيجاد قيمة y عندما x = 2

الحــل :

سنفرض أن h = 1

$$\therefore \ k_1 = f(1,1) = \frac{(1)^2-1}{x} = 0$$

$$\therefore \ k_2 = f\left[1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}(0)\right] = f(\frac{3}{2},1)$$

$$\therefore \ k_2 = \frac{(\frac{3}{2})^2-1}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{4} * \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \ k_3 = f\left[\ 2, 1+2(\frac{5}{6})-0\right] = f(2,\frac{8}{3}) = \frac{4-\frac{8}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore y = y_0 + \frac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3)$$

$$=1+\frac{1}{6}\left[0+4(\frac{5}{6})+\frac{2}{3}\right]=1+\frac{1}{6}\left(\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\right)=1+\frac{1}{6}\left(\frac{12}{3}\right)=1+\frac{2}{3}\approx 1.6667$$

والذي يبدو مشابها للحل التحليلي .

7.6 أمثلـــــة تمــاريــن

س1 في تجربة لقياس الضغط البخاري لمادة رابع كلوريــد الكربــون (CCl_4) لمديات مختلفة من درجات الحرارة , أخذت القراءات التالية :

درجة الحرارة , م°	0.0	5.0	15	25	35	50
الضغط البخاري , ملم زئبق	38.5	44.5	78.5	113.5	183.5	317.5

كما هو معروف إن معادلة كلوزيوس – كلابيرون لمدى صــغير مــن درجــات الحرارة تنص على :

$$\ln P = \frac{-\Delta H_v}{RT} + C$$

حيث أن P هو الضغط البخاري (ملم زئبق) و ΔH_v هي حرارة التبخيــر المولية , C هو ثابت و R ثابت الغاز وT درجة الحرارة (كلفن). مــن خــلال رسم النقاط على ورقة بيانية خطية أوجد :

1- حرارة التبخير المولية (ΔH_v).

2 - قيمة الثابت (C).

س2 عند رسم العلاقة بين t , F على الورق التالي :

1- ورق شبه لوغاريتمي والدالة هي $F = a e^{bt}$.

2- ورق لوغاريتمي والدالة هي $F = a t^b$.

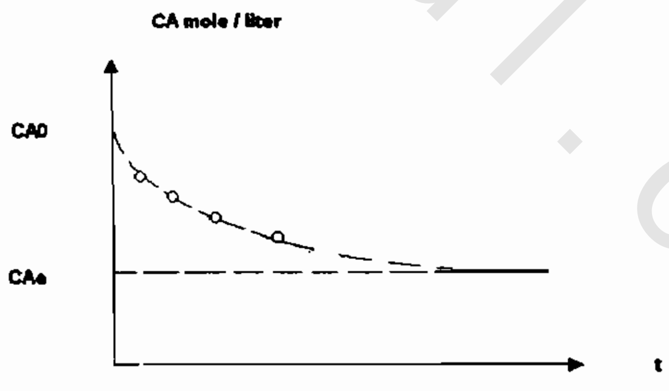
فــي الحــالتين نحصــل علــى خـــــط مستــقــيـــــم يـــمر بــالنــقـــاط [$t_1=15$, $F_1 = 0.238$] و [$t_2 = 30$, $F_2 = 0.05$] . أوجد المعادلة التي تربط بين t , F في الحالتين ؟

س3 سجلت المعلومات التالية لتفاعل كيميائي A→B والذي يمثل تغير تركيز المادة (A) خلال الزمن (t) وذلك من بداية التفاعل وكما مبين في الجدول التالي و لقد اقترحت ميكانيكية هذا التفاعل و عرضت بالصيغة التالية :

$$\ln \frac{C_A - C_{Ae}}{C_{A0} - C_{Ae}} = -k\,t$$

حيث k هو ثابت التفاعل وكما يوضح ذلك الشكل :

∞	160	100	65	36	0	الزمن t (دقيقة)
0.049 (C_{Ae})	0.079	0.102	0.121	0.145	0.1823 (C_{A0})	التركيز(C_A) مول/لتر



لو رسمت هذه المعلومات على ورق بياني شبه لوغاريتمي , هل ستحقق الصيغة المقترحة ؟ وضح ذلك مع إيجاد قيمة (k) ؟

س4 إن عدد نسلت (Nu) يتغير مع عدد برانتدل (Pr) وفقا للمعادلة : $Nu = a\, Pr^{n}$ وتم تسجيل البيانات التالية لهذا التغير وبالشكل التالي :

Pr	3.0	4.2	5.6	10	17.7	25.3	41.0
Nu	58.4	60.3	69.0	84.5	115	150	170

أوجد قيم a , n التي تحقق صحة المعادلة باستخدام :

1- الرسم على الورقة البيانية الخطية.

2- طريقة التربيعات الصغرى.

س5 باستخدام طريقة التربيعات الصغرى , أوجد أفضل معادلة تربط بين كثافة معدن سبيكة حديدية وبين محتوى الحديد فيه والتي تمثلها البيانات التالية حيث إن x يمثل كثافة السبيكة [gm / cm^3] و y هو محتوى الحديد فيها [percent].

x	2.8	2.4	3	3.1	3.2	3.2	3.3	3.4	3.2
y	30	26	33	31	33	35	36	33	37

س6 أوجد أفضل معادلة لخط مستقيم يمر بالنقاط التالية مستخدما طريقة التربيعات الصغرى :

1- (2,0) , (3,4) , (4,10) , (5,16)

2- (5,8) , (0,6.9) , (15,6.2) , (20,5)

3-(9.6,1.0) , (8.5,2.3) , (7,2) , (0.7,7) , (- 1.0,9.7)

س7 إن معامل التوصيل الحراري k لمادة الجرافيت يتغير مع درجة الحرارة T وفق المعادلة التالية

$$k = k_0 + \propto T$$

حيث إن k هو معامل التوصيل الحراري بالـــ ($\frac{kilo \quad erg}{cm^2 . sec}$) و T هي درجـــة الحرارة المطلقة (°C) وتم تسجيل البيانات التالية :

T , °C	390	500	1000	1500	2000
k ,kiloerg/cm^2.sec	1.41	1.38	1.19	1.15	1.0

باستخدام طريقة التربيعات الصغرى , أوجد أفضل معادلة لـــ (k) .

س8 في التمارين من 1 إلى 5 ، احسب التكامل المعطى مستخدما طريقة شـــبه المنحرف :

$$1)\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ,n=4 \qquad 2)\int_1^3 \frac{dx}{x} \quad ,n=3 \qquad 3)\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{x} \quad ,n=4$$

$$4)\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+x} \quad ,n=5 \qquad 5)\int_0^1 e^x\, dx \quad ,n=9$$

س9 في التمارين من 6 إلى 10 ، احسب قيمة التكامل المعطى مستخدما طريقة سمبسون :

$$6)\int_0^8 \frac{dx}{x^3+x+1} \quad ,n=4 \qquad 7)\int_1^3 \frac{dx}{x^3+1} \quad ,n=8 \qquad 8)\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad ,n=2$$

$$9)\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} \quad ,n=4 \qquad 10)\int_2^6 \frac{dx}{x} \quad ,n=4$$

س10 احسب قيمة التكامل التالي

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^3}}$$

بالطرق العددية باستخدام :

1- طريقة شبه المنحرف (3 نقاط , 9 نقاط)

2- طريقة سمبسون (3 نقاط , 7 نقاط , 9 نقاط)

ثم قارن بين دقة النتائج المحصلة في كل من (1) و (2) .

س11 أفترض أن :

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

و أنه عندما :

$x = 2$

فإن :

$y = 2$

أوجد قيمة y عندما :

$x = 2.2$

مستخدماً :

1 – طريقة بيكارد

2 – طريقة رانج – كوتا

المراجــــــع

1 . المعادلات التفاضلية الأولية ـ أيرل د. رنيفيل وفليب أ . بيدينت ـ ترجمـة د.منير نصيف بشاي ـ د. الفيتوري محمد سالم ، الطبعة الأولى ، دار الكتب الوطنية ـ بنغازي ـ ليبيا ـ 1992 .

2. المعادلات التفاضلية ـ جون أ . تيرني ، ترجمة د. أحمد صادق القرمانـي د. الفيتوري محمد سالم ـ منشورات مجمع الفاتح للجامعات ـ 1989 .

3. نظرية حساب التفاضل والتكامل ـ ج . أ . فريدي ـ ترجمة د. أحمد الصادق القرماني ـ د. رمضان محمد أجهيمة ـ منشورات جامعة الفاتح ـ 1991 .

4. Jenson , V.G. & Jeffreys , G.V. " Mathematical Methods in Chemical Engineering '' 3 rd edition , Academic Press , London & New York , 1963.

5. Thomas , G . B . J_R " Calculus and Analytic Geometry'' 4^{th} . edition – Wesley Publishing Company , London , 1975 .

6. Wylie , C.R . " Advanced Engineering Mathematics'' 4^{th} edition –McGraw – Hill Company , New York , 1975.