البـــاب الخامـــس

تكويـــن المعادلـــة التفاضليـــة

Differential Equation Formation

1.5 تكويـــن المعـــادلات التفاضليـــة

مما لاشك فيه أن النتيجة الأكثر أهمية في استنتاج الموديلات الرياضـــية فـــي المشاكل الهندسية تعتمد على مبدأ انسيابية العملية الإنتاجية والطريقة التي تســير بها تلك العملية ، إن النظر أو بعـــد النـــظر المكتـــسب مـــن اســـتنتاج الموديـــل الرياضي يمكننا من انتزاع العديد من العوامـــل المربكـــة (Confusion Factors) الطارئة أو الخارجية من المشكلة والوصول إلى جوهر المنظومة حيث يكون مـــن الممكن مشاهدة وبوضوح علاقات السبب والنتيجة بين متغيرات تلك المنظومة .

إن الموديلات الرياضية في قطاعات الهندسة المختلفة وبـــالأخص الهندســـة الكيميائية تكون مفيدة في كل وجـــوه التـــخصص الـــمحدد من البحث والتطـــوير إلى العمليات الصناعية وحتى في الدراسات الاستثمارية والاقتصادية .

1- البحـــث والتطويـــر Research & Development :

أي تحديد ميكانيكية الحركية الكيميائية مثلا (حركيـــة التفـــاعلات الكيميائيـــة) والعوامل المؤثرة من بيانات التفاعل للوحدة الصناعية التجريبيـــة أو المختبريـــة (Plant–Laboratory or Pilot). إن التحري وبدقة عن ظروف التشـــغيل المختلفـــة سيساعد في الوصول إلى الدراسة المثلى لتلك الظروف ويمكـــن مـــن تكبيـــر أو تصغير (Scale - Up) الوحدة المختبرية إلى وحدة صناعية.

2 - التصميـــم Design :

ونـــعني به استقصاء المعايرة والترتيب لجهاز التشـــغيل لتهيئتـــه للأنجـــاز الفعلي أو الديناميكي لدراسة التـــرابـــط بين الأجزاء المختلفة للعملية الصـــناعية وبالتالي تقييم طرق السيطرة البديلة للتحكم فـــي مواقـــف و إجـــراءات التشـــغيل (Start - Up) و الإيقاف (Shut - Down) وكذلك الطوارئ .

3. الوحــدة الصناعيــة Plant Operation:

السيــطرة على استقصاء أو تحري الخلل و إصلاحه والمشاكل التشغيلية حيث يساعد الموديل الرياضي عــلى تحــديد بــداية التشغيل والتدريب العملي ودراسة تأثيرات ومتطلبات توسيع التصميم أو المشروع (إزالة الاختناقات أو العراقيــل) وبالتالي الحصول على العملية الإنتاجيــة الأمثــل (Optimum Plant Operation) وعادة ما يكون إدارة أنواع الدراسات أعلاه أقل كلفة وأكثـــر أمانــا و أســرع باستخدام الموديل الرياضي من إدارتها عمليا بالوحدة التشغيلية أو الصنــاعيــة و ذلك لا يعني القول بأن الاختبارات العملية أو المعملية ليســت ضــرورية وغيــر مطلوبة بل إنها تمثل القسم الأعظم من تأكيد صحة الموديل وبرهنة الأفكار المهمة والتوصيات المنبعثة أو المحصل عليها من دراسات الموديل الرياضي، وســنأخذ بعض الحالات لمختلف التخصصات الهندسية.

2.5 سرعــة التحــرر مــن الأرض

ندرس الآن مسألة تعيين سرعة جسيم مقذوف على امتداد نصف قطر الأرض متجها من الأرض وتؤثر عليــه قــوة واحدة فقــط هــي قــوة جاذبيــة الأرض وسنفرض أن الجسيم مقذوف بسرعة ابتدائية تتجه على امتداد نصف القطر وبذلك تحدث الحركة بصورة كلية على المستقيم المار بمركز الأرض ووفقا لقانون نيوتن للجذب العــام تتناسب عجلة الجسيم تناسبا عكسيا مع مربع بعد الجسيم عن مركز الأرض. نفرض أن r هو البعد المتغيــر (المســافة) و R هــو نصــف قطــر الأرض.وإذا كانت t تمثل الزمــن , v سرعــة الجسيم و a عجلته و k هو ثابت التناسب في قانون نيوتن فإن :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \text{.......... ....}(1-5)$$

و العجلة سالبة لأن السرعة تتنــاقص , ومــن ثــم فــإن الثابــت k يكــون سالبا,وعندما r = R تكون

$a = -g$ حيث g هو عجلة الجاذبية الأرضية على سطح الأرض ولذلك فإن:

$$-g = \frac{k}{R^2}$$

وبالتعـــويض في المعادلة (5-1) نحصل على :

$$a = \frac{gR^2}{r^2} \quad \text{..........} \quad (2-5)$$

ونحن نريد التعبير عن العجلة بدلالة السرعة والمسافة وبما أن لدينا :

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{و} \qquad v = \frac{dr}{dt}$$

ومن ثم نستنتج أن :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} x \frac{dv}{dr} = v\frac{dv}{dr} \quad \text{..........} \quad (3-5)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لتعيين السرعة هي :

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} \quad \text{..........} \quad (4-5)$$

و يمكن تطبيـــق فصل المتغيرات على المعادلة (5-4) فيكون الحل هو :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + c \quad \text{..........} \quad (5-5)$$

لنفرض أن الجسيم يتحرك على سطح الأرض بسرعة v_0 (سرعة ابتدائية) عندئذ فإن : $v = v_0$

عندما $r = R$

و من هنـا نستـنتـج أن الثابت :

$$c = v_0^2 - 2gR \text{ ....} (6-5)$$

وهكذا فإن الجسيم الـمقـذوف من سطح الأرض على امتداد نصف قطرها بسرعة ابتدائية v_0 سيتحرك بسرعة v بموجب الصيغة التالية :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR \text{..} (7-5)$$

3.5 قانـون نيوتـن للتبريـد (Newton's Law of Cooling)

بينت التجربة أنه بشروط معينة , يمكن الحصـول على تقريب جيد لدرجـة حرارة نموذج ما بالاستعانة بقانون نيوتن للتبريد.تتغير درجة حرارة جسم بمعـدل يتناسب مع الفرق بين درجتي حرارة الوسـط الخارجي والجسم نفسه. وسنفرض هنا أن ثابت التناسب هو نفسه سواء كانت درجة الحرارة تتزايد أم تتناقص .

نفرض على سبـيل المثال ,أن مقياس الحرارة (الترمومتر) كان يبـين **70°F** داخل المنزل ثم وضع بالخـارج حيـث كـانت درجة حـرارة الهـواء **10°F**. وبعد ثلاث دقائق وجدت قراءة الترمومتر 25°F ، أوجد العلاقـة بـين درجـة الحرارة والزمن لقراءة الترمومتر .

الحل :

لنـفرض أن T(°F) تمثـل درجة الحرارة المبينة على الترمومتر في اللحظـة الزمنية الممثلة بـ (min) t ويقاس الزمن من لحظة وضع الترمومتر بالخارج .

ولدينا المعطيات التالية :

عندما $T = 70°F$, $t = 0$ و عندما $t = 3$

فإن : $T = 25°F$

ووفقا لقانون نيوتن للتبريد , يكون المعــدل الزمنــي للتغيــر فــي درجــة الحرارة $\frac{dT}{dt}$ متناسبا مع الفرق بين درجتي الحرارة (T-10) وحيث إن درجة حرارة الثرمومتر تتناقص,فمن المناسب اعتبار (k -) ثابتا للتناسب ، وعندئذ تتحدد T من المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-10) \qquad \ldots\ldots\ldots (8-5)$$

والشروط هي :

(1) عندما $T = 70 \ , t = 0$

(2) عندما $T = 25 \ , t = 3$

ونحتاج إلى شرطين (قراءة ثرمومتر في لحظتين مختــلفــتين) لأن هنـــاك ثابتين ينبغي تحديــدهما وهــما k في المعـــادلة (5 - 8) والثابت الاختياري الذي يظهر في حل المعادلة التفاضلية .ومن المعادلـــة (8-5) ينتج أن:

$$T = 10 + ce^{-kt}$$

إن الشرط الأول يمكننا من معرفة قيمة الثابت c والتي ستكون 60 أي أن:

$$T = 10 + 60e^{-kt}$$

وينبغي الآن تعيين قيمة k بالاستعانة بالشرط الثاني وبوضــع $T = 25 , t = 3$ ينتج أن :

$$25 = 10 + 60e^{-3k} \Rightarrow \therefore \quad e^{-3k} = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore \quad k = \frac{1}{3}\ln 4$$

ولهذا تعطى درجة الحرارة بالمعادلة :

$$T = 10 + 60\exp(-\frac{1}{3}t\ln 4)$$

وحيث أن $\ln 4 = 1.39$ يمكن كتابة المعادلة كما يلي :

$$T = 10 + 60 \exp(-0.46 t)$$

4.5 التحــول الكيميائـــي البسيــط (Simple Chemical Conversion)

من المعروف من نتائج التجارب الكيميائية أن هناك تفاعلات معينـــة تتحـــول فيها مادة A إلى مادة أخرى.والمعدل الزمني للتغير في الكميـــة x للمـــادة غيـــر المتحولة يتناسب مع x ، افرض أن كمية المادة غير المتحولة معلومة عند لحظـــة معينة , أي أن $x = x_0$ عند $t = 0$ وأن ثلثا الكمية الأصلية قد تحول في غضـــون 30 ثانية أوجد قيم x لكل $t > 0$.

الحل :

إن المعادلة التفاضلية التي تمثل العلاقة بين x و t هي :

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

والشرط أن :

$x = x_0$ عندما $t = t_0$. وحيث إن الكمية x تتناقص مع تزايد الزمن فإن ثابـــت التناسب في المعادلة يؤخذ (- k) وعند تكامل المعادلة نحصل على :

$$x = c\,e^{-kt}$$

ولكن $x = x_0$ عند $t = 0$ ومن هنا فإن $c = x_0$ وينتج لدينا :

$$x = x_0 e^{-kt}$$

والآن نطبق الشرط الثاني وهو عندما $t = 30$ فإن المادة المتبقية دون تحول هي:

$$x = \frac{1}{3} x_0$$

أي أن :

$$\frac{1}{3}x_0 = x_0 e^{-30k} \Rightarrow \therefore\ k = \frac{\ln 3}{30} \Rightarrow \therefore\ x = x_0 e^{-\frac{\ln 3}{30}t}$$

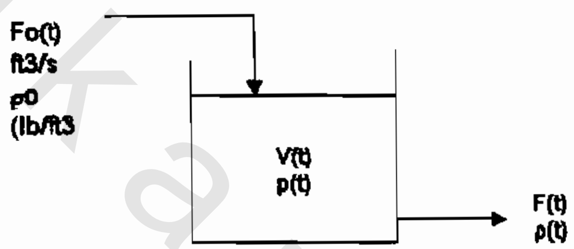
وعند t = 60 نجد أن:

$$x = x_0 e^{-\frac{\ln 3}{30}(60)} = x_0 e^{-2\ln 3} = x_0 e^{\ln 3^{-2}} = x_0 (3)^{-2} = \frac{1}{9}x_0$$

5.5 أمثلـــــة وتماريـــــن

مثـــال (5-1) امتـــزاج سائـــل فـــي خــزان

سائـــل ممتزج بشكل تام في الخزان الموضح في الشكل أدناه حيث ينساب أو يجري السائـــل بمعدل (F_0 ,ft^3/sec) وكثافته (ρ_0 , Ib/ft ^{3}) أما حجم الســـائل الممتزج في الخزان فهـــو(ft^3) V وكثافته (ρ Ib_m / ft^3) معـــدل الجريـــان مـــن الخزان هو (F ft^3/sec) وكثافته بالطبع هي نفس كثافة محتويات الخزان .



الحل :

الموازنـــــة الكليـــــة للكتلـــــة حـــــول الخـــــزان تكـــــون بالشـــــكل التـــــالي

$$In = F_0 \rho_0 = \frac{Ib_m}{\sec}$$

$$Out = F\rho$$

$$Accumulation = \frac{d}{dt}(\rho V) \ \frac{Ib_m}{s} \cdots (1)$$

$$\boldsymbol{In} - Out = Acc.$$

$$F_0 \rho_0 - F\rho = \frac{d}{dt}(\rho V) \ \frac{Ib_m}{s}$$

حيث أن : $\frac{d}{dt}$ تمثل معدل التغير نسبة للزمن .

ولأن السائل يخلط بشكل تام , تكون الكثافة لكــل أجـزاء الســائل متســاوية وبالتالي ليس هناك انحدارات في الكثافة الجزئية وذلك يعني أن هناك متغير واحد مستقل هو (t).

$$\therefore \frac{d(\rho V}{dt} = F_0 \rho_0 - F\rho$$

$$\because Q = Fx\,\rho \qquad Q_0 = Fx\,\rho \qquad Q = \rho x V$$

وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن:

$$\frac{dQ}{dt} + Q = Q_0 \cdots \cdots \cdots (2)$$

إن المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويمكن حلها بـنفس الطرق السابقة

$$Q.e^{\int dt} = \int Q_0.e^{\int dt}.dt \Rightarrow \therefore Q.e^{t} = \int Q_0.e^{t}.dt = Q_0.e^{t} + C$$

$$\therefore Q = Q_0 + Ce^{-t}$$

مثال (5-2) حركــة زنبــرك

زنبرك يكون مشدودا ست بوصات (6 in) بثقل وزنه 12 باوند . أفرض أن الثقل بعد ربطه بالزنبرك شد إلى أسفل بمقدار (4 in) تحت نقطة الاتزان وإذا بدأ الثقل حركته بسرعة ابتدائية قدرها 2 ft / sec متجها للأعلى.صف حركة الزنبرك علما بأنه لا توجد مضاعلة أو قوى مسلطة (حافزة مؤثرة).

الحل :

يعرف الثابت الزنبركي k بوحدات (lb / ft) .لنفرض أن جسما B وزنه w lb ربط في الطرف الأسفل لزنبرك (شكل 5-1) وترك ليصل إلى نقطة الاتزان حيث يمكنه البقاء في حالة السكون. وعندما يزاح الثقل B من حالة الاتزان تتحدد حركة B بمعادلة تفاضلية مع شروط ابتدائية ولنفرض أن t هو الزمن مقاسا بالثواني عند لحظة بداية الحركة ، نفرض أن x هو البعد بالقدم المقاس موجبا إلى أسفل (وسالبا إلى أعلى) من نقطة الاتزان ونفرض أن حركة B تحدث كلية على المستقيم الرأسي .ومن ثم تعطى السرعة والعجلة بالمشتقتين الأولى والثانية لـ x بالنسبة إلى t.وبالإضافة إلى القوة المتناسبة مع الإزاحة وفق قانون هوك ، توجد قوة مثبطة (retarding) تنشأ بسبب مقاومة الوسط الذي تحدث فيه الحركة أو بسبب وجود الاحتكاك ويجب أن تؤخذ بنظر الاعتبار وتساهم هذه القوة في مجموع القوى المؤثرة على B بالحد $b\ x'(t)$ حيث b هو ثابت يعين بالتجربة للوسط الذي تحدث فيه الحركة. وعادة ما يهمل وزن الزنبرك بالمقارنة مع وزن الثقل B ولذا نعتبر كتلة المجموعة الميكانيكية هي وزن B مقسوما على g عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة و إذا لم تؤثر أية قوى أخرى غير تلك المذكورة على الثقل فإن الإزاحة يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{w}{g}X''(t)+bX'(t)-kX(t)=0\cdots\cdots\cdots(I)$$

نعلم إن عجلة الجاذبية تدخل في عملنا في صيغة الكتلة ونريد أن نستعين بالقيمة :

$$g = 32\ (ft\ /\sec^{2})$$

و ينبغي توافق الوحدات ولذلك سنعبر عن الطول بالأقدام ، وفي البداية نعين قيمة الثابت الزنبركي k من حقيقة أن الوزن 12 lb يشدّ الزنبرك (6 in) أي أن:

المسافة هي :

$$\frac{1}{2} \; ft$$

وبذلك يكون :

$$\therefore\ k = 24 \ \frac{lb}{ft} \Leftarrow 12 = \frac{1}{2} k$$

وتكون المعادلة التفاضلية للحركة هي :

$$\frac{12}{32} X''(t) + 24\, X(t) = 0$$

لعدم وجود قوى مضاعلة وعند الزمن t هو صفر فإن الثقل يكون 4 بوصة ($\frac{1}{3}$ قدم) تحت نقطة الاتزان ,ولذا فإن :

$$X(0) = \frac{1}{3}$$

والسرعة الابتدائية (لأعلى) ولذا فإن :

$$X'(0) = -2$$

وهكذا تصبح المسألة :

$$X''(t) + 64X(t) = 0 \qquad , \quad X(0) = \frac{1}{3} \quad , \quad X'(0) = -2 \cdots\cdots (II)$$

والحل العام للمعادلة (II) هو :

$$X(t) = c_1 \sin 8t + c_2 \cos 8t$$

ومنها نستنتج أن :

$$X'(t) = 8\, c_1 \cos 8t - 8\, c_2 \sin 8t$$

و بتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على الثوابت الاختيارية وهي :

$$c_1 = -\frac{1}{4} \quad , \quad c_2 = \frac{1}{3}$$

وبذلك تصبح معادلة حركة الزنبرك كما يلي:

$$X(t) = -\frac{1}{4}\sin 8t + \frac{1}{3}\cos 8t$$

س1 نصف قطر القمر هو 1080 ميل وعجلة الجاذبية على سطح القمر هي حوالي 0.165 g , حيث g هي عجلة الجاذبية على سطح الأرض . عين سرعة التحرر من القمر .

س2 زنبرك يشدّه ثقل مقداره 5 باوند بمقدار 6 أنج . ربط الثقل 5 باوند من الزنبرك فوصل إلى وضع اتزانه ,وبعد ذلك سحب الثقل إلى أسفل بمقدار 3 أنج تحت نقطة الاتزان ، وبدأ بسرعة ابتدائية 6 قدم/ثانية متجها إلى أعلى ، عين معادلة تحدد موضع الثقل عندما $t > 0$

س3 كانت قراءة ثرمومتر هي 18°F عندما أدخل إلى حجرة درجة حرارتها 70°F , وبعد دقيقة كانت قراءة الثرمومتر هي 31°F . عين قراءة الثرمومتر كدالة للزمن ثم أوجد درجة الحرارة بعد 5 دقائق من إدخال الثرمومتر إلى الحجرة .

س4 ثرمومتر كانت قراءته تبين 75°F أخذ إلى الخارج حيث درجة الحرارة 20°F وبعد 4دقائق كان الثرمومتر يبين 30°F عين ما يلي :

1. قراءة الثرمومتر بعد 7 دقائق من إخراجه.
2. الزمن الذي يمر لتهبط قراءة الثرمومتر من 75°F إلى حوالي نصف درجة أعلى من درجة حرارة الهواء .

س5 عند الساعة الواحدة بعد الظهر كانت قراءة ثرمومتر 75°F عندما أخذ إلى الخارج حيث درجة حرارة الهواء كانت 10 °F− ,وفي الساعة الواحدة ودقيقتين بعد الظهر كانت القراءة 26°F وفي الساعة الواحدة وخمس دقائق أخذ الثرمومتر مرة أخرى إلى الداخل حيث كانت درجة الحرارة 70°F . ما هي قراءة الثرمومتر عند الساعة الواحدة وتسع دقائق بعد الظهر ؟

س 6 : في الساعة الثانية بعد الظهر (2.00 p.m.) كانت قراءة ثرمومتر 80°F عندما أخذ إلى الخارج حيث درجة حرارة الهواء هي 20°F وعند 2.03 p.m. كانت قراءة الثرمومتر 42°F , وبعد ذلك بعدة دقائق أدخل الثرمومتر إلى الحجرة حيث كانت درجة الحرارة 80°F وعند 2.10 p.m. بين الثرمومتر درجة حرارة 71 °F.متى أدخل الثرمومتر إلى الحجرة ؟

س7 بفرض أن التفاعل الكيميائي يحدث وفقا للقانون المعطى في مثال (5 – 1) و إذا كان نصف المادة A قد تحول عند نهاية 10 ثوان.عيّن الزمن الذي تتحول فيه تسعة أعشار المادة؟

س8 تتحلل إحدى المواد المشعة بمعدل يتناسب مع ما يتبقى منهـا.بفـرض أن الكمية الأصلية كانـت 50 ملليجـرام وأن 10 % من تلـك الكمية قد اسـتهلكت خلال ساعتين.أوجد العبارة الخاصة بالكتلة المتبقية من المادة عند أي زمن (t).

س9 أوجد سرعة التحرر لكل جرم سماوي موجود في الجدول التالي :

الجرم السماوي	عجلة الجاذبية على السطح	نصف القطر (ميل)
الزهرة (Venus)	0.86 g	3,800
المريخ (Mars)	0.38 g	2,100
المشتري(Jupiter)	2.6 g	43,000
الشمس(Sun)	28 g	432,000

ملاحظة : يمكن اعتبار $g = 6.1(10^{-03})$ miles / sec .

س 10 سقط جسم وزنه w (Ib) من ارتفاع h (ft) عن الأرض. وفـي اللحظـة t (sec) بعد سقوطه كان بعده عن نقطة السقوط x (ft) مقاسا في الاتجاه الموجب إلى أسفل ، إهمل مقاومة الهواء , وبين إن x يجب أن يحقق المعادلة :

$$\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = w$$

س11 يـتحرك جسيـم على المحور وفقا للمعادلة $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 25x = 0$

فإذا بدأ الجسيم حركته من الموضع x = 0 بسرعة ابتدائية 12 قدم / ثانية متجها إلى اليسار, عين :

(أ) قانون الحركة للجسيم .

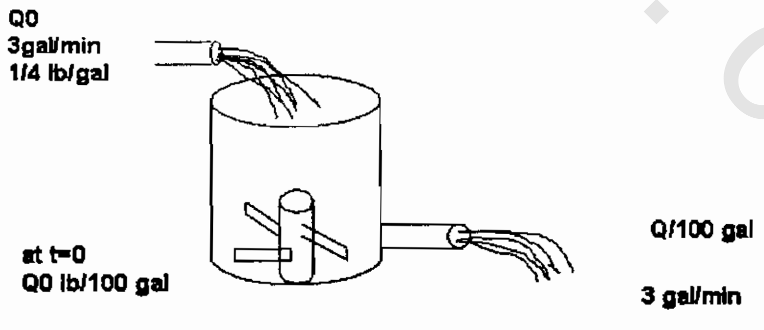
(ب) اللحظات التي يحدث فيها التوقـف .

س12 للمادة c يكون المعدل الزمني للتحول متناسبا مـع مربـع الكميـة غيـر المتحولة x.افرض أن k هـو القيـمة العددية لثابت التناسب وافرض أن كميـة

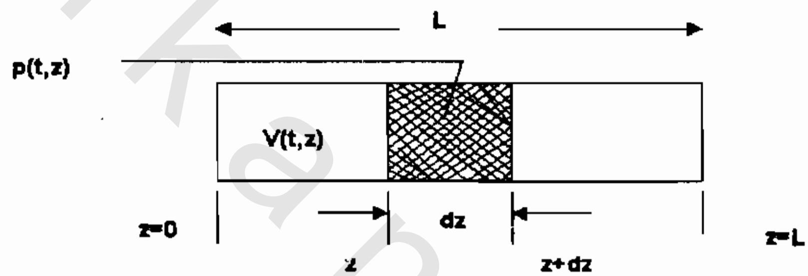
المادة غير المتحولة كانت x_0 في اللحظة $t = 0$. أوجد العلاقــة للكميــة غيــر المتحولة x بدلالة الزمن t .

س13 عند حركة نموذج في وسط معين , يؤثر الوسط بقوة مقاومة تتناسب مــع مربع سرعة النموذج المتحرك.افرض أن جسم ما سقط داخل الوسط تحت تــأثير الجاذبية وأن t تمثل الزمن ، V هي السرعة الموجبة في الاتجاه إلى أسفل وأن g هي عجلة الجاذبية وw هو وزن الجسم .استعن بقانون نيوتن الثاني لاستنتاج أن : $\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2$ حيث إن $k\,v^2$ مقاومة الوسط ؟

س 14 عــند زمن $t = 0$ يحتوي الخزان على Q_0 (باوند من الملح) مذاب فــي 100 جالون من الماء.افــرض أن المــاء الــداخل إلى الخزان يحتوي علــى $\frac{1}{4}$ باوند ملح لكل جالون ماء وبمعدل 3 جالون / دقيقة وبأن المحلول الممتزج جيــدا يغادر الخزان بنفس معدل الدخول.أوجد تعبير رياضي لكمية الملح $Q(t)$ الموضح بالشكل أدناه عند أي زمن t.



س15 ينـــساب سائل خلال أنبوب أسطواني ذات قطر ثابت والموضح في الشكل أدناه.يكون الجريان داخل الأنبوب مضطربا وبذلك يمكن افـتراض أن الجريـــان كتلي أي أن كل شريحة من السائــل تجـري إلى نهـــاية الأنبوب كوحدة واحــدة وبذلك يكون لدينا انحدار محوري في كثافة وسرعة السائل حيــث يتغيــران مــع جريان السائل على طول الأنبوب أو بالاتجاه z و بذلك يصبح لــدينا متغيــرين مطلقين هما الزمن t والموقع المحوري z أي أن الكثافة والسرعة داخـل الأنبـــوب هي دوال للــزمن والمسافـــة $\rho(t , z)$,$V(t , z)$. أوجد العلاقة الخاصة بكل مــن الكثافــة والسرعة بدلالة الزمن والمسافة .



س 16 وفقا لقانون نيوتن للتبريد , يتناسب معدل التبريد لمادة موضـــوعة فـــي مجرى هوائي مع الفرق بين درجة حرارة المادة ودرجة حرارة الهــواء , فـــاذا كانت درجة حرارة الهواء هي 300 °K وانخفضت درجة حرارة المادة من 370 °K إلى 340 °K خلال 15 دقيقة , فبعد كم دقيقة تصبح درجة الحــرارة 310 °K ؟

س 17 تتحول المادتان A,B إلى مركب واحد هو C. وفي المعمل ثبت بالتجربة أن لهذه المواد يتحقق قانون التحول التالي : المعدل الزمني للتغير في الكمية x للمركب C يتناسب مع حاصل ضرب الكميتين الباقيتين دون تحول من المادتين A و B.وبفرض أن وحدات القياس قد اختيرت بحيث إن وحدة واحدة من المركب C تتكون من تركيب وحدة واحدة من A مع وحدة واحدة من B , واذا كان في اللحظة $t = 0$ يوجد a وحدة من المادة A و b وحدة من المادة B ولا توجد أي وحدة من المركب C, بين أنه يمكن التعبير عن قانون التحول بالمعادلة:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)\,(b - x)$$

ثم حل هذه المعادلة بالشرط الابتدائي المعطى .

س 18 يبيّن الشكل أدناه ثقلا وزنه w باوند ينزلق إلى أسفل على مستو مائل على الأفقي بزاوية α . بفرض أنه لا تؤثر على الثقل قوى أخرى غير وزنه أي لا يوجد احتكاك أو مقاومة هواء وغير ذلك ,وأن $x = x_0$ عندما $t = 0$, والسرعة الابتدائية هي v_0 , عين قيم x لقيم $t > 0$.