الباب الرابع

متسلسلات القوى (الكترونات وكهرباء)
Power Serieses

1.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى معادلات خطية.

2.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية متسلسلة تايلور .

3.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين .

4.4 متسلسلة فورير .

5.4 الإعداد المركبة (المعقدة).

1.5.4 العمليات على الإعداد المركبة.

2.5.4 تمثيل الاعداد المركبة في الصورة القطبية ـ مخطط أرجند.

6.4 أمثلة وتمارين.

1.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى معادلات خطية

عنـــدما نكون قادرين على استعمال الطرق الرياضية الخطية السائدة فـــي حل المعادلات التفاضلية.لذلك يـــكون من الطبيعي تحويل المعـــادلات التفاضـــلية اللاخطية إلى خطية . إن أول سؤال يتوجب علينا إجابتـــه هـــو مـــــاذا نـــعني بالمعادلة التفاضلية الخطية ؟ مبدئيا فإننا نعني بالمعادلة التفاضلية الخطية هي تلك المعادلة التي تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى فقط في أي حد من حدودها فإذا ظهرت الجذور التربيعية , التربيعات , الأسيات و حاصل ضرب المتغيـــرات في المعادلة فإنها ستكون لاخطية .

مثال لمعادلة خطية :

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

حيث أن a_1 و a_2 ثوابت أو دوال للزمن فقط و ليس للمتغير التابع .

مثال لمعادلات غير خـــطيـــة :

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 (x)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 (x)^2 = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 e^x = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 x_1(t).\, x_2(t) = 0$$

حيث أن كل من X_1 و X_2 هي متـــغيـــرات تـــوابـــع .

4 - 2 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية – متسلسلة تايلور

لتحـويـل المعادلة التفاضلية اللاخطيـة إلـى معادلـة تفاضـلية خطيـة يسـتخـدم مفكـوك سلسـلة تـايلور أو مـا يـدعى (Taylor - Series Expansion) عـنـد مـعـرفـة مستـوى حالة التشـغيل المستقرة أو ما تسمى (Steady - State Operating Level) .

أفرض أنه لديـنـا الدالة اللاخطية (F) لمتغيرات عملية وهي X_1 , X_2 أيضا F تكون دالة لـ X_1 , X_2 . وكمثال قد تكون X هي كسر مولي أو درجة حـرارة أو معدل جريان .

سيتم تعريف قيم الحالة المستقرة لتلك المتغيرات بوضع خطـوط فـوق تلـك المتغيرات :

$$\bar{x}_1 = steady - state - value - of - x_1$$
$$\bar{x}_2 = steady - state - value - of - x_2$$

ولتحويل تلك الدالة اللاخطية إلى خطية يتم فتحها باستعمال مفكـوك سلسـلة تـايـلور حول قيمتها في الحالة المستقرة على الصـورة $F(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ وبالشـكل التالي :

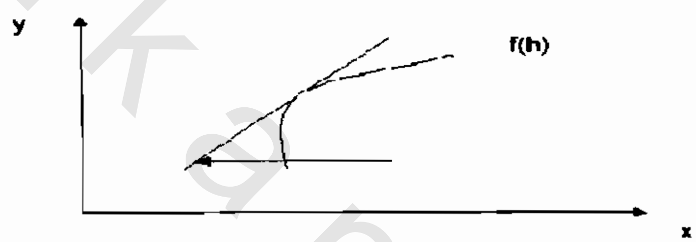
$$F(x_1,x_2) = F(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_1-\bar{x}_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}(x_2-\bar{x}_2)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_{x_1,x_2}\frac{(x_1-\bar{x}_1)^2}{2!}+ \ldots\ldots (1-4)$$

$$\therefore F(x) = F(\bar{x}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\bar{x}}(x-\bar{x}) \ldots\ldots (2-4)$$

مـــن هـــذه الطريقة سوف يتم إهمال كل الحدود بعد أول تفاضل جزئي فتكـــون النتيجة النهائية لمفكوك الدالة الخطي هي :

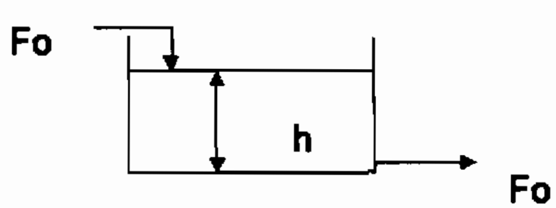
$$\therefore F(x_1,x_2) \cong F(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}_1,\bar{x}_2}(x_1-\bar{x}_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{\bar{x}_1,\bar{x}_2}(x_2-\bar{x}_2) \cdots\cdots\cdots (3\text{–}4)$$

إن الطريقة موضحة بيانيا في الشكل التالي الذي يمثل دالة ذات متغير واحد .



مثال (4-1)

يوصـــف اعتـــماد معدل الجريان من خزان على ارتفاع السائل في الخزان وفـــق المعادلة التالية : $F(h) = K\sqrt{h}$. حـّـول هذه الدالة إلى دالـــة خطيـــة باســـتعمال مفكوك سلسلة تايلور علما بأنه في الحالة المستقرة فإن قيمة h تساوي 2 م .



الحل :

$$F(h) = F(\bar{h}) + \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_{\bar{h}} (h - \bar{h})$$

عند الحالة المستقرة فإن : h = 2 m أي أن :

$$F(\bar{h}) = K\sqrt{2}$$

ولذلك فإن :

$$\frac{\partial F(h)}{\partial h} = \frac{1}{2} K (h)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{K}{2} (h)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{2\sqrt{h}}$$

وفي الحـــالة المستقرة فإن :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_{\bar{h}} = \frac{K}{2\sqrt{\bar{h}}}$$

وبذلك تصبح المعادلة الخطية للدالة هي :

$$F(h) = K\sqrt{2} + \frac{K}{2\sqrt{\bar{h}}}(h - \bar{h})$$

مثال (2-4)

تعتـــمد معادلة أرينيوس لحساب معدل التحلل k على درجة التفاعـــل وهـــي معادلة لاخطية صيغتها بالشكل التالي $k(T) = \propto e^{-\frac{E}{RT}}$. حول هذه الدالة إلى خطية باستخدام مفكوك سلسلة تايلور .

الحــل :

$$K(T) = K(\bar{T}) + \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_{\bar{T}} (T - \bar{T})$$

$$\because K(\bar{T}) = \propto e^{-\frac{E}{R\bar{T}}}$$

$$\therefore \frac{\partial K}{\partial T} = (\propto)(\frac{-E}{R})(\frac{-1}{T^2})e^{\frac{-E}{RT}} = \frac{\propto E}{RT^2} e^{\frac{-E}{RT}} \Rightarrow \therefore \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_{\bar{T}} = \frac{\propto E}{RT^2} e^{\frac{-E}{RT}}$$

$$\therefore K(T) = \propto e^{\frac{-E}{RT}} + \frac{\propto E}{R\bar{T}^2} e^{\frac{-E}{R\bar{T}}} (T - \bar{T}) = K(\bar{T}) + \frac{EK(\bar{T})}{R\bar{T}^2}(T - \bar{T})$$

$$\therefore K(T) = \bar{K} + \frac{E\bar{K}}{R\bar{T}^2}(T - \bar{T})$$

حيث أن : $K(\bar{T}) = \bar{K}$

مثــال (4 – 3)

حاصل ضرب متغيرين تابعين هو دالــة لاخطية لتــلــك المتغــيرات وهــي $Q(C_A.F) = C_A.F$. حول هذه الدالة إلى خطية باستعمال مفكوك سلسلة تايلور.

الحــل :

$$Q(C_A,F) = Q(\bar{C}_A,\bar{F}) + \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A}\right)_{\bar{C}_A,\bar{F}} (C_A - \bar{C}_A) + \left(\frac{\partial Q}{\partial F}\right)_{\bar{C}_A,\bar{F}} (C_A - \bar{C}_A)$$

$$\because Q(\bar{C}_A,\bar{F}) = \bar{C}_A.\bar{F} \rightarrow \therefore \partial Q = F.\partial C_A \rightarrow \therefore \frac{\partial Q}{\partial C_A} = F \rightarrow \therefore \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A}\right)_{\bar{C}_A,\bar{F}} = \bar{F}$$

$$\partial Q = C_A.\partial F \Rightarrow \therefore \frac{\partial Q}{\partial C_A} = C_A \Rightarrow \therefore \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A}\right)_{\bar{C}_A,\bar{F}} = \bar{C}_A$$

$$\therefore Q(C_A,F) = \bar{C}_A.\bar{F} + \bar{F}(C_A - \bar{C}_A) + \bar{C}_A(F - \bar{F})$$

4 - 3 تحويل المعادلات اللاخطيـــة إلى خطيـــة باستخدام مفكـــوك متسلسلـــة ماكلوريـــن

إن حلول المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة يمكن الحصـــول عليه بالطرق الموضحة سابقا في الباب الأول . أما المعـــادلات التفاضـــلية ذات المعاملات المتغيرة ومن رتب أعلى من واحد فـــالأرجح أن أفـــضل الطـــرق لمعالجتها والحصول على حلّها تعتمد بصورة رئيسية على متسلسلات القوى .
ولنأخذ بنظر الاعتبار معادلة الرتبة الثانية المتجانسة الخطية التالية الحاوية علـــى معاملات حدودية متغيرة :

$$b_o(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0 \qquad (4-4)$$

و إذا كـــانـــت $b_o(x)$ لا تـــساوي صفر عنـــدما $x = 0$, يمكننـــا قســـمة المعادلة (4 - 4)على $b_o(x)$ فتـــصبح كما يلي :

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \qquad (5-4)$$

حيث أن كل من $p(x),q(x)$ هما دالتان كسريتان في x وبمقامين مختلفين عن الصفر عندما $x = 0$. وللحصول على حل صائـــب للمعادلة (4 - 5) كمتسلسلة قوى في x , لنفرض أن :

$y = y(x)$

هو حل للمعادلة ثم نعيّن قيمتين اختياريتين لـــ y و y' عند النقطة $x = 0$, وهي:

$B = y'(0)$ و $A = y(0)$

وينتج من المعادلة (4 - 5) أن :

$$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \qquad (6-4)$$

ويمكن حساب $y''(0)$ مباشرة نظرا لأن الدالتان p(x) , q(x) هما معرفتان عند x = 0 , ومن المعادلة (6-4) نحصل على :

$$y'''(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) - q(x)y'(x) - q'(x)y(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (7-4)$$

وبالتالي يمكن حساب قيمة $y'''(0)$ من معرفة قيمة $y''(0)$

ومن الواضح أنه يمكن الاستمرار في سلسلة العمليات أعلاه حسب الرغبة , وبهذا يمكن تعيين $y^{(n)}(0)$ بالتتابع لأي قيمة صحيحة مطلوبة للعدد n وذلك باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين :

$$y(x) = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} y^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \cdots \cdots \cdots (8-4)$$

أي أن الطرف الأيمن من المعادلة (4 - 8) سيقارب القيمة y(x) في فترة حول النقطة x = 0

إذا كانت y(x) تتصرف كدالة حسنة المسلك بجوار النقطة x = 0 وعندها يمكن تعيين الدالة كمتسلسلة قوى ويكون الحل العام لها بالصورة التالية :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots (9-4)$$

ويمكن تطبيق القوانين السابقة في التفاضل والتكامل على متسلسلات القوى وبالشكل التالي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

عندما تكون - R < x < R

مثـــال (4–4)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التاليــة $y'' + 4y = 0$ باســـتخدام متسلســلة مكلورين .

الحل :

نفرض أن الحل يكون على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{..........} \quad \text{..........} \quad \text{......}(I)$$

فتكون :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

وبذلك تصبح :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (I) نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \cdots\cdots\cdots (II)$$

والآن نستبدل أدلة الحدود في المجموع الثاني في المعادلـــة (II) حتـــى تصـــبح المتسلسلة محتوية على x^{n-2} في حدها العام فنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0 \cdots\cdots\cdots (III)$$

وبجمع المتسلسلتين (II) و (III) سنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n-1) a_n + 4a_{n-2} \right] x^{n-2} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (VI)$$

وذلك لأن الحدين الأوليين في المجموع الأول في المعادلة (III) يساوي صفر .

وعندما تكون قيم $n \geq 2$ فإن $n(n-1)a_n + 4a_{n-2} = 0$: ويمكن كتابة هـذه العلاقة على النحو التالي :

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)} \cdots \quad \cdots \quad (V)$$

ويمكن استخدام هذه العلاقة للحصول على قيم لـــ a_n لقيم $n \geq 2$ وذلك بدلالـــة الثابتين الاختياريين a_1, a_0 حيث أن :

$$a_{2k} = \frac{-4a_{2k-2}}{2k(k-1)}$$

$$a_{2k+1} = \frac{-4a_{2k-1}}{(2k+1)(2k)}$$

$$a_3 = \frac{-4a_1}{3.2}$$

$$a_5 = \frac{-4a_3}{5.4}$$

$$a_2 = \frac{-4a_0}{2.1}$$

$$a_4 = \frac{-4a_2}{4.3}$$

وإذا ضربنا العناصر المتناظرة من المعادلات في العمود الأول نحصل على :

$$a_2 a_4 \cdots\cdots a_{2k} = \frac{(-1)^k 4^k}{(2k!)} a_0 a_2 \cdots\cdots a_{2k-2}$$

وبتبسيط المعادلات لقيم k عندما تكون $k \leq 1$

نحصل على صيغة مماثلة لقيم $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k 4^k a_1}{(2k+1)!}$ وبتعويض هذه الثوابت فــي المعادلة (I) نجد أن :

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + a_2 x + \sum_{k=1}^{k} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

وبتبسيط الحل نحصل على :

$$y=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{k}\frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k!)}\right]+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{k}\frac{(-1)^k 4^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

$$\therefore y=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!}\right]+\frac{1}{2}a_1\left[2x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]\cdots\cdots(IV)$$

إن الحدين المنفصلين في المعادلة **(IV)** هما متسلسلة ماكلورين للدالتين sin2x , cos2x على التوالي وبهذا يمكن أن تكتب المعادلة أعلاه بالشكل التالي:

$$y = a_0 \sin 2x + \frac{1}{2} a_1 \cos 2x$$

وهو مشابه للحل العام الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي .

مثـــال $(4-5)$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخـــطية التاليـــة باســـتخدام مفكـــوك متسلســـة ماكلورين $(1-x^2)y''-6xy'-4y=0$ بجوار النقطة x = 0 .

الحل :

بما أن تفاضل الرتبة الثانية في المعادلة مضروب في المقدار $(1 - x^2)$, فـــإن جذور المعادلة هي :

x = 1 و x = - 1

وسنستخدم نفس الطريقة في المثال السابق ونتصـــور أن الحـــل العـــام للمعادلـــة التفاضلية هو $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ وللحصول على a_n عندما $n > 1$, نعوض بـــ y و ´y في المعادلة التفاضلية فنحصل على الصيغة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0 \cdots\cdots (I)$$

أو :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+5n+4)a_n x^n = 0 \cdots\cdots (II)$$

وقد جمعنا معا " المتسلسلات الحاوية على x بقوى متساوية وسنقوم بتحليل معامل المتسلسلة الثانية في المعادلة (II) إلى معاملين ونكتبها في الصورة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4)a_n x^n = 0 \cdots\cdots (III)$$

إن العلاقات التي ستحدد قيمة a_n يتم الحصول عليها عن طريق تطبيق حقيقة وهي لكي تختفي متسلسلة القوى بالتطابق على أي فترة , لابد وأن يكون كل معامل من معاملات المتسلسلة مساويا للصفر , لذا في الخطوة القادمة سنكتب المتسلسلتين في المعادلة (III) في صورة تكون فيها أسس x متساوية وسيتم استبدال n أينما وجدت في المتسلسلة الثانية بـ(n -2) وبهذا نحصل على المعادلة التالية علما أن المتسلسلة الثانية ستبدأ من n = 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)a_{n-2} x^{n-2} = 0 \cdots\cdots (VI)$$

وفي هذه المعادلة فإن أي معامل من معاملات قوى x يجب أن يساوي لصفر وعندما تكون قيمة n=0 و n=1
تكون المتسلسلة الثانية لم تبدأ بعد أي أن :

$n = 0$	:	$a_0 = 0$
$n = 1$	:	$a_1 = 0$
$n \geq 2$	:	$n(n-1)a_n - (n-1)(n+2)a_{n-2} = 0$

حيث أن a_1 , a_0 هما ثابتان اختياريان , ويمكن استخدام العلاقة التاليـــة عنـــدما تكون قيم n أكبر أو مساوية لـــ 2 ومن المعادلة الأخيرة نستنتج أن :

$$a_n = \frac{n+2}{n} a_{n-2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (V)$$

إن المعــادلة (V) تعرف بالعلاقة التكرارية (Recurrence Relation) وعند تطبيق هذه العلاقة نجد أن :

$$a_2 = \frac{4}{2} a_0 \qquad a_3 = \frac{5}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{6}{4} a_2 \qquad a_5 = \frac{7}{5} a_3$$

$$a_6 = \frac{8}{6} a_4 \qquad a_7 = \frac{9}{7} a_5$$

$$a_{2k} = \frac{2k+2}{2k} a_{2k-2} \qquad a_{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+1} a_{2k-1}$$

وفي الخطوة التالية , نجد حاصل ضرب العناصر المتناظرة فـــي العمـــود الأول والنتيجة هي :

إذا كـــان : $k \geq 1$ أي أن : $a_2 . a_4 . a_6$ أي :

$$a_{2k} = \frac{4.6.8 \cdots\cdots (2k+2)}{2.4.6 \cdots\cdots (2k)} a_0$$

لـــلأعـــداد الزوجية والتي تبسط إلى:

$a_{2k} = (k+1)a_0$

وهذه ستعطينا كل a ذات دليل زوجي بدلالة a_0

وبالمثل في العمود الثاني من المصفوف أعلاه نحصل على :

لكـــل $k \geq 1$ فـــإن :

$$a_{2k+1} = \frac{5.7.9 \cdots (2k+3)}{3.5.7 \cdots (2k+1)} a_1$$

أو :

$$a_{2k+1} = \frac{2k+3}{3} a_1$$

والتي تعطي كل a ذات دليل فردي بدلالة a_1,عند تعويض ما حصلنا عليه من قيم في المتسلسلة y نجد أن :

$$y = \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \right] + \left[a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k+1} \right]$$

ونستخدم النتائج للحصول على الحل النهائـــي والذي يكون بالشكل التالي :

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^{2k} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1} \right]$$

إن المتسلسلة أعلاه هي مفكوك الدالة التالية بموجب تعريف متسلسلة ماكلورين :

$$y = \frac{a_0}{(1-x^2)^2} + \frac{a_1 (3x - x^3)}{3(1-x^2)^2}$$

4- 4 متسلسلـــــة فوريـــــر (The Fourier Series)

إن متسلسلة فورير تعرف بالقانون التالي :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right) \cdots\cdots\cdots (10-4)$$

حيث أن كل من : b_n , a_n , a_0 هي معاملات متسلسلة فورير وتحسب كما يلي:

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)dx \text{...}(11-4)$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx \qquad n = 0,1,2,... \quad \cdots\cdots\cdots(12-4)$$

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad n = 1,2,3,....\cdots\cdots\cdots\cdots(13-4)$$

بشرط أن : $-c \le x \le c$ حيث c هو ثابت,وأن تكون f(x) هي دالــة متصــلة وقابلة للاشتقاق عند كل نقطة في الفترة المعطاة أعلاه فيما عــدا بعــض النقــاط المحددة وعند مثل هذه النقاط تكــون للدالــة f(x) و f ´(x) ذات نهايــات يمنــى ويسرى وسنتناول بعض الأمثلة على متسلسلات فورير .

مثــال $(6-4)$

كوّن متسلسلة فورير على الفترة $-2 \le x \le 2$ للدالة المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \begin{cases} 2 , & -2 \le x \le 0 \\ x , & 0 < x < 2 \end{cases}$$

ثم أرسم شكل الدالة التي ستقترب منها المتسلسلة .

الحل :

أولا نرسم شكل الدالة ونلاحظ من الرسم أن الدالة غير معرفة فيما عدا لقيم x التي هي بين $x = -2$ و $x = 2$ وبالنسبة للدالة المعطاة فإن متسلسلة فورير للدالة هي :

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(I)$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx \qquad , \quad n=0,1,2,\ldots\ldots \cdots\cdots\cdots(II)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad , \quad n=1,2,3,\ldots. \cdots\cdots\cdots(III)$$

وحيث أن f(x) معرفة بصيغتين مختلفتين على الفترة $-2 < x < 0$ والفترة $0 < x < 2$, فإنه مــن الأفضل فصل التكاملات في (II) و(III) إلى جزئين متناظرين , وهكذا بوضع f(x) المعرّفة في الدالة في التكامل الأول نحصل على :

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}2\cos\frac{n\pi x}{c}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x\cos\frac{n\pi x}{c}dx$$

وستختلف طريقة التكامل حسب قيمة n أي $n=0$ أو $n\neq 0$ فإذا كانت $n\neq 0$ فإن :

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}[0-0]+\frac{1}{2}\left[0+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{2}-0-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\right]$$

$$\therefore a_n=\frac{-2(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2} \qquad , \quad n=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots.(VI)$$

و إذا كـــانـــت $n = 0$ فـــإن النتيجة السابقة غير صحيحة (القســمة علـــى n) ولكننا نعود إلى المعادلة الخاصة بـــ a_0 ونعوض بقيمة $n = 0$ فنحصل على :

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\ dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x dx$$

ومنها نستنتج أن :

$$a_0 = [x]_{-2}^{0} + \frac{1}{4}[x^2]_0^2 = 2 + 1 = 3$$

ونحصل على b_n بالطريقة نفسها حيث أن :

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 2\sin\frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2} dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)x\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$\therefore (\cos(-n\pi) = \cos n\pi$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{n\pi}[-1+\cos n\pi] + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}2\cos n\pi + 0 + 0 + 0\right]$$

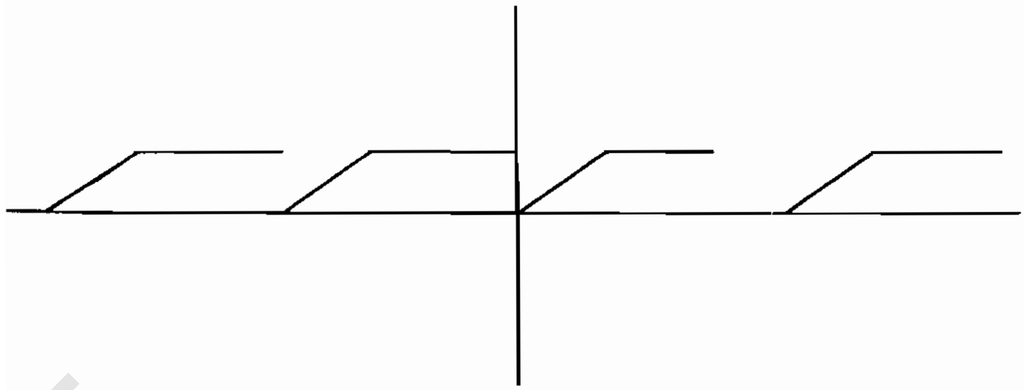
$$\therefore \quad b_n = -\frac{2}{n\pi} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots (V)$$

فإذا كانت n عدداً صحيحاً فإن $\cos n\pi = (-1)^n$ وهذا يتضح من اختبار الطرفين لكل من قيم n الفردية والزوجية لذلك فإن الصيغة (VI) يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$a_n = \frac{-2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2} \quad , n = 1, 2\ , 3 , \ldots\ldots \cdots\cdots\cdots (IV)$$

ويمكن الآن كتابة متسلسلة فورير على الفترة $-2 < x < 2$ للدالة f(x) بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]\cdots\cdots\cdots (IIV)$$



شكل (4 -1) رسم متسلسلة فورير للدالة في المثال 4 - 6

4-5 الأعـــداد المركبـــة ـ المعقّــدة (Complex Numbers)

تعريف :

إن العدد المركب هو تعبير من النوع (x + i y) حيث أن كل من x ,y هــي أعداد حقيقية أما الرمــز i فهــو يعرف بالشكل التالي : $i = \sqrt{-1}$ ولــذلك لــن يعتبر العدد i حقيقي بل هو عدد تخيــّلي (خيالي) أي أن العدد المركب يتكــون من جزئين , الأول هو جزء حقيقي وهو x و الثاني هو جزء تخيلي وهو iy

4 -5 -1 العمليــات علــى الأعــداد المركبــة

يمكن إجراء العمليات الجبرية المتعددة كالجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد المركبة عن طريق معاملة i كثــابت غيـــر معــروف و بــإحلال (1-) محل i^2 في كل موقع يظهر فيه وعند ذلك إذا افترضنا أن:

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad و \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

فإنه عند الجمع :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \cdots (14-4)$$

وبالطرح فإن :

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \cdots (15-4)$$

أما في الضرب فإن :

$$z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2 y_1y_2$$

$$\therefore z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \cdots\cdots (16-4)$$

وذلك لأن $i^2 = -1$.

ونفس الحال بالنسبة للقسمة حيث أن :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} * \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x^2 - i^2 y^2}$$

وذلك بالضرب في مرافق المقام وبهذا سنحصل على :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - i^2y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

أو :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \cdots\cdots (17-4)$$

مثـــال (4 – 7)

إذا كان $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = 1 + 2i$ هما عددان مركبان أوجـد المقـادير التالية :

$$\frac{z_1}{z_2}, \; z_1 . z_2 , \; z_1 - z_2 , \; z_1 + z_2$$

الحــــل :

x1 = 1 , y1 = -1 , x2 = 1 , y2 = 2

$$\therefore z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (1+1) + i(-1+2) = 2 + i$$

$$\therefore z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (1-1) + i(1+2) = 0 + 3i = 3i$$

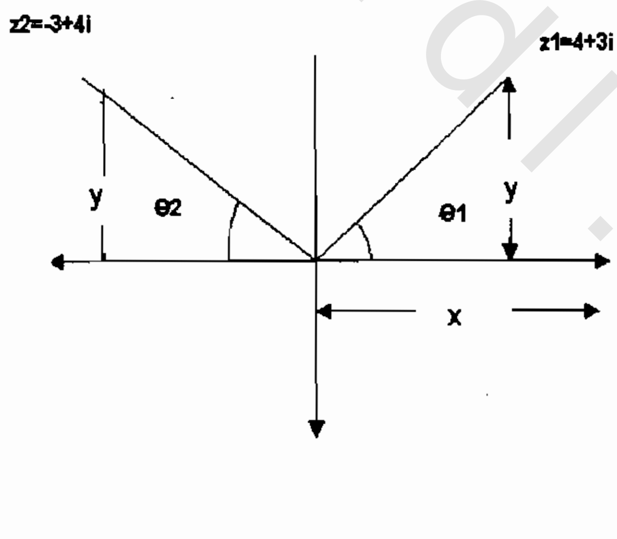
$$\therefore z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = (1x1 + 1x2) + i(1x2 - 1x1) = 3 + i$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{1x1 + (-1)(2)}{1+4} + i\left(\frac{(-1)(1) - (2)(1)}{1+4}\right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

أي أن حاصل جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة أي عددين مـــركبين هـــو عـــدد مركب أيضا .

2.5.4 تمثيل الأعـداد المركبة في الصـورة القطبيـة ـ مخطط أرجنـد (The Argand Diagram)

لقد أقترح أرجنـــد في بداية القرن التاسع عشر أن العدد المركب يمكن تمثيله بواسطة خط في مستوي تـــشابه الطـــريقة التي يمثل بها المتجه . إن قيمة العـــدد المركب يمكن أن تمثل بدلالة المحورين المتعامدين (الأفقي والرأسي) وأقـــترح أن أحد المحاور هو محور حقيقي والآخر العمودي على الأول هو المحور التخيلي ولذلك فإن العدد المعـــقّد($z = x + iy$)يمكن أن يمثل بخـــط في مستـــوي لـــه مركبتين أحدهما x في المحور الأفقي وهي حقيقية و الأخرى y وهي تخيلية في المحور الرأسي كما يوضح ذلك الشكل (4 - 2) أدناه :



الشكل (4 -2) مخـــطط أرجـــنـــد

الشكـل (4-2) يـوضح مخطط أرجند والخط المرسوم يدعى بمستوى أرجند للعدد المركب z ، إن الخط OP يمثل العدد المركـب $4+3i$ والـذي جزئـه الحقيقي هو 4 وجزئه التخيلي هو 3 ، وفي الجهة الأخرى يمثل الخط QO العدد المركب $-3+4i$ والذي جزئه الحقيقـي هـو 3 - والتخيلـي 4 ، إن أطـوال الخطوط OP وQO متساوية ولكن الأعداد المركبة التي تمثلها تلك الخطوط هي غير متساوية لأن كل من الأجزاء الحقيقية والتخيلية للأعداد مختلفة .

ولكل من الأعداد المركبة الممثلة بـالخطوط QO,OP فـإن أطـوال تلـك الخطوط هي 5 أي أن:

$$\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

إن قيمة طول الخط التي تمثل العدد المركب تسمى " المعامـل " أو " القيمـة المطلقة " والذي يمكن أن يكتب بصيغة بديلة أخرى هي :

$$r = |z| = \text{mod } z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (14-4)$$

إن ميل الخط الذي يمثل العدد المركب في جزء المحور الحقيقي الموجب يسمى " السعة " أو الإزاحة أو الطور للعدد المركب ويكتب بالشكل التالي :

$$\theta = ampz = \arg z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (15-4)$$

وعند حل المعادلات (4 - 14) و (4 - 15) يتبين أن :

y = r sin θ , x = r cos θ

z= r cos θ + i r sin θ = r (cos θ + i sin θ) = r cis θ

القيم الأساسية .

عندما يتم التعبير عن عدد مركب بالإحداثيات القطبية فإن القيمة الأساسية لـــ θ تكون دائما ضمنية أو صريحة ولذلك في الشكل (4 -1) فإن :

$$\theta_P = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ = 0.645 \ \ radians$$

$$\theta_Q = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 143^\circ = 2.495 \ \ radians$$

ولغرض توضيح كيفية استعمال مخطط أرجند في ضرب وقســمة الأعــداد المركبة يمكن تمثيل الأعداد المركبة بدلالة الإحداثيات القطبية :

$$z_3 = z_1.z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\therefore z_3 = r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i_1(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right]$$

$$\therefore z_3 = re^{i\theta} = r_3(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16-4)$$

حيث أن :

θ 3 = θ 1 + θ 2

و :

r 3 = r 1. r 2

إن المعادلة (16-4) تمثل الصورة القطبية للعدد المركب z 3 والناتج مــن حاصل ضرب العددين z 1 , z 2 على مخطط أرجند .

مثـــال (4 – 8)

أوجد العدد المركب على الصـــورة r e iθ النـــاتج مـــن حاصـــل العـــددين $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3} - i$ وذلك باستخدام مخطط أرجند .

الحل :

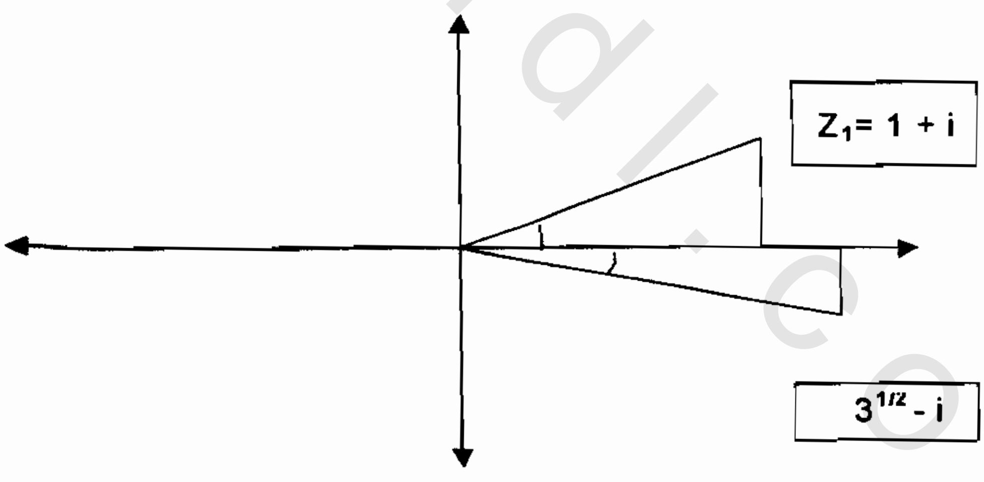
$$\because z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3} - i \rightarrow \therefore r_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1} 1 \Rightarrow \therefore \theta_1 = 45^\circ$$

$$r_2 = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2, \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \therefore \theta_2 = -30^\circ$$

$$\because r_3 = r_1 r_2 = 2x1 = 2, \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 45^\circ + (-30^\circ) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore z_3 = r_3 e^{i\theta_3} = 2e^{15}$$

$$\therefore z_3 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$



الشكل (4 -3) حل المثال باستخدام مخطط أرجند

6.4 أمثلـــة وتمـــارين

س1 حـــل المعادلـــة :

$$y'' + y = 0$$

بطريقة المتسلسلات وبالطرق الأولية وقارن إجابتك .

س2 أوجد الحل العام للمعادلات التالية بطريقة المتسلسلات :

$a) y'' - 4y = 0$

$b) y'' + 3xy' + 3y = 0$

$c)(1 + 4x^2) y'' - 8y = 0$

$d)(1 + x^2) y'' - 4xy' + 6y = 0$

$e)(1 + x^2) y'' + 10xy' + 20y = 0$

س3 أوجد الحلول العامة لكل مسألة من المسائل التالية :

$1 - y'' + 2xy' + 2y = 0$

$2 - y'' + 3xy' + 7y = 0$

$3 - 2y'' + 9xy' - 36y = 0$

$4 - (x^2 + 4) y'' + xy' - 9y = 0$

$5 - (1 + 9x^2) y'' - 18y = 0$

س4 استـــخـــدم طريقة المتسلسلات للحصول على حل عام للمعادلة التفاضـــلية التالية حول النقطة

$x = 1$

$$(x^2 - 2x + 2)y'' - 4(x-1)y' + 6y = 0$$

س5 في كل من المسائل التالية , أوجد متسلسلة فورير للدوال المعطاة وفي الفترات المؤشرة إزاء كل منها وأرسم دالة المتسلسلة الناتجة :

$$
\begin{aligned}
&1-\ f(x)=x^2 &&, \quad -\pi<x<\pi\\
&2-\ f(x)=0 &&, \quad -c<x<0\\
&\qquad\quad\ =c-x &&, \quad 0<x<c\\
&3-\ f(x)=x &&, \quad -c<x<c\\
&4-\ f(x)=x^2 &&, \quad -c<x<c\\
&5-\ f(x)=0 &&, \quad -c<x<0\\
&\qquad\quad\ =1 &&, \quad 0<x<c\\
&6-\ f(x)=x^4 &&, \quad -c<x<c
\end{aligned}
$$

س6 في كل من المسائل التالية أوجد العدد المركب على الصورة $r\,e^{i\theta}$ والناتج من حاصل العددين المركبين وذلك باستخدام مخطط أرجند .

1) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + i$

2) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$

3) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i$, $z_2 = 1 + i$

4) $z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + i$, $z_2 = 2i$

5) $z_1 = -4$, $z_2 = 1 - 3i$

س7 أثبت أن مرافق مجموع عددين مركبين z_2 , z_1 هو نفسه مجموع مرافقيهما أي أن:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

س8 حول المقدار اللاخطي $q=B\sqrt{h}$ إلى مقدار خطي علما إن B هو ثابت .

س9 عبر عن كل من :

$$\theta_1 = 8 \sin(\varpi t + \frac{\pi}{4})$$

و :

$$\theta_2 = 3\sin(\varpi t - \frac{\pi}{8})$$

كأعداد مركبة ثم جد مجموع متجهاتها (1) كعدد مركب (2) بصيغة أسية (3) بصيغة موجة جيبية .

س10 عبر عن كل ما يأتي كأعداد مركبة بالصيغة الأسية ثم أوجد حاصل ضربهما .

$$\theta_1 = 8 \sin(10 t + \frac{\pi}{4})$$

$$\theta_2 = 3 \sin(5 t - \frac{\pi}{8})$$