

الباب الثالث

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

- 1.3 تعريف التفاضل الجزئي .
- 2.3 العلاقات بين المشتقات الجزئية .
- 3.3 تكوين المعادلات التفاضلية – جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ .
- 4.3 الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية – طريقة فصل المتغيرات .
- 5.3 أمثلة وتمارين .

1.3 التفاضل الجزئي (Partial Differentiation)

تعريف :

لو كانت لدينا دالة مثل $u(x,y)$ حيث أن كل من y,x متغير مستقل فإن :

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x dy \dots \dots \dots (1-3)$$

أو:

$$\nabla u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} = \text{grad } u \dots \dots \dots (2-3)$$

وهو ما يعرف بالتفاضل الجزئي للدالة u .

1-3 العلاقات بين المشتقات الجزئية

بالعودة إلى الدالة التي تحتوي على متغير مستقل واحد فإن:

$$y = f(x) \dots \dots \dots (3-3)$$

و باستخدام التعريف فإن :

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \dots \dots \dots (4-3)$$

وفي بعض الأحيان فإن y لا يكون بصورة واضحة دالة لـ x كما في

المعادلة (3-3) بل هو دالة ضمنية كما في المعادلة :

$$g(x, y) = 0.0 \dots \dots \dots (5-3)$$

و باعتبار أن g هو متغير ثالث مؤقت يمكن مفاضلة

المعادلة (5-3) كما يلي :

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) dy = 0.0 \dots \dots \dots (6-3)$$

وبمقارنة المعادلة (3 - 6) مع المعادلة (3-3) يمكن الحصول على :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{(\partial g / \partial x)}{(\partial g / \partial y)} = \frac{\partial y}{\partial x} \dots \dots \dots (7 - 3)$$

مثال (1-3)

إذا كان $x^2 + y^2 = a^2 \dots (I)$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل :

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

بما أن

إنن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

وبصورة مشابهة يمكن كتابة المعادلة (I) بالشكل التالي :

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0.0$$

و باستخدام التفاضل الجزئي فإن :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

و

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$$

وبتعويض القيم في المعادلة الأصلية ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\partial g / \partial x)}{(\partial g / \partial y)} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots \dots \dots (II)$$

و إذا كانت الدالة تحتوي على أكثر من متغيرين مستقلين مثل :

$$Z = g(x, y) \dots \dots \dots (8-3)$$

إنه بموجب التعريف :

$$dz = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) dy \dots \dots \dots (9-3)$$

ويمكن أن تكتب المعادلة (8-3) كدالة ضمنية بالشكل التالي:

$$F(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (10-3)$$

وعند أخذ تفاضل هذه الدالة يتبين أن :

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) dz \dots \dots \dots (11-3)$$

و بترتيب المعادلة (3 - 11) نجد أن:

$$dz = - \frac{(\partial F / \partial x)}{(\partial F / \partial z)} dx - \frac{(\partial F / \partial y)}{(\partial F / \partial z)} dy \dots \dots \dots (12-3)$$

وعند مقارنة المعادلة (3 - 12) مع المعادلة (9-3) نجد أن :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{(\partial F / \partial z)} \dots \dots \dots (13-3)$$

و :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{(\partial F / \partial z)} \dots \dots \dots (14-3)$$

من الواضح بأن :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial g} \right) = 1 \dots \dots \dots (15-3)$$

و بإزالة $(\partial F / \partial z)$ من المعادلتين نجد أن :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial g} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial F} \right) \dots \dots \dots (16 - 3)$$

وإذا تم إبقاء z ثابتاً في المعادلة (3-11) فإن $dz = 0$ ولذلك :

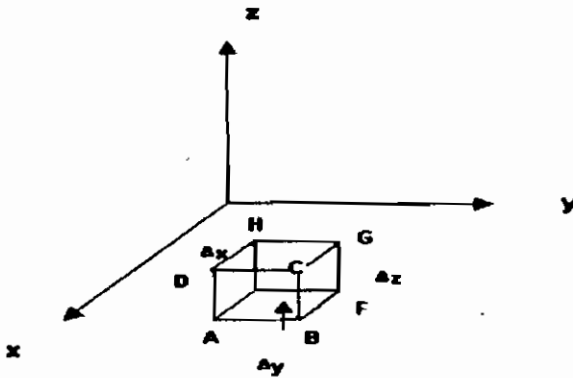
$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{(\partial F / \partial x)}{(\partial F / \partial y)} \dots \dots \dots (17 - 3)$$

وبترتيب المعادلتين (3-16) و(3-17) نجد أن :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial g} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = -1 \dots \dots \dots (18 - 3) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = -1 \dots \dots \dots (19 - 3) \end{array} \right.$$

2-3 تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية - جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ

إن أفضل مثال لتكوين المعادلات التفاضلية الجزئية هو في تصور جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ كما يوضح ذلك الشكل أثناءه ويجب الأخذ بعين الاعتبار الحقائق التالية :



شكل (3-1) انتقال الحرارة خلال جسم في الفراغ

- 1) إن جريان الحرارة يحدث باتجاه تناقص الحرارة .
- 2) معدل جريان الحرارة خلال مساحة معينة يتناسب مع انحدار الحرارة بالدرجات لوحدة المساحة وفي اتجاه عمودي على تلك المساحة .
- 3) كمية الحرارة المكتسبة من قبل النظام أو المفقودة من الجسم تتناسب مع كتلة الجسم ودرجة الحرارة .

إن ثابت التناسب في النقطة (2) يسمى بمعامل التوصيل الحراري (k) و إن ثابت التناسب في النقطة (3) يسمى الحرارة النوعية للمادة (C).

والآن لنعتبر الظروف الحرارية في مقطع محدد من معدن موصل للحرارة كما في الشكل (3- 1) وإذا كانت كتلة المعدن لوحدة الحجم أو ما يعرف فيزيائيا بالكثافة (ρ) فإن تغير كتلة المقطع هو :

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots (20 - 3)$$

ومن جهة أخرى إذا كانت T هي درجة الحرارة عند أي زمن و إذا كانت ΔT هي التغير بدرجة الحرارة الذي يحدث خلال المقطع في فترة زمنية محددة هي $\Delta \theta$ فإن كمية الحرارة المحفوظة في المقطع عند هذه الفترة الزمنية هي :

$$\Delta H = C * \Delta m * \Delta T = C * \rho * (\Delta x * \Delta y * \Delta z) \dots \dots \dots (21 - 3)$$

أما معدل الحرارة التي يكتسبها النظام فهي:

$$\frac{\Delta H}{\Delta \theta} = C \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \dots \dots \dots (22 - 3)$$

حيث أن θ هو الزمن والتي تسمى أيضا " الحرارة المتراكمة أو المتجمعة في الجسم .

إن الحرارة التي تتولد نتيجة التغير في ΔT تأتي من مصدرين هما :

المصدر الأول

يمكن توليد الحرارة خلال الجسم بواسطة وسائل كهربائية أو كيميائية لحظية عند معدل معلوم مثال $f(x, y, z, \theta)$ و إن المعدل الذي تصل فيه الحرارة إلى المقطع من هذا المصدر سيكون :

$$f(x, y, z, \theta) \Delta x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots (23 - 3)$$

المصدر الثاني

هو الحرارة المكتسبة من انتقال الحرارة المفترض خلال أوجه المقطع المختلفة. إن الصيغة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال مساحة معينة يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية :

$$-kA \frac{dT}{dx} \dots \dots \dots (24 - 3)$$

وعلى هذا الأساس فإن كمية الحرارة المنتقلة خلال المقطع x (ADHL) هي :

$$-k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x$$

وخلال نهاية المقطع $x+\Delta x$ هي :

$$-k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$\begin{aligned} -k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x - \left(-k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} \right) &= k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - k \Delta y \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \\ &= k \Delta y \Delta z \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \right) \dots \dots \dots (25 - 3) \end{aligned}$$

إن الإشارة السالبة تعني أن التدفق الحراري يحدث باتجاه نقصان درجة الحرارة ويمكن تكوين معادلات تفاضلية بنفس الحالة في الإتجاهين y و z (الواجهة ABFL والواجهة ABCD) بالشكل التالي :

$$-k\Delta x\Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_y - \left(-k\Delta x\Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y+\Delta y} \right) = k\Delta x\Delta z \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y+\Delta y} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_y \right) \dots\dots\dots (26-3)$$

وفي الاتجاه z يكون التدفق الحراري بصيغته النهائية على الصورة التالية :

$$-k\Delta x\Delta y \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_z - \left(-k\Delta x\Delta y \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} \right) = k\Delta x\Delta y \left(\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_z \right) \dots\dots\dots (27-3)$$

وبموجب قانون حفظ الطاقة فإن (الداخل - الخارج = المتراكم)
(In - Out = Accumulation) نجد أن :

$$\{ \text{صافي تدفق الحرارة في مقطع الجسم} \} + \{ \text{الحرارة المتولدة في المقطع} \} = \text{المتراكم الحراري}$$

وبالتعويض عن كل صيغة بما يساويها من المعادلات أعلاه ينتج أن :

$$k\Delta y\Delta z \left(\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x \right) + k\Delta x\Delta z \left(\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y+\Delta y} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_y \right) + k\Delta x\Delta y \left(\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_z \right) + f(x, y, z, \theta)\Delta x\Delta y\Delta z = \rho C\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots (28-3)$$

إن الرمز $f(x, y, z, \theta)$ سيتم تغييره إلى q أي كمية الحرارة المتولدة من الجسم وستصبح المعادلة (3 - 28) بعد قسمة جميع الحدود على المقدار $\Delta x\Delta y\Delta z$ بالشكل التالي :

$$k \left[\frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_x}{\Delta x} + \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y+\Delta y} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_y}{\Delta y} + \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_z}{\Delta z} \right] + q^\circ = C\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots (29-3)$$

و بأخذ النهايات عندما تقترب كل من $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ من الصفر ومن

تعريف المشتقة نستنتج أن :

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q^\circ = \rho C \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots(30-3)$$

و بقسمة طرفي المعادلة على الثابت k

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q^\circ}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots(31-3)$$

حيث أن :

$$\alpha = \frac{k}{\rho C}$$

أو ما يعرف بمعامل الانتشار الحراري . وتمثل المعادلة (31-3) المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية الثلاثية الأبعاد

3-3 الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية - طريقة فصل المتغيرات

لتكن x, y, z هي الإحداثيات الكارتيزية في الفضاء العادي , في هذه الحالة يمكن معرفة شكل المعادلة لتغير السرعة مع تلك الإحداثيات والتي تكتب على شاكلة المعادلة (31-3) وبالصيغة التالية :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.0 \dots\dots\dots(32-3)$$

أو ما يسمى بمعادلة لابلاس وهي تدخل في مسائل تتعلق بالاستقرار الحراري , فرق الجهد الألكتروستاتي وحالة استقرار تدفق الموائع المتنوعة . ويمكن تغيير شكل المعادلة (32-3) عندما تكون الإحداثيات هي لدائرة نصف قطرها r و ارتفاعها z وزاوية دورانها هي θ بالشكل التالي :

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad z = z$$

وتكون المعادلة الناتجة هي ما يسمى بمعادلة لابلاس للإحداثيات الأسطوانية والتي سنكتب كالآتي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (33 - 3)$$

ولنفرض أن أحد الأجسام التي ندرسها تقوم بإعادة T عن درجة الحرارة في نقطة ما في الإحداثيات الكارتيزية x , y , z والزمن θ ولناخذ نقطة الأصل والزمن الابتدائي هو ($\theta = 0$) وإذا لم يكن هناك مصدر يجهز الجسم بالحرارة فإن : $\frac{q^o}{k} = 0.0$ ودرجة الحرارة T يجب أن تحقق المعادلة التالية :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = h^2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \dots \dots \dots (34 - 3)$$

حيث أن h^2 هو ثابت فيزيائي وهو ما سمي سابقا معامل الانتشار الحراري.

إن المعادلة (34 - 3) تصلح للحل تحت شروط إن الكثافة والحرارة النوعية ومعامل التوصيل الحراري كلها ثابتة للجسم قيد الدراسة , وهناك طريقتان لحل المعادلات التفاضلية الجزئية وهي :

- a - طريقة تحويلات لابلاس وقد تم دراستها سابقا .
- b - طريقة فصل المتغيرات وسنتناول هذه الطريقة بالتفصيل .

لناخذ معادلة توزيع السرعة لجسم في الفراغ وهي على شكلة المعادلة (31- 3) وسنكتبها بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots \dots (35 - 3)$$

حيث أن h^2 هو ثابت ولنفترض أن الانتشار الحراري يحدث في الاتجاه x فقط لذلك سيكون من السهل اختصار المعادلة أعلاه إلى الصورة التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots \dots \dots (36 - 3)$$

أي أن حل المعادلة سيكون دالة للمتغيرين x و θ وكذلك ستعتمد على البارامتر h^2 أي أن :

$$u = f(\theta).v(x) \dots \dots \dots (37-3)$$

إن المعادلة (36- 3) تبين أنها ممكنة الحل إذا كانت $f(\theta)$ هي دالة لـ θ فقط و $v(x)$ هي دالة لـ x فقط أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = f'(\theta)v(x) \dots \dots \dots (38 - 3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(\theta)v''(x) \dots \dots \dots (39 - 3)$$

وبتعويض المعادلتين (38 - 3) و (39 - 3) في المعادلة (37 - 3) نحصل على :

$$\therefore f'(\theta).v(x) = f(\theta).v''(x) \dots \dots \dots (40-3)$$

وعند فصل المتغيرات سينتج أن :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = h^2 \frac{v''(x)}{v(x)} \dots \dots \dots (41 - 3)$$

ويقال عنئذ إن المعادلة (34- 3) مفصولة المتغيرات (المستقلة) .

وحيث أن x , θ هما متغيران مستقلان , فإن الطريقة الوحيدة لحل المعادلة (3 - 41) هو أن تكون هناك دالة في x فقط مساوية لدالة في θ فقط وأن تكون كل من الدالتين مساوية لثابت أي أن :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = k \dots\dots\dots (42 - 3)$$

$$h^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = k \dots\dots\dots (43 - 3)$$

حيث أن k هو ثابت اختياري .

وهناك طريقة أخرى للحصول على المعاملات في المعادلتين (3 - 42) و (3 - 43) وهي بإجراء تفاضل لطرفي المعادلة (3 - 42) نسبة للمتغير θ وحيث أن :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \right) = 0.0 \dots\dots\dots (44 - 3)$$

ولأن الطرف الأيمن من المعادلة (3 - 41) لا يعتمد على الزمن θ , لذلك سنحصل على المعادلة (3 - 42) عن طريق تكامل المعادلة (3 - 42) والتي ستكون على الصورة التالية :

$$\frac{df}{d\theta} = kf \dots\dots\dots (45 - 3)$$

$$\therefore \int \frac{df}{f} = k \int d\theta$$

$$\ln f = k\theta + C$$

$$\therefore f = c_1 e^{k\theta} \dots\dots\dots (46 - 3)$$

وقبل أن نستمر في حل المسألة , سنختار الثابت الإختياري β^2 للتخلص من الثابت k وبالشكل التالي :

$$k = h^2 \beta^2 \dots\dots\dots (47 - 3)$$

$$\therefore \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = h^2 \beta^2$$

$$\frac{h^2 v''(x)}{v(x)} = h^2 \beta^2$$

و

وسنجد أن :

$$f(\theta) = c_1 e^{h^2 \beta^2 \theta}$$

و باستخدام β حقيقية يتضح أن الثابت k هو موجب وأن حل المعادلة $v(x)$ سيكون بالشكل التالي :

$$v(x) = c_2 \cosh \beta x + c_3 \sinh \beta x$$

وأن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$u = c_1 e^{h^2 \beta^2 \theta} (c_2 \cosh \beta x + c_3 \sinh \beta x)$$

أو :

$$u(x, \theta) = e^{h^2 \beta^2 \theta} (a \cosh \beta x + b \sinh \beta x)$$

حيث أن :

$$a = c_1 \cdot c_2, \quad b = c_1 \cdot c_3 -$$

$$k = -h^2 \alpha^2$$

و إذا كانت :

فإن k سيكون ثابتا سالبا وسيكون الحل هو :

$$u = e^{-h^2 \alpha^2 \theta} (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)$$

أما إذا كانت k مساوية للصفر فإن :

$$u = (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 \theta)$$

قضيب طوله l تم عزل سطحه الجانبي جيدا بحيث يمكن افتراض أن سريان الحرارة يكون في اتجاه واحد فقط . في البداية كان القضيب عند درجة حرارة 100°C وعلى جميع أجزائه ، عند $t = 0$ فإن درجة الحرارة في الجهة اليسرى للقضيب تم خفضها فجأة إلى 50°C وتم الحفاظ على تلك الدرجة بعد ذلك ، أما درجة حرارة النهاية اليمنى من القضيب فقد بقيت محفوظة عند 100°C .

أوجد درجة الحرارة عند أي نقطة من القضيب و عند أي زمن علما إن معادلة انتقال الحرارة لهذه المنظومة في اتجاه واحد في الحالة المستقرة هي :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots \dots \dots (I)$$

أن الظروف الحدية (Boundary Conditions) هي :

- i) $T = 160^\circ \text{C}$ at $\theta = 0$
- ii) $T = 100^\circ \text{C}$ at $x = 0$
- iii) $T = 50^\circ \text{C}$ at $x = l$

الحل :

$$T = f(\theta).V(x) \dots \dots \dots (II)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(\theta).V''(x)$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \theta} = f'(\theta).V(x)$$

$$\therefore f(\theta).V''(x) = a^2 [f'(\theta).V(x)]$$

وبالقسمة على $f(\theta).V(x)$, نحصل على :

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = a^2 \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} \right) \dots \dots \dots (III)$$

وبفرض أن قيمة المعادلة الأخيرة هي ثابتة و تساوي λ و أن قيمة λ أما أكبر من أو تساوي صفر سنحصل على :

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = \lambda \Rightarrow \therefore V''(x) = \lambda \cdot V(x)$$

$$a^2 \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \lambda \Rightarrow \therefore f'(\theta) = \lambda \cdot f(\theta)$$

وإذا كانت λ أكبر من الصفر

$$V''(x) - \lambda \cdot V(x) = 0$$

$$\therefore V(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$f'(\theta) - \frac{\lambda}{a^2} \cdot f(\theta) = 0$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} - \frac{\lambda}{a^2} \cdot f(\theta) = 0$$

$$\therefore f(\theta) \cdot e^{-\int \frac{\lambda}{a^2} d\theta} = f(\theta) \cdot e^{-\int \frac{\lambda}{a^2} d\theta} = C \Rightarrow \therefore f(\theta) = C \cdot e^{\frac{\lambda}{a^2} \theta}$$

$$\therefore T(\theta, x) = f(\theta) \cdot V(x) = (A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) (C \cdot e^{\frac{\lambda}{a^2} \theta})$$

والآن نقوم بتقييم الثوابت حسب الظروف الحدية المعطاة وكما يلي :

$$x = 0 \quad \theta = 100 \text{ C}^\circ$$

$$x = 1 \quad \theta = 50 \text{ C}^\circ$$

$$100 = A_1 + A_2$$

$$A_1 = 100 - A_2$$

$$50 = A_1 e^{\sqrt{\lambda} \cdot 1} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda} \cdot 1}$$

ومنها نحسب قيمة الثوابت A_1 , A_2 أنيا و إذا كانت λ مساوية للصفر .

فإن :

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = a^2 \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = 0 \rightarrow \therefore \frac{V''(x)}{V(x)} = 0, a^2 \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = 0 \Rightarrow \therefore \frac{V''(x)}{V(x)} = 0 \Rightarrow V''(x) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right) = 0 \rightarrow \therefore V(x) = C_1 x + C_2$$

نبدأ الآن بتقييم الثوابت وفق الظروف الحدية المعطاة

i) at $x = 0$ $T = 100^\circ \text{C} \rightarrow C_2 = 100$

ii) at $x = l$ $T = 50^\circ \text{C} \rightarrow 50 = C_1 l + 100 \rightarrow C_1 = 50 / l$

$$\therefore V(x) = -\frac{50}{l} x + 100$$

بالنسبة للدالة الثانية فإن :

$$a^2 \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = 0 \Rightarrow \therefore f'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{df(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow \therefore f(\theta) = C_3$$

$$\therefore T(x, \theta) = V(x) \cdot f(\theta) = (C_1 x + C_2) C_3 = C_1 \cdot C_3 x + C_2 \cdot C_3 = A_1 x + A_2$$

5-3 أمثلة وتمارين

س1 : استخدم طريقة فصل المتغيرات للحصول على حلول للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية :

$$1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$2) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$3) \frac{\partial w}{\partial y} = y \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$4) x \frac{\partial w}{\partial x} = w + y \frac{\partial w}{\partial y}$$

س2 : أثبت أنه بالتعويض $w = x/y$ في المعادلة التفاضلية في الفرع 4 من المسألة السابقة ستحصل على المعادلة :

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial v}{\partial y}$$

س3 : أثبت أن طريقة فصل المتغيرات لن تتجح دون تعديل للمعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

س4 : أثبت أن حل المعادلة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

هو $u = g(t)(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx)$ حيث أن $g(t)$ دالة يمكن أن تأخذ عدة صيغ .

س5 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

س6 : صفيحة مستطيلة الشكل ذات درجة حرارة منتظمة T_0 , عزلت حافاتها الأربعة حرارياً ثم رفعت درجة حرارة أحد الأوجه المعرضة إلى درجة حرارة T_1 وتم الحفاظ على درجة الحرارة هذه بينما تم المحافظة على درجة حرارة الوجه المعرض الآخر عند درجة T_0 .

بين كيف يتغير توزيع درجة الحرارة مع الزمن والموقع إذا علمت أن عملية انتقال الحرارة تتبع المعادلة :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

حيث أن t هو الزمن .

الظروف الحدية (B.C.)

- i) at $x = 0$, $T = T_0$
 ii) at $x = l$, $T = T_1$
 iii) at $t = 0$, $T = T_0$

س7: تحت شروط معينة , تقدر كمية الحرارة الثابتة Q جول / ثانية السارية خلال حائط بالعلاقة $Q = -k A \frac{dT}{dx}$, حيث إن k هو معامل التوصيل الحراري لمادة الحائط , A هي المساحة السطحية من الحائط العمودية على اتجاه سريان الحرارة و T هي درجة الحرارة المطلقة على بعد x متر من الحائط وهي تتناقص كلما تزايد x . أوجد كمية الحرارة مقدره بالجول والتي تسري في ساعة واحدة خلال متر مربع من حائط غرفة تبريد سمكه 1.25 م ومعامل توصيله الحراري هو $k = 1.05$ إذا علمت أن درجة حرارة السطح الداخلي هي :

268°K ودرجة حرارة السطح هي 348°K ؟ (أنظر الشكل)

