الباب الثاني

تحويلات لابلاس

Laplace Transforms

1.2 مقدمة .

2.2 تعريف تحويل لابلاس .

3.2 نظرية الإزاحة .

4.2 بعض القواعد في تحويلات لابلاس .

5.2 إيجاد تحويل لابلاس باستخدام تعريف المشتقة .

6.2 بعض خصائص تحويلات لابلاس .

7.2 معكوس تحويل لابلاس .

8.2 إيجاد معكوس تحويل لابلاس باستخدام الكسور الجزئية .

9.2 ملاحظات حول استخدام طريقة الكسور الجزئية في تحويلات لابلاس .

10.2 تحويلات لابلاس للمشتقات .

11.2 أمثلة وتمارين .

1-2 مقـدمـة

إن تحويل لابلاس (LaplaceTransform) هو اسم يعطى كطريقـة عملية لحل المعادلة التفاضلية. ومبدئيا فإن الطريقـة العملية هي تـقنية يـتم بواسطتها تحويل المعادلة التفاضلية إلى صيغة جبرية مكافئـة يمكـن حلهـا بالقـوانيـن الجبـرية الأولية. الطريقة تسـتخدم أيضـا لتحويـل المعادلـة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية مكافئة.

وبالرغم من توفر عدة طرق لتحقـيـق هـذا الغرض إلاّ أن تحويل لابلاس تعتـبـر أحدى الوسائل التحليلية المفيـدة لحـل المشـاكل الهندسيـة لأن الظروف الحدية المستخدمة في المعادلة تكون بموجب حلها .

2-2 تعريف تحويل لابلاس

إذا كانت $f(t)$ هي دالة مستمرة ذات متغير مستقـل هـو t لكل قيم t التي أكبر من الصفر , لذلك فإن التكامل نـسبة لــ t لحـاصل ضرب الـدالة f(t) فـي الدالـة e^{-st} بين الحدود 0 و ∞ يعرف بأنه تحويل لابلاس للدالة f(t) أي أن :-

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = L[f(t)] \qquad (1-2)$$

إن تحويلات لابلاس تجرى عندما تكون الدالة متغيرة نسبـة للزمـن (t) أو f (t) و أن أفضل حل هو بكتابة المعادلة بعد أخذ تحويل لابلاس لهـا بالصيغة f (s) أي أن :

$$f(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (2-2)$$

فإذا كانت قيمة $f(t)=1$ مثلا (أي عدد ثابت) فإن :

$$L[1]=\int_0^\infty (1)(e^{-st})dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\left[\frac{e^{-s(\infty)}}{-s}\right]-\left[\frac{e^{-s(0)}}{-s}\right]=0+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}\text{............}(3-2)$$

أي أن :

$$f(s)=\frac{1}{s}$$

ومن المعادلة (2 - 3) يتبين أن تحويل لابلاس للثابت K هو :

$$L[K]=KL[1]=\frac{K}{s}\text{...}(4-2)$$

أما إذا كانت الدالة من النوع

$$f(t)=t^n\text{...}(5-2)$$

فإن :

$$L[t^n]=\int_0^\infty t^n e^{-st}dt\text{...}(6-2)$$

و بفرض أن $z=st$ أي أن :

$$dz=sdt\text{..}(7-2)$$

$$\therefore L[t^n]=s^{-n-1}\int_0^\infty z^n e^{-z}dz\text{...}(8-2)$$

وبمقارنة المعادلة (2 - 8) مع دالة جاما يتبين أن:

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}\text{...}(9-2)$$

شرط أن يكون n عدد صحيح موجب .

وإذا كانت الدالة من النوع e^{at} حيث أن a هو ثابت فإن تحويل لابــلاس للدالة يكون بالشكل التالي :-

$$\because f(t)=e^{at} \quad \text{.......} \quad (10-2)$$

$$\therefore L[e^{at}]=f(s)=\int_0^{\infty}(e^{at})(e^{-st})dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt=\left[\frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^{\infty}=\left[\frac{-e^{-\infty}}{s-a}\right]+\left[\frac{e^{-0}}{s-a}\right]=\frac{1}{s-a} \quad ..(11-2)$$

والجدول التالي يوضح بعض التحويلات المهمة في مجال لابلاس

جدول (2-1) / بعض تحويلات لابلاس لبعض الدوال الجبرية

التسلسل	الدالة $f(t)$	تحويل لابلاس $f(s)$	الملاحظـــــات
1	K	$\frac{K}{s}$	
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	n عدد صحيح موجب
3	t^n	$\frac{\Gamma(n)}{s^{n+1}}$	n عدد صحيح غير موجـــــب
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	a ثابـــت
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	
6	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	
7	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	
8	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Pi}{s^3}}$	
9	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\Pi}{s}}$	

ومن التعريف نجد تحويلات لابلاس للمشتقات حيث :

$$f(s)=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12-2)$$

وبما أن تحويل لابلاس للدالة f(t) هو f(s) لذلك سوف نستنتج أن :

$$\therefore L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sf(s)-f(0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13-2)$$

وبصورة مشابهة فإن :

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2f(s)-sf(0)-f'(0)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14-2)$$

حيث أن $f(0)$ ، $f'(0)$ هي قيم الدالة و مشتقاتها عنـــدما يكـــون المتغيـــر المستقل بقيمة صفر . وبنفس الصورة يتبين أن :

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nf(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots-sf^{n-2}(0)-f^{n-1}(0)\cdot\cdot(15-2)$$

وأخيرا " تستخدم تحويلات لابلاس لإيجاد الدوال دون الحاجــة إلــى إجــراء التكامل وكمثال على ذلك :

$$f(t) = \sin wt$$
$$f'(t) = w\cos wt$$
$$f''(t) = -w^2 \sin wt$$
$$\therefore\ f(t)\big]_{t=0} = \sin wt\ \big]_{t=0} = 0$$
$$f'(t)\big]_{t=0} = w\cos wt\ \big]_{t=0} = w$$

وبموجب تعريف لابلاس المشتقات نستنتج أن :

$$L\left[f''(t)\right]_{t=0} = s^2f(s)-sf(o)-f'(0)=s^2f(s)-0-w$$

وسوف نستنتج أن :

وسوف نستنتج أن :

$$\therefore L\left[-w^2 \sin wt\right] = s^2 L[\sin wt] - 0 - w$$

$$\therefore -L\left[w^2 \sin wt\right] = s^2 L[\sin wt] - w$$

$$\therefore w = L[\sin wt]\left(s^2 + w^2\right)$$

$$\therefore L[\sin wt] = \frac{w}{s^2 + w^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16-2)$$

3-2 نظــرية الإزاحـــة (The Shifting Theorem)

وهذه تعتبر مفيدة في معرفة الدوال من نوع الأسية (exponential)
ومعرفة معكوس لابلاس لها ويمكن تلخيصها بالشكل التالي :
" إذا كان تحويل لابلاس للدالة f(t) هو f(s) لذلك فإن تحويل لابلاس للدالة e $^{-st}$ f(t) هو L(s+a) حيث إن a هو ثابت محدد أي أن حاصل ضرب f(t) في e $^{-st}$ سيؤثر في إزاحة الأصل من s إلى (s+a) "

مثال (2 -1)

أوجـــد تحويـــل لابـــلاس للدالــــة e $^{-st}$ cosβt :
الحل :
من الجدول فإن f(t)=cosβt ولذلك ينتج أن :

$$f(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

ووفق نظرية الإزاحة فإن :

$$L\left[e^{-\alpha t} \cos \beta t\right] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \ (17-2)$$

مثـــال (2-2)

أوجــد تحويــل لابــلاس للدالـــة e^{kt} :

الحــل :

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

وبما أن :

$$f(t)=e^{kt}$$

إذن :

$$L[e^{kt}] = \int_0^{\infty} (e^{-st})(e^{kt})\,dt$$

$$\therefore L[e^{kt}] = \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t}\,dt = \left[\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)}\right]_0^{\infty} = \frac{0}{-(s-k)} + \frac{e^0}{s-k} = \frac{1}{s-k}$$

ومن هذا نستنتج أن :

$$L[e^{-kt}] = \frac{1}{s+k} \quad \text{..........} (18-2)$$

حيث إن k هو ثابت .

4-2 بعـض القواعـد فـي تحويـلات لابـلاس

a. $L[kf(t)] = kL[f(t)]$ .... (19-2)

b. $L[f(t) \pm g(t)] = L[f(t)] \pm L[g(t)]$ .... (20-2)

حيـث إن $f(t), g(t)$ هي دوال للمتغير t .

مثال (2 -3)

أوجـد تحويـلات لابـلاس للـدوال التاليـة :

$1-f(t)=3\sin 5t-2\cos 4t$

$2-f(t)=3e^{4t}-2e^{-2t}$

$3-f(t)=t^3$

$$4-f(x)=\begin{Bmatrix} x,\ldots\ldots 0<x<4 \\ 6,\ldots\ldots x>4 \end{Bmatrix}$$

$5-f(t)=t^2-4t-4$

$6-f(x)=x^3+x^2+4x-5$

$7-f(t)=t^{n-1}$

$$8-f(t)=\begin{Bmatrix} \sin 2t,\cdots\cdots 0<t<\pi \\ 2\cdots\cdots\cdots\cdots t>\pi \end{Bmatrix}$$

الحل :

$$1-L[3\sin 5t-2\cos 4t]=L[3\sin 5t]-L[2\cos 4t]=3L[\sin 5t]-2L[\cos 4t]=\frac{15}{s^2+25}-\frac{2s}{s^2+16}$$

$$2-L[3e^{4t}-2e^{-2t}]=L[3e^{4t}]-L[2e^{-2t}]=3L[e^{4t}]-2L[e^{-2t}]=\frac{3}{s-4}-\frac{2}{s+2}$$

$$3-L[t^3]=\frac{3!}{s^{3+1}}=\frac{(3)(2)(1)}{s^4}=\frac{6}{s^4}$$

$$4-L[f(x)]=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=\int_0^4 e^{-sx}x\,dx+\int_4^\infty e^{-sx}.6dx=\left[\frac{-xe^{-sx}}{s}-\frac{e^{-sx}}{s^2}\right]_0^4-\left[\frac{-6e^{-sx}}{s}\right]_4^\infty$$

$$=\frac{2}{s}e^{-4s}-\frac{e^{-4s}}{s^2}-\frac{1}{s^2}$$

ملاحظة :

التكامل $\int e^{-sx} x dx$ يحل بطريقة التجزيء $\int u dv = uv - \int v du$.

$$5-L[f(t)]=L[t^2-4t-4]=L[t^2]-L[4t]-L[4]=\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{4}{s}$$

$$7-f(t)=t^{n-1},\cdots f'(t)=(n-1)t^{n-2},\cdots f''(t)=(n-1)(n-2)t^{n-3}, f(0)=0$$

$$\therefore L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0),\cdots\cdots f'(0)=0$$

$$L[(n-1)t^{n-2}]=sL[f(t)]=sL[t^{n-1}]\Rightarrow \therefore L[t^{n-1}]=\frac{(n-1)}{s}L[t^{n-2}]$$

$$L[(n-1)(n-2)t^{n-3}]=s^2L[t^{n-1}]\Rightarrow \therefore L[t^{n-1}]=\frac{(n-1)(n-2)}{s^2}L[t^{n-3}]=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{s^2 s^{n-2}}$$

$$\therefore L[t^{n-1}]=\frac{(n-1)!}{s^n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21-2)$$

الفرعين 6 , 8 يتركان كتمرين للطالب .

مثال(2-4)

أوجد تحويل لابلاس للدالة التالية :

$$f(t)=3-5e^{2t}+4\sin t-7\cos 3t$$

الحــــــل:

$$L[f(t)]=L[3-5e^{2t}+4\sin t-7\cos 3t]=L[3]+L[5e^{2t}]+L[4\sin t]-L[7\cos 3t]$$

$$= L[3]-5L[e^{2t}]+4L[\sin t]-7[\cos 3t]=\frac{3}{s}-\frac{5}{s-2}+\frac{4}{s^2+1}-\frac{7s}{s^2+9}$$

مثال (2 - 5)

أوجـد تحويـل لابـلاس للدالـة :

$$L\left[e^{3t}\cos 4t\right]$$

الحل :

من خواص نظرية الإزاحة يتبين أن :

$$L\left[e^{at}F(t)\right]=F(s-a)$$

ومن هذه الخاصية نـفهـم أنـه إذا كـان استخراج تحويل لابلاس مـن حاصل ضرب دالـتـيـن مـثلا وهـي $e^{at},F(t)$ ، نوجـد أولا تحويـل لابـلاس لـلدالة F(t) ثم نستبدل s التي تظهر في الدالة بـ (s – a) .

ولذلك لإيجاد تحويل لابلاس للدالـة أعـلاه :

$$L[\cos 4t]=\frac{s}{s^2+16}$$

وبتطبيق شروط نظرية الإزاحة :

$$L\left[e^{3t}\cos 4t\right]=\frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

أو :

$$L\left[e^{3t}\cos 4t\right]=\frac{s-3}{s^2-6s+9+16}=\frac{s-3}{s^2-6s+25}$$

5-2 إيجـــاد تحويـــل لابـــلاس بإستخــدام تعريف المشتقـــة

وهذه القاعدة تصلح عند ضرب دالة F(t) في دالة مثل t^n حيث يمكن استخدام القانون التالي :

$$L\left[t^n F(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{.......... ....} (22-2)$$

حيث أن $n = 1,2,3,\ldots$ أي أن :

$$L\left[tF(t)\right] = -F'(s)$$
$$L\left[t^2 F(t)\right] = F''(s)$$
$$L\left[t^3 F(t)\right] = -F'''(s)$$

وبصورة عامة بتطبيق المعادلة (22-2) نجد أن :

$$L\left[t^n F(t)\right] = (-1)^n d^n \frac{F(s)}{ds^n}$$

مثال(6-2)

بإستخدام تعريف المشتقـــة الثانيـــة أوجـــد تحويـــل لابـــلاس للدالـــة :

$$L[t \sin t], L[t^2 \sin t]$$

الحل :

$$1 - L\left[\sin t\right] = \frac{1}{s^2+1}, \cdots\cdots L\left[t \sin t\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$2 - L\left[t^2 \sin t\right] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

2 - 6 بعـض خصائـص تحويـلات لابـــلاس

1- إذا كـان :

$$L\left[F(t)\right] = F(s)$$

فيكـون :

$$L\left[\int_0^1 f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s} \qquad \text{.......................................}(23-2)$$

2- إذا كـان :

$$L\left[F(t)\right] = F(s)$$

فيكـون :

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)\,du$$

بشـــرط أن :

$$\lim_{t \to 0}\left[\frac{F(t)}{t}\right]$$

هـي موجـودة ومعرّفـة.

مثـال(2 -7)

أوجـــد :

$$L\left[\int_0^1 \sin 2u\,du\right]$$

الحـل :

بمـا أن :

$$L\left[\sin 2u\right] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

فيكون :

$$L\left[\int_0^1 \sin 2u\,du\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

مثـــال (2 – 8)

أوجد :

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right]$$

الحــل :

$$L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

وبما أن نهاية الدالة $\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = 1$ أي أن النهاية هي حقيقية وموجودة ، وبتطبيق الخاصية 2 نجد أن :

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \left[\tan^{-1} u\right]_s^\infty = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

7-2 معكوس تحويل لابلاس (The Laplace Inverse)

إذا كانت F(s) تمثل تحويل لابلاس للدالة F(t) أو أن L [F(t)] = F(s) ، فيعرف تحويل لابلاس العكسي أو معكوس تحويل لابـــلاس للدالــة F(s) والذي يرمز له $L^{-1}[F(s)] = F(t)$ على أنه دالة لــ t . أي أن :

$$L^{-1}[F(s)] = F(t), \cdots\cdots L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = \frac{t^3}{6}$$

$$L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}\right] = \sin 2t, \cdots\cdots L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = 2\cos 2t$$

إن تحويلات لابلاس العكسية (معكوس تحويل لابلاس) تحقق المبرهنة التالية :-

$$L^{-1}(C_1F_1(s)+C_2F_2(s))=C_1L^{-1}[F_1(s)]+C_2L^{-1}[F_2(s)]\cdots\cdots\cdots(24-2)$$

والجدول (2 - 2) يبين بعض القواعد المهمة في تحويلات ومعكوس تحويلات لابلاس .

جدول (2-2)

تحويل لابلاس للدالة	الدالة الأصلية (معكوس تحويل لابلاس)
$\frac{1}{s}$	$L(1)$
$\frac{1}{s^2}$	$L[t]$
$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$L[t^{n-1}]$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$L[\sin at]$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$L[\cos at]$
$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$L[x\sin ax]$
$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$L[x\cos ax]$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$L[x^{n-1}e^{ax}]$

8-2 إيجاد معكوس تحويل لابلاس بإستخدام الكسور الجزئية

إذا كانت دالة لابلاس هي F(s) وتتكون من بسط و مقام وذات طبيعة $F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ حيث أن $D(s),N(s)$ متغيرات الحدود وإذا كانت درجة

$N(s)$ أقل من درجة $D(s)$ فإننا نستخدم وحدة الكسور الجزئية أي نقوم بتحليل الحدود بنفس الطريقة السابقة للكسور الجزئية .

مثال(2-9)

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة :

$$L^{-1}\left[\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}\right]$$

الحل :

المقدار في المقام يتحلل كما يلي :

$$s^3+4s^2+3s=s(s^2+4s+3)=s(s+3)(s+1)$$

$$\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}=\frac{s^2-6}{s(s+3)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+3}$$

$$\therefore s^2-6=A(s+1)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s+1)=A(s^2+4s+3)+B(s^2+s)+C(s^2+3s)$$

$$s^2-6=As^2+4As+3A+Bs^2+Bs+Cs^2+3Cs$$

وبضم الحدود المشتركة للمقادير s , s^2 والحد المطلق :

$$\therefore s^2-6=s^2(A+B+C)+s(4A+B+3C)+3A$$

وبمساواة الحدود المشتركة بين الطرفين الأيمن والأيسر نستنتج أن:

$$3A=-6\Rightarrow\therefore\quad A=\frac{-6}{3}=-2$$

بالتعويض في بقية المعادلات وباستخدام طريقة الحذف أو التعويض نحصل على :

$$A+B+C=1$$
$$4A+B+3C=0$$
$$\therefore\quad B=\frac{5}{2},\ C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}=\frac{-2}{s}+\frac{5/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}\Rightarrow \therefore L^{-1}\left[-2+\frac{5/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}\right]=L^{-1}[-2]+L^{-1}\left[\frac{5/2}{s+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1/2}{s+3}\right]$$

$$\therefore\ F(t)=-2+\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

مثـــــــال(2 – 10)

أوجـد معكـوس تحويـل لابـلاس للدالـة :

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-6s+8}\right]$$

الحـــل :

$$\frac{s+2}{s^2-6s+8}=\frac{s+2}{(s-2)(s-4)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-4}$$

$$\therefore s+2=A(s-4)+B(s-2)=As-4A+Bs-2B$$

$$\therefore s+2=(A+B)s+(-4A-2B)\Rightarrow A+B=1,\ldots\ldots,4A+2B=-2$$

ومنها نستنتج أن :

$$A=-2,B=3$$

وبالتعويض عن قيم A و B و إيجاد معكوس تحويل لابلاس لها :

$$L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-6s+8}\right]=L^{-1}\left[\frac{-2}{s-2}\right]+L^{-1}\left[\frac{3}{s-4}\right]=-2e^{2t}+3e^{4t}=F(t)$$

9-2 ملاحظات حول إستخدام طريقة الكسور الجزئية في تحويلات لابلاس

عنـــد وجود عوامل من الدرجة الثانية فإن الكسور الجزئيـــة المنـــاظرة يجب أن يحتوي كل منها على بسط خطي ولذلك يكون مفكوك الكسر بالشـــكل التالي :

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\therefore 1=A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1)=As^2+A+Bs^2+Bs+Cs+C$$

$$1=(A+B)s^2+(B+C)s+(A+C)$$

$$A+C=1$$

$$A+B=0$$

$$B+C=0\Rightarrow\therefore B=-C$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=1\\A-C=0\end{array}\right\}\rightarrow 2A=1\rightarrow\therefore A=\frac{1}{2},\ldots,B=-\frac{1}{2},\ldots,C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{1/2}{(s+1)}+\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$\therefore F(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

عند إحتواء المقام على عوامل خطية مكررة يجب فرض الكسور الجزئية بالشكل التالي :

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}=\frac{8}{s^3(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-2}+\frac{E}{s+1}$$

عند احتواء المقام على عوامل من الدرجة الثانية ومكررة يجب فرض الكسور بالشكل الآتي :

$$\frac{16}{s^2(s^2+4)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}+\frac{Es+F}{(s^2+4)^2}$$

مثـــــال (2-11)

أوجـد معكـوس تحويـل لابـلاس للدالـة التاليـة :

$$L^{-1}\left[\frac{16}{s^2(s^2+4)^2}\right]$$

الحـل :

$$\frac{16}{s^2(s^2+4)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}+\frac{Es+F}{(s^2+4)^2}$$

وبالضرب في المرافق $s^2(s^2+4)^2$ نحصل على:

$$16=As(s^2+4)^2+B(s^2+4)^2+(Cs+D)s^2(s^2+4)+(Es+F)s^2$$
$$16=As\left[s^4+8s^2+16\right]+B\left[s^4+8s^2+16\right]+(Cs+D)(s^4+4s^2)+Es^3+Fs^2$$
$$16=As^5+8As^3+16As+Bs^4+8Bs^2+16B+Cs^5+4Cs^3+Ds^4+4Ds^2+Es^3+Fs^2$$
$$16=(A+C)s^5+(B+D)s^4+(8A+4C+E)s^3+(8B+D+F)s^2+16As+16B$$
$$16=16B\rightarrow B=1$$
$$16A=0\rightarrow\therefore A=0$$
$$A+C=0\Rightarrow\therefore C=0$$
$$B+D=0\rightarrow\therefore D=-1$$
$$8A+4C+E=0\Rightarrow\therefore E=0$$
$$8B+D+F=0\rightarrow\therefore 8+(-1)+F=0\Rightarrow\therefore F=-7$$
$$\therefore\frac{16}{s^2(s^2+4)^2}=\frac{0}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{(0)s-1}{s^2+4}+\frac{(0)s-7}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}-\frac{7}{(s^2+4)^2}$$
$$\therefore L^{-1}\left[\frac{16}{s^2(s^2+4)^2}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]-7L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4)^2}\right]$$
$$\therefore F(t)=t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{7}{2}t\sin 2t$$

مثـــــال (2-12)

أوجــد معكــوس تحــويل لابـــلاس للدالـــة :

$$L^{-1}\left[\frac{4s^2-5s-4}{(s^3+s^2-2s)}\right]$$

الحــــل :

$$\frac{4s^2+5s-4}{(s^3+s^2-2s)}=\frac{4s^2+5s-4}{s(s^2+s-2)}=\frac{4s^2+5s-4}{s(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+1}$$

$$\therefore\ 4s^2+5s-4=A(s-2)(s+1)+Bs(s+1)+Cs(s-2)$$

$$\therefore\ 4s^2+5s=4=A[s^2-s-2]+B[s^2+s]+C[s^2-2s]$$

$$4s^2+5s-4=As^2-As-2A+Bs^2+Bs+Cs^2-2Cs$$

$$4s^2+5s-4=(A+B+C)s^2+(-A+B-2C)s-2A$$

$$4=A+B+C$$

$$5=-A+B-2C$$

$$-4=-2A\rightarrow\therefore\ A=\frac{-4}{-2}=2$$

$$\left.\begin{matrix}(2=B+C)(2)\\ 7=B-2C\end{matrix}\right\}\Rightarrow\therefore\ B=\frac{11}{3},\ldots C=-\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{4s^2+5s-4}{s(s-2)(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{11/3}{s-2}\right]-L^{-1}\left[\frac{5/3}{s+1}\right]$$

$$\therefore\ F(t)=2+\frac{11}{3}e^{2t}-\frac{5}{3}e^{-t}$$

مثال (13-2)

أوجـد معكـوس تحويـل لابـلاس للدالـة :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+4}\right]$$

الحـل :

$$\frac{1}{s^2+4s+4}=\frac{1}{(s+2)^2}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}$$

وبالضرب في مرافق المقام نحصل على :

$$1=A(s+2)+B=As+2A+B$$
$$\therefore 2A+B=1$$
$$A=0,B=1$$

أي أن :

$$\therefore\ F(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right]=te^{-2t}$$

10-2 تحويـلات لابـلاس للمشتقـات

إذا كانت F(t) هي دالة متصلة لقيم ($t \geq 0$) وذات رتبة آسية عندما ($t \to \infty$) وكانت الدالة $F'(t)$ منقطعة الاتصال على أي فترة محـددة مـن المدى ($t \geq 0$) وذات رتبة آسية عندما $t \to \infty$ لذلك فإن :

$$L[F(t)]=\int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt$$

ويمكن حل التكامل بافتراض أن :

$$u=e^{-st}$$

أي أن :

$$du = -se^{-st}dt$$

وأن :

$$dv = F'(t)dt \rightarrow \therefore v = F(t)$$

وبما أن :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt = \left[-se^{-st}F(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}F(t)dt = 0 - F(0) + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = -F(0) + sF(s)$$

$$\therefore L\left[F'(t)\right] = sF(s) - F(0) \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ (25-2)$$

و باستخدام عملية التكرار على النظرية السابقة فإننا نحصل على :

$$L\left[F''(t)\right] = sL\left[F(t)\right] - F(0) = s\left[sL\left[F(t)\right] - F(0)\right] - F(0) = s^2L\left[F(t)\right] - sF(0) - F(0)$$

أي أن:

$$\therefore L\left[F^n(t)\right] = s^n L\left[F(t)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}F^k(0) \ldots\ldots\ldots\ (26-2)$$

وقد استخدمت هذه النظرية التي تعتمد على تحويلات ومعكوس تحويلات لابلاس , في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وتسمح هذه النظرية بتحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية كما هو في المثال التالي .

مثال (14-2)

حل مسألة القيمة الابتدائية التالية :

$$\bar{y} - 5y = e^{5x} \ldots (I)$$

علما أن :

$$y(0) = 0$$

الحـــل :

$$L(y)=L[F(x)]=sy(s)-y(0)$$

إذن :

$$L(5y)=5L[y]-y(0)=5y(s)$$

وبالنسبة للـــمشتقة فـــإن:

$$L[y(x)]=sy(s)-y(0)=sy(s)$$

وأن :

$$L\left[e^{5x}\right]=\frac{1}{s-5}$$

وبالتعويض في المعادلة (I) ينتج :

$$sy(s)-5y(s)=\frac{1}{s-5}\rightarrow\therefore y(s)(s-5)=\frac{1}{s-5}\rightarrow\therefore y(s)=\frac{1}{(s-5)^2}$$

$$\therefore\ y(x)=L^{-1}[y(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)^2}\right]=xe^{5x}$$

مثال (2-15)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بإستخدام تحويلات لابلاس :

$$X''(t)+2X'(t)+X(t)=3te^{-t}$$

علما أن :

$$X'(0)=2,\ X(0)=4$$

الحـــل :

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة ينتج أن :

$$L[X''(t)+2X'(t)+X(t)]=L\left[3te^{-t}\right]$$

وبفــرض أن :

$$L\left[X(t)\right]= X(s)$$

ينتـــج أن :

$$L\left[X''(t)\right]+2L\left[X'(t)\right]+L\left[X(t)\right]=3L\left[te^{-t}\right]$$

$$\left[s^2X(s)-sX(0)-X'(0)\right]+2\left[sX(s)-X(0)\right]+X(s)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\left[s^2X(s)-4s-2\right]+2\left[sX(s)-4\right]+X(s)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$X(s)\left[s^2+2s+1\right]-4s-10=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\therefore X(s)\left[s^2+2s+1\right]=\frac{3}{(s+1)^2}+4s+10$$

$$\therefore X(s)(s+1)^2=\frac{3}{(s+1)^2}+4s+10$$

$$\therefore X(s)=\frac{4s+10}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}=\frac{4s+4}{(s+1)^2}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}=\frac{4(s+1)}{(s+1)^2}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\therefore X(s)=\frac{4}{(s+1)}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

وعند أخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين و بإستخدام نظرية الإزاحــة نحصل على :

$$L^{-1}\left[X(s)\right]=X(t)=L^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}\right]\Rightarrow \therefore X(t)=4e^{-t}+6te^{-t}+3t^2e^{-t}$$

مثال (2 – 16)

أوجــد الحــل العام للمــعادلــة التــفــاضليــة مستخدما تحويلات لابلاس

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=3$$

علما أن : $y(0)=y'(0)=1$

الحل :

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلــة ينــتــج أن :

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2} + 4y\right] = L[3]$$

وبما أن :

$$L[3] = \frac{3}{s}$$

و أن :

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2y(s) - sy(0) - y'(0)$$

و أن :

$$L[4y] = 4y(s)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$s^2y(s) - s - 1 + 4y(s) = \frac{3}{s}$$

$$\therefore s^2y(s) + 4y(s) = \frac{3}{s} + s + 1$$

$$\therefore (s^2+4)y(s) = \frac{3}{s} + s + 1$$

$$\therefore y(s) = \frac{3}{s(s^2+4)} + \frac{s}{(s^2+4)} + \frac{1}{(s^2+4)}\Bigg\} \to \Bigg\{\frac{3}{s(s^2+4)} = \int_0^1 \sin 3t\,dt = \left[-\frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^1$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin 2t \qquad \text{و} \qquad L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 2t + \cos 2t$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال(2-17)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدما تحويلات لابلاس :

$$y''(t) + \beta^2 y(t) = A\sin \omega t \qquad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$

الحــل :

$$L[y''(t)] = s^2 f(s) - s\,f(0) - f'(0) = s^2 f(s) - s$$

$$L[\beta^2 y(t)] = \beta^2 f(s) \qquad , \qquad L[A \sin \omega t] = \frac{A\,\omega}{s^2 + \omega^2}$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$s^2 y(s) - s + \beta^2 y(s) = \frac{A\,\omega}{s^2 + \omega^2}$$

ومنها نحصل على :

$$y(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{A\,\omega}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)}$$

إن صيغة التحويل العكسي للمعادلة أعلاه تعتمد على كون β تساوي أو لا تساوي ω فإذا كانت ω ≠ β , يكون الحل بالشكل التالي :

$$y(t) = \cos \beta t + \frac{A}{\beta(\beta^2 - \omega^2)}(\beta \sin \omega t - \omega \sin \beta t)$$

وإذا كانت ω = β , يكون الحل بالشكل التالي :

$$y(t) = \cos \beta t + \frac{A}{\beta^2}(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$$

ونترك للطالب إثبات ذلك .

a . أوجد تحويـل لابــلاس لمــا يلــي :

$$1)\ f(t)=\begin{cases} t,\cdots\ \cdots\ 0<t<2 \\ 2,\cdots\ \cdots\ t>2 \end{cases}$$

$$2)\ f(t)=\frac{e^{2t}-1}{t}$$

$$3)\ f(t)=\frac{1-\cos 3t}{t}$$

$$4)\ \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}$$

$$5)\ L\left[t(e^{-3t}-t^{2}+\cos 4t-1)\right]$$

$$6)\ f(t)=e^{3t}\cos 4t$$

$$7)\ f(t)=t^{5}e^{-2t}$$

$$8)\ f(t)=2e^{t}-3e^{-2t}+4t^{2}$$

$$9)\ f(x)=\begin{cases} 1\ \ldots\ldots\ldots\ \ 0\le x\le 1 \\ e^{x}\ \ldots\ldots\ \ 1<x\le 4 \\ 0\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ x>4 \end{cases}$$

b. أوجد معكوس تحويل لابلاس للدوال التالية :

$$1)\ f(s) = \frac{1}{(s+2)^4}$$

$$2)\ f(s) = \frac{s}{s(s+2)^2}$$

$$3)\ f(s) = \frac{s+1}{9s^2+6s+5}$$

$$4)\ f(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$5)\ f(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$6)\ f(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$7)\ f(s) = \frac{1}{s^4+2s^2+4}$$

$$8)\ f(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2}$$

$$9)\ f(s) = \frac{s+3}{(s^2+3s+2)^2}$$

$$10)\ f(s) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)}$$

$$11)\ f(s) = \frac{2s^2+1}{s(s+1)^2}$$

$$12)\ L^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+9}+\frac{15}{s^2+25}\right]$$

$$13)\ L^{-1}\left[\frac{2s-10}{s^2-4s+20}\right]$$

$$14)\ f(s) = \left[\frac{6}{s-2}+\frac{4}{s^3}\right]$$

c. أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية بإستخدام تحويلات لابلاس :

$W(1)=-1, W(0)=-3$

$y(0)=y'(0)=1$

$y(0)=1, y'(0)=-2$

$y(0)=y'(0)=1$

$y(0)=-2, y'(0)=1$

$y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y'''(0)=1$

$y(0)=y'(0)=0$

$y(0)=0$

$X(0)=2, X'(0)=0$

$y(0)=5, y'(0)=-2$

$1-W''(x)+2W'(x)+W(x)=x$

$2-\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=3$

$3-y''+2y'+y=te^{-t}$

$4-y''+4y'+3y=e^{t}$

$5-y''+4y=\cos 2t$

$6-\dfrac{d^4y}{dx^4}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

$7-y''-4y'+4y=6e^{x}$

$8-y'-5y=e^{5x}$

$9-X''(t)-2X'(t)=6-4t$

$10-y''(x)+9y(x)=40e^{x}$