الباب الأول

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

1.1 مقدمـــــــة

أن النموذج الرياضي المتمثل في معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية معطاة يمكن أن يصنف عمليات طبيعية أو كيميائية أو فيزيائية أو اقتصادية ، وبحـل المعادلة التفاضلية يمكننا الحصول على تصور واضح لخواص وطبيعة العملية المناظرة بل ومستقبل سيرها . إن المعادلة التي تربط بيـن متغير تـابع مـع متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة عن طريق المعاملات التفاضلية تـدعى " بالمعادلة التفاضلية ". وإذا وجد متغير مستقل واحد مع المتغير التابع فأن تلك المعادلة تدعى" بالمعادلة التفاضلية الاعتيادية " ، أما إذا احتوت تـلك المعادلة على أكثر من متغير مستقل فتدعى "بالمعادلة التفاضلية الجزئية " .

أن المعادلات التفاضليـة الاعتياديـة هي المعادلات التي يكـون فيهـا جميع المشتقات اعتيادية لمتغير تابع واحد فقط نسبة لمتغير مستقل واحد فقـط ايضاً فمثلا المعادلة التالية:-

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)+4y=4e^x\cos x \qquad (1-1)$$

هي معادلة تفاضلية اعتيادية بينما المعادلة التالية :-

$$Cp\rho\frac{\partial T}{\partial \theta}=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \qquad (2-1)$$

هي معادلة تفاضلية جزئية حيث أنها تحتوي على المعاملات التفاضلية الجزئية للمتغير(T) بالنسبة إلى كل من المتغيـرات θ , x , y , z . أمـا المعادلـة (1- 3) :-

$$\frac{dy}{dx}=e^x+\sin x \qquad (3-1)$$

فهي معادلة اعتيادية خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة رقم (1-4) :-

$$y'' - 2y' + y = \cos x \qquad (4-1)$$

فهي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى ، أما المعادلة رقم (1-5) :-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5-1)$$

فهي معادلة جزئية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى، أما المعادلة رقم (6-1) :-

$$3x^2 + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad (6-1)$$

فهي معادلة تفاضلية اعتيادية غير خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى .

وبشكل عام يمكن تقسيم المعادلات التفاضلية على هذا الأساس إلى اعتيادية وجزئية:-

1- المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

وهي المعادلة التي تكون فيها جميع المشتقات اعتيادية لمتغير تابع واحد فقط نسبة لمتغير مستقل واحد فقط أيضا .

2 - المعادلة التفاضلية الجزئية :-

وهي المعادلة التي تحتوي على الأقل مشتقة جزئية واحدة لبعض المتغيرات المستقلة . و أيضا تصنف المعادلات التفاضلية نسبة إلى رتبتها ودرجتها .

2.1 الرتبــة والدرجــة (Order and Degree)

إن رتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى معامل تفاضلي تحتويه ولذلك فإن رتبة المعادلــة (1-1) هــي الثالثة لأن أعــلى مــعامل تفاضــلي فيهــا هـــو $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ أما رتبــة المعادلــة (1-2) فهــي الأولــى.

إن درجــة المعــادلة تعني قيمة الأس المرفوع إليــه أعـــلى معامــل تفاضلي وعلى هذا الأســاس فــإن درجــة المعادلة (1-1) هي الأولى علــى الرغم من احتوائها على المعامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ والمرفوع لأس 2 أما المعــادلـــة رقــم (1-2) فــهي معــادلة من الدرجة الأولى أيضا.

3.1 المعادلة الخطية وغير الخطية (Linear & non-Linear Equation)

عندما يكون المتغير التابع أو أحد معاملات المعادلة التفاضلية مرفــوع لأس أكبــر من الواحد الصحيح فيقال عندئذ إن المعادلة التفاضلية غير خطية ، أما إذا كان الأس المرفوع إليه أعلى معــامل تــفاضلي في المعادلة هــو 1 فنقول إن المعادلة التفاضلية هي معادلة خطية , وعلــى هــذا الأســاس فــإن المعادلات التالية :-

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\sin x \quad \text{.........} (7-1)$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^2+\frac{dy}{dx}+y=0 \quad \text{.........} (8-1)$$

هي معادلات غير خطية .

وهكذا فإن المعادلات التالية هي معادلات لا خطية :-

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\sin x \qquad (9-1)$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3+\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (10-1)$$

فالمعادلة (1-9) هي لا خطيــة لأن التــابع y يظهــر بصــيغة y^2 بينمــا المعــادلة (1 - 10) هي لا خطية أيضا لأن أعلى معامل تفاضلي فيها هــو من الدرجة الثانية ومرفوع للأس 3 .إذن جميع المعادلات أعلاه هي لا خطية.

مثال (1-1)

حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية ، وبين هــل هــي اعتيادية أم جزئية ، خطية أو لا خطية مع توضيح السبب ؟

1) $y''+4xy'+2y=\cos x$

2) $\frac{d^3y}{dx^3}+4x\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+5y=\sin 2x$

3) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+xy=\sin t$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial t}+u^2+v=\sin u$

الحل:-

المعادلة الأولى هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبــة الثانيــة والدرجة الأولى لأن رتبة أعلى معامل تفاضلي فيها هو 2 والأس المرفوع إليــه هــذا المعامل هو 1 وهي لا تحتوي على معامل لـــ y أكبر من 1 . المعادلة الثانية هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

المعادلة الثالثة هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبــة الثانيــة لأن المشتقة للمتغير y نسبة لــ x هي الثانية ودرجتها هي الأولـــى و لا تحتــوي على معامل أعلى من 1 .

المعادلة الرابعة هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية من الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

4.1 المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

(First Order Differential Equation)

إن المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى لا تحتوي على مشتقات أعلى من الرتبة أو الدرجة الأولى وهي تربط بين متغير تابع مع متغير أو متغيرين مستقلين ولا يوجد حل عام لهذه المعادلات ولكن يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية من هذا النوع بطريقة خاصة و هي:-

1- المعادلات التفاضلية التي يمكن فصل متغيراتها (Variables Separation).

2- المعادلات المتجانسة (Homogeneous Equations).

3- المعادلات التامة (Exact Equations).

4 - المعادلات التي تحل بتكامل المعامل (Integral Factor).

من هنا نرى أن النوع الرابع من المعادلات هو الأكثر أهمية ومع ذلك سيتم تناول كل النقاط أعلاه بصورة مفصلة .

4.1 .1 اختزال الثوابت الاختيارية(Reduction Of Optional Constants)

عند احتواء الدالة الأصلية على ثابت أو أكثر يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام بمفاضلة الحل العام عدة مرات إلى أن يتم التخلص من الثوابت الاختيارية ومن ثم ترتيب المعادلة التفاضلية المحصل عليها .

مثال (2-1)

أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام : $y = C_1 x + 2$

الحل :-

نلاحظ هنا إن عدد الثوابت هو 1 وهي C_1 ولذلك سنقوم بمفاضلة المعادلة لمرة واحدة لاختزال الثابت C_1 وبالشكل التالي :-

$$y = C_1 x + 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \qquad (11-1)$$

$$C_1 = \frac{y-2}{x} \qquad (12-1)$$

من المعادلتين أعلاه ينتج أن :

$$y^{-} = \frac{y-2}{x} \qquad (13-1)$$

وبترتيب المعادلة (1-7) نحصل على :

$x y' = y - 2$ أو :

$$x\frac{dy}{dx} - y + 2 = 0 \qquad (14-1)$$

وهي المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام .

مثال (1-3)

أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام $y = C_1 + C_2 e^{x}$

الحل :-

نلاحظ هنا إن عدد الثوابت في الحل العام هو 2 وهي C_1, C_2 لذلك..

نفاضل مرتين كما يلي :-

$$y = C_1 + C_2 e^{x}$$
$$y' = C_2 e^{x}$$
$$y'' = C_2 e^{x}$$
$$y' = y'' \quad \text{or} \quad y'' - y' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام .

مثال (4-1)

بين إن الدالة التالية $y = e^{-x/2}$ تكون حلا للمعادلة التفاضلية

$$2y' + y' = 0$$

الحل :-

نشتق الحل العام وبذلك نحصل على :

$$y' = -\tfrac{1}{2} e^{-x/2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل :-

$$2\left(-\tfrac{1}{2} e^{-x/2}\right) + e^{-x/2} = 0 \quad , \quad -e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0$$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر ولذلك فإن الدالة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه .

مثال (4-1)

بين إن الدالة المعطاة $y = 5 \tan 5x$ تمثل حلا " للمعادلة التفاضلية

$$y' = 25 + y^2$$

الحل :-

$$y = 5 \tan 5x$$

$y' = 25 \sec^2 5x$

وبالتعويض في طرفي المعادلة التفاضلية :-

$$25 \sec^2 5x = 25 + (5 \tan 5x)^2$$
$$25 \sec^2 5x = 25 + 25 \tan^2 5x$$
$$25 \sec^2 5x = 25 (1 + \tan^2 5x)$$
$$\sec^2 5x = 1 + \tan^2 5x$$
$$25 \sec^2 5x = 25 \sec^2 5x$$

إذن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر ولذلك فإن الدالة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه .

2 . 4.1 طريقة فصل المتغيرات

إن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تكتب على الصورة التالية :-

$$M_{(x,y)}\,dx + N_{(x,y)}\,dy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15\text{-}1)$$

حيث إن كل من M , N هي دوال متصلة في x , y وكمثال المعادلة التالية : $y\,dx + x^2 y^2\,dy = 0$
هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى حيث إن :-

$$M(x, y) = y \,,\; N(x, y) = x^2y^2$$

مثال (5.1)

المعادلة التفاضلية $x y' + 2y^2 = 0$ هي معادلة من الرتبة الأولى حيث بترتيب المعادلة نحصل على : $x\dfrac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$ وبالضرب في

dx نحـصل على : $x\,dy + 2y^2 dx = 0$ ومن مقارنـة المعادلـة مـع المعادلات من الرتبة الأولى يتبين أن :-

$$M(x, y) = 2y^2 ,\ N(x, y) = x$$

طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى – طريقة فصل المتغيرات:-

إذا تم كتابة المعادلة التفاضلية المرقمة (1-9) على صورة:-

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16\text{-}1)$$

حيث إن M هي دالة لـ (x) فقط , N هي دالـة لـ (y) فـقـط فـفي هذه الحالة يـقال أن المعادلة(10) مفصولة المتغيرات ويمكـن إيجـاد حلها العام بالتكامل لكل حد على حدة . وإذا كتبت المعادلة على الصورة :

$$A(x)B(y)\,dx + C(x)D(y)\,dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17\text{-}1)$$

فإن المتغيرات في هذه الحالة تكـون قابلـة للفصـل وبالقسـمة علـى B (y) , C(x) :-

$$\frac{A(x)}{C(x)}dx + \frac{D(y)}{B(y)}dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18-1)$$

أو

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19\text{-}1)$$

مثال (1-6)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التاليـة باسـتخدام طريقـة فصـل المتغيرات: $x\,dx - dy = 0$

الحل :

المعادلـــة هنـــا هي مفصولة المتغيرات ولذلك تكامل الحـــدود مباشـــرة وكما يلي :-

$$\int xdx - \int dy = \int 0$$

$$\frac{x^2}{2} - y = C$$

وهو الحل العام للمعادلة

مثال (7.1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة فصـــل المتغيـــرات

$$x(1+y^2)\,dx + dy = 0$$

الحل :-

بقسمة طرفي المعادلة التفاضلية على $(1+y^2)$ نحصل على :-

$$xdx + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

$$\int xdx + \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 0$$

أذن الحل العام للمعادلة هو :-

$$\frac{x^2}{2} + \tan^{-1} y = C$$

1. 4 .3 المعـــادلات المتجانســـة Homogeneous Equations :-

تعريف :- تسمى الدالة $f(x, y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

وكمثال على ذلك فإن الدالة :-

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية لأن :-

$$f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy = \lambda^2 (x^2 - xy) = \lambda^2 . f(x, y)$$

مثال آخر :-

الدالة .... $f(x, y) = x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}$

هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية لأن :-

$$f(\lambda \chi, \lambda \gamma) = (\lambda \chi)^2 + 2(\lambda \chi)(\lambda \gamma) - \frac{(\lambda \gamma)^3}{\lambda \chi}$$

$$= \lambda^2 \chi^2 + 2\lambda^2 \chi \gamma - \frac{\lambda^3 \gamma}{\lambda \chi}$$

$$= \lambda^2 (x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}) = \lambda^2 . f(x, y)$$

تعريف :-

يقــــال للمعادلــــــة التفاضــــــلية المرقمــــــة (15-1) أو $M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = 0$ بأنــها متـجانسة إذا كانت كل من M , N دوال متجانسة من نفس الدرجة .

مثال (8.1)

نــــاقش المعادلـــة التفاضــلية التاليـــة مـــن حيـــث التجـــانس

$$2xydx - (x^2 + y^2)\,dy = 0$$

الحل :-

$$M(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) = 2\lambda^2 x y = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 . M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2] = -[\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2] = \lambda^2[-(x^2+y^2)]$$

$$= \lambda^2 N(x,y)$$

ولذلك فإن كلا ً من M , N هي دوال متجانسة من نفس الدرجة وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية معادلة متجانسة من الرتبة الأولى .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة باستخدام خطوات الحل التالية:-

1 - بفرض أن $y = v x$ حيث ان v هي دالة لـ x ومنها نستنتج أن
$dy = v\,dx + x\,dv$

2 - يتم التعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية عن كل من y , dy حتى نصل إلى معادلة قابلة للفصل بالنسبة لكل من x , v .

3 - إيجاد الحل العام للدالة v ومن ثم التعويض عن $v = y / x$ لغاية الحصول على الحل العام في y .

مثال (9.1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة التالية :

$$(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$$

الحل :-

بما أن المعادلة متجانسة أصلا ً يفرض أن
$y = vx$, $dy = v\,dx + x\,dv$

$v^2x^2+vx^2)\,dx - x^2(v\,dx + x\,dv) = 0\ ,\ v^2x^2\,dx + v\,x^2\,dx - v\,x^2\,dx - x^3dv = 0$

أو $v^2x^2\,dx - x^3dv = 0$, وبقسمة الطرفين على v^2x^3 نحصل على :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v^2} = \int 0$$

وبالتكامل ينتج أن :

$$\ln|x| - \frac{1}{v} = C$$

$$\ln|x| - \frac{x}{y} = C$$

وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة .

مثال (1-10) أثبت أن المعادلة التفاضلية التالية :-

$$-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$$

متجانسة وأوجد حلها العام .

الحل :

$$M(\lambda x, \lambda y) = -\lambda y = \lambda(-y) = \lambda.\, M(x, y)$$

$$N(\lambda\chi, \lambda\gamma) = \lambda\chi + \sqrt{\lambda^2\chi\gamma}$$
$$= \lambda\chi + \lambda\sqrt{xy} = \lambda\left[x + \sqrt{xy}\right] = \lambda..f(x, y)$$

M , N دوال متجانسة من درجة واحدة وبذلك تكون المعادلة التفاضلية متجانسة و لإيجاد الحل العام لها :-

نفرض إن : y = v x إذن : dy = v dx + x dv ونعوض كلاً من y ,
dy في المعادلة التفاضلية :

$$-vxdx+\left[x+\sqrt{vx^2}\right]\left[vdx+xdv\right]=0, -vxdx+vxdx+x^2dv+vx\sqrt{v}dx+x^2\sqrt{v}dv=0$$

أو $vx\sqrt{v}dx + (1+\sqrt{v})x^2 dv = 0$

و بالقسمة على $x^2 v\sqrt{v}$, $\frac{xdx}{x^2} + \left[\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\right]dv = 0$,

و بالتكامل نحصل على : $\frac{dx}{x} + (v^{-3/2} + v^{-1})dv = 0$

$$\ln|x| - \frac{2}{\sqrt{v}} + \ln|y| = C \quad \text{حيث} \quad v = \frac{y}{x}$$

1. 4 . 4 المعـــادلات التامـــة (Exact Equations)

تعريف :-

تسمى المعادلة التفاضلية (15.1) :

M (x, y) dx + N (x, y) dy = 0

معادلة تامة إذا وجدت دالة مثل u (x,y) بحيث يكون :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$ ويـكون الحل العام لها u(x,y)= C

وكمثال فإن المعادلة التفاضلية ydx + xdy = 0 هــي معـادلة تامــة لأنــه تــوجد دالـــة مثـــل u (x,y)= xy ويكــون فــي هــذه الحالة $\frac{\partial u}{\partial x} = y = M , \frac{\partial u}{\partial y} = x = N$ و يكون حلها العام هــو x y = C وإذا كانت المعادلة التفاضلية تامة فإن : ∂M / ∂y = ∂N / ∂x

لذا فأن المعادلة التفاضلية أعــلاه هي معادلة تامة و ذلك لأن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 , \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

أي أن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال(11.1)

أثبت أن المعادلــــة التفاضــلية: $x y^2 e^{x2} dx + y e^{x2} dy = 0$ هــي تامــــة .

الحل :-

بمقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (1-15) نستنتج أن :

$$M = xy^2e^{x2} , N = y e^{x2}$$

نفاضل M جزئيا " نسبة لــ y ونفاضل N جزئيا " أيضا " نسبة لــ x أي:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xye^{x2} , \frac{\partial N}{\partial x} = 2xye^{x2}$$

و هـــــــذا يعني أن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي إن المعادلة المذكورة هي معادلة تامة .

إيجاد الحل العام للمعادلة التامة :-

1- من التعريف توجد دالة مثل u (x ,y) بحيث أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21-1)$$

2 – نختار أحد المعادلتين (1-16) , (1-17) فمــثلا " فــي حالــة اختيــار المعادلة رقم (1-16) , نحتفظ بــ y ثابتة و نكامل نسبة لــ x فنحصل على:

$$u(x,y)=\int M.dx=M(x)+g(y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22-1)$$

3 – نشتق المعادلة (1-16) بالنسبة لــ y ونساويها للمعادلة (1-17)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\bar{g}(y)=N\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23-1)$$

$$\therefore g(y)=\int Ndy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24-1)$$

4 – التعويض في المعادلة (1-16) عن قيمة g(y) فنحصل على حل المعادلة العام وهو : u (x , y) =C

مثال (1-12)

أوجد الحل العــام للمعادلــة التفاضليــة التامــة التاليــة :-

$$(x^2y+3x)dx+(\frac{1}{3}x^3+e^y)dy=0$$

الحل :-

حيث أن المعادلة تامة من المسألة , من التعريف توجــد دالــة وهــي : u(x , y) بحيــث أن :-

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{1}{3}x^3+e^y \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=M=x^2y+3x$$

ولذلك سنحتفظ بــ y ثابتة و نكامل u بالنسبة لــ x فنحصل على :

$$u(x,y)=\int(x^2y+3x)dx=\frac{1}{3}x^3y+\frac{3}{2}x^2+g(y)\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

نشتق المعادلة (I) بالنسبة لــ y ونساويها لــ N فنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + \bar{g}(y) = \frac{x^3}{3} + e^y, \therefore \bar{g}(y) = e^y$$

$$g(y) = \int \bar{g}(y)dy = \int e^y dy = e^y + k$$

وبتعويض قيمة g (y) في المعادلة (1) نحصل على الحل العام للمعادلة وكما يلي :

$$\frac{x^3 y}{3} + \frac{3}{2}x^2 + e^y + k = C$$

$$\frac{x^3 y}{3} + \frac{3}{2}x^2 + e^y = c$$

حيث إن الثابت c يحتوي الثابت k .

مثال (1-13)

أثبت إن المعادلة التفاضلية التالية هي تامة ثم أوجد حلها العام :

$$(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$$

الحل :

من مقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (1-9) يتبين أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = x + \sin y \text{.......... ....} (1-12-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x\cos y + \sin y \text{.......... ....} (2-12-1)$$

من معادلة (1-12-2) نحتفظ بـــ x ثابتة و نكامل بالنسبة لـــ y فنحصل على:

$$u(x,y) = \int (x\cos y + \sin y)dy = x\sin y - \cos y + f(x) \text{........} (3-12-1)$$

نشتق المعادلة (1-12-3) بالنسبة لـــ x ونساويها للمعادلة (1-12-1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + \bar{f}(x) = x + \sin y \rightarrow \bar{f}(x) = x \Rightarrow f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + k$$

وبالـتـعـويـض عن قيمة f (x) في المعادلة (3-12-1) نحصـل علـى الحل العام للمعادلة وهو :-

$$x \sin y - \cos y + \frac{x^2}{2} + k = C \Rightarrow x \sin y - \cos y + \frac{x^2}{2} = C$$

5.4.1 العوامـل التكامليـة (Integral Factors)

لو كانت المعادلة

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15\text{-}1)$$

غير تامة, فـمن الضروري أن توجـد دالـة مثـل $\mu(x, y)$ بحيـث إذا ضـربت تلـك الدالة في المعادلة (15) تصبح الدالة تامة ، في هذه الحالة تسمى $\mu(x,y)$ بالعامل التكاملي للمعادلة أو (I.F) وكمثال على ذلك فالمعادلة

$$-y\,dx + x\,dy = 0$$

ليست تامة لأنه

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

لكن لو تذكرنا العلاقة :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

لـوجـدنـا أن الدالة $\frac{1}{x^2}$ هي عامل تكاملي للمعادلـة التفاضـلية، وكـذلـك لو تذكرنا العلاقة :

$$d\left(\frac{-x}{y}\right) = \frac{-ydx + xdy}{y^2}$$

لوجدنا أن الدالة $\frac{1}{y^2}$ هي أيضا ً عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية .من المثال السابق نلاحظ إنه قد يوجد أكثر من عامل تكاملي لنفس المعادلة التفاضلية كما يلاحظ وجود صعوبة أيضا في إيجاد العامل التكاملي .

إيجاد العامل التكاملي بالطريقة المباشرة :

لو كانت المعادلة التفاضلية :

$$\mu.M.dx+\mu.N.dy=0$$

معادلة تامة فإن:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu..M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu..N)$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu..\frac{\partial M}{\partial y}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\therefore\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}$$

$$\therefore\ \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}-\frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

و لو فرضنا أن الدالة أن μ :

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx},\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه ينتج أن :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}$$ أو $$f(x)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}\Rightarrow f(x)dx=\frac{\partial\mu}{\mu}\Rightarrow\int f(x)dx=\int\frac{d\mu}{\mu}$$

$$\ln \mu = \int f(x)dx$$

حيث أن :

$$f(x) = \frac{M_{(y)} - N_{(x)}}{N}$$

مثال (14-1)

أوجد العامل التكاملي للمعادلة التفاضلية التالية وجد حلها العام:

$$(2y+4)dx + xdy = 0$$

الحل :

المعادلة غير تامة لأن : $M = 2y+4 \ , \ N = x$ حيث,

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$ ولذلك يجب أن نحصل على الدالة μ(x,y) و قبلها يجب أن نحصل على f (x) :

$$f(x) = \frac{M(y) - N(x)}{N} = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

وبضرب العامل التكاملي في المعادلة التفاضلية الأصلية نحصل على :

[(2y+4)dx + xdy = 0] (x)

($2xy+4x)dx+x^2dy = 0$

وهي معادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x,$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

و حيث أن المعادلة أعلاه هي تامة , فتوجد دالة هي u(x,y) بحيث إن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2xy + 4x \text{...} (1-13-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^2 \text{...} (2-13-1)$$

من معادلة (1-13-1) نحتفظ بـــ y ثابتة و نكامل بالنسبة لـــ x

$$u(x,y) = \int (2xy + 4x)dx = \frac{2x^2y}{2} + \frac{4x^2}{2} + g(y) = x^2y + 2x^2 + g(y) \text{............} (3-13-1)$$

نشتق المعادلة (1-13-3) بالنسبة إلى y ونساويها للمعادلة (1-13-2) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \bar{g}(y) = x^2 = N \Rightarrow \bar{g}(y) = 0 \rightarrow \therefore \ g(y) = k$$

بالتعويض في المعادلة (1-13-3) عن قيمة g(y) نحصل على :

$$x^2y + 2x^2 + k = c$$

أو

$$x^2y + 2x^2 = C$$

ملاحظة عامة : إذا كانت μ دالة في y فقط فإن العامل التكاملي في هذه الحالة يكون :

$$g(y) = \frac{M(y) - N(x)}{-M} \qquad \text{حيث أن} \qquad \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

مثال (1-15)

أوجد العامل التكاملي للمعادلة التفاضلية $2ydx + xdy = 0$

الحل :-

$$g(y) = \frac{M(y) - N(x)}{-M} = \frac{2-1}{-2y} = \frac{-1}{2y}$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{2y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}dy}$$

$$\therefore \mu(y) = e^{-\frac{1}{2}\ln y} = e^{\ln y^{-\frac{1}{2}}} = y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

إذن العامـــل التكاملـــي هـــو : $\frac{1}{\sqrt{y}}$

حالات خاصة لاستخدام العوامل التكاملية عن طريق الملاحظة

مثال (1-16)

بين أن $\frac{1}{x^2+y^2}$ هو عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية التالية ثـــم أوجـــد حلها العام

$$(x^2+y^2-x)\,dx - y\,dy = 0$$

<u>الحل</u> :-

من مقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (15) يتبين أن :

$M = x^2 + y^2 - x$, $N = -y$: والمعادلـــــة ليســـت تامــــة لأن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية في المقدار التالي

$$\frac{1}{x^2+y^2}$$

و بعد ترتيبها بالشكل التالي نحصل على :-

$$\left[(x^2+y^2-x)dx - ydy = 0\right]\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\left(1-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy = 0$$

$$M = 1-\frac{x}{x^2+y^2}, N = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أصبحت المعادلة الآن تامة وبإعادة الترتيب نستنتج :-

$$dx - \frac{xdx}{x^2+y^2} - \frac{ydy}{x^2+y^2} = 0$$

$$dx - \left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}\right) = 0 \qquad \therefore x - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right| = C$$

$$\int dx - \int \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \int 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (1-17)

أوجد عامل تكاملي مناسب للمعادلة التفاضلية $ydx + (x^2y^3 + x)dy = 0$ ثم أوجد الحل العام للمعادلة .

الحل :

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1.0, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^3 + 1$ وهذا يعني أن المعادلة ليست تامة وهي من الحالات الخاصة للعامل التكاملي لأنها تحتوي المقدار (x^2y^3) ولذلك نقوم بترتيب المعادلة ونضربها بالمقدار $\frac{1}{x^2y^2}$

فنحصل على :

$$ydx + x^2y^3dy + xdy = 0$$

$$xdy + ydx + x^2y^3dy = 0$$

وبضرب المعادلة في العامل التكاملي $\frac{1}{x^2y^2}$ يصبح لــدينا الحــل العــام للمعادلة بالشكل الآتي :

$$[d(xy) + x^2y^3dy = 0\}(\frac{1}{x^2y^2})$$

$$\int\frac{d(xy)}{(xy)^2} + \int ydy = \int 0 \Rightarrow -\frac{1}{xy} + \frac{y^2}{2} = C$$

نستنتج مما سبق أنه :

1. إذا احتوت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على الترتيب $(xdx + ydx)$ فيجب تجربة الدوال من النوع (x^2+y^2) أو $\frac{1}{x^2+y^2}$ كعامل تفاضلي تضرب به المعادلة .

2. إذا احتوت المعادلة على الترتيب[xdy+ydx = d(xy)] , فيجب تجربة دوال من نوع (xy) أو $\frac{1}{xy}$ كعامل تكاملي تضرب به المعادلة .

3 . أما إذا احتوت المعادلة على الترتيب (xdy - ydx) أو (ydx - xdy) فيجب تجربة دوال من نوع $\frac{1}{x^2}$ أو $\frac{1}{y^2}$ كعامل تكاملي تضرب فيه المعادلة.

الحل الخاص للمعادلات التفاضليــة

في كل الحالات السابقة التي تم ذكــرها والحــالات القادمة يكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو بمعرفة قيمة معينة للثابت (C) ولذلك يتوجــب الأمر أن يــكون معلوما لدينا قيم لكل مــن x , y وحســب عــدد الثوابــت الموجودة في الحل العام .

مثال (1-18)

أوجد عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية $xdy - ydx - (4x^2 + y^2)dy = 0$ وحل المعادلة .

الحل :

$$x\,dy - y\,dx = (4x^2+y^2)\,dy$$

هذه المعادلة تختلف عن سابقتها لأنها تحتوي المعامل $(4x^2 + y^2)$ ولذلك لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ولذلك سنقوم بتحويل المعادلة إلى الصيغة من نوع $d\left(\frac{y}{x}\right)$ و إكمال الحل بالشكل التالي :-

$$\because\ d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2},\ d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$\therefore \left[xdy - ydx = (4x^2 + y^2)dy\right]\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{(4x^2 + y^2)dy}{x^2}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right)dy$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = dy \Rightarrow \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \int dy \rightarrow \therefore\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2x}\right) = y + C$$

مثال (1-19)

أوجد الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية :

$$(x^2+3y^2)dx - 2xydy = 0$$

إذا كان :

$$x = 4\ ,\ y = 3$$

الحل :-إن المعادلة أعلاه هي من المعادلات المتجانسة لأن :

$$M(\lambda\chi,\lambda\gamma)=[(\lambda\chi)^2+3(\lambda\gamma)^2]=\lambda^2\chi^2+3\lambda^2\gamma^2=\lambda^2(x^2+3y^2)=\lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda\chi,\lambda\gamma)=-2(\lambda\chi)(\lambda\gamma)=-2\lambda^2xy=\lambda^2(-2xy)=\lambda^2.N(x,y)$$

ولذلك فإن حل المعادلة يكون بفرض أن :

y = v x

إذن : dy = v dx + x dv

أي أن :

$$(x^2+3v^2x^2)dx-2x^2v(xdv+vdx)=0$$

$$x^2dx+3v^2x^2dx-2x^3vdv-2v^2x^2dx=0$$

$$\therefore\ x^2dx+v^2x^2dx-2x^3vdv=0$$

$$x^2(1+v^2)dx-2x^3vdv=0\ ....\ (I)$$

وبقسمة المعادلة الأخيرة على المقدار [$x^3(1+v^2)$] نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{dx}{x}-\frac{2vdv}{1+v^2}=0\rightarrow\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2vdv}{1+v^2}=\int 0$$

وعند التكامل ينتج :

$$\ln|x|-\ln\left|1+v^2\right|=C$$

$$\ln|x|-\ln\left|1+\frac{y^2}{x^2}\right|=C$$

$$\ln\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|=C\ \rightarrow\ x=4,y=3\Rightarrow C=\ln\frac{64}{25}$$

والحل الخاص للمعادلة التفاضلية يكون :

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{64}{25}$$

6.4. 1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكتب على الصورة التالية :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{.................................} (25-1)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \text{.................................} (26-1)$$

حيث أن P، Q دوال متصلة في x , y .إن المعادلة (19) يمكن أن تكتب على الصورة التالية :

$$(Py - Q)dx + dy = 0$$

$$f(x) = \frac{P - 0}{1} = P$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int P(x)dx}$$

وبضرب المعادلة (1-19) في المعامل التكاملي المأخوذ من المعادلة الأخيـرة نحصل على :

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx}) = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة لـــ x نحصل على :-

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (1-20)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

الحل:

بمقارنة المعادلتين نستنتج أن :

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = 4x$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد الحل العام :

$$yx^2 = \int x^2 . 4xdx + C$$

$$yx^2 = x^4 + C$$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2}$$

مثال (1-21)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e^{x}$$

$$2-x\frac{dy}{dx}+y=x^{2}\cos x$$

الحل :

من مقارنة المعادلة الموجودة في الفرع رقم 1 نجد أن :

$$P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=e^{x}$$

إذن العـــامـــل التـــكـــامـــلي للمعادلة الأولى هو

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

وبالتعويض في صيغة الحل العام :

$$ye^{\int P(x)dx}=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C$$

$$yx=\int xe^{x}dx+C\Rightarrow yx=xe^{x}-\int e^{x}dx\rightarrow yx=xe^{x}-e^{x}+C$$

وهو الحل العام لمعادلة الفرع الأول .

أما بالنسبة لحل معادلة الفرع رقم 2 فهو كالتالي :

$$x\overline{y}-y=x^{2}\cos x$$

$$x\frac{dy}{dx}-y=x^{2}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x\cos x$$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}$$

أذن :

$$\mu(x) = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$y\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}(x\cos x)dx + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \sin x + C$$

1 - 4 -7 المعادلات اللاخطية " معادلة برنوللي "

هذه المعادلات تكون على الصيغة :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \, , n \neq 0,1$$

الفكرة تكمن هنا في تحويل المعادلة غير الخطية إلـى معادلـة خطيـة والطريقة هي :

نضع : $z = y^{1-n}$ وثم نشتق z نسبة لـ x .

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

وبالتعويض في معادلة برنوللي :

$$\frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)y^{-n}.P(x)y = (1-n)y^nQ(x)y^{-n}$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

مثال (1-22)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية اللاخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=xy^2$$

الحل :

بالتعويض عن $z = y^{-n}$ في المعادلة الأصلية كما سبق شرحه .

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x), n=2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=-x$$

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$z\frac{1}{x^2}=\int\frac{1}{x^2}(-x)dx+C$$

$$\frac{z}{x^2}=-\int\frac{1}{x}dx+C$$

$$\frac{z}{x^2}=-\ln|x|+C$$

$$\frac{1}{x^2y^2}=-\ln|x|+C$$

مثال (1-23) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية اللاخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^3y^3}$$

الحل :

بما أن n = -3 , نضع

$$z = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4$$

$$\frac{dz}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3}\frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في معادلة برنوللي :-

$$\frac{1}{4y^3}\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x} y^4 = \frac{4}{x_3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x} z = \frac{4}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{4\int \frac{1}{x}dx} = e^{4\ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$z.x^4 = \int x^4 . \frac{4}{x^3} dx + C \rightarrow zx^4 = \int 4x dx + C = 4\int x dx + C \Rightarrow zx^4 = 2x^2 + C$$

أو :

$$x^4 y^4 = 2x^2 + C$$

5-1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة العليا (الرتبة n)

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة العليا تكتب على الصورة التالية :

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+a_2(x)y^{(n-2)}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\bar{y}+a_n(x)y=f(x)....(27-1)$$

حيث أن: $a_0, a_1, ..., a_n, f$ هي دوال متصلة في x والمعادلة أعلاه يمكــن أن تكتب كما يلي :

$$a_0(x)D_x^n y(x)+a_1(x)D_x^{n-1}y(x)+\cdots+a_{n-1}(x)Dy(x)+a_n(x)y=f(x)\cdots\cdots(28-1)$$

حيث أن D_x هو مؤثر تفاضلي يشير إلى أن الدالة التي يؤثر عليها يجــب مفاضلتها نسبة لــ x ، وكمثال على ذلك فإن :

$$D_{(x)}(\sin x) = \cos x$$

$$D_x^2(\sin x) = -\sin x$$

لنأخذ المعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الثانية كمثال أخر حيث أن :

$$D^2 y(x) + y(x) = e^x$$

تعني أن :

$$y''(x)+y(x)=e^x$$

و إذا استخدمنا المؤثر الخطي L حيث أن L تساوي :

$$L = D^n + D^{n-1} + \cdots + \cdots + D.$$

فإن المعادلة (27) يمكن أن تكتب على الصورة التالية :-

$$Ly(x) = f(x)$$

وإذا كانت n = 2 فإن المعادلة (27) يمكن كتابتها بالشكل أدناه :

$$a_0(x)D^2 y(x) + a_1(x)Dy(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$$

وإذا فرضنا أن $a_0(x) \neq 0$ وبالقسمة على $a_0(x)$ ينتج :

$$D^2y(x) + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}Dy(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$D^2y(x) + P(x)Dy(x) + q(x)y(x) = S(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29-1)$$

$$y''(x) + P(x)y'(x) + q(x)y(x) = S(x)$$

حيث أن P , q , S هي دوال متصلة في x . وإذا كانت $S_{(x)} = 0$ فإن المعادلة (27-1) تصبح :-

$$D^2y(x) + P(x)Dy(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30-1)$$

وتسمى هذه الـمـعـادلـة بالمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية .

مبرهنة 1:

إذا كان كل من y_1, y_2 حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرقمة (30-1) فإن:

$$y_3 = C_1y_1 + C_2y_2$$

تعرف أيضا حل علماً أن C_1, C_2 هما ثابتان اختياريان .

البرهان :

باستخدام المؤثر الخطي L ينتج أن :

$$Ly_3 = L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1(Ly_1) + C_2(Ly_2)$$

$= 0 + 0 = 0 \rightarrow y_3$ هو حل للمعادلة

مثال (24-1)

إذا كان: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ حلان للمعادلة التفاضلية فإن :

$$D^2y(x) + y(x) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-27-1)$$

ولذلك فإن $y_3 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ تعرف أيضا حل وذلك لأن :

$$y_3' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y_3'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

وبالتعويض في المعادلة (1-27-1) نحصل على :-

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

الاستقلال الخطي

تعريف :

تكون الدوال y_1 , y_2 , y_3 , ..., y_n , مستقلة خطيا إذا كان فقط : $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n = 0$ بشـــرط أن : $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ وفي حالة $n = 2$ فإن الدالتان y_1 , y_2 تكون مستقلتان خطيا إذا كان : $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ أي $C_1 = C_2 = 0$ وهذا ما يسمى بالاستقلال الخطي لدالتين فمثلا إن أحد الدوال لا تكون بضعف قياس الدالة الأخرى أي أن $\frac{y_1}{y_2}$ هي نسبة غير ثابتة .

ملاحظة : الدالتان غير المستقلتان خطيا تسميان بالدالتان المرتبطتان خطيا .

مثال (1-25)

بين أن الدالتان $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ هما مستقلتان خطيا .

الحل :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

وهي نسبة غير ثابتة أي أن الدالتان مستقلتان خطيا.

مثال 1-26 :

أثبت أن الدالتان $y_1 = x$, $y_2 = 1$ مستقلتان خطيا .

الحل :

الدالتان مستقلتان خطيا لأن : $\frac{1}{x} = \frac{y_1}{y_2}$ وهي نسبة غير ثابتة .

مثال (1-27)

ناقش حالة الدوال التالية من حيث الاستقـــلال الخطـــي :

$$y_2 = 3 - 3\cos^2 x, y_1 = \sin^2 x$$

الحـــل :

$$y_2 = 3 - 3\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) = 3\sin^2 x$$

أي أن :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

وهي نسبة ثابتة , لذلك فإن الدالتين مرتبطتان خطيا.

طريقـــة محـــدد فرونسكـــي (Wroniski Determinant Method)

إن الاختبار المبسط للتعرف على عدة دوال في كونها مستقلة أم غيـــر مستقلة خطيا هي طريقة محدد فرونسكي ويستعان فيها بالدالة w وهي دالة في x وتعرف كالآتي :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_2 \\ \overline{y}_1 & \cdots & \overline{y}_2 \end{vmatrix}$$

أو ما يساوي w(x)

مبرهنة 1-1:

إذا كان y_1 , y_2 دالتين فإن y_1 , y_2 تسميان مستقلتان خطيا إذا كان :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 \cdots y_2 \\ \bar{y}_2 \cdots \bar{y}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

وتسميان مرتبطتان خطيا إذا كان :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 \cdots y_2 \\ \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (1-28)

بإستخدام محدد فرونسكي أثبت أن الدالتان $y_2 = e^{3x}, y_1 = e^{2x}$ مستقلتان خطيا ".

الحل :

$$y_1 = e^{2x}, \bar{y}_1 = 2e^{2x}, y_2 = e^{3x}, \bar{y}_2 = 3e^{3x}$$

بإستخدام محدد فرونسكي نجد أن :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

مبرهنة 1-2 :

إذا كان y_2, y_1 حلان مستقلان خطيا للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية فإن :

$y_3 = C_1y_1 + C_2y_2$

تعرف أيضا حل .

1-5-1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

وهي من النوع :

$$D^2y(x)+a(x)Dy(x)+b(x)y(x)=S(x)\ldots\ldots\ldots\ldots(31-1)$$

حيث أن :

P = a , q = b . و إذا كانت S = 0 تصبح المعادلة بالشكل التالي :

$$D^2y(x)+a(x)Dy(x)+b(x)y(x)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(32-1)$$

الحلول العامة للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعـــاملات الثابتة :

الطريقة :

نبحث عن الحل العام للمعادلة في الصورة $y = e^{rx}$ ومنها نستنتج أن

$$y' = re^{rx}$$

$$y'' = r^2e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة (1-32) نحصل على :

$$r^2e^{rx} + a\,e^{rx} + b\,e^{rx} = 0$$

و منها على :

$e^{rx}(r^2 + ar + b = 0)$ حيث أن : $e^{rx} \neq 0$ فنحصل على :

$$r^2+ar+b=0\ldots\ldots\ldots\ldots(33-1)$$

وهذا يعني أن الدالة $y = e^{rx}$ هي حل للمعادلة التفاضلية (1-32) إذا كان فقط r هو جذر المعادلة رقم (1-32) .

طريقة إيجاد جذور المعادلة (1 - 32) :

بإستخدام طريقة المميز

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34-1)$$

نستطيع معرفة قيمة r

وهنا توجد ثلاث حالات :

1) الجذور حقيقية وغير متساوية إذا كان الجذر التربيعي : $\sqrt{a^2 - 4b} > 0$

2) الجذور حقيقية ومتساوية إذا كان الجذر : $\sqrt{a^2 - 4b} = 0$

3) الجذور غير حقيقية " تخيلية " إذا كان : $\sqrt{a^2 - 4b} < 0$

والمعادلة (1-34) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية برقم(1-32)

الحـــــــالات

أولا :

الجذران حقيقيان وغير متساويان : إذا كان r_2 , r_1 جذران حقيقيان وغير متساويـــــــــــان للمعادلـــــــــة المميـــــزة المرقمـــــة (1-33) فــــإن : $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ هما حلان مستقلان خطيا للمعادلة التفاضليـــة رقم (1 -32) و طبقا" للمبرهنة يكون $y_C = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ هـو الحل العام للمعادلة (1-32).

مثال (1-28)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بإستخدام المؤثر التفاضلي

$$y'' - 3y' + 2 = 0$$

الحل :

المعادلة أعلاه يمكن أن تكتب بالشكل التالي $(D^2 - 3D + 2)y(x) = 0$

أو $r^2 - 3r + 2 = 0$

أو $(r - 2)(r - 1) = 0$

أي أن $r_1 = 2,\ r_2 = 1$

أو $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{x}$

وبالتعويض في المعادلة (1-32) نحصل على الحل العام وهو :

$$y_C = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

مثال (1-29)

برهن أن كل من الدالتين $y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{-2x}$ هما حلين للمعادلــــة التفاضلية التالية :

$$D^2 y(x) + Dy(x) - 2y(x) = 0$$

وأثبت أن الحل العام هو

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

حيث C_1, C_2 ثوابت.

الحل :

$$D^2 y(x) + Dy(x) - 2y(x) = 0$$

$$y_3 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$$

$$y_3' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$y_3'' = C_1 e^{x} + 4 e^{-2x}$$

وبالتعويض في المعادلة : $D^2y(x)+Dy(x)-2y(x) = 0$ نحصل على :

$$C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}+C_1e^{x}-2C_2e^{-2x}-2\left[C_1e^{x}+C_2e^{-2x}\right]=$$

$$C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}+C_1e^{x}-2C_2e^{-2x}-2C_1e^{x}-2C_2e^{-2x}=$$

$$2C_1e^{x}+4C_2e^{-2x}-2C_1e^{x}-4C_2e^{-2x}=(2C_1e^{x}-2C_1e^{x})+(4C_2e^{-2x}-4C_2e^{-2x})=0+0=0$$

مثال (1-30)

بين أن الدالتان التاليتان $y_2=\cos 2x, y_1=\sin 2x$ مستقلتان خطيا ثم أكتب الحل العام للمعادلة

الحل :

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\tan 2x$$

وهي نسبة غير ثابتة لذلك فإن الدالتان مستقلتان خطيا .

الحل العام لها هو :

$$y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$$

2.5.1 الحلول العامة للمعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية

الحالة الأولى :

جذور المعادلة حقيقية ومختلفة أي أن $r_1 \neq r_2$ ، يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \qquad (35-1)$$

مثال (1-31)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2y-7Dy+12)\, y_{(x)} = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي : $r^2 - 7r + 12 = 0$

وهي معادلة جبرية قابلة للتحليل إلى العوامل الأولية وعند تحليلهـا نحصـل على:

$$(r-4)(r-3) = 0$$

وعلى هذا الأساس فإن :

$$r_1 = 4 \,,\ r_2 = 3$$

أي أن الحل العام للمعادلة هو:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$$

مثال (1-32)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية مستخدما المؤثر التفاضلي :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

الحل :

$$D^2y+5Dy+6=0 \rightarrow r^2+5r+6=0 \Rightarrow (r+3)(r+2)=0 \rightarrow \therefore r_1=-3, r_2=-2$$

أي أن الحـل العـام :

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}$$

الحالـة الثانيـة :

جذور المعادلة حقيقية ومتساوية (مكررة) أي أن:

$$r = r_1 = r_2 = \cdots = r_n$$

وفي هذه الحالـــة يكـــون الحـــل العـــام :

$$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}+C_3x^2e^{rx}+\cdots\cdots+C_nx^ne^{rx}=e^{rx}(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_nx^n)\cdot\cdot(36\text{-}1)$$

مثال (33-1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة المؤثر التفاضلي

$$(D^2+4D+4)y(x)=0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي :

$r^2+4r+4=0$ أو $(r+2)^2=0$

أي أن :

$r_1=r_2=-2$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$y_c=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

مثال (34-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بطريقة المؤثر التفاضلي :

$(D^3-3D-2)y(x)=0$

الحل :

المعادلة المميزة هي :

$r^3-3r-2=0$

ومن الملاحظ أن أحد جذور المعادلة المميزة هو $r=2$ وهي القيمة التي تجعـــل الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية مساويا للصفر أي أن أحد عوامل المعادلـــة هو $(r-2)$ ولذلك نحصل على ما يلي بإستخدام القسمة :

$$r^3 - 3r - 2 = (r-2)(r^2+2r+1)$$

أي أن :

$$r_1 = 2 \;,\; r_2 = r_3 = -1$$

و يكون الحل العام :

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

أي أن الحل العام هو :-

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

الحالة الثالثة :

جذور المعادلة غير حقيقية " تخيلية " ويكون الحل العام للمعادلة كما يلي :

نفرض أن :

$$r_1 = \alpha + i\beta \,,\, r_2 = \alpha - i\beta$$

هما جذري المعادلة حيث أن β , α عددان حقيقيان .

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha} . e^{i\beta x} = e^{\alpha}[\sin \beta x + i\cos \beta x] ....(37-1)$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha} . e^{-i\beta x} = e^{\alpha}[\sin \beta x - i\cos \beta x] .....(38-1)$$

$$\therefore y_c = y_1 + y_2 = e^{\alpha x}[C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x] ....(39-1)$$

حيث أن :

$$r = \alpha \pm i\beta$$

و إذا كانت $\alpha = 0$ فإن :

$r = \pm i\beta$ و $y_c = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$

مثال (1-35) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - 4D + 13)y(x) = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

أي أن :

a = - 4 , b = 13

$$r=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-(4)(13)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i$$

أي أن :

$$\alpha=2,\beta=3$$

إذن الحل العام هو

$$y_C=e^{\alpha x}\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right]$$

$$y_C=e^{2x}\left[C_1\sin3x+C_2\cos3x\right]$$

مثال (36-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2-6D+34)y(x)=0$$

الحل:

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية أعلاه هي :

$$\left.\begin{aligned}&r^2-6r+34=0\\&\therefore r=\frac{6\pm\sqrt{(6)^2-(4)(34)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-136}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-100}}{2}\\&=\frac{6\pm10i}{2}=3\pm5i\Rightarrow\therefore\alpha=3,\beta=5\\&\therefore y_C=e^{3X}\left[C_1\sin5x+C_2\cos5x\right]\end{aligned}\right\}$$

مثال (1-37) :

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدما المؤثر التفاضلي :

$$(D^2+1)y(x)=0$$

الحل:

نعوض بالمعادلة المميزة وهي :

$$r^2+1=0$$

ومنها نستنتج أن :

$$r=\pm\sqrt{-1} \qquad \text{أو} \qquad r=\pm i$$

أي أن

$$\alpha=0\ ,\ \beta=\pm 1$$

ومنها نستنتج أن الحل العام هو

$$y_C=C_1\sin x+C_2\cos x$$

1-5-3 الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة معادلة كوش- أديلر:-

من المعلوم أن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعـــاملات المتغيرة تكتب بالشكل التالي :-

$$Ly(x)=\left[a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+a_2(x)D^{n-2}+\cdots+\cdots a_{n-1}(x)D+a_n(x)\right]y(x)=S(x)\cdots\cdots(40\text{-}1)$$

وهذه المعادلة صعبة الحل بصورة عامة اذا كانت المعـــاملات a_1 , a_2 ,..., a_n متغيرة ولكن في بعض الأحيان يمكن تحويل المعادلة التفاضلية ذات المعـــاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية بمعاملات ثابتة وذلك بإســـتخدام تعـــويض مناســـب للمتغيرات وتعطي معادلة " كوش – أديلر " التفاضلية التالية مثالا توضيحيا علـــى ذلك .

$$Ly(x)=\left(x^n D_x^n + a_1 x^{n-1} D_x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x D_x + a_0\right) y(x) = S(x) \cdots\cdots (41-1)$$

حيث أن كل من : x , D_x لهما نفس الأس في كل حد ويتم حذف المتغير x عن طريق التعويض التالي :

$x = e^t$ أو $t = \ln x$

ثم نرمز إلى الرمز $\frac{d}{dt}$ بالحرف D وملاحظة أن $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ سنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} Dy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} * \frac{1}{x}\right) = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dxdt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} D(D-1)y \ldots\ldots (42-1)$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y \ldots\ldots (43-1)$$

$$\therefore \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n} D(D-1)(D-2)\cdots\cdots(D-n+1)y \ldots\ldots (44-1)$$

مثال (1-39)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$x^2 y'' + xy' = 0$$

الحل :

$$x^2 . \frac{1}{x^2} D(D-1)y + x . \frac{1}{x} Dy = 0$$

أي أن :

$$D(D-1)y + Dy = 0$$

أو :

$$D^2 y = 0$$

أي :

$$r^2 = 0\ ,\quad r_1 = r_2 = 0$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_C = C_1 + C_2 \ln x \ : \text{أو} \quad y_C = C_1 + C_2 t$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (1-40)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

الحل :

$$x^3 . \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y + 5x^2 . \frac{1}{x^2} D(D-1)y + 2x\frac{1}{x} Dy - 2y = 0$$

$$[D(D-1)(D-2)y + 5D(D-1)y + 2Dy - 2y] = 0$$

$$[D(D-1)(D-2) + 5D(D-1) + 2D - 2]y = 0$$

$$[D(D^2 - 3D + 2) + 5D^2 - 5D + 2D - 2]y = 0$$

$$[D^3 - 3D^2 + 2D + 5D^2 + 2D - 2]y = 0$$

$$[D^3 + 2D^2 - D - 2]y = 0$$

المعادلة المميزة هي :

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

وبتحليل المعادلة ينتج أن :

$$(r-1)(r^2 + 3r + 2) = 0$$

$$(r-1)(r+2)(r+1) = 0$$

ان جذور المعادلة أعلاه هي :

$r_1 = 1 , r_2 = -2 , r_3 = -1$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_C = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}$$

$$y_C = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{-2\ln x} + C_3 e^{-\ln x}$$

$$y_C = C_1 x + C_2 e^{\ln x^{-2}} + C_3 e^{\ln x^{-1}}$$

$$\therefore y_C = C_1 x + C_2 x^{-2} + C_3 x^{-1} = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

4-5-1 الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

1-5 -4 -1 طريقة المعاملات غير المعينة

لنفرض أن لدينا المعادلة من الرتبة الثانيــة $(D^2 + pD + q)y(x) = S(x)$ ، تطبق هذه الطريقة إذا كانت $S(x)$ تركيبة خطية من النوع $x^m e^{\alpha x} \cos \beta x$ أو $x^m e^{\alpha x} \sin \beta x$ حيث α , β حقيقيان و m هو عدد صحيح غير ســالب . فمثلاً " $S(x)$ يمكن أن تكون x^2 أو $\cos 3x$ أو $\sin 2x$ أو e^{-x} ولكــن الدوال مثل x^{-2} أو $x^{½}$ أو $\tan x$, $\sec x$, ... لا يمكن حلها بهذه الطريقة.

مثال (41-1)

عين حل خاص للمعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - D - 2)\, y(x) = 8 e^{3x}$$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي :

$$y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$$

وسنفترض أن الحل يكون بالشكل التالي :

$$y''_p = 9 A e^{3x}, \; y'_p = 3 A e^{3x}, \; y_p = A e^{3x}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية ومشتقاتها نحصل على :

$$9 A e^{3x} - 3 A e^{3x} - 2 A e^{3x} = 8 e^{3x}$$

أي أن :

$A = 2$ أو $4A = 8$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو :

$$y_p = 2 e^{3x}$$

مثال (42-1) :

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$(D^2 - 7D + 12)\, y(x) = 12 x^2 + 10 x - 11$$

الحل :-

الدالة $S(x)$ الواقعة في يمين المعادلة من النوع الذي يمكن تخمين الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية ولذلك سنفرض أن الحل الخاص يكون على صورة $y_p = A x^2 + B x + C$

إذن :

$$y'_p = 2 A x + B$$

$y''_p = 2A$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية عن y_p ومشتقاتها :

$$2A - 14Ax - 7B + 12Ax^2 + 12Bx + 12C = 12x^2 + 10x - 11$$

وبمساواة معاملات x^2 ومعاملات x والحد المطلق بـين الطـرفين الأيمـن و الأيسر نحصل على :

$$12A = 12 \Rightarrow A = 1$$

$$-14A + 12B = 10$$

$$-14 + 12B = 10 \Rightarrow 12B = 24 \rightarrow B = 2$$

$$2A - 7B + 12C = -11$$

$$2 - 14 + 12C = -11$$

$$12C = -11 + 12$$

$$12C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{12}$$

إذن الحل الخاص يكون

$$y_P = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_P = x^2 + 2x + \frac{1}{12}$$

مثال (1-43)

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$(D^2 + 2D)\, y(x) = 80 \sin 4x$$

الحل :

نفرض أن الحل الخاص يكون على صورة :

$$y_P = A \sin 4x + B \cos 4x$$

$$y'_P = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x$$

و $y_p'' = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن y_p ومشتقاتها ينتج أن :

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 8A\cos 4x - 8B\sin 4x = 80\sin 4x$$

ولحل هذه المعادلة نضع $x = 0$ في الطرفين حيث أن :

$\sin 0 = 0 , \cos 0 = 1$

$$-16B + 8A = 0 \Rightarrow -2B + A = 0 \rightarrow A = 2B \cdots (I)$$

ثم نضع $4x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \therefore \quad x = \frac{\pi}{8}$

$$-16A - 8B = 80 \rightarrow -2A - B = 10 \cdot (II)$$

وبضرب المعادلة الأولى في 2 و بجمع المعادلتين :

$$\begin{array}{r} -4B + 2A = 0 \\ -B - 2A = 0 \\ \hline -5B = 10 \Rightarrow B = -2 \end{array}$$

وبالتعويض في (I) ينتج أن : $A = -4$

الحل الخاص هو $y_p = -4\sin 4x - 2\cos 4x$

مثال (1-44)

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية : $(D^2 - 3D)y(x) = 2e^{3x}$

الحل :

يلاحظ في هذا المثال أن الحل الخاص المقترح والذي يكون على الصورة:

$y_p = Ae^{3x}$

هو جزء من الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$y_c = C_1 + C_2e^{3x}$

و لهذا لا يصلح هذا الحل

بالتعويض به في الطرف الأيسر للمعادلة لأنه سوف يعطي صفر وليس دالـــة صفرية وبالتـــالي فـــإن الحل :

$$y_P = A x e^{3x}$$

حيث أن :

$$\bar{y}_p = 3Axe^{3x} + Ae^{3x}$$

$$y''_p = 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن y_P و مشتقاتها .

$$9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} - 9Axe^{3x} - 3Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$3Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow 3A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\therefore y_p = \frac{2}{3}xe^{3x}$$

1 - 5 - 4 - 2 إيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

والتي تكون بالصيغة التالية :

$$(D^2 + pD + q)\,y(x) = S(x) \qquad \text{....................................(45-1)}$$

و الطريقة هي :

1- نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة وليكن y_C وذلك بأن نجعل الطـــرف الأيمن فيها مساويا للصفر .

2 – نوجد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة وليكن y_P بنفس طريقة إيجـــاد الحل الخاص السابقة .

3 – نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة هو : $y = y_C + y_P$

مثال (1-45)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(D - D - 2)y(x) = 8e^{x}$$

الحل :

أولا : نبحث الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$(D^{2} - D - 2)y = 0$$

المعادلة المميزة هي :

$$r^{2} - r - 2 = 0$$

والتي عند تحللها تعطي :

$$(r - 2)(r + 1) = 0$$

أي أن :

$$r_1 = 2 \, , \, r_2 = -1$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_C = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-45-1)$$

ثانياً : نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية وليكن

$$y''_P = A e^{x} \, , \, y'_P = A e^{x} \, , \, y_P = A e^{x}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية عن y_P ومشتقاتها نجد أن :

$$Ae^{x} - Ae^{x} - 2Ae^{x} = 8e^{x}$$

$$-2Ae^{x} = 8e^{x}$$

$$-2A = 8 \Rightarrow A = -4$$

$$\therefore y_P = -4e^{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-45-1)$$

من المعادلتين (1-45 -1) و.(1-45 -2) يكون الحل العام للمعادلة اللامتجانسة هو :

$$y = y_C + y_P = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 4e^{x}$$

من عيوب هذه الحلول أنها تستخدم لأغراض خاصة فقط وهي ليست شاملة لجميع الحالات ولذلك يستعاض عنها بالطريقة التالية والتي تعتبر أشمل منها وهي طريقة تغاير البارامترات .

1-5-4-3 طريقة تغاير البارامترات لإيجاد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة

لنأخذ المعادلة : $(D^2 + pD + q)y(x) = \delta(x)$, تعتبر هذه الطريقة حل غير معين حيث يمكن تشخيص وتحديد الحل العام مهما كان شكل الدالة $\delta(x)$ وذلك بحساب المعاملات و الطريقة هي :

1- البحث عن حلين مستقلين خطيا للمعادلة المتجانسة وهما y_1, y_2 .

2- البحث عن الحل الخاص في الصورة :

$$y_P = v_1 y_1 + v_2 y_2 \quad \text{.......................................} \quad (46-1)$$

حيث أن :

$$v_1 = -\int \frac{y_2 . \delta}{w} dx \qquad \text{و} \qquad v_2 = \int \frac{y_1 . \delta}{w} dx$$

حيث أن w هو محدد فرونسكي والذي تم التعرف إليه مسبقا حيث أن :

$w = \begin{vmatrix} y_1 \cdots y_2 \\ \bar{y}_1 \cdots \bar{y}_2 \end{vmatrix}$ و $\delta(x)$ هو الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية .

مثال (1-46)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2+1)y(x)=\tan x$$

الحل :

المعــادلة المميــزة هــي :

$r^2=-1$ أو $r^2+1=0$

أي أن $r=\pm i$ وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_1=\sin x, y_2=\cos x$$

والآن سنستخدم المحدد لإيجاد قيم V_2, V_1

$$w=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_2 \\ \overline{y}_1 & \cdots & \overline{y}_2 \end{vmatrix}$$

أي أن :

$$w=\begin{vmatrix} six \ldots\ldots \cos x \\ \cos x \ldots -\sin x \end{vmatrix}$$

أو :

$$-\sin^2 x-\cos^2 x=-(\sin^2 x+\cos^2 x)=-1$$

$$v_1=-\int\frac{\cos x.\tan x}{-1}dx=\int\cos x\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\sin x dx=-\cos x$$

$$v_2=\int\frac{\sin x\tan x}{-1}dx=-\int\sin x\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\int\frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos x}=\int\frac{(\cos^2 x-1)dx}{\cos x}$$

$$\therefore v_2 = \int \frac{\cos^2 x}{\cos x} dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \int \cos x dx - \int \sec x dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

وعليه فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو :

$$y_P = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

ويساوي :-

$$y_P = -\sin x \cos x + \cos x[\sin x - \ln|\sec x + \tan x|] = -\cos x[\ln|\sec x + \tan x|]$$

مثال (1-47)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدما تغاير البارامترات :

$$y'' - y' = e^x$$

الحل :

أولا : نوجد الحل العام للمعادلة بإستخدام الجذور والمعادلة المميزة لهـــا هـــي:

$$r^2 - 1 = 0$$

أي أن :

$$r = \pm 1$$

ولذلك فإن :

$$y_C = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

ثانيا : نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية أعلاه وبما أن :

$$y_1 = e^x ,\ y_2 = e^{-x}$$

فإن الحل الخاص لهذه المعادلة التفاضلية يوجد بواسطة محدد فرونسكي وبالشكل التالي :

$$w = \begin{vmatrix} e^{x} & \dots \dots & e^{-x} \\ e^{x} & \dots & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{0} - e^{0} = -1 - 1 = -2$$

$$v_1 = -\int \frac{e^{-x}.e^{-x}}{-2} dx = \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$v_2 = \int \frac{e^{x}.e^{-x}}{-2} dx = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2} x$$

$$y_P = v_1 y_1 + v_2 y_2 \Rightarrow \therefore y_P = (-\frac{1}{4}e^{-2x})e^{x} - (\frac{1}{2}x)e^{-x} = -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$$

$$\therefore\ y = y_C + y_P = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة .

1- 5 - 5 المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية

(Second Order Differential Equations)

كما بين سابقا فإن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هي تلك المعادلة التي تكون فيها درجة أو الأس المرفوع إليه أعلى معامل تفاضلي هو 2 ومن الممكن أن تكون تلك المعادلات خطية أم غير خطية مثل الدالة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (47-1)$$

وهي معادلة تفاضلية بسيطة من الرتـبة الثانية بينما نرى أن المعادلــة:

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+1=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{.......................................}(48-1)$$

تبدو للوهلة الأولى بشكل واضح من الدرجة الثانيـــة لأن الأس 2 موجــود فيها.وتقسم هذه المعادلات إلى نوعين :

a – معادلات غير خطية وهي تتكون من الأنواع التالية :

1– معادلات لا يظهر فيها المتغير التابع بوضوح .

2 – معادلات لا يظهر فيها المتغير المستقل بوضوح .

3 – المعادلات المتجانسة .

b – معادلات خطية وتتكون من نوعين :

1 – المعاملات في المعادلة ثابتة .

2 – المعاملات في المعادلة هي دوال للمتغير المستقل .

إن الحل العام للمعادلات غير الخطية هو ما يسمى بصيغة كليــروت (Clairut) والتي تكتب بالشكل التالي :

$$y=x\frac{dy}{dx}+f(\frac{dy}{dx}) \quad \text{.......................................}(49-1)$$

والتي تحل بواسطة التفاضل نتيجة التعويض عن P وهو ما يعادل ($P=\frac{dy}{dx}$)

ولنأخذ على ذلك المثال التالي .

مثال (1-48)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+1=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

الحل :

نفرض أن $\frac{dy}{dx} = P$ ثم نفاضل المعادلة ضمنياً.

$$\therefore \frac{dP}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dP}{dy}*\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy} \qquad \text{......} (1-50-1)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية ينتج أن :-

$$yP\frac{dP}{dy}+1=P^2 \qquad \text{......} (2-50-1)$$

و بفصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y}=\frac{PdP}{P^2-1}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{PdP}{P^2-1}$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\ln y+C=\frac{1}{2}\ln\left|P^2-1\right|$$

ولو فرضنا أن :

$$C=\ln a \qquad \text{......} (3-50-1)$$

ونعوض في المعادلة

$$\ln a+\ln y=\frac{1}{2}\ln(P^2-1)$$

$$\ln(ay)=\frac{1}{2}\ln(P^2-1)$$

$$2\ln(ay)=\ln(P^2-1)$$

$$\ln a^2y^2=\ln(P^2-1)$$

$$\therefore a^2y^2=P^2-1$$

أو

$$\therefore P=\sqrt{a^2y^2+1}$$

ومنها نستنتج أن :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 y^2 + 1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 1}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 1}}$$

حيث نحصل على :

$$x = (\frac{1}{a}) Sinh^{-1}(ay + c)$$

$$\therefore y = \frac{Sinh(ax + c)}{a} \qquad \text{..........} (4-50-1)$$

حيث أن c , a هي ثوابت التكامل .

1 - 5 -6 المعادلات المتجانسة من الدرجة الثانية

هنا تكون المعادلة التفاضلية المتجانسة على صيغة :

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \qquad \text{..........} (51-1)$$

حيث إن x , y هما المتغيران ذات العلاقة . إن المعادلات من هذا النوع تعتبر مجموعة عديمة الوحدات أو ما يسمى (Dimensionless Group) و التي تحتوي المعامل التفاضلي

$$x^{n-1} \frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{..........} (52-1)$$

مثـــل $x\frac{d^2y}{dx^2}$ وكمثال لمعادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية تكـــون الصـــيغة مشابهة للمعادلة (1-49)

لذلك فإن :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = f_1\left(\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{.........(53-1)}$$

و بالتعويض عن :

$$y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{.........(54-1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{.........(55-1)}$$

و بتعويض المعادلة(1-50) في المعادلة (1 - 48) ينتج:

$$2x\frac{dv}{dx} + x^2\frac{d^2v}{dx^2} = f_1\left(v, v + x\frac{dv}{dx}\right) \quad \text{.........(56-1)}$$

مثال (1-48)

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

الحل :

بفرض أن $y = vx$ وتعويض ذلك في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$2vx^3\left(2\frac{dv}{dx} + x\frac{d^2v}{dx^2}\right) + v^2x^2 = x^2\left(v + x\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad \text{.........(1)}$$

ولغرض حل هذه المعادلة حيث أنها تشبه معادلة (كوش – أديلر) التي تم التطـــرق لهـــا مسبقا , نفرض أن :-

$$x = e^t, t = \ln x$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dt}\cdots(III)$$ أو $$\therefore\frac{dv}{dx}=\left(\frac{dv}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)=\frac{1}{x}\frac{dv}{dt}\cdots(II)$$

$$\therefore\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2v}{dt^2}\cdots(IV)$$

أو

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{dv}{dt}\cdots\cdots(V)$$

وبتعويض الصيغة (V) في المعادلة (II) والتعويض عن قيمة $x=e^t$ نحصل على:

$$2v\frac{d^2v}{dt^2}=\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\cdots\cdots(VI)$$

إن هذه المعادلة لا تحتوي المتغير المستقل و يمكن أن تحل بالطريقة السابقة أي أن :

$$2v\frac{dP}{dv}=P^2$$

وهذه لها حلين :

$$2v\frac{dP}{dv}=P$$ أو $$P=0$$

إن الحل الثاني هو " حل فردي " حيث ينتج منه أن $y = Ax$ والذي يحقق المعادلة الأولى . أما الحل الأول فيتم تكامله مرتين ليعطي الدالة :

$$y=x(B\ln|x|+C)^2$$

مثال (1-50)

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+y=4x+8x^3 \quad \ldots\ldots (I)$$

الحل :

لأن الدالة في الطرف الأيمن من المعادلة هي من نوع متعددة المتغيرات لذلك فــإن الحل الخاص للدالة سيكون على الشكل :

$$y=P+qx+rx^2+sx^3 \quad \ldots\ldots (II)$$

وعند اشتقاق هذه الدالة لمرتين سنحصل على :

$$\frac{dy}{dx}=q+2rx+3sx^2 \quad \ldots\ldots (III)$$

و :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2r+6sx \quad \ldots\ldots (IV)$$

وبتعويض هذه المعادلات في (I) :

$$(2r+6sx)-4(q+2rsx+3sx^2)+4(p+qx+rx^2+sx^3)=4x+8x^3$$

$$2r+6sx-4q-8rx-12sx^2+4p+4qx+4rx^2+4sx^3=4x+8x^3$$

$$(2r-4q+4p)+(6s-8r+4q)x+(4r-12s)x^2+4sx^3=4x+8x^3$$

$$2r-4q+4p=0$$

$$6s-8r+4q=4$$

$$4r-12s=0$$

$$4s=8 \Rightarrow s=2, \therefore r=6$$

$$\therefore q=10, p=7$$

$$\therefore y_p=7+10x+6x^2+2x^3$$

$$m^2-4m+4=0 \Rightarrow y_c=(A+Bx)e^{2x}$$

$$\therefore y=y_c+y_p=(A+Bx)e^{2x}+7+10x+6x^2+2x^3$$

$$(2r+6sx)-4(q+2rsx+3sx^2)+4(p+qx+rx^2+sx^3)=4x+8x^3$$

$$2r+6sx-4q-8rx-12sx^2+4p+4qx+4rx^2+4sx^3=4x+8x^3$$

$$(2r-4q+4p)+(6s-8r+4q)x+(4r-12s)x^2+4sx^3=4x+8x^3$$

$$2r-4q+4p=0$$

$$6s-8r+4q=4$$

$$4r-12s=0$$

$$4s=8 \Rightarrow s=2, \therefore r=6$$

$$\therefore q=10, p=7$$

$$\therefore y_P=7+10x+6x^2+2x^3$$

$$m^2-4m+4=0 \Rightarrow y_C=(A+Bx)e^{2x}$$

$$\therefore y=y_C+y_P=(A+Bx)e^{2x}+7+10x+6x^2+2x^3$$

ملاحظـــــــــات :

1- إذا أحتوت المعادلة التفاضلية على جذور تخيلية وكان الطرف الأيمن مــن المعادلــة التفاضلية يحتوي الصيغة :

$$(A\sin nx+B\cos nx)e^{Px}$$

فإن الصيغة العامة للحل التكاملي تكون من النوع :

$$x(\alpha\sin nx+\beta\cos nx)e^{Px}$$

2- يمكن معاملة المؤثر التفاضلي D كمقدار جبري إعتيادي في حدود معينة وللحــالات التالية :

قانون التوزيع (Distribution Law) أي أن :

$$D(u+v+w)=Du+Dv+Dw$$

قانون التبديل لا ينطبق هنا أي أن :

$$Dxy \neq xDy$$

و لكن يمكن أن تكتب المعادلة بالشكل التالي :

(D+1)(D+2)y=(D+2)(D+1)y

3- قانون الارتباط وهذا لا ينطبق في كل الحالات حيث أن :

D (x y) = (D x) y + x D y

مثال (1-51)

أوجد المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية والتي تحقق الحل العام التالي :-

$$y = 6 + 3xe^{x} - \cos x$$

الحل :

الحد 6 يشترك مع (m = 0) , والحد $3xe^x$ يشترك مع الجذر (m = 1,1) أما الحد cosx فيشترك مع الجذر $m=\pm i$ وبذلك تكـون جـذور المعادلـة المميزة هي:

$$m(m-1)^2(m^2+1) = 0$$

وبعد فتح الأقواس نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 2\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

6.1 تمارين وأمثلـــة

a. الرتبــــــة والدرجــــة :

صف المعادلات التالية من حيث الرتبة والدرجة وبين هل هي اعتيادية أم جزئية , خطية أم غير خطية موضحا السبب :-

$$1-\quad y'' + 3y' + 2y = x^4$$

$$2-\quad y''' + 6y''' + 11\ y + 6y = e^x$$

$$3-\quad y'' + (a + b\cos 2x)\,y = 0$$

$$4-\quad y^{iv} + xy'' + y^2 = 0$$

$$5-\quad \frac{d(xy)}{dx} + xy = 0$$

$$6-\quad (x + y)\,dy = (x - y)\,dx$$

$$7-\quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$8-\quad \frac{\partial^2 (x^2 \partial^2 u / \partial x^2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$9-\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$10-\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \phi(x, y, z)$$

b. اختــزال الثوابــت الاختياريــة :

في كل من المسائل التالية, إختزل الثوابت الإختيارية في الحل العام و أوجد الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية :-

$$1-\ x\sin y + x^{2}y = c$$

$$2-\ y = A\sin(\omega x + \beta)$$

$$3-\ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$4-\ y = c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 e^{2x}\sin 3x$$

$$5-\ y = c_1\sin 2t + c_2\cos 2t$$

$$6-\ y^{2} = C_1(x+1)$$

حيث إن ω في معادلة الفرع 2 هي بارامتر.

C. المعــادلات التفاضليــة المرافقــة للحــل العــام :

في كل من المسائل التالية أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام:

$$1-2\overline{y}+y=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ y=e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2-\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}\ldots\ldots\ldots\ y=e^{3x}+10e^{2x}$$

$$3-\frac{dy}{dx}+20y=24\ldots\ldots\ldots\ y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20x}$$

$$5-\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{x}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ y=(rx+c_1)^{2}$$

$$6-y'+y=\sin x\ldots\ldots\ldots\ldots\ y=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+10e^{-x}$$

$$7-y''+y'-12y=0\ldots\ldots\ y=C_1e^{3x}+C_2e^{-4x}$$

$$8-x^{2}y''-xy'+2y=0\ldots\ y=x\cos(\ln x)\ldots\ where\ \ldots\ x>0$$

d . فصـــل المتغيــرات :

في كل من التمارين التالية أوجد الحل العـام للمعادلـة مسـتخدما فصـل المتغيرات:

1 - $\frac{dy}{dx} = -2xy$

2 - $\sin xdy = 2y \cos xdx$

3 - $\bar{y} = 3x^2(1 + y^2)$

4 - $xdy = (y^2 - 3y + 2)dx$

5 - $2(xy + x)\bar{y} = y$

6 - $xdy = 3ydx$

7 - $(y + x^2 y)dy = (xy^2 - x)dx$

8 - $ydx - xdy = x(dy - ydx)$

9 - $y\bar{y} = 2(xy + x)$

10 - $dx + ydy = x^2 ydy$

11 - $ye^{x+y}dy = dx$

12 - $xe^{x^2+y}dx = ydy$

13 - $\bar{y} = \frac{(y+1)^2}{(x+1)^2}$

$14 - x\bar{y} = 4y$

$15 - \bar{y} = \dfrac{2(y^2 + y - 2)}{(x^2 + 4x + 3)}$

$16 - \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 + 2y^2}{y \sin x}$

$17 - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2 + y^2)}{y(3 + x^2)}$

$18 - \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)}$

e. الحلــول الخاصـــة باستخـــدام فصـــل المتغيـــرات

في كل من التمارين التالية أوجد الحل الخاص الذي يحقق المعادلات التالية :

$1 - 2x\bar{y} + y = 0 \qquad x = 4,\ y = 1$

$2 - \bar{y} + 2y = 0 \qquad x = 0,\ y = 100$

$3 - 2xdx - dy = x(xdy - 2ydx) \qquad x = -3,\ y = 1$

$1 - f(x,y) = (x^3 y - \dfrac{x^2 yg}{x + 8g})$

$2 - f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$

$3 - f(x,y) = \ln x^2 - 2\ln y$

$4 - f(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right|^2$

$$5-f(x,y)=\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$$

$$6-f(x,y)=\frac{\sin x}{x+y}$$

$$7-f(x,y)=\frac{\ln x^3}{\ln y^3}$$

$$8-f(x,y)=(x+y+1)^2$$

$$9-f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$$

$$10-f(x,y)=y^2\tan\frac{x}{y}$$

$$11-f(a,b)=\frac{a+4b}{a-4b}$$

$$12-f(x,y)=\exp(\frac{y^2}{x})$$

g . المعـــــادلات المتجانســـــة

في المسائــل التالية أثبت أن المعادلات التفاضلية هي متجانسة ثم أوجــد الحل العام والخاص إن وجد لها :

$x = 1 , y = 1$

$x = 4 , y = 3$

$x = 1 , y = 2$

$x = 1 , y = 0$

$x = 2 , y = 1$

$1-(x-y)dx+xdy=0$

$2-xdx+(y-2x)dy=0$

$3-(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$

$4-xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$

$5-\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

$6-x^2ydx=(x^3-y^3)dy$

$7-x\bar{y}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

$8-(3y^3-x^3)dx=3xy^2dy$

$9-(x^4+y^4)dx=2x^3ydy$

$10-\bar{y}=\sec\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$

h. المعـــــادلات التامـــــــة

في المسائل التالية , أثبت أن المعادلة التفاضلية هي تامة وأوجد حلها العام:

$1-(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$

$2-(2xy-3x^2)dx+(x^2+2y)dy=0$

$3-(\cos 2y-3x^2y^2)dx+(\cos 2y-2x\sin 2y-2x^3y)dy=0$

$4-(1+y^2)dx+(x^2y+y+2xy)dy=0$

$5-(ye^{xy}-2y^3)dx+(xe^{xy}-6xy^2-2y)dy=0$

i. المعامـــلات التكامليـــــة

أوجد حلا عاما للمعادلات التفاضلية التالية بالضرب في معامل مناسب :

$1-y(1+xy)dx+(2y-x)dy=0$

$2-3(y^4+1)dx+4xy^3dy=0$

$3-(xy^2+y)dx+(x-x^2y)dy=0$

$4-(x^2+y^2+2x)dy=2ydx$

$5-xdy+3ydx=xydy$

$6-(2y\cos x+2)dy-y^2\sin x dx=0$

j. حـــل المعـــادلات التاليـــة بطريقتيـــن :

$1-2ydx+(3y-2x)dy=0$

$2-(x^2-y^2)dy=2xydx$

$3-xdy+ydx=\dfrac{dx}{y}-\dfrac{dy}{x}$

$4-2x\ln y dx+\dfrac{1+x^2}{y}dy=0$

$5-(\sqrt{x^2+y^2})dx=xdy-ydx$

$6-(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$

k. المعـــادلات التفاضليـــة الخطيـــة

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$1-(2y+x^2)dx=xdy$

$2-\bar{y}+2xy+x=e^{-x^2}$

$3-\bar{y}+y\tan x=\sec x$

$4-\bar{y}+y\cot x=\sin 2x$

$5-x^2dy+(2xy-x+1)dx$

$6-(1-x^2)\bar{y}+xy=2x$

l. أوجــد الحــل الخاص الذي يحقــق المعادلات التفاضليــة التاليــة :-

$1-\bar{y}+y=e^x \qquad x=0, y=2$

$2-(x^2+1)dy=(x^3-2xy+x)dx \qquad x=1, y=1$

$3-\bar{y}+(1+2x)y=e^{-x^2} \qquad x=0, y=3$

$4-(1+x^2)dy=(1+xy)dx \qquad x=1, y=0$

m. معـــــادلة برنـــــولي

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$1-\bar{y}+y=xy^2$

$2-\bar{y}+y=\dfrac{x}{y}$

$3-dy=(xy^2+3xy)dx$

$4-3x\bar{y}+y+x^2y^4=0$

$5-y'=y-xy^3e^{-2x}$

$6-y'=(3x+y)^2-1$

$7-(y^4-2xy)dx+3x^2dy=0$

$8-6y^2dx-x(2x^3+y)dy=0$

n. طريقــة المؤثــر التفاضلـــــي (D)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$5- y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$6- 10y'' + 6y' + y = 0$$

$$7- y'' - 4y = 0$$

$$8- 25y'' + 20y' + 4y = 0$$

o. المعــادلات التفاضليــة غيــر الخطيــة من الدرجــة الثانيــة

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية :

$$1- y'' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

$$2- (D^2 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$$

$$3- (D^2 + 4)y = 5e^x - 4x$$

$$4- y'' - 4y' + 3y = 20\cos x$$

$$5- (x-1)y'' - xy' + y = 1$$

$$6- (D^2 - 1)y = e^x + 1$$

$$7- (D^2 + 1)y = \csc x \cot x$$

$$8- (D^2 - 2D + 1)y = e^{2x}(e^x + 1)^{-2}$$

$$9- x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0$$

$$at \ldots\ldots, x = 1, \ldots, y = 2, \ldots \frac{dy}{dx} = -1$$