الباب السادس

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

(Rondom Variables & Probabilities Distributions)

1.6 مقدمة .

2.6 المتغيرات العشوائية .

3.6 دالة التوزيع الاحتمالي .

4.6 التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي .

5.6 الإحصائيات والمعالم .

6.6 المتغير العشوائي المعياري .

7.6 التوزيعات الاحتمالية .

1.7.6 التوزيع ذو الحدين .

2.7.6 توزيع بواسون .

3.7.6 التوزيع الطبيعي .

4.7.6 منحنى التوزيع الطبيعي .

8.6 خواص المنحنى الطبيعي .

9.6 المتغير الطبيعي المعياري .

10.6 تحويل المتغير الطبيعي إلى متغير طبيعي معياري .

11.6 جداول التوزيع المعتدل المعياري .

12.6 تقريب توزيع ذو الحدين باستخدام التوزيع الطبيعي .

13.6 توزيع مربع Chi .

14.6 توزيع (t) .

15.6 توزيع (F) .

16.6 تمارين .

obeikandl.com

1.6 مقدمـــــة

في الباب السابق تم عرض ودراسة مبادئ نظرية الاحتمــالات ، ومــن ضمنها تم التعرض لمفهوم فضاء العينة S وكيفية أيجاد عناصره ومجموعاته الجزئية ، وكذلك تم التطرق إلى دراسة الإحداث وكيفية حســاب احتمــالات وقوعها . بالإضافة إلى أنه تم بشكل سريع التعرض لمفهوم المتغير العشوائي وتوقعه الرياضي .

وســـوف نقـــوم فـــي هـــذا البـــاب بدراســـة المتغيــرات العشوائيـــة (Random Variable) ، التي تعتبر أحدى المفاهيم الأساسية في نظريـــة الاحتمـــالات ، والاحتمـــالات الخاصـــة بهـــا وكيفيـــة أيجـــاد دوال التوزيعات الاحتمالية (Probabilities Distributions) المناظرة لها بشكل مفصل ، والتي تساعد في الحصول على النتائج التي تستخدم فـــي الإحصـــاء الاستنتاجي . والذي بواسطته تتخذ القرارات الإحصائية على أســـس علميـــة سليمة ، لذا فأن دراسة التوزيعات الاحتمالية تعتبر ذو أهمية بالغة في دراســـة العديد من الظواهر والتطبيقات في الحياة العملية ، ومن أمثلة هذه التوزيعـــات توزيع بواسون وتوزيع ذات الحدين والتوزيع الطبيعي وغيرها من التوزيعات الهامة التي سنقوم بدراستها لاحقاً .

2.6 المتغيــرات العشوائيـــة (Random Variables)

فـــي البـــاب الســـابق تـــم تعريـــف وتوضـــيح مفهـــوم المتغيـــر العشوائي (RandomVariable) بشكل سريع . أما في هذا الباب فسوف نقوم بدراسة المتغيرات العشوائية بالتفصيل نظراً لارتباطهـــا الهـــام بالتوزيعـــات الاحتمالية المختلفة . نفرض أن S فضاء عينة لتجربة ما ، وأردنا تخصيص عدد معين لكل ناتج ، مثل طول عمر مصباح كهربـــائي بالأيـــام ، مجمـــوع

العددين عند إلقاء حجري الزهر وغيرها ، ويسمى مثل هذا التخصيص بشكل عام بالمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز X ، ويعرف على أنه دالـــة حقيقيـــة من S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R ، بحيث تكون الصورة العاكســـة لأي فترة من مجموعة الأعداد الحقيقة R حدثاً في فضاء العينة S ، أي بمعنى أخر تكـــون قـــيم المتغيـــر العشـــوائي مجموعـــة جزئيـــة مـــن مجموعـــة الإعداد الحقيقية .

ويجب الإشارة هنا إلى أنه إذا كان فضاء العينة S فضاءً متقطعاً حيـــث تعرف كل مجموعة جزئية حدثاً فأن كل دالة حقيقيـــة علـــى S هـــي متغيـــر عشوائي . ومن ناحية أخرى يمكن أثبات أنه إذا كان S فضاء غير قابل للعـــد فأن بعض الدوال الحقيقية ليست بمتغيرات عشوائية .

ويوجد نوعان من المتغيرات العشوائية :

1) المتغيرات العشوائية المنفصلة (Discrete Random Variables)

من الأمثلة على هذه المتغيرات العشوائية المنفصلة عدد مـــرات ظهـــور الصورة عند رمي قطعة نقود n من المرات ، عدد حوادث المرور التي تحدث في أحدى التقاطعات خلال شهر ، عدد الزبائن الذين يصلون من شباك أحـــد المصارف خلال ساعة من الزمن وغيرها . ويرمز عـــادةً إلـــى المتغيـــرات العشوائية كما أشرنا سابقاً بالرمز X ، ويرمز للقيم التـــي يأخـــذها المتغيـــر العشوائي بالرموز :

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n\}$$

حيث :

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots\ldots\ldots\ldots \le x_n$$

والاحتمالات :

$$P (X = X_1) \quad , \quad P (X = X_2) \ldots\ldots\ldots P (X = X_n)$$

وهكذا نجد بأن المتغيرات التي يكون نطاقها المصاحب منتهياً هي متغيرات عشوائية منفصلة أو (متقطعة) .

2) المتغيرات العشوائية المتصلة (Continuous Random Variables)

وهو المتغير العشوائي الذي يكون مجاله المقابل غير قابل للعدد ، أي أن قيم المتغير تكون جميع القيم لفترة مثل [a , b] . ومن الأمثلة على هذا المتغير العشوائي المتصل أو المستمر الدخل الشهري مثلاً لمجموعة من الأسر أو درجات الحرارة لفترة زمنية معينة أو أوزان وأطوال مجموعة من الرياضيين .

فمثلاً إذا قمنا بدراسة ظاهرة الطول عند مجموعة من الرياضيين فأن المتغير العشوائي الذي يمثل طول احد الرياضيين يختلف عن طول أي رياضي آخر ، ويمكن أن يأخذ أي قيمة داخل الفترة [a , b] . فإذا كان طول رياضي ما هو X_1 وطول رياضي آخر هو X_2 فأنه يمكن أن نجد رياضياً ثالثاً طوله X_3 يقع بين X_1 , X_2 مهما كانت القيمتان لـ X_1 , X_2 قريبتين من بعضهما .

3.6 دالـــة التوزيـــع الاحتمالـــي
(ProbabilityDistribution Function)

تعرف دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بأنها احتمال أن يأخذ المتغير X أقل أو يساوي قيمة معينة X ويرمز لها عادةً بالرمز $f(x_i)$ ، حيث :

obeikandl.com

$$f(x) = P(X \leq x_i)$$

أي أن f(x) يساوي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيم أقل أو تساوي x_i وهي دالة في x . وهذا ما يقودنا إلى التعريف الرياضي الأتي لدالة التوزيع الاحتمالي .

فلو كان X هو متغير عشوائي معرف على فضاء العينة S بحيث تكون صورته مجموعة منتهية X(S) :

$$X(S) = \{ x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n \}$$

ووجدنا من X (S) فضاء احتمال بتعريف احتمال x_i على أنه P (X = x_i) ويكتب عادة على شكل دالة f(x_i) ، وتسمى هذه الدالة f المعرفة على X(S) $f(x_i)=P(X=x_i)$ بدالة التوزيع (Distribution Function) ، أو دالة الاحتمال المتغير X وتعطى عادة على صورة جدول وتحقق دالة التوزيع f الشروط التالية :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

$$(2) \quad f(x_i) \geq 0$$

كما تجدر الإشارة إلى أنه إذا كانت $x_1 < x_2$ فأن :

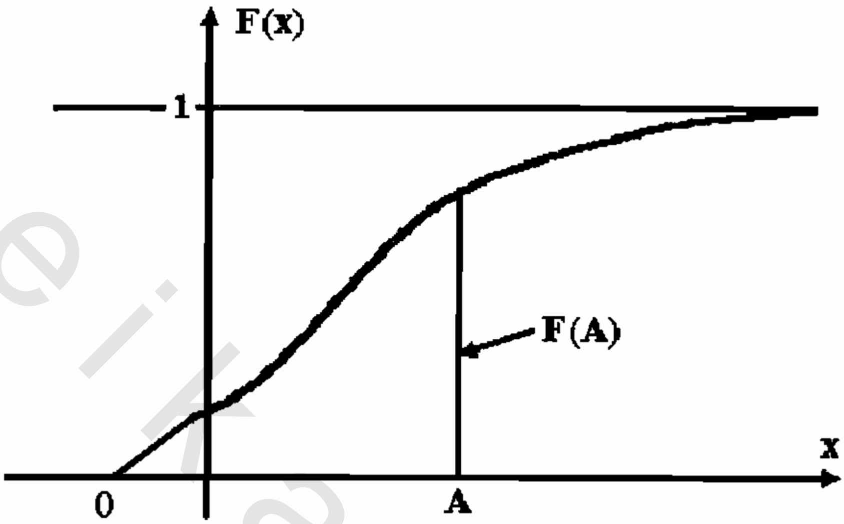
$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = P(x \leq x_2) - P(x \leq x_1)$$
$$= f(x_2) - f(x_1)$$

ومنها يمكن أن نستنتج ما يلي :

onbeikandl.com

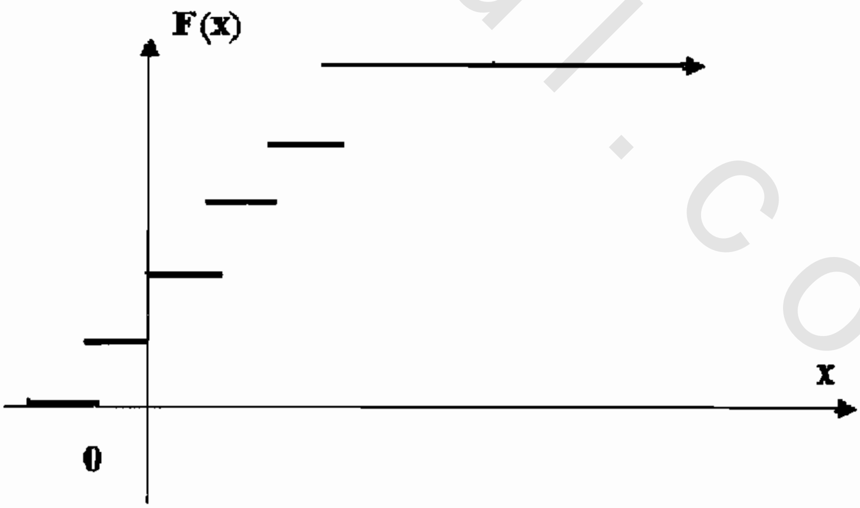
$$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$
$$= 1 - f(x)$$

وبصفة عامة يمكن أن يأخذ منحنى دالة التوزيع الاحتمالي أحد الشكلين التاليين :



الشكل (6 -1)

منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل



الشكل (6 -2)

منحنى دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

obeikandi.com

نلاحظ من الشكلين أن الدالة f(x) تأخذ اصغر قيمة لها وهي الصفر وتبدأ بالازدياد حتى تصل إلى أقصى قيمة لها وهي الواحد الصحيح ، ويكون المنحنى منفصلاً إذا كان المتغير العشوائي X منفصل أو متقطع ، ويكون المنحنى متصلاً إذا المتغير العشوائي X متصلاً أو مستمراً .

وتجدر الإشارة أنه في حالة المتغيرات العشوائية المنفصلة فأنه يمكن كتابة دالة التوزيع الاحتمالي على النحو التالي :

$$P(X \leq x) = F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

حيث أن الدالة F تعرف بدالة التوزيع المتراكمة أو دالة كثافة الاحتمال . أما في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة فيمكن كتابة دالة التوزيع الاحتمالي على النحو التالي :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_i)$$

وتسمى الدالة f(x) في هذه الحالة بدالة كثافة الاحتمال ومن خواصها :

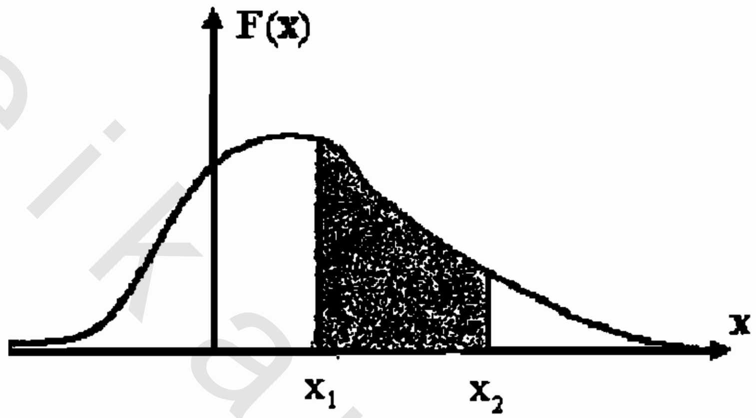
a) أنها دالة غير سالبة أي أن f(x) أكبر أو تساوي الصفر .

b) أن تكامل لمنحى هذه الدالة يساوي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

ويجب ملاحظة أن المساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتمال f(x) في حالة التوزيعات الاحتمالية المتصلة تمثل احتمال أن يقع المتغير العشوائي x في فترة معينة مثل [x_1 , x_2] وهي المساحة المضللة والمبينة

في الشكل (6-3) . فإذا كانت x متغيراً عشـوائياً وأخـذنا المحـور الأفقـي ممثـلاً بـ x فأنه يمكن أن نرسم منحنى يحقـق المسـاحة الواقعـة تحـت المنحنى بين قيمتين معينتين مثل x_1 , x_2 للمتغير العشوائي وتساوي احتمـال وقوع x بين هاتين القيمتين . ونكون بذلك قد رسـمنا ما يسـمى " منحنـي دالة كثـافة احـتمال المتغير العشوائي المتصل x " ويرمز لهذه الدالة عـادة بالرمز F(x) وتكون المساحة الكلية تحت منحنى هذه الدالة مسـاوية للواحـد الصحيح .



الشكـل (6 -3)

منحنى دالة كثافة احتمال متغير عشوائي مستمر x

مثـال (6 -1)

متغير عشوائي مستمر X تابع كثافته هي :

$$f(x)=\frac{2}{27}(1+x)$$

عندما تكون : $2 \le x \le 5$ ، والمطلوب هو :

1) التأكد أن f(x) هو تابع كثافة احتمالي .

2) أوجـد التوزيـع الاحتمـالي للمتغيـر العشـوائي المسـتمر X الذي تابع كثافته f(x) .

3) أوجد $P(X < 4)$.

4) أوجد $P(3 \le X < 4)$.

الحـــل:

1) يمكن اعتبار تابع الكثافة هو :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{27}(1+x) & 2\le x\le 5\\ \\ 0 & x<2 \quad \text{أو} \quad x>5\end{cases}$$

أي أن $f(x)\ge 0$ دائماً وهذا واضح .

ثم أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{2}^{5}\frac{2}{27}(1+x)\,dx$$

$$=\frac{2}{27}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_2^5$$

$$=\frac{2}{27}\left[\left(5+\frac{25}{2}\right)-\left(2+\frac{4}{2}\right)\right]=1$$

وبالتالي فهو تابع كثافة احتمالي بناء على التعريف .

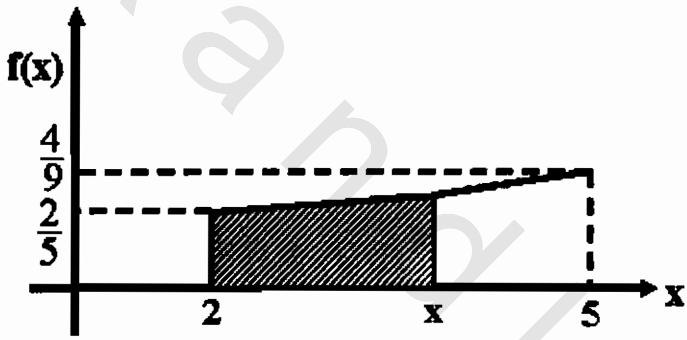
obeikandl.com

2) تابع التوزيع الاحتمالي للمتحول العشـوائي المسـتمر x الـذي تـابع كثافته f(x) هو :

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\int_{2}^{x}(1+x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_2^x = \frac{2}{27}\left[x+\frac{x^2}{2}-4\right]$$



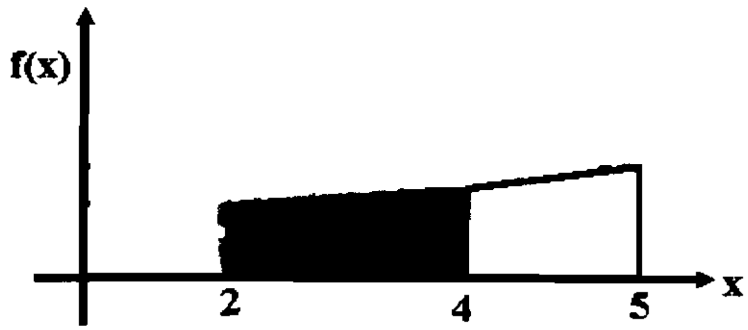
3) إن الاحتمال المطلوب يمكن إيجاده كما يلي :

$$P(X \le 4) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\int_{2}^{4}(1+x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{16}{27} = 0.59$$

obeikandl.com

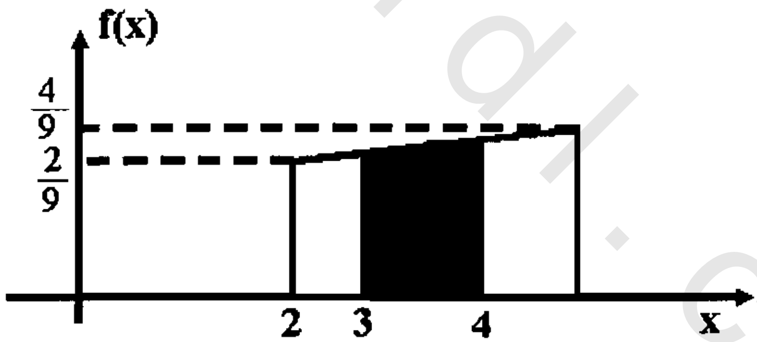


4) إن الاحتمال المطلوب يعطى حسب التعريف :

$$P(3 \leq X \leq 4) = \int_3^4 f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\int_3^4 (1+x)\,dx$$

$$= \frac{2}{27}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0.33$$



إن منحنى تابع الكثافة في مثالنا السابق هو القطعة المستقيمة التي معادلتها :

$$f(x) = \frac{2}{27}(1+x) \qquad 2 \leq x \leq 5$$

وبالتالي يمكن حساب الاحتمالات $P(x<4)$, $P(3\leq x<4)$ مباشرة من حساب مساحات الأشكال الهندسية المنحرفة المظللة في الشكل . غير أن المنحنى البياني لتابع الكثافة ليس دوماً مستقيم بل هو غالباً ما يكون ذو شكل أكثر تعقيداً وهكذا فإن المساحة يجب حسابها بالتكامل المحدد .

4.6 التوقع الرياضي للمتغير العشوائي
(Expected Value of Random Variable)

في الباب السابق تم تعريف التوقع الرياضي والقيمة المتوقعة على أنه المتوسط المرجح لك قيم المتغير العشوائي ، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها. فإذا كان X متغيراً عشوائياً له دالة توزيع فأن التوقع أو القيمة المتوقعة للمتغير X والذي يرمز له بالرمز E(X) . ويعرف حسب العلاقة التالية :

$$E(X)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+\dots\dots\dots+x_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

فإذا كان X متغير عشوائي متصل فأن القيمة المتوقعة E(X) له تعطى حسب العلاقة التالية :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X\ f(x)\,dx=\mu$$

أما إذا كان X متغير عشوائي منفصل فأن القيمة المتوقعة تعطى :

$$E(X)=\sum X_i f(x_i)=\mu$$

مثـــال (6 -2)

متغير عشوائي X له التوزيع الاحتمالي المبين في الجدول (6-1) . أوجد التوقع الرياضي لهذا المتغير .

الجدول (6-1)

X	0	1	2	3	4
f(x)	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

الحــل :

من التعريف نجد أن التوقع الرياضي يساوي :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i f(x_i)=\mu$$

$$=0(01)+1(0.3)+2(0.3)+3(0.2)+4(0.1)$$
$$=1.9$$

مثـــال (6 -3)

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي :

$$f(x)=\begin{cases} 0.5x & , \quad 0\le x\le 2 \\ 0 & , \quad \text{أخرى فترة في} \end{cases}$$

أوجد التوقع الرياضي E(X) لهذا التوزيع .

obeikandi.com

الحــل :

أن المتغير العشوائي متصل لذا نستخدم العلاقــة الآتيــة لإيجــاد التوقــع الرياضي المطلوب حيث :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \; f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} X\,(0.5\,X)\, dx$$

$$= \; 0.5\,(\frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 0.5 \times \frac{8}{3}$$

$$= \; 1.34$$

بعد توضيح مفهوم التوقع الرياضي يجب علينا أن نعرف التباين والــذي يرمز له بالرمز Var(x) ، إذا كان X متغير عشوائي منفصل فــأن التبــاين يعطى حسب العلاقة التالية :

$$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

أما إذا كان x متغيراً عشوائياً متصلاً فأن تباينه يعرف كما يلي :

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$$

ويمكن استخدام العلاقة التالية في الحالتين والتي تعتبر أكثر سهولة وبساطة في حساب التباين :

obeikandl.com

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

وقد أشرنا في الأبواب السابقة إلى أن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي هو الجذر ألتربيعي الموجب للتباين أن :

$$S = \sqrt{Var(x)}$$

حيث أن :

S- هو الانحراف المعياري .

Var(x)- هو التباين .

مثـــال (6 -4)

أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي x الذي له التوزيع الاحتمالي المبين في الجدول (6-2) .

الجــدول (6-2)

X	0	2	3	4
f(x)	0.1	0.4	0.3	0.2

الحــل :

من التعريف نجد أن التوقع الرياضي يساوي :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i f(x_i) = \mu$$

obeikandl.com

$$=0(0.1)+2(0.4)+3(0.3)+4(0.2)$$
$$=2.5$$

أما التباين فيحسب حسب العلاقة التالية :

$$Var(X)=E(X^2)-\mu^2$$

ويساوي :

$$Var(x)=\sum_{i=1}^{n}x^2 f(x)-\mu^2$$
$$=(0)^2\times0.1+(2)^2\times0.4+(3)^2\times0.3+(4)^2\times0.2-(2.5)^2$$
$$=7.5-6.25=1.25$$

أما الانحراف المعياري S فيساوي :

$$S=\sqrt{Var(x)}$$
$$=\sqrt{1.25}$$
$$=1.1$$

مثـــال (6 -5)

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X معرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10} & , \quad 0\le x\le 10 \\ 0 & , \quad \text{في فترة أخرى}\end{cases}$$

أوجد التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير .

obeikandl.com

الحــل :

نقوم بإيجاد التوقع الرياضي E(X) باستخدام العلاقة التالية :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \; f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{10} \frac{1}{10} X \; dx$$

$$= \left. \frac{X^2}{20} \right|_{0}^{10} = \frac{100}{20}$$

$$= 5$$

أما التباين فيمكن الحصول عليه عن طريق العلاقة التالية :

$$E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{10} \frac{1}{10} X^2 dx$$

$$= \left. \frac{X^3}{30} \right|_{0}^{10} = \frac{100}{3} = 33.34$$

ومنه نجد التباين حيث :

$$Var(X) = E(X)^2 - (E(x))^2$$

$$= \frac{100}{3} - (5)^2 = \frac{25}{3} = 8.4$$

obeikandl.com

أما الانحراف المعياري فيساوي :

$$S = \sqrt{Var(x)}$$
$$= \sqrt{\frac{25}{3}}$$
$$= 2.9$$

أن مفهوم ومعنى التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة قد تم توضيحها أكثر من خلال حلول أمثلة الباب السابق .

5.6 الإحصائيات والمعالم (Statistics and Parameters)

أشرنا سابقاً أن المقياس الذي يحسب من عينة مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري وغيرها يسمى إحصائية (Statistic) . وتعتبر الإحصائية بشكل عام مقدار غير ثابت إذ الغالب أن قيمتها تتغير من عينة إلى أخرى .

أن الرقم الذي يبنى على توزيع المجتمع يسمى المعلَمة (Parameter) ، فالوسط الحسابي للمجتمع هو معلمة والانحراف المعياري له معلمة أخرى وهكذا ، والمعالم هي مقادير ثابتة بالنسبة للمجتمع الواحد ولكنها تتغير من مجتمع لآخر .

وكل إحصائية نحسبها من عينة يقابلها معلمة للمجتمع وكل توزيع نظري لمتغير عشوائي يكون له معالمه الخاصة به . وقد جرت عادة الإحصائيين على استعمال الحروف الإغريقية رموزاً لمعالم المجتمع كما موضح في الجدول (6-3) حيث أن :

obeikandl.com

جـدول (3-6)

الرموز المستعملة في كتابة معالم المجتمع

المعلَم	رمز الإحصائية (من العينة)	رمز المعلَمة (للمجتمع)
الوسط الحسابي	$\bar{x}$	μ
الانحراف المعياري	δ	σ
راسبة أخرى	F	θ

6.6 المتغيـــر العشوائـــي المعيـــاري (Standard Random Variable)

أوضحنا سابقاً أن أي متغير يمكن كتابته باستخدام الوحدات المعياريـــة إذا علم كل من وسطه الحسابي وانحرافه المعيـــاري . فـــإذا كانـــت X متغيـــراً عشوائياً وسطه الحســـابي هـــو μ وانحرافه المعياري هـــو σ فإنـــه يمكننـــا الحصول على متغير عشوائي جديد هو$\bar{x}$ بكتابة :

$$\bar{x} = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad \text{..................................}(1-6)$$

وتكـــون $\bar{x}$ عندئـــذ هـــي متغيـــر عشـــوائي وســـطه الحســـابي صـــفر وانحرافه المعياري هـــو الواحـــد ويطلـــق عليـــه أســـم متغيـــر عشـــوائي معياري(Standard Random Variable) مناظر للمتغير العشـــوائي x .

ويجب ملاحظة أن توزيعي x , $\bar{x}$ لا يختلفان في الشكل برغم مـــن وجـــود الاختلاف في نقطة الأصل وفي المقياس .

obeikandi.com

7.6 التوزيعات الاحتمالية (Probability Distribution)

نلاحظ أنه من خلال دراسة المتغيرات العشوائية (RandomVariable) والتوزيعات المتعلقة بها سواء كانت متصلة أو متقطعة منفصلة أن دراسة التوزيعات الاحتمالية (Probabilities Distributions) المناظرة لها بشكل مفصل تساعد في الحصول على النتائج التي تستخدم في الإحصاء الاستنتاجي . والذي بواسطته تتخذ القرارات الإحصائية على أسس علمية سليمة ، لذا فأن دراسة التوزيعات الاحتمالية تعتبر ذو أهمية بالغة في دراسة العديد من الظواهر والتطبيقات في الحياة العملية ، ومن أهم هذه التوزيعات توزيع بواسون وتوزيع ذات الحدين والتوزيع الطبيعي وغيرها من التوزيعات الهامة التي سنقوم بدراستها بالتفصيل .

1.7.6 التوزيع ذو الحدين (Binomial Distribution)

في الحياة العملية توجد الكثير من الظواهر تكون النتائج الممكنة لها واحدة من اثنتين ، الأولى تسمى نجاحاً والثانية تسمى فشلاً . فإذا فرضنا مثلاً أن P هو احتمال النجاح فأن $q = 1- P$ هو احتمال الفشل ، وعند تكرار التجربة n من المرات بحيث يبقى احتمال النجاح p واحتمال الفشل q ثابتين خلال مرات أعادة التجربة فإننا في كل مرة سنحصل على حالة نجاح أو على حالة فشل . أن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات النجاح سيكون في هذه الحالة متغيراً عشوائياً منفصلاً ويأخذ القيم من $0 , 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots\ldots , n$ ويطلق عليه متغير ذو الحدين ويتوزع توزيع ذو الحدين (Binomial Distribution) بدالة كتلة الاحتمال . وهذا ما يقودنا إلى النظرية التي توضح هذا التوزيع حيث أن احتمال وقوع k من النجاحات في n من المحاولات المكررة هو :

$$b(k,n,p)=\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$$

أن الرمز هو $\binom{n}{k}$ هو رمز التوافيق ، وقد اشرنا إليه سابقاً ويساوي :

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

حيث أن الرمز $n!$ هو مضروب العدد n ويساوي :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

ويستخدم التوزيع ذو الحدين في كثير من الظواهر في الحياة العملية مثل تحديد الاحتمالات الخاصة بالنجاح والرسوب لعدد من الطلاب ، وإصابة أو عدم إصابة هدف معين في مباراة ما ، وعدد مواليد الذكور والإناث لمجموعة من الآسر وعدد الوحدات التي تم بيعها في عينة من المنتوجات وغيرها من الظواهر .

إذا اعتبرنا أن n , P ثوابت في الدالة السابقة فإن :

$$P(k)=b(k,n,p)$$

تكون توزيعاً احتمالياً منفصلاً ، حيث أن هذا التوزيع يعطى كما هو مبين في الجدول (6-4) .

الجــدول (6-4)

k	0	1	2	....	n
P(k)	q^n	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	$\binom{n}{1}pq^{n-2}$	....	q^n

obeikandi.com

ويسمى هذا التوزيع بتوزيع ذو الحدين وذلك لان الاحتمالات لقيم $k = 0 , 1 , 2, ..., n$ هي الحدود المتتالية في مفكوك ذو الحدين .

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + ... + p^n$$

ويطلق على هذا التوزيع في كثير من الأحيان بتوزيع العالم برنولي (Bernoulli Distribution) ، ومن خواص هذا التوزيع التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري وهي مبينة في الجدول (6-5) :

جدول (6-5)

التوزيع ذو الحدين	
التوقع	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{npq}$

مثال (6 -6) :

ألقيت ست قطع نقود في نفس الوقت أو تم إلقاء قطعة نقود ست مرات متتالية ، أوجد ما يلي :

a) احتمال وقوع صورتين بالضبط .

b) احتمال وقوع أربع صور على الأقل .

c) احتمال عدم وقوع صورة .

d) احتمال وقوع صورة واحدة على الأقل .

obeikandl.com

الحـــل :

نفرض أولا ظهور الصورة هو احتمال النجاح p ، وعليــه فــأن q هــو احتمال الفشل حيث $p = q = 0.5$ ، و $n = 6$ وبعد ذلك نجد الآتي :

a) أن احتمال وقوع صورتين بالضبط يعنـــي أن $k = 2$ ، ويمكـــن حســـابه حسب تعريف توزيع ذو الحدين :

$$b(k,n,p)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$b(2.6.0.5)=\binom{6}{2}(0.5)^2(0.5)^4$$
$$=0.24$$

b) احتمال وقوع أربع صور على الأقـــل يعنـــي أن $k = 4$ أو 5 أو 6 . أي يجب علينا إيجاد ما يلي :

$$b(4.6.0.5)+b(5,6,0.5)+b(6,6,0.5)=$$
$$=\binom{6}{4}(0.5)^4(0.5)^2+\binom{6}{5}(0.5)^5(0.5)+\binom{6}{6}(0.5)^6$$
$$=0.34$$

c) احتمال عدم وقوع صورة يعني الفشل في ست التجارب ويساوي :

$$q^6=(0.5)^6=0.015$$

d) احتمال وقوع صورة واحدة على الأقل يمكن حسابه من الاحتمال الســـابق حيث أن :

$$1-q^6=1-(0.5)^6=0.98$$

obeikandl.com

مثـــال (6 -6)

أسرة بها ست أطفال ، مع فرض أن احتمال أن يكون الطفل ولد هو 0.5 أوجد الاحتمالات التالية :

a) أن يكون بينهم ثلاث أولاد وثلاث بنات .

b) أن يكون عدد الأولاد أقل من عدد البنات .

الحـــل :

من معطيات السؤال نجد أن $P = 0.5, n = 6$ ، و $q = 1 - 0.5 = 0.5$

وبناءً على ذلك نجد المطلوب الأول :

a) احتمال أن يكون من بين الست أطفال ثلاث أولاد وثلاثة بنات يعني :

$$P(3,6,0.5)=\binom{6}{3}(0.5)^3(0.5)^2$$
$$=0.31$$

b) أما احتمال أن يكون عدد الأولاد اقل من عدد البنات فأن ذلك يعني :

$$P(2,6,0.5)+P(1,6,0.5)+P(0,6,0.5)$$
$$=\binom{6}{2}(0.5)^2(0.5)^4+\binom{6}{1}(0.5)(0.5)^5+(0.5)^6$$
$$=0.32$$

مثـــال (6 -7)

أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري لظهور العدد 6 لتجربة إلقـــاء حجر نرد الزهر 180 مرة .

الحــل :

أن احتمال ظهور العدد 6 يساوي 1/6 ، وبما أن التوزيع يتبع توزيـــع ذو الحدين فأن التوقع الرياضي لظهور هذا العدد يعطى حسب العلاقة التالية :

$$\mu = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30$$

أما الانحراف المعياري فيحسب كما يلي :

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$$

حيث أن :

$q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$

مثــال (6 -8)

إذا كان عدد المهندسين في أحدى المصانع الكبــرى الخاصــة بتصــنيع الحاسوب يتكون من 700 مهندس و 300 مهندسة ، وأرادت إدارة المصــنع اختيار وفد مكون من 4 من المهندسين والمهندسات للمساهمة في تمثيل هــذا المصنع في مؤتمر علمي ما . أوجد الاحتمالات التالية :

a) أن يكون بهذه اللجنة مهندسين فقط والباقي مهندسات .

b) أن يكون بهذه اللجنة مهندسين على الأكثر .

c) أن يكون بهذه الجنة مهندسين على الأقل .

d) متوسط عدد المهندسين بهذه اللجنة .

obeikandi.com

الحــل :

أن هذا التوزيع يتبع التوزيع ذو الحدين حيث أن $n = 4$ ، وذلك بفــرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد المهندسين الذكور بهذا الوفد ، ويأخذ القــيم 0 , 1 , 2 , 3 , 4 . أن احتمـــال اختيـــار مهنـــدس بهـــذا الوفـــد هو :

$$p = 700 / 1000 = 0.7$$

وهو يمثل احتمال نجاح تجربة ذو الحدين ، أما احتمال اختيار مهندسة بهـــذا الوفد فهو :

$$q = 1 - p = 300 / 1000 = 0.3.$$

ونلاحظ في هذا المثال أنه من الصعب كتابة فراغ العينة S لهذه المسألة ، ولكننا باستخدام توزيع ذو الحدين نستطيع حساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير العشوائي X الذي يتوزع توزع ذو الحدين بدالة الاحتمال :

$$f(x)=\binom{4}{x}(0.7)^{x}(0.3)^{4-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4$$

وبناءً على ذلك نستطيع إيجاد الاحتمالات المطلوبة :

a) أن احتمال أن يكون لهذا الوفد مهندسين فقط والباقي مهندســات ، يعنــي أيجاد :

$$f(2)=\binom{4}{2}(0.7)^{2}(0.3)^{4-2}$$
$$=0.27$$

b) احتمال أن يكون بهذه اللجنة مهندسين على الأكثر يعني أنه يجب إيجاد :

obeikandi.com

$$P(x \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{n}{x} P^x q^{n-x}$$
$$= \binom{4}{0}(0.7)^0 (0.3)^4 + \binom{4}{1}(0.7)^1 (0.3)^3 + \binom{4}{2}(0.7)^2 (0.3)^2$$
$$= 0.008 + 0.076 + 0.27$$
$$= 0.35$$

c) احتمال أن يكون بهذا الوفد مهندسين على الأقل يعني أنه يجب علينا إيجاد :

$$P(x \ge 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(x \le 1) = 1 - 0.083 = 0.916$$

d) احتمال متوسط عدد المهندسين الذكور بهذا الوفد يعني أنه يجب علينا إيجاد التوقع الرياضي والانحراف المعياري للمهندسين الذكور حيث :

$$E(x) = nq = 4 \times 0.7 = 2.8$$
$$Var(x) = npq = 4 \times 0.7 \times 0.3 = 0.84$$

2.7.6 توزيع بواسون (Poisson Distribution)

كثيراً ما تصادفنا في الحياة العملية ظواهر مثل عدد من الحوادث التي تقع في تقاطع ما خلال يوم واحد ، أو عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب ما ، أو عدد المكالمات الهاتفية في الدقيقة في أحد كبائن الاتصال أو عدد جسيمات ألفا التي يطلقها مركب نشيط اشعاعياً ، وكل هذه الظواهر تتبع توزيع احتمالي يسمى توزيع بواسون . والذي يعرف كما يلي :

$$P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

opeikandi.com

حيث أن $\lambda > 0$ ، و e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي وتساوي تقريباً 2.718 . ومن خواص توزيع بواسون هو ما يبينه الجدول (6-6) .

جدول (6-6)

التوزيع بواسون	
التوقع	$\mu=\lambda$
التباين	$\sigma^2=\lambda$
الانحراف المعياري	$\sigma=\sqrt{\lambda}$

وعلى الرغم من أن توزيع بواسون له فوائد كثيرة ألا أنه يعطينا أيضا تقريباً جيداً لتوزيع ذو الحدين عندما تكون k صغيرة وبفرض p صغيرة وأن $\lambda = np$. أي بمعنى آخر عندما يكون الاحتمال P صغير جداً ويقترب من الصفر ، وعدد المحاولات n يقترب من ما لا نهاية في توزيع ذو الحدين فأن هذا التوزيع يؤول إلى توزيع بواسون . وتعتبر هذه النتيجة مهمة جداً في الحياة العملية وفي كثير من التطبيقات كما سيتم توضيح ذلك من خلال حلول الأمثلة والتطبيقات القادمة .

مثال (6 -9)

في أحدى المصانع وجد أن 2% من وحدات الإنتاج معيبة . أوجد احتمال أن توجد ثلاث وحدات معيبة في عينة بها 100 وحدة .

الحل :

لإيجاد الاحتمال المطلوب يمكن تطبيق توزيع ذو الحدين عندما $n = 100$ و $p = 0.02$ ، وبما أن قيمة p صغيرة فأن يمكننا استخدام تقريب بواسون عندما $\lambda = np = 2$ وعليه فأن :

$$P(3\ ,\ 2)=\frac{2^3 e^{-2}}{3!}=8(0.135)/6=0.180$$

مثـــال (6 -10)

في أحد الكتب وجد أن هناك 300 خطأ مطبعياً موزعة علـــى صـــفحات كتاب به 500 صفحة . أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة على :

a) خطاءين بالضبط .

b) اثنان أو أكثر من الأخطاء .

الحــل :

نفرض أن عدد الأخطاء في الصفحة يعبر عن عدد مرات النجـــاح فـــي متتابعة توزيع ذو الحدين ، حيث أن n = 300 وحيث أنه يوجـــد 300 خطـــأ مطبعي واحتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعنية هو P = 1/500 وحيـــث أن p صغيرة فأنه يمكننا استخدام تقريب بواسون لتوزيع ذو الحدين ويكون في هذه الحالة $\lambda = np = 0.6$ وعليه نجد أن :

a) احتمال أن يوجد خطائين بالضبط يعني أنه يجب أيجاد :

$$P(2,06)=\frac{(0.6)^2 e^{-0.6}}{0!}=(0.36)(0.549)/2=0.0988=0.1$$

b) أن احتمال أن يوجد اثنان أو أكثر من الأخطاء يعني أن يجب أيجـــاد أولاً احتمال أن لا توجد أخطاء في الصفحة :

$$P(0,0.6)=\frac{(0.6)^0 e^{-0.6}}{0!}=e^{-0.6}=0.55$$

وثانيا أيجاد أن يوجد خطأ واحد فقط في الصفحة :

$$P(1,0.6)=\frac{(0.6)\ e^{-0.6}}{1!}=(0.6)(0.55)=0.33$$

وبعد ذلك نجد احتمال اثنان أو أكثر من الأخطاء حيث أن :

$$P=1-P\ =1-(0.55+0.33)=0.133$$

مثـــال (6 -11)

وجد في أحدى المستشفيات أن نسبة الوفيات للأطفال من مرض معين هي 2% ، فإذا أخذت عينة عشوائية حجمها 300 طفل من هؤلاء الأطفال . أوجد احتمال أن يكون بهذه العينة طفل واحد متوفى على الأكثر .

الحـــل :

أن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الوفيات يتبع التوزيع ذو الحـــدين ويمكننا تقريبه إلى توزيع بواسون وذلك لتوفر شروط التقريب التي أشرنا إليها سابقاً حيث :

$$\mu=np=300\times(0.02)=6$$

ولإيجاد احتمال أن يكون بهذه العينة طفل واحد متوفى علـــى الأكثـــر يمكـــن إيجاده أولاً بإيجاد :

obeikandl.com

$$P(x=0)=\frac{(0.6)^0 e^{-6}}{0!}=e^{-6}=(2.718)^{-6}=0.0025$$

وإيجاد ثانياً أيضاً قيمة الاحتمال التالي :

$$P(x=1)=\frac{(6)^1 e^{-6}}{1!}=6\times e^{-6}=6\times(2.718)^{-6}=0.015$$

وبناء على قيم تلك الاحتمالات يمكننا ألان أيجاد احتمال أن يكون بهذه العينة طفل واحد متوفى على الأكثر هو :

$$\begin{aligned} P(x\leq 1) &= P(x=0)+P(x=1) \\ &= 0.0025 + 0.015 \\ &= 0.018 \end{aligned}$$

3.7.6 التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)

يوجد عدد كبير من التوزيعات النظرية التي أكتشفها الإحصائيون لغرض التحليل الإحصائي . وقد حصلوا بذلك على نتائج عظيمة في مجال الدراسات الإحصائية . ومن أهم واشهر هذه التوزيعات المتصلة ما بالتوزيع الطبيعي (Normal Distribution) ، وقد أشتق أسمه لان كثيراً من الظواهر الطبيعية تأخذ شكلاً قريباً منه .

فقد لاحظ الإحصائيون أنه منذ القرن الثامن عشر أن توزيعات أخطاء المشاهدات وهي الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة تقترب كثيراً من هذا التوزيع . كما لاحظوا أن معظم التوزيعات البيومترية مثل ظواهر الطول

opeikandi.com

والوزن ودرجة ذكاء الإنسان وغيرها تأخذ شكلاً قريباً منه . وقد نتج عن هذا الاهتمام أن تركزت الدراسات والنظريات الإحصائية على المتغيرات التي تتوزع توزيعاً طبيعياً .

ومما زاد في فائدة دراسة التوزيع الطبيعي أنه كثيراً ما يمكن تحويل التوزيعات غير الطبيعية بطريقة أو بأخرى إلى توزيع طبيعي ، وبذلك يكون في الإمكان معالجتها باستخدام الطرق والنظريات المبنية على أساس هذا التوزيع . ودالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي أو المنحنى الطبيعي " توزيع جاوس " تعرف كما يلي :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

حيث أن μ ،σ ثابتان اختياريان وهذه الدالة تعتبر من أهم أمثلة التوزيعات الطبيعية المتصلة . ومن خواص التوزيع الطبيعي أن توقعه وتباينه وانحرافه المعياري تعطى كما هو مبين في الجدول(6-7) .

جدول(6-7)

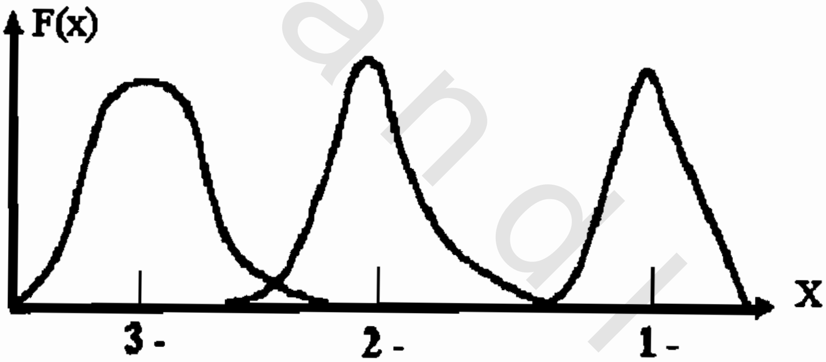
التوزيع الطبيعي	
التوقع	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ

obeikandl.com

4.7.6 منحنـــي التوزيـــع الطبيعي (Normal Distribution Curve)

عندما نتكلم عن منحنى توزيع نظري فإننا نقصد منحنى دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي لهذا التوزيع .

أن ومنحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول خط رأسي يمر بالوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثل كلاً من الوسيط والمنوال ، وللمنحنى شكل الناقوس أو الجرس ويمتد طرفاه إلى مالا نهاية حيث يقترب طرفاه من المحور الأفقي ولكنهما لا يلتقيان معه ومع ذلك فإن المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح كما هو الحال في المساحة تحت منحنى دالة كثافة احتمال أي متغير عشوائي مستمر كما يبين الشكل (6-7) .

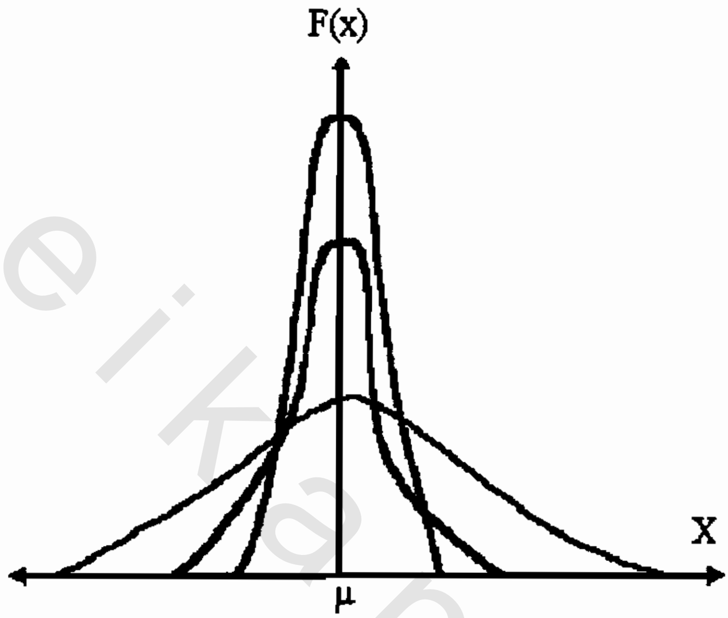


الشكـل (6-7)

منحنيات معتدلة لها نفس الانحراف المعياري مع اختلافها في قيمة الوسط الحسابي

وهناك عدد لا نهائي من المنحنيات المعتدلة وهي تختلف عن بعضها البعض حسب قيمة كل من الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ . وقد تتفق منحنيات معتدلة في الانحراف المعياري ولكنها تختلف في الوسط الحسابي كما في الشكل (6-7) وقد تختلف في قيمة الانحراف

المعياري وتتساوى في قيمة الوسط الحسابي كما موضح في الشكل (6-8) . مقياس الرسم مختلف في الشكلين إذ أن المساحة تحت منحني دالة كثافة احتمال أي متغير عشوائي مستمر يجب أن يساوي الواحد .



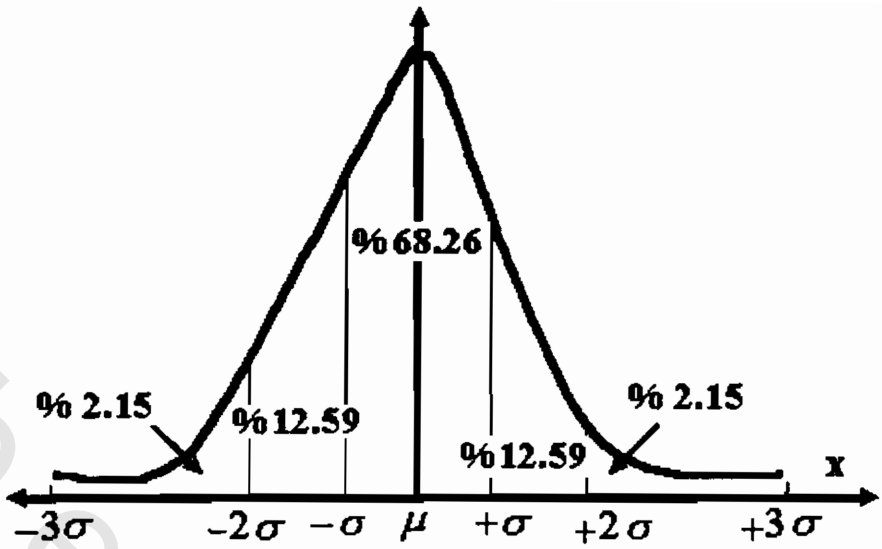
الشكل (6 -8)

منحنيات معتدلة لها نفس الوسط الحسابي مع اختلافها في قيمة الانحراف المعياري

8.6 خواص المنحنى الطبيعي (Normal Curve Properties)

مهما كانت قيمة μ و σ فإن للمنحنى الطبيعي الخواص التالية :

a) حوالي 68.38 % من المساحة تقع بين القيمتين $\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$.
b) حوالي 95.45 % من المساحة تقع بين القيمتين $\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$.
c) حوالي 99.73 % من المساحة تقع بين القيمتين $\mu - 3\sigma$, $\mu + 3\sigma$.



الشكــل (6 - 9)

المساحة تحت المنحنى الطبيعي

وسنرمز للتوزيع الطبيعي الذي توقعه μ وانحرافه المعياري σ بالرمز :

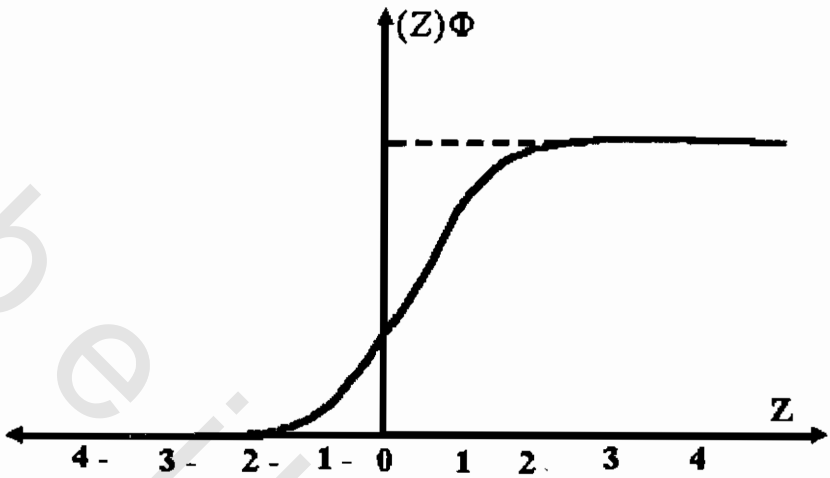
$$N(\mu,\sigma^2)$$

أي يكون له تباين هو σ^2 وبذلك يكــون N (0 , 1) هــو رمــز للتوزيــع المعياري المعتدل أي المتغير المعتدل الذي وسطه الحسابي يســـاوي صــفر وانحرافه المعياري هــو الواحــد الصحيح . وكمثال إذا كتبنا N(0.16, 20) فإننا نقصد متغيراً طبيعياً له وسط حسابي 20 وتبــاين 0.16 ، أي انحــراف معياري يساوي 0.4 .

9.6 المتغيــر الطبيعي المعيــاري (Standard Normal Variable)

يطلق أسم المتغير المعتدل المعياري على المتغير $N(0,1)$ ،أي علــى المتغير المعتدل الذي وســطه الحســابي صفر وانحرافه المعياري هو الواحد

ويرمز لهذا المتغير عادة بالرمز " Z " كما يرمز لدالة كثافة احتمالـــه $f(Z)$ ولدالة التوزيع للمجتمع بالرمز $\Phi(z)$ كما يبين الشكـــل (6-10) .



الشكـــل (6-10)

منحنى دالة التوزيع المتجمع للمتغير المعتدل المعياري

فإذا كانت a قيمة معينة موجبة أو صفر أو سالبة فإن :

$$\phi(a) = P(X \leq a) \quad ....(2-6)$$

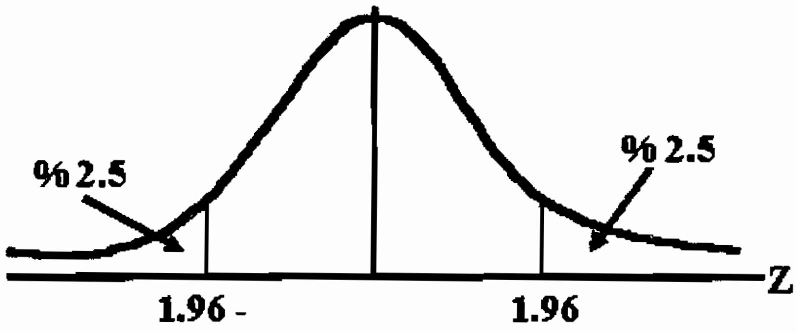
ومن الصفات العامة لتوزيع X ما يلي :

$$P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0.95 \quad ....(3-6)$$

$$P(-2.85 \leq X \leq 2.85) = 0.99 \quad ....(4-6)$$

$$\phi(1.64) = P(X \leq 1.64) = 0.95 \quad ....(5-6)$$

$$\phi(2.32) = P(X \leq 2.32) = 0.99 \quad ....(6-6)$$



الشكل (6-11)

وبما أن 0.95 من المساحة تحت المنحنى $\Phi(Z)$ تقع بين القيم $X = -1.96$ و $X = 1.96$ ، فإن 0.05 من المساحة تقع خارج هاتين القيمتين . ومن تماثل التوزيع نجد أن :

القيمة 0.025 من المساحة تحت منحني $\Phi(Z)$ يقع إلى يسار $X = 1.96 -$

أو أن :

$$\phi(1.96-) = 0.025 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7-6)$$

والقيمة 0.025 من المساحة تقع إلى يمين $X = 1.96$ إذن 0.975 من المساحة يقع إلى يسار $X = 1.96$ أو :

$$\phi(1.96) = 0.975 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8-6)$$

ومن (6-7) و(6-8) نجد أن :

$$\phi(1.96-) = 1-\phi(1.96) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9-6)$$

obeikandl.com

وهذه حالة خاصة لقاعدة عامة ، إذ أنه إذا كانت لـــ a أي قيمة موجبة فإنـــه نتيجة لتماثل منحنى $\Phi(Z)$ حول $X = 0$ يكون :

$$\phi(a-) = 1 - \phi(a) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10-6)$$

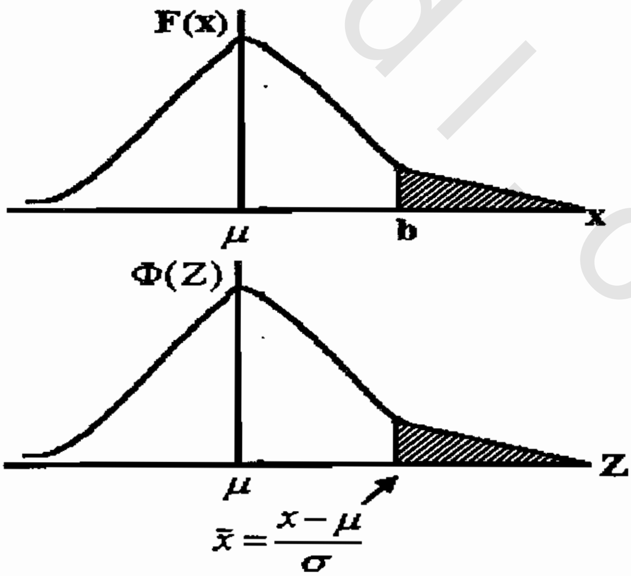
10.6 تحويل المتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى متغير طبيعي معياري

(Transform of Standard Variable to Standard Normal Variable)

إذا كانت x متغيراً طبيعي لـــه وســـط حســـابي μ وانحـــراف معيـــاري σ ، فأنه يمكن تحويله إلى متغير طبيعي معياري X كما يلي :

$$\bar{x} = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

وفي هذه الحالة فإن كثافة دالة احتمال المتغير العشوائي x أي F(x) تتحـــول إلى $\Phi(X)$ كما يبين الشكل (6 -12) .



الشكـــل (6 -12)

تحويل المتغير المعتدل إلى متغير معتدل معياري

وإذا كانت b قيمة معينة من قيم x فإن :

$$P(x \leq b) = P(x - \mu, b - \mu)$$
$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

أو:

$$P(X \leq b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{.............................}(11-6)$$

وإذا كانت :

$$x > b = 1 - P(x \leq b)$$
$$= 1 - \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{.............................}(12-6)$$

وإذا كانت $a > b$ كما في الشكل (6 – 13) فإن :

$P(a \leq x \leq b) =$ المساحة المظللة في الشكل

= المساحة إلى يسار b – المساحة إلى يسار a

$$= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right) \qquad (14-6)$$

ويبين الجدول (6-8) قيم التوزيع المتجمع الطبيعي المعيـــاري Φ(Z) أو قـــيم المساحة تحت منحنى Φ(Z) من ∞– إلى Z .

obeikandl.com

جـدول (6-8)

قيم المساحة تحت منحنى$\Phi(Z)$ من $-\infty$ إلى Z

0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.005	Z
0.536	0.532	0.528	0.524	0.52	0.516	0.512	0.508	0.504	0.500	0.005
0.575	0.571	0.568	0.564	0.56	0.556	0.552	0.548	0.543	0.54	0.1
0.614	0.61	0.606	0.603	0.598	0.594	0.591	0.587	0.583	0.579	0.2
0.651	0.648	0.644	0.641	0.637	0.633	0.63	0.626	0.621	0.618	0.3
0.688	0.684	0.681	0.677	0.674	0.670	0.666	0.663	0.659	0.655	0.4
0.723	0.719	0.716	0.712	0.709	0.706	0.702	0.698	0.695	0.691	0.5
0.755	0.752	0.748	0.745	0.742	0.739	0.736	0.732	0.729	0.726	0.6
0.785	0.782	0.779	0.776	0.772	0.770	0.767	0.764	0.761	0.758	0.7
0.812	0.810	0.808	0.805	0.802	0.799	0.796	0.793	0.791	0.718	0.8
0.839	0.837	0.834	0.831	0.829	0.826	0.823	0.821	0.818	0.816	0.9
0.862	0.86	0.858	0.855	0.853	0.850	0.848	0.846	0.844	0.841	1.0

11.6 جـداول التوزيـــع المعتــدل المعيــاري

(The Standard Normal Variable Table)

توجد جداول مختلفة تعطي بعض أو كل قيم الدوال الآتية للمتغير الطبيعي المعياري عند قيم معينة لهذا المتغير ومن أهم خواصها :

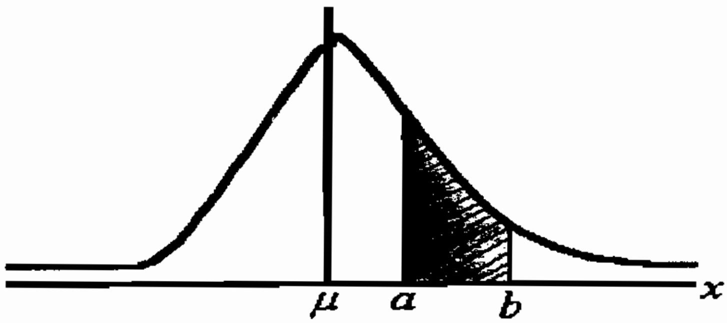
a) الإحداثي الرأسي عند النقطة Z أي $f(Z)$.

b) المساحة تحت المنحني المعتدل المعياري إلى يسار الإحداثي الرأسي عنـد النقطة Z ,أي $\Phi(Z)$.

c) المساحة تحت المنحني المعتدل المعياري بين الإحداثيين الرأسيين المارين بنقطة الأصل والنقطة Z (حيث X أكبر من الصفر) .

obeikandi.com

أن الجدول الخاصة بالتوزيعات المختلفة مبينة في الملحق الموجود نهاية هذا الكتاب .



الشكـــل (6 -13)

مثـــال (6 -12)

إذا كانت درجات الحرارة في مدينة عمان خلال شهر مارس تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره °20C درجة مئوية وانحـــراف معيـــاري يســـاوي 3 درجات مئوية . أوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين 12 ، 26 درجـــة مئوية خلال شهر مارس .

الحـــل :

يجب علينا أيجاد الاحتمال التالي :

$$P(12 < X < 26) = P(\frac{12-\mu}{\sigma}) < P(\frac{X-\mu}{\sigma}) < P(\frac{26-\mu}{\sigma})$$

$$= P(\frac{12-20}{3} < Z < \frac{26-20}{3}$$

$$= P(-2.67 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2.00) - P(Z < -2.67)$$

$$= 0.977 - 0.0038$$

$$= 0973$$

ويجب الإشارة هنا إلى أنه تـــم الحصـــول علـــى هـــذه النتيجـــة باســـتخدام الجدول رقم (1-1) الموجود في نهاية هذا الكتاب .

مثـــال (6 -13)

تقدم 100 مهندس لامتحان خاص بالكفاءة في أحدى المصانع ، فوجـــد أن درجات المهندسين المتقدمين تتبع التوزيع الطبيعي N(25,70) أوجد :

a) عدد المهندسين الحاصلين على درجات من 66 إلى 76 درجة .

b) عدد المهندسين الحاصلين على درجات أكثر من 80 درجة .

c) عدد المهندسين الحاصلين على درجات أقل من 62 درجة .

الحـــل :

لإيجاد المطلوب نقوم بتحويل متغير التوزيع الطبيعي إلى متغيـــر توزيـــع طبيعي معياري حيث :

a) عدد المهندسين الحاصلين على درجات من 66 إلى 76 درجة يمكن حسابه كما يلي :

$$P(66 < X < 76) = P(\frac{66-\mu}{\sigma}) < P(\frac{X-\mu}{\sigma}) < P(\frac{76-\mu}{\sigma})$$

$$= P(\frac{66-70}{5} < Z < \frac{76-70}{5}$$

$$= P(-0.80 < Z < 1.20)$$

$$= P(Z < 1.20) - P(Z < -0.80)$$

$$= 0.2119 - 0.8849$$

$$= 06730$$

من الجدول رقم (1-1) حصلنا على القيمة لهذا الاحتمال ، أي باســـتخدام جداول التوزيع الطبيعي المعياري الموجودة في نهاية هذا الكتاب ، وبناءً عليه نجد عدد المهندسين الذين تتراوح درجاتهم من 66 إلى 76 درجة :

obeikandl.com

مهندس $100 \times 0.673 = 68$

b) عدد المهندسين الحاصلين على درجات أكثر من 80 درجة يعني :

$$P(80 < X) = P(\frac{\mu - 80}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma})$$
$$= P(Z > \frac{80 - 70}{5})$$
$$= P(Z > 2.00)$$
$$= 1 - P(Z \leq 2.00)$$
$$= 1 - 0.9773$$
$$= 0.0227$$

أذن عدد المهندسين الحاصلين على درجات أكثر من 80 درجة هو :

مهندس $100 \times 0.0227 = 2.27 = 3$

c) عدد المهندسين الحاصلين على درجات أقل من 62 درجة هو :

$$P(62 < X) = P(\frac{\mu - 62}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma})$$
$$= P(Z > \frac{62 - 70}{5})$$
$$= P(Z > -1.60)$$
$$= 0.0548$$

أذن عدد المهندسين الحاصلين على درجات أقل من 62 درجة هو :

مهندس $100 \times 0.0548 = 5.48 = 6$

obeikandl.com

12.6 تقريب توزيع ذو الحدين باستخدام التوزيع الطبيعي
(Approximation of Binomial by Normal Distribution)

إذا كان X متغير عشوائي له توزيع ذو حدين وكانت n كبيرة جداً واحتمال النجاح P يقترب من 0.5 فأنه يمكن تقريب دالة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

بدالة الاحتمال للتوزيع الطبيعي المعياري حيث أن المتوسط الحسابي والانحراف المعياري :

$$\mu = np \qquad , \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

وبذلك يكون المتغير العشوائي $\dfrac{x - np}{\sqrt{npq}}$ يتوزع تقريباً بالتوزيع الطبيعي المعياري N (0 , 1) . والمثال (6-14) يوضح هذا التقريب .

مثال (6 -14)

أوجد احتمال ظهور الصورة من 40 مرة إلى 50 مرة ، إذا ألقيت قطعة نقود 100 مرة .

الحل :

التجربة هنا تتبع توزيع ذو الحدين ، وبما أن قيمة n كبيرة ، واحتمال النجاح p يساوي 0.5 فأنه يمكن تقريب توزيع ذو الحدين باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري حيث :

$$\mu = np = 100 \times 0.5 = 50$$

$$\sigma \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = \sqrt{25} = 5$$

obeikandl.com

فإذا فرضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهـــور الصـــورة ، فـــأن الاحتمال المطلوب هو :

$$P = (40 < X < 50)$$

ولكن حيث أنه تم تقريب توزيع منفصل باستخدام توزيع احتمال متصـــل فأنه يجب احتساب معامل تصحيح وذلك بطرح وإضافة 0.5 ، أي أن الاحتمال المطلوب باستخدام تقريب التوزيع الطبيعي المعياري هو :

$$P = (39.5 < X < 50.5)$$

حيث X تتوزع تقريباً التوزيع الطبيعي (50 , 25) N ، ويكون :

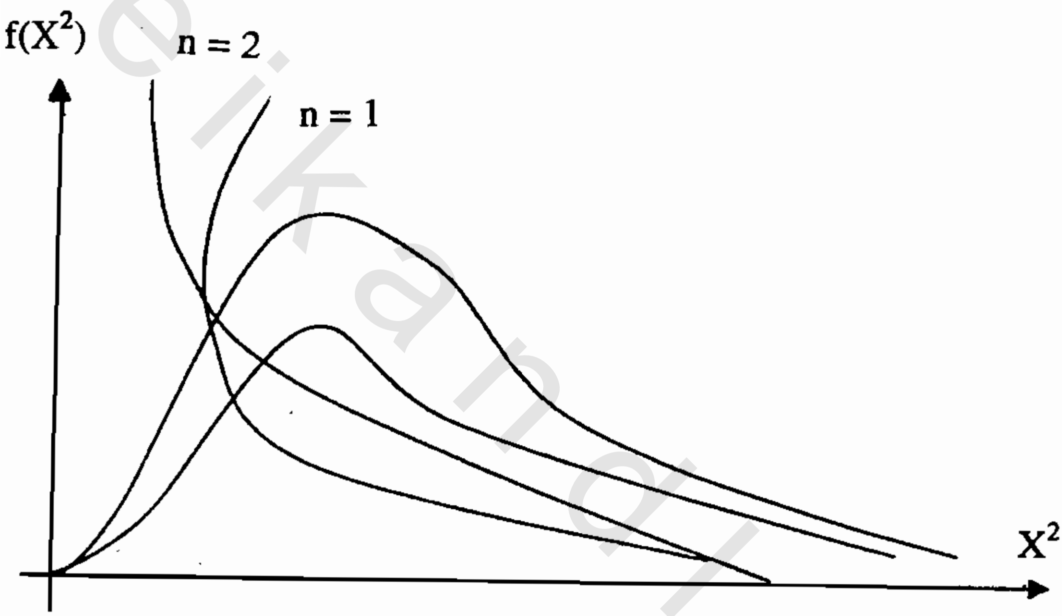
$$\begin{aligned} P=(39.5<X<50.5) &= P\left(\frac{39.5-50}{5}<Z<\frac{50.5-50}{5}\right) \\ &= P(-2.10<Z<0.10) \\ &= P(0.10<Z)-P(-2.10<z) \\ &= 0.0179-0.5398 = 0.5219 \end{aligned}$$

13.6 توزيع مربع Chi (Chi Square Distribution)

إذا أخذت عينة عشـــوائية مثـــل $X_1, X_2, X_3, X_4, ..., Xn$ مـــن مجتمع له توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فأن المتغير العشوائي :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

له توزيـــع X^2 أو مـــا يســـمى كـــا^2 (Chi Square) بـــدرجات حريـــة n من المتغيرات العشوائية ، ويمكن تعريفه بمعنى ابسط أنـــه توزيـــع مجمـــوع مربعات n من المتغيرات العشوائية المستقلة المعيارية . ويطلق على n درجة الحرية لهذا التوزيع ، والتي تدل على عدد المتغيرات المستقلة الداخلـــة فـــي المجموع ومن ذلـــك يمكـــن ملاحظـــة أن المتغيـــر العشـــوائي الـــذي لـــه توزيع X^2 (Chi Square) متغير غير سالب ، ومنحنى دالة كثافة احتماليـــة تبدأ من الصفر حيث تحدد درجات الحرية كما يبين الشكل (6-14) .

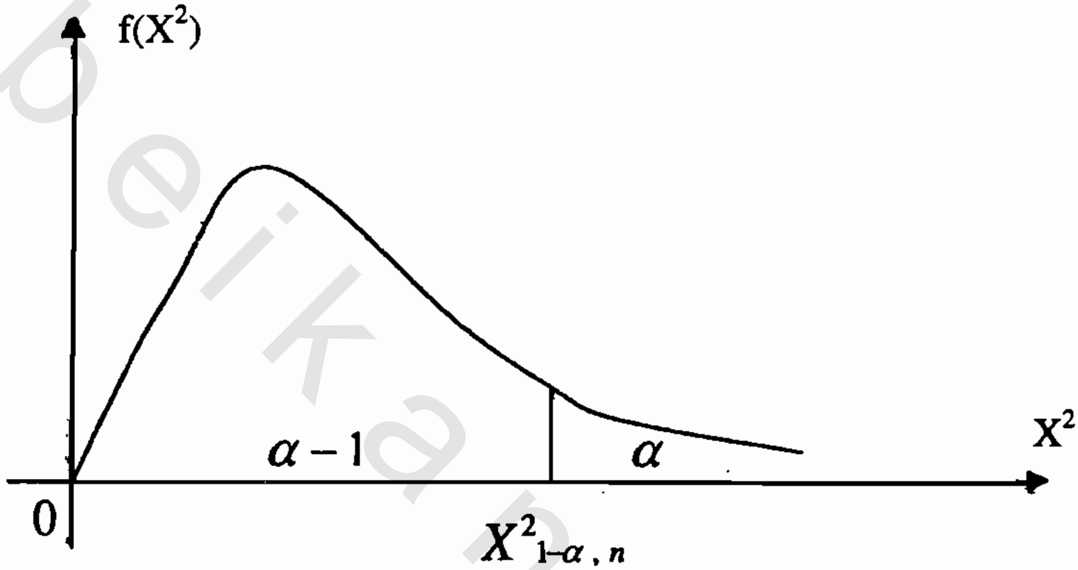


الشكـــل (6-14)

ويلاحظ أن المنحنيات التي درجات الحرية لها أكبر من اثنان تمس المحور الأفقي عند نقطة الأصل ثم يرتفع المنحنى حتى يصل إلى قمته العظمى ويعود إلى النزول ليمس المحور الأفقي عند ما الملا نهاية . ويعتبـــر توزيـــع X^2 (Chi Square) توزيعاً ملتوي إلى اليمين ويقترب من التماثـــل كلمـــا زادت درجات الحرية . أن أهمية توزيع X^2 (Chi Square) تكمن في اســـتخداماته الكثيرة في الاختبارات الإحصائية وتكوين فترات الثقة الخاصة بالتباين .

obeikandl.com

إذا كانت $f(x^2)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع X^2 (Chi Square) ، فأن جدول توزيع مربع كاي (2-2) الموجود في نهاية هذا الكتاب يعطي قيم x^2 المقابلة لقيم معينة $f(x^2) = 1-\alpha$ ، حيث أن $1 > \alpha > 0$ تمثل احتمال معين وذلك لقيم مختارة من $1-\alpha$ ، كما يبين الشكل (15-6) .



الشكل (15-6)

ولدرجات الحرية من 1 إلى 30 ويرمز لقيمة X^2 الجدولية عند الاحتمال $1-\alpha$ ودرجات الحرية n بالرمز $X^2_{1-\alpha,n}$ ، فمثلاً إذا كانت :

$$1 - \alpha = 0.70$$

ودرجات الحرية :

$$n = 17$$

فأن :

$$X^2_{0.70,\,17} = 19.5$$

obeikandl.com

وكذلك :

$$X^2_{0.025,11} = 3.82$$

أما إذا كانت درجات الحرية أكبر من 30 فأن يمكن أثبات أن المتغير العشوائي $\sqrt{2X^2} - \sqrt{2n-1}$ لـه توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري .

مثال (6 -15)

أوجد قيمة $X^2_{0.99,10}$.

الحل :

نجد قيمة الدالة حيث :

$$f(X^2) = 1 - \alpha = 0.99 \quad , n = 10$$

باستخدام الجدول (2-2) والنظر إلى درجات الحرية والتي تساوي 10 والمساحة 0.99 على الخط الأفقي في جدول توزيع X^2 نجد أن نقطة التقاطع هي 23.20 وهي القيمة المطلب إيجادها أي أن :

$$X^2_{0.99,10} = 23.20$$

14.6 توزيع t (t - Distribution)

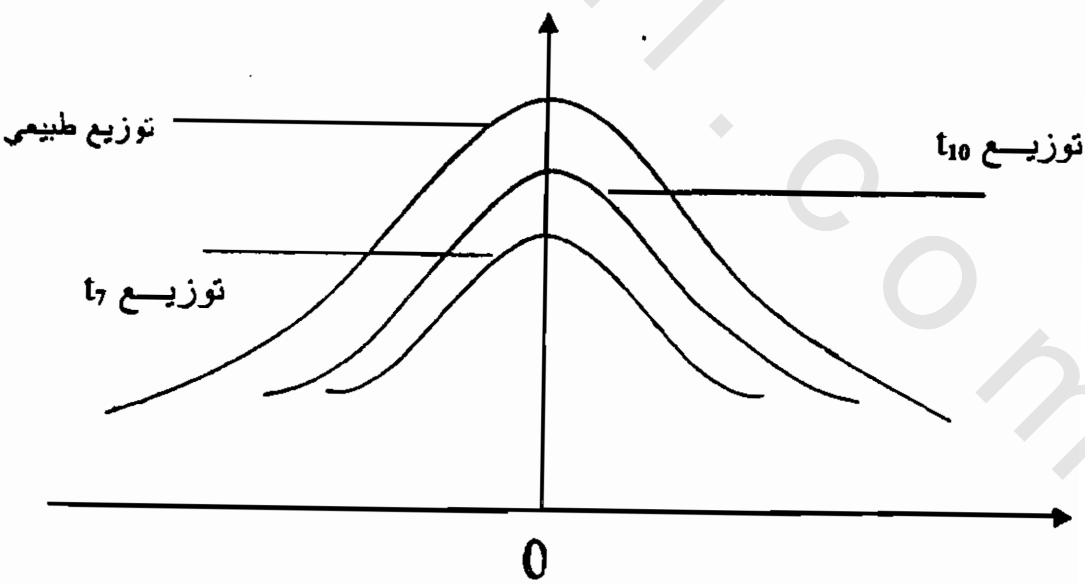
إذا كانت $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, Xn$ متغيرات عشوائية معيارية مستقلة فإن المتغير العشوائي $\sum X^2$ لـه توزيع X^2 (Chi Square) بدرجات حرية n كما اشرنا في البند السابق ، وإذا كانت Z متغير عشوائي

obeikandl.com

آخر له التوزيع $N(0, 1)$ ومستقل عن المتغير $\sum X^2$ ، فـأن المتغيـر العشوائي :

$$\frac{Z}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}}}$$

يسمى متغير t ويتوزع توزيع t بدرجات حرية n ، ويرمز له بالرمز t_n ، أما دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع فتكون متماثلة حول الصفر ولا منحنى يشـبه منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي المعياري لكن الأخير يكون أعلى عند الصفر ، أي أن منحنى دالة كثافة الاحتمال للتوزيـع t_n أكثـر تحـدباً ، ويلاحظ أنه كلما زادت قيمة n كلما أقترب منحنى التوزيـع t_n مـن منحنـى التوزيع الطبيعي المعياري حيث يكون الشكلين متقاربين إلى حد كبير عنـدما تكون n أكبر أو تساوي 30 ، وفي هذه الحالة يسـتخدم التوزيـع الطبيعـي المعياري كتقريب لتوزيع t عندما تكون درجات الحرية n أكبر من 30 كمـا يبين الشكل (6-16) .



الشكـل (6-16)

وتعطى قيمة t عند درجة الحرية n واحتمال 1-α والتي يرمز لهـا بـالرمز $t_{1-\alpha,n}$ من الجدول (3-3) الموجود في نهاية هذا الكتاب ، فمثلاً نجـد أن قيمة :

$$t_{0.95\,,\,10} = 1.812 \quad , \quad t_{0.975\,,\,14} = 2.145$$

ويلاحظ أن توزيع t متماثل حول t = 0 ومن التماثل نجد أنه إذا كانـت t موجبة فأن :

$$P(X \geq -t) = P(X \leq t)$$

ويعني ذلك :

$$P(X \geq -t) = 1 - P(X \leq t)$$

فإذا كانت :

$$P(X \leq t) = 1 - \alpha$$

فإنه يمكن كتابة العلاقة السابقة على الصورة التالية :

$$t_{\alpha,n} = -t_{1-\alpha,n}$$

حيث أن $t_{\alpha,n}$ هي قيمة t المقابلة للاحتمال α ودرجات الحرية n ولذلك فأنه يمكن استخدام علاقة التماثل لإيجاد هذه القيمة فمثلاً :

$$t_{0.01\,,\,10} = -t_{0.99\,,\,10} = -2.764$$

obeikandi.com

وبالتالي فأن هذه العلاقة تفيدنا عادة في إيجاد قيم $t_{\alpha,n}$ عندما تكون قيمة α صغيرة وغير موجودة بالجدول التي أشرنا إليها سابقاً .

مثـــال (6 -16)

أوجد قيمة $t_{0.99,12}$ ، $t_{0.025,21}$.

الحـــل :

نجد من الجدول (3-3) في نهاية هذا الكتاب أن قيمة :

$$t_{0.99,12} = 2.68$$

أما قيمة t في هذه الحالة فأننا نستطيع إيجادها عن طريق العلاقة السابقة حيث أن قيمة α صغيرة وغير موجودة في الجدول لذا فأننا نستخدم مكملتها :

$$t_{0.025,21} = -t_{0.975\,,\,21} = -2.080$$

15.6 توزيـــع F (F- Distribution)

ويعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية الهامة التـــي تســـتخدم فـــي اختبار الفرضيات ، ويمكننا تعريفة على النحو التالي :

إذا كانت X متغيراً عشوائياً لـــه توزيـــع X^2 (Chi Square) بـــدرجات حرية n_1 ، وكانت Z متغير عشوائي آخر مستقل عن X ولـــه دالـــة توزيـــع احتمـــالي (Chi Square) أيضـــاً بـــدرجات حريـــة n_2 ، فـــأن المتغير العشوائي :

$$\frac{Xn_1}{Zn_2}$$

له توزيع F بدرجات حرية n_2 , n_1 ، حيث يوجد الجدول (4-4) يعطي قـــيم F لهذا التوزيع التي تحقق احتمال أن يكون هذا المتغير العشوائي أصغر منها وذلك لقيم n_2 , n_1 المختلفة . وتكثر استخدامات هذا التوزيع في الاختبـــارات الإحصائية المختلفة .

مثـــال (6 -17)

أوجد قيمة $F_{0.025,\ 20,\ 15}$ ، $F_{0.95,\ 12,\ 7}$.

الحــل :

نجد من الجدول (4-4) أن قيمة :

$$F_{0.95,\,12,\,7}=3.57$$

أما قيمة :

$$F_{0.025\ ,\ 20\ ,\ 15}=\frac{1}{F_{0.957\ ,\ 15\ ,\ 20}}=\frac{1}{2.76}=0.36$$

حيث أن القيمة السابقة تم حسابها بالعلاقة التالية :

$$F_{\alpha\ ,\ n_1\ ,\ n_2}=\frac{1}{F_{1-\alpha\ ,\ n_1\ ,\ n_2}}$$

obeikandl.com

16.6 تمـــــارين

س1: إذا كان المتغير X عبارة عن عدد الصور التي تظهر في تجربة إلقـــاء قطعة من النقود مرتين متتاليتين . أوجد قيم هذا المتغيـــر العشـــوائي ودالـــة توزيعه الاحتمالي .

س2: أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري للتوزيع المبين في الجـــدول (6-10) :

جـــدول (6-10)

X_i	-2	0	1	3	3
$f(X_i)$	4	1	1	4	2

س3: أوجد التوزيع والتوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغيـــر X فـــي تجربة إلقاء قطعة نقود خمسة مرات ، إذا اعتبر أن X يدل على عدد مـــرات ظهور الصورة .

س4: صندوق يحتوي على 8 وحدات أنتاج من بينها وحدتان معيبتـــان ، إذا اختار رجل 3 وحدات من الصندوق . أوجد توقع عـــدد الوحـــدات المعيبـــة التي اختارها .

س5: في تجربة اختبار نوع معين من إطارات السيارات وجد أن 15% من هذه الإطارات تفشل في اجتياز هذا الاختبار . فإذا أخذت عينة عشوائية مـــن 20 سيارة فما هو احتمال أن يكون من 5 إلى 8 سيارات تفشل إطاراتها فـــي اجتياز هذا الاختبار .

obeikandl.com

س6: يلقي لاعب أربعة قطع نقود حيث يكسب خمسة دنانير إذا ظهرت الصورة ثلاث مرات وثلاثة دنانير إذا ظهرت صورتان ، وديناراين إذا ظهرت صورة واحدة ، وبالمقابل فإنه يخسر خمسة عشر ديناراً إذا ظهرت الكتابة ثلاث مرات ، أوجد قيمة هذه اللعبة بالنسبة للاعب .

س7: إذا كان X متغيراً عشوائياً له التوزيع التالي :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12} & 0 \leq x \leq x \\ 0 & \text{أخرى} \end{array} \right\}$$

س8: إذا كان X متغير عشوائي يتوزع بدالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{8} \quad , \qquad 1 \leq X \leq 5$$

فوضح أن هذه الدالة هي دالة احتمال ثم أوجد ما يلي :

a) $P(2 < X < 4)$.

b) $E(X)$, $Var(X)$.

c) $f(X)$.

س9: إذا كانت حوادث المرور في أحدى تقاطعات طرق مدينة ما تحث بمعدل أربعة حوادث في الأسبوع . أوجد احتمال وقوع خمس حوادث فقط في هذا التقاطع في أسبوع معين .

obeikandl.com

س10: إذا كان احتمال أن يصيب رجل هدف ما في مباراة خاصة بالرماية هو 0.20 ، فإذا أطلق رجل سبع مرات فما هو احتمال أن يصيب الهدف على الأقل مرتين ، وكم مرة يجب أن يطلق الهدف لكي يكون احتمال أن يصيب الهدف على الأقل مرة واحدة أكبر من 0.65 .

س11: ألقي حجر نرد زهر 200 مرة أوجد احتمال أن يظهر الرقم 6 من 31 إلى 40 من المرات بما في ذلك 31 و 40 .

س12: إذا كان المتغير العشوائي يتوزع توزيع ذو الحدين حيث أن $n = 6$ و $P = 0.4$ ، أوجد ما يلي :

a) $P(X = 2)$.

b) $P(X \geq 1)$.

c) $P(1 < X \leq 4)$.

س13: صندوق به ثلاث كرات حمراء وكرتان سوداء إذا سحبت كرة ثم أعيدت ثلاث مرات من هذا الصندوق . أوجد الاحتمالات التالية :

a) أن تكون الكرة المسحوبة كرة حمراء .

b) أن تكون كرتان من اللون الأحمر .

c) على الأقل كرة حمراء .

س14: ينتج أحد المصانع أنواع معينة من الأقفال يوجد بها 6% معيبة ، أوجد توقع عدد الأقفال المعيبة وانحرافها المعياري في تشغيلة من 3800 قفل من هذا المصنع .

س15: إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي $N(120, 46)$ ، أوجد الاحتمالات التالية :

obeikandi.com

a) $P(107 < X < 111)$.

b) $P(X > 113)$.

س16: في أحدى الامتحانات وجد أن الدرجات عبارة عن متغير طبيعي بتوقع 86 وانحراف 17 حيث يأخذ 10% من الطلبة الأوائل بالترتيب العلامة A ويأخذ 5% من الطلبة الحاصلون على أقل الدرجات بالترتيب العلامة B ، أوجد :

1) أقل درجة لكي يحصل الطالب على العلامة A .

2) أقل درجة يحصل عليها الطالب لكي يعتبر ناجحاً .

س17: إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون بمعدل أربعة ، أوجد الاحتمالات التالية :

1) $P(X \leq 3)$.

2) $P(X \geq 4)$.

3) $P(2 < X < 6)$.

س18: 250 خطأ مطبعياً موزعة توزيعاً عشوائياً في كتاب به 180 صفحة ، أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة على :

a) خطأين أو أكثر .

b) خطأين .

c) خطأ واحداً .

d) صفر من الأخطاء .

س19: أفرض أن 4% في المتوسط من الأطفال يكتبون باليد اليسرى (العسر) ، أوجد احتمال أن يوجد 5 أطفال أو أكثر من الأطفال العسر من عينة بها 100 طفل .

obeikandi.com

س20: ظهر دواء جديد لمعالجة مرض سرطان الدم معدل نجاحه 80 % أعطي هذا الدواء لـ 15 مريضاً بسرطان الدم . ما احتمال شفاء 12 منهم ، ثم ما احتمال شفاء 12 منهم على الأقل .

س21: يصيب أحد لاعبي كرة السلة 80% من رمياته من خط الرمية الحرة . ما احتمال أن يسجل إصابتين من أربعة رميات حرة .

س22: أفرض أن X متغير عشوائي وأن له التوزيع الطبيعي المعياري ، أوجد ما يلي :

a) $P(-0.81 \le X \le 1.13)$.

b) $P(0.53 \le X \le 2.03)$.

c) $P(X \le 0.73)$.

س23: أوجد قيمة كلٍ من القيم للتوزيعات التالية :

a) $t_{0.95,7}$, $t_{0.05\,,\,19}$, $t_{0.975\,,\,11}$

b) $X^2_{0.025\,,14}$, $X^2_{0.99\,,\,9}$, $X^2_{0.01\,,\,22}$

c) $F_{0.05\,,11\,,\,7}$, $F_{0.975\,\,,14\,,\,1}$, $F_{0.99\,,\,15\,,\,8}$

obeikandi.com