الـــبـــاب الخامـــس

مبـــادئ نظريـــة الاحتمـــالات

(Probabilities Principles)

1.5 مقدمـــة .

2.5 فضـــاء العينـــة .

3.5 النمـــاذج الرياضيـــة .

4.5 الاحتمـــالات القبليـــة .

5.5 الحـــدث .

6.5 احتمال الحـــدث .

7.5 التعريف التقليـــدي للاحتمـــال .

8.5 التعريف الإحصـــائي للاحتمـــال .

9.5 التعريف الحديث للاحتمـــال .

10.5 احتمال اجتماع حدثيـــن .

11.5 الاحتمـــالات المركبـــة .

12.5 قوانيـــن الاحتمـــالات .

13.5 الاحتمـــال المشـــروط .

14.5 الإحـــداث المستقلـــة .

15.5 التكـــرار النسبـــي والاحتمـــالات التجريبيـــة .

16.5 التوقـــع الرياضـــي .

17.5 قاعـــدة حســـاب القيمـــة المتوقعـــة .

18.5 التحليـــل التوافقـــي .

19.5 التباديـــل والتراتيـــب والتوافيـــق .

20.5 تمـــاريـــــن .

1.5 مقـدمــة (Introduction)

في الأبواب الســابقة تم دراسة كيفية وصف مجموعــة مــن البيانــات الإحصائيــة وتبويبها ، وطريق تمثيلها وعرضها بمدرجــات أو مضلعات أو منحنيات تكرارية . كما تم دراسة طرق حســاب المقاييس الإحصائية المختلفة وتحليلها مثل مقاييس النزعة المركزية ومنهــا الوســط الحســابي والمنــوال والوسيط ، ومقاييس والتشــتت ومنها الانحراف المعياري والتباين والانحراف المتوسط وغيرها من المقاييس .

وبعد ذلك تم التعرض لدراسة موضوع الارتباط والانحــدار لمجموعــة البيانات ، وبمعنى آخر ما تم دراستة وعرضه هو وصف لبيانات إحصــائية متوفرة لدينا ، وهذا كله يعتبر على قدر من الأهمية لمتتبع الطرق الإحصائية . أما في هذا الباب فسوف نقوم بدراسة مبــادئ نظريـــة الاحتمـــالات نظــراً لارتباطها القوي والوثيق بعلم الإحصاء في الوقت الحاضر .

وتعود بدايات نظرية الاحتمالات إلى القرن السابع عشر نتيجة لدراســة بعض الألعاب الحظ المختلفة ،على الرغم أن تاريخ نظرية الاحتمالات قــديم وكبير . الا أن هذه النظرية لم توضع لها مسلمات ألا في نهاية الثلاثينات من القرن العشرين . وأصبحت تعرف على أنها العلم الــذي يــدرس الظــواهر العشوائية ، وقد تطورت نظرية الاحتمالات تلبية لمتطلبات الحياة العملية مثلها مثل أجزاء العلوم الطبيعية المختلفة .

أن العلاقة المبنية بين نظرية الاحتمالات ومتطلبــات العلــوم الطبيعيــة الأخرى توضح بأفضل ما يمكن تلك الأسباب التي جعلت نظرية الاحتمـــالات في السنوات الأخيرة من أسرع فروع الرياضيات تقــدماً وتقــدماً . فالنتــائج النظرية الجديدة تعمل على فتح أفاقاً جديدة لاستخدام طرق نظرية الاحتمالات

في العلوم الطبيعية المختلفة ، وتقوم الدراسة الشاملة للظواهر الطبيعية بدفع نظرية الاحتمالات إلى الكشف عن قوانين ومسلمات جديدة ولدت عن طريق الصدفة .

وفي السنوات الأخيرة كبرت أهمية ارتباط نظرية الاحتمالات بعلم الإحصاء بفعل التطور الصناعي والتقني السريع . ونتيجة لذلك فقد زاد الاهتمام بنتائج نظرية الاحتمالات في تنظيم عمليات الإنتاج والتصنيع ، والرقابة الإحصائية وبذات المتعلقة بمشاكل التحقق من نوعية المنتجات ، وبالتالي ظهرت نظرية الطرق الإحصائية لرقابة القبول العميقة بمحتواها ، والهامة بتطبيقاتها العملية والمبنية على الاستخدام الواسع لنظرية الاحتمالات .

ولقد كبرت أهمية نظرية الاحتمالات بكثرة في الوقت الراهن ، حيث تدخل ألان أفكار الاحتمالات والإحصاء في أغلب الاتجاهات مثل الاقتصاد والطب وعلم النفس وإدارة الأعمال والعلوم التربوية وكافة مجالات الفروع والتخصصات الهندسية . أن الهدف الرئيسي من هذا الباب هو عرض المبادئ الرئيسية لنظرية الاحتمالات ببساطة ووضوح وذلك من خلال دراسة الظواهر الطبيعية المختلفة .

فمثلاً عندما نحصل على معدل سقوط الأمطار فوق أحد الدول خلال الثلاثين سنة الماضية ، فأنه يمكننا التحدث عن تلك الثلاثين سنة الماضية ، ولكن يبقى السؤال هو ماذا يمكننا التحدث بخصوص السنوات الثلاثين القادمة . إن المعلومات التي لدينا لا تتحدث شيئاً عن السنوات القادمة ، فهل يمكننا التنبؤ بمعدل سقوط الأمطار خلال العام القادم . وأيضا عندما نلقي قطعة من النقود مائة مرة متتالية ونجد أن عدد مرات ظهور الصورة كانت 54 مرة ، وعدد مرات ظهور الكتابة كانت 46 مرة ، فهل

يمكننا التنبؤ بشيء عن نتيجة إلقاء قطعة النقود هذه الآن . وكمثال آخر سجلت إحدى مستشفيات الولادة عدد المواليد الذكور لألف حادثة ولادة فكان العدد 495 . هل يمكن أن نقول شيئاً عن جنس المولود في حادثة ولادة جديدة ، للوصول إلى جواب حول أية من هذه الأسئلة أو أي أسئلة أخرى مماثلة يلزم دراسة مفهوم الاحتمال ونظرياته .

ويجب الإشارة إلى أنه عند اختيار عدد من العينات من " مجتمع " ما نجد أن صفات العينة تختلف من واحدة لأخرى بطريقة لا يمكن التنبؤ بها ، ونعبر عن ذلك بأن نقول إن نتائج الاختيار عشوائية أو إنها عرضة للصدفة . غير إن الباحثين قد وجدوا بالخبرة أن فكرة الاحتمالات تعطي طريقة تتضمن إجراء العديد من التجارب ذات النتائج المتوقفة على الصدفة . وقد طوّر علماء الرياضيات نظرية للاحتمالات تقدم نموذجاً رياضياً (Mathematical Model) مناسباً لوصف وتقدير فئة معينة من الظواهر المشاهدة التي تقوم على أساس الصدفة .

2.5 فضاء العينة (Sample Space)

في علم الإحصاء تستخدم كلمة تجربة للدلالة على أية عملية تقودنا إلى مجموعة من البيانات . فمثلاً عند إلقاء قطعة من النقود نجد أمامنا نتيجتين محتملتين هما " ظهور الصورة " أو " ظهور الكتابة " ، وأيضا عندما نسجل عدد الطائرات التي تهبط في مطار عمان مثلاً يومياً نجد أننا نحصل على سبعة أعداد يدل كل منها على عدد الطائرات التي هبطت في أحد أيام الأسبوع . وفي الحقيقة عندما نقوم بتجربة إحصائية ، لا نهدف إلى معرفة نتائج التجربة فحسب ، بل نتطلع من وراء هذه التجربة إلى النتائج التي نحصل عليها لو كررنا التجربة ثانيةً لعدد من المرات .

إن ظهور الصورة عند إلقاء قطعة النقود لا يدل مطلقاً على إننا لو كررنا التجربة ثانية فالصورة ستظهر بالتأكيد . وإن ظهور الصورة في الحالة الأولى هو محض صدفة ، وبالتالي لا يمكن التنبؤ بظهورها ثانية بالتأكيد عند تكرار التجربة ، أو إن امرأة ما حين تضع مولوداً ذكراً في الولادة الأولى لا يـعني مطلقاً بأنها سـتضع مولوداً ذكراً في الولادة الثانية . وكل هذا يقودنـا إلـى تعريف فضاء العينة .

يعرف " فضاء العينة " على أنه مجموعة كـل النتـائج الممكنـة لتجربـة إحصائية ما ، ويرمز لها بالحرف S ، أي أن S هو مجموعة النتـائج التـي يمكن أن نحصل عليها من تنفيذ التجربة لمرة واحدة .

فمثلا في تجربة رمي قطعة النقود لو رمزنـا مثـلاً بـالرمز " H " لظهور الصورة وبالرمز " T " لظهور الكتابة فأن فضاء العينة لهذه التجربـة يكون هو :

$$S=\{H,T\}$$

ولو رمزنـا بالرمز B للمولود الذكر و الـرمز G للمولود الأنثى في حالـة ولادة امرأة ما ، فأن فضاء العينة لهذه التجربة يكون :

$$S=\{G,B\}$$

مثـال (1-5)

نفرض أن التجربة الإحصائية هي إلقاء حجر النرد ، وأن الهدف من هذه التجربة هو الحصول على الوجه العلوي لحجر النرد ، وعليه فإن فضاء العينة يكون :

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

أما إذا كان الهدف من التجربة الاهتمام بنوع الرقم الظاهر مثلاً زوجي (Even) أو فردي (Odd) فإن فضاء العينة عندئذ سيكون :

$$S' = \{odd \ , \ even\}$$

إن المثال السابق يدل وجود أكثر من فضاء واحد للعينة يمكنه وصف النتائج التي يمكن عليها من خلال تكرار تجربة إحصائية معينة .

إن فضاء العينة S في المثال السابق يعطي معلومات أكثر مما قد نحصل عليه من فضاء العينة S' وهو فردي في هذه الحالة ، وذلك لأننا لو علمنا أن الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي عند إلقائنا لحجر النرد هو الرقم 4 مثلاً لحكمنا على أن العنصر هو من الفئة S' أما العكس فهو غير صحيح . فلو عرفنا أن الرقم الذي ظهر على الوجه العلوي لحجر النرد كان " زوجياً " فلا يمكننا قط الجزم بأنه كان الرقم 2 أو 4 الرقم أو الرقم 6 ، لذا فإنه بصورة عامة نرغب في استخدام فضاء عينة يعطينا معلومات أوسع عن النتائج الممكنة للتجربة التي ندرسها .

مثال (2-5)

نفرض أن التجربة هي إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة هو :

$$S = \{HHH, HTH, THH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

ويمكن أيضا أن يكون اهتمامنا منصباً على عدد الصور الظاهرة خلال التجربة السابقة فيكون فضاء العينة عندئذٍ هو :

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

3.5 النماذج الرياضية (Mathematical Models)

عند استخدام الرياضيات في وصف إحدى الظواهر الطبيعية تحت الدراسة ، فإننا ننشئ نموذجاً رياضياً مبسطاً للمعالم الحقائق ويكون صورة مثالية للصفات المميزة للظاهرة التي ندرسها . ومثال على ذلك هو إدخال الإنسان فكرة النقاط والحروف والخطوط والأشكال الهندسية ومن هذه وبعض البديهيات يتكون النموذج الرياضي .

وباستخدام المنطق أستنتج علماء الرياضيات النظريات الهندسية التي ما هي إلاّ نظريات عن هذا النموذج الرياضي . وفي إطار هذا النموذج نجد أن النتائج الهندسية صحيحة تماماً . فمثلاً مجموع زوايا المثلث الهندسي يساوي $180°$ بالضبط . من المعلوم أن هذا النموذج الرياضي مفيد جداً ، ولذلك ندرس الهندسة .

وكمثال آخر نأخذ قانون نيوتن الثاني للحركة والمبني على نموذج رياضي معين . والذي ينص على أنه إذا أثرت قوة (F) على جسم كتلته (m) فإنها تزيد سرعته في اتجاه تأثيرها بمقدار(a) كل ثانية حسب العلاقة الآتية :

$$F = m\,a$$

ويتكون النموذج الرياضي هنا من الأعداد التي تمثل مقادير القوة (F) والكتلة (m) والعجلة (a) مع العلاقة التي تربطها . أما القانون فينص على أن هذا النموذج الرياضي يمكن أن يستعمل لوصف ظواهر طبيعية معينة . ومع أن إثبات هذا القانون رياضياً مستحيل ، ألا التجربة قد أثبتت فائدته إلى حد كبير جداً .

ويلاحظ أن قانون نيوتن الثاني للحركة يحدد قيم (a) أي معدل زيادة السرعة بالنسبة للزمن عندما تكون قيمتي القوة المؤثرة على الجسم(F) وكتلة الجسم (m) معلومة ، ولذلك نقول عن النموذج الرياضي الذي بني قانون نيوتن على أساسه على أنه نموذج تحديدي (Determinitiate) . وفي دراسة الميكانيكا والفيزياء الطبيعية (Physics) ، كثيراً ما ننشئ نماذج رياضية من هذا النوع . وعندما يكون من الضروري معرفة توزيع الحرارة المنتقلة خلال أحد الأجسام الصلبة فلا بد من الوصول إلى نموذج رياضي مناسب يوضح كيفية هذا التوزيع .

على أنه غالباً ما تقابلنا ظواهر يكون من الصعب فيها ارتباط المتغيرات مع بعضها بحيث تجعل من الصعب الحصول على نموذج رياضي تحديدي ، كالذي أستنتج في قانون نيوتن الثاني للحركة . ومع ذلك ففي مثل هذه الحالات نجد أنه من المفضل إنشاء نموذج رياضي تتوقف فيه النتيجة على الصدفة ، وبذلك نجد أنفسنا في بداية طريق يقودنا إلى ما نسميه النماذج الاحتمالية (Probability Models) .

4.5 الاحتمالات القبلية (Priority Probabilities)

عند دراسة واحداً من أبسط الأمثلة على تجارب الصدفة وهو إلقاء قطعة نقود في الهواء كما أوضحنا سابقاً . يكون من الواضح أنه لا يمكن لأحد أن يتنبأ بالنتيجة ، أن كانت هل تظهر الصورة أو الكتابة على الوجه الأعلى ، فإذا فرضنا أن القطعة سليمة وأنها ستلقى كيفما أتفق فليس هناك ما يجعلنا نتوقع ظهور أحد الوجهين أكثر مما نتوقع ظهور الوجه الآخر . وهنا ننشئ نموذجاً رياضياً تتساوى فيه فرصة ظهور الصورة والكتابة ونتصور فيه هذا التساوي للفرص بأن نخصص فيه عددين متساويين في النتيجة .

وإذا ما أخذنا بعين الاعتبار أن يكون مجموع العددين يساوي 1 فإن العدد المخصص لكل نتيجة نسميه احتمال هذه النتيجة . ويكون في هذه الحالة احتمال ظهور الصورة يساوي $\frac{1}{2}$ واحتمال ظهور الكتابة يساوي $\frac{1}{2}$ أيضاً .

وكمثال آخر على تجارب الصدفة ندرس تجربة إلقاء حجر النرد حيث يكون لدينا 6 نتائج ممكنة وهي ظهور الأعداد 1 , 2 , 3 , 4 , 5 و 6 على الوجه العلوي للنرد ، ولا يمكن بطبيعة الحال التنبؤ بالنتيجة مقدماً . ولكن إذا أفترضنا أن الحجر سليم وأنه سيلقى كيفما أتفق فليس هناك ما يجعلنا نتوقع ظهور أحد الأعداد أكثر مما نتوقع ظهور العدد الآخر ، ومنه ننشى نموذجاً رياضياً تتساوى فيه فرصة ظهور أي من الأعداد الستة 1 , 2 ,......, 6 مع أي عدد آخر منها ونصور هذا التساوي للفرص أي نخصص أعداداً مساوية للنتائج الستة .

وإذا راعينا أن يكون مجموع هذه الأعداد يساوي 1 فإن العدد المخصص لكل نتيجة نسميه احتمال هذه النتيجة ، ويكون احتمال ظهور العدد 1 يساوي احتمال ظهور العدد 2 يساوي احتمال ظهور العدد 6 ويساوي $\frac{1}{6}$.

ولا بد أن كلاً منا قد لاحظ أن النموذج الذي أنشأناه في كل من المثالين السابقين مبني على اعتبارات لا تتضمن تجربة فعلية . ففي المثال الأول نجد أن الاحتمال يوجد قبل إلقاء قطعة النقود أي في الواقع بدون أي إلقاء لقطعة النقود . وفي المثال الثاني أوجدنا الاحتمال قبل إلقاء حجر الزهر ، والاحتمالات التي من هذا النوع تسمى الاحتمالات القبلية ومن الواضح أنها مبنية على أفكار رياضية . ولا يمكننا إلا بالتجربة وحدها أظهار فيما إذا كان للاحتمال القبلي أي معنى في مثل الحالات التي سبق الإشارة إليها .

على أننا كثيراً ما نواجه حالات لا تؤدي فيها الاعتبارات القبلية إلى تعريف كامل لنموذج احتمالي . فمن المستحيل مثلاً إيجاد احتمال أن ماكينة معينة سوف تنتج سلعة معيوبة قبل مشاهدة أداء تلك الماكينة ، وهذا ما يجعلنا ندخل نوعاً آخراً من الاحتمالات مبنياً على اعتبارات ما بعد المشاهدة وهو ما يسمى الاحتمالات التجريبية (Empirical Probabilities) وسنقوم بدراستها لاحقاً . أما حالياً فسنقوم بدراسة الاحتمالات القبلية .

عند إجراء إحدى محاولات أو تجارب الصدفة فإن الحاصل (Result) يكون أحد النتائج الأولية (Elementary Outcomes) ، فمثلاً عندما نقوم بإلقاء حجر النرد يكون الحاصل هو 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 وعند إلقاء قطعة نقود في الهواء يكون الحاصل أحد النتيجتين الأوليتين صورة وكتابة وعند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب الكوتشينة نجد أن هناك 52 نتيجة أولية يكون الحاصل واحداً منها .

مثال (5 -3)

أفرض أن لدينا كيساً به ثلاث كرات إحداها بيضاء والأخرى صفراء والثالثة زرقاء . وكانت التجربة تتكون من سحب كرتين عشوائياً من الكيس . أن النتائج الممكنة هي سحب الكرتين البيضاء والصفراء وسحب الكرتين الصفراء والزرقاء وسحب الكرتين الصفراء والزرقاء وإذا رمزنا للكرة البيضاء بالرمز W (White) وللكرة الصفراء بالرمز Y (Yellow) وللكرة الزرقاء بالرمز B (Blue) ، وإذا رمزنا للنتيجة الأولى على شكل زوج ثنائي مرتب هو (W,Y) وللنتيجة الثانية بالرمز (W,B) وللنتيجة الثالثة بالرمز (Y,B) فإن فضاء العينة S هو :

$$S=\{(W,Y),(W,B),(Y,B)\}$$

5.5 الحــدث (Event)

يعرف الحدث على أنه مجموعــة محــددة مــن العناصــر فــي فضــاء العينة S لتجربة من تجارب الصدفة . فمثلاً في المثال (5-1) نجد أن الحدث هو عدد زوجي يتكون من مجموعة العناصر $\{2,4,6\}$. وفي المثال (5-3) نجد أن الحدث :

$$\{(W,B),(Y,B)\}$$

هو الحدث الذي يقع عند ظهور الكرة الزرقاء في السحب .

وإذا ما أجريت التجربة وكان الحاصل إحدى النتائج الأولية التي يتكــون منها الحدث لقلنا أن الحدث قد وقع أو نجح ، وألا فإننا نقول أن الحدث لم يقع أو قد فشــل فمثلاً في المثال (5-1) إذا ظهر العدد 2 أو العدد 4 أو العــدد 6 لقلنا أن الحدث عدد زوجي قد وقع .

ويجب أن نلاحظ أن مجموعة النتائج الممكنة التي يتكون منها الحدث يمكن أن توصف بإحدى طريقتين :

a) بوضعها في قائمة مثل الحدث $\{2,4,6\}$ كما في المثال (5-1) .
b) بذكر خاصية مشتركة بينها كأن نقول عدد زوجي في نفس المثال .

مثــال (5-4)

في المثال (5-1) إذا رمزنا للعدد الذي يظهر على الوجه العلوي بالرمز x من قبل الحدث $|x>4|$ هو الحدث $\{5,6\}$.

أن الأمثلة السابقة تقودنا إلى التعريفات الهامة التالية :

1- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .

2- الحدث الابتدائي هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ذات عنصر وحيد وقد يدعى بالحدث البسيط (Simple Event) .

مثـــال (5-5)

في تجربة إلقاء ثـــلاث قطع نقود أو قطعة واحدة ثلاث مرات متتاليــة إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة على إحدى القطع والكتابة على القطعتــين الباقيتين حيث :

$$A = \{ HHT, THH, TTH \}$$

والحدث B هو جميع الوجوه ذات شكل واحد حيث :

$$B = \{ TTT, HHH \}$$

من المهم الملاحظة هــنا أنه عــند إجراء التجربة الإحصائية مرة واحدة فقط فأننا نحصل على نتيجة واحدة فقط . فمثلاً لو كانت النتيجة التي حصــلنا عليها هي x فإننا نقول عن الحدث الابتدائي $\{ x \}$ بأنه قد وقع ، كما نقول عن أي حادث تنتمي إليه بأنه قد وقع .

فمثـــلاً لو رمينا حجر النرد وظهر الرقم 3 على الوجه العلوي فإننا نقول عن الحدث :

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

بأنه قد وقع .

كذلك الحال بالنسبة للحدث :

$$B = \{3,6\}$$

أو الحدث :

$$C = \{3,4,5\}$$

لنفــرض أن A و B حدثين موافقــين لتجربة إحصائية ما . بمعنى آخر A و B فئتين جزئيتين من فضاء عينة ما S فإن A/B هو حــدث أيضــاً وكذلك AUB .

إن الحدث A/B هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع كــل مــن A و B بينما الحدث AUB فهو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع أي من الحادثين A أو B أي بمعنى أبسط أن يقع أحدهما على الأقل .

مثــال (6-5)

في تجربة سحب ورقة من أوراق الكوتشينة وعددها52 ورقة . لو فرضنا أن A الحــدث الــذي يــقع إذا كانــت الــورقة المســحوبة تحمــل الرقم 3 . و فرضنا أن B هو الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة من النوع الديناري فأن :

(A/B) - هو الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة تحمــل العــدد 3 ونوعها ديناري .

(AUB) - أما الحدث فهو يعني إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل الرقم 3 أو نوعها ديناري .

ولقد أشرنا أن الحدث هو أي فئة أو مجموعة جزئية من فضاء العينة S وأن هذا الحدث يقع إذا وفقط إذا كانت نتيجة التجربة " وهـو عنصر واحـد مـن فضاء العينة " تنتمي إلى هذا الحادث وحيث إن :

$$S \subseteq S$$

فإن S هو حدث أيضاً وهو مؤكد الحدوث لأن أية نتيجة نحصل عليها مـن تنفيذ التجربة تنتمي إلى S وذلك حسـب تعريف فضاء العينة S ، لذا فأن هذا الحدث يسمى بالحـادث الأكيـد أو المؤكـد . كـذلك نعلـم بـأن الفئـة الخالية ϕ محتـواة في أية مجموعة أي أن :

$$\phi \subseteq S$$

لذا فأنها تعتبر حدث ولكن وقوعه مستحيلاً لأن نتيجة التجربة لا تنتمي إلى ϕ مهمـا تكـن هـذه النتيجـة ، لـذلك نـدعوه بالحـادث المستحيل(Impossible Event) .

وهذا يقودنا إلى تعريف الإحداث المتنافية حيث أنه يقال عـن الحـدثان اللذان يستحيل وقوعهما معاً يدعيان "حادثين متنافيين " إذا كان :

$$A / B = \phi$$

مثال (5-7):

في تجربة رمي زهر النرد لنفرض أن الحادث A الذي يقع إذا كان الناتج رقماً زوجياً و B هو الحادث الذي يقع إذا كان الناتج عدداً فردياً فإن :

$$A = \{2,4,6\}$$

وأن الحدث :

$$B = \{1,3,5\}$$

وبالتالي فإن :

$$A / B = \phi$$

وعلى هذا الأساس فإن الحادثين A و B متنافيان .

أما الحدثان المتتامان (Complementary Events) فهما الحادثان اللذان يقع أحدهما إذا وفقط إذا لم يقع الآخر . أي أن الحدث A والحدث B متتامان إذا وفقط إذا كان :

$$A / B = \phi$$

وحيث :

$$AUB = S$$

أي أن :

$$B = S - A = \overline{A}$$

مثـــال (5-8)

الحدثـــان المذكوران في المثال الســـابق متتامان . وكـــذلك الحـــال فـــي المثال (5-3) حيـــث أن الحدث M يقع إذا وفـــقط إذا ظهرت صورتان على الأقل والحدث N يقع إذا وفقط إذا ظهرت صورة واحدة على الأكثـــر همـــا حادثان متتامان لأن :

$$M = \{ HTH , HHT , THH , HHH \}$$
$$N = \{ HTT , THT , TTH , TTT \}$$

وواضح أن :

$$M / N = \phi$$

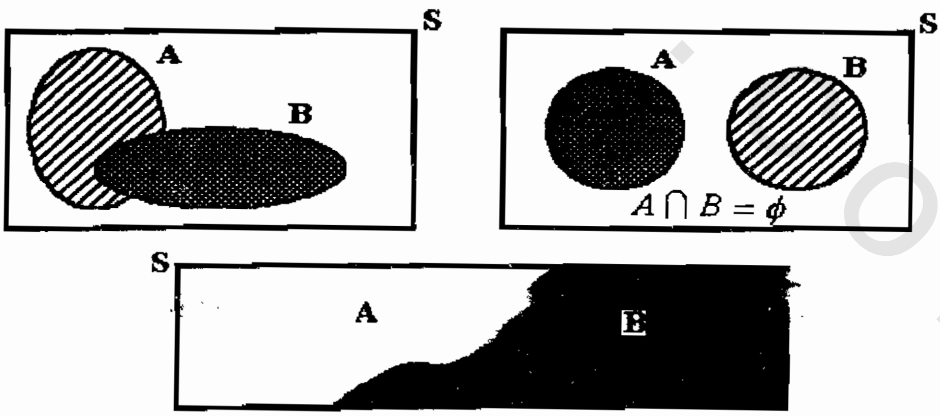
وحيث أن :

$$MUN = S$$

أي أن :

$$\overline{M} = N$$

ومــن الممكــن توضــيح فضــاء العينــة والحــوادث بأشــكال فــن (Venn Diagrams) ، حيث يمكن تمثيل فضاء العينة S بمستطيل وتمثيــل الحوادث بدوائر أو أشكال هندسية أخرى منتظمــة مثلــث ، شــبه منحــرف وغيرها ، واقعة داخل هذا المستطيل أو بمناطق جزئية من هذا المستطيل كما يوضح الشكل (5-1) .



الشكــل (5-1)

تمثيــل الحــوادث بأشكــال فــن

6.5 احتمــال الحــدث (Probability of the Event)

لقد أشرنا سابقاً أن الباحث الإحصائي يهتم عادةً بالوصول إلى قرارات أو استنتاجات من التجارب التي يجريها ، ويهتم بأن يكون اســتنتاجه أو قــراره معقولاً إلى درجة ما ، لذا ينبغي أن يلم بالقواعد الأساسية لمفهوم الاحتمال .

ولأجل ذلك ندرس العبارات التي عادة ما نسمعها يومياً مثل احتمال فوز فريق بكرة القدم على فريق آخر ضمن بطولة الدوري هو 0.7 . واحتمال أن يكون المولود القادم ذكراً هو 0.6 ، أو احتمال أن يتعين في وظائف أكثر من نصف خريجي العام الحالي هو 0.4 .

إن كل من العبارات السابقة تعبر عن نتيجة غير مؤكدة لتجربة إحصــائية معينة ، لكن فهمنا لطبيعة التجربة واعتمادنا على معلومات سابقة مكونة مــن دراستنا لمجموعة بيانات إحصائية حول مثل هذه التجربة يجعلنا على درجــة من اليقين تتيح لنا الحكم بالنتيجة المقبلة . لذا سنقوم بــذكر ثــلاث تعــاريف لمفهوم الاحتمال تعتمد جميعها على مفهوم فضاء العينة S والحدث A .

7.5 التعريف التقليدي للاحتمال (Probability's Classical Definition)

أشرنا سابقاً أن نظرية الاحتمالات هي نظرية دراسة التجارب العشــوائية وقد بدأت من الناحية التاريخية بدراسة بعض العاب الحــظ مثــل الروليــت والورق ، فإذا رمي حجر النرد في الهواء فمن المؤكد أنه سوف يسقط علــى الأرض ولكن ليس من المؤكد مثلاً أن العدد 6 سوف يظهر ، ولكن أذا فرضنا أننا كررنا هذه التجربة في رمي حجر النرد وأن S هو عدد مرات النجاح أي

عدد مرات ظهور العدد 6 ، وأن n هو عدد رميات حجر النرد فقد لوحظ تجريبياً أن النسبة $f = S / n$ والتي تسمى بالتكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما ، حيث يعتبر هذا الاستقرار هو أساس نظرية الاحتمالات .

ولقد عرف الاحتمال P لحدث A كلاسيكياً كما يلي : أن كان الحدث A يمكن أن يقع بطرق عددها n من بين طرق كلية عددها s بشرط أن تكون لهذه الطرق نفس الفرصة في الوقوع فأن :

$$P(A)=\frac{s}{n}$$

فمثلاً عند ألقاء حجر النرد فأن الأعداد الفردية يمكن أن تقع بثلاث طرق من ست طرق لها نفس فرصة الوقوع ، إذ أن $P = 3/6 = 1/2$. وهذا التعريف التقليدي أو الكلاسيكي للاحتمال هو بالضرورة تعريف دائري ، إذ أن تعبير له نفس فرصة الظهور هو تعبير له نفس الاحتمال .

وعليه عندما تكون النتائج الأولية لإحدى المحاولات أو تجارب الصدفة محدودة العدد ونكون متفقين على أنها متساوية الوقوع (Equally Likely) أي يكون لها نفس الفرصة في الوقوع فإننا نخصص لكل حدث مثل (A) عدداً نسميه احتمال وقوع أو نجاح A كما يلي :

$$\text{احتمال وقوع (A)} = \frac{\text{عدد النتائج الأولية التي يتكون منها}}{\text{عدد النتائج الأولية في التجربة}}$$

أو :

$$P(A) = \frac{M}{M+N} \quad ....(1-5)$$

حيث إن :

P (A) - احتمال وقوع الحدث (A)

M - عدد النتائج الأولية التي يتكون منها الحدث (A) .

N - عدد النتائج الأولية التي لا يتكون منها الحدث (A) .

أما الحدث الذي يتكون من النتائج الأولية التي لا تدخل في (A) ، فإننا نسميه الحدث($\bar{A}$) ومن الواضح أن وقوعه يعني الفشل أو عدم حصول الحدث وبذلك يكون :

$$\text{احتمال وقوع } (\bar{A}) = \frac{\text{عدد النتائج الأولية التي لا تدخل في A}}{\text{عدد النتائج الأولية في التجربة}}$$

أو :

$$P(\bar{A}) = \frac{N}{M+N} \quad ....(2-5)$$

ومن تعريف احتمال وقوع (A) واحتمال عدم وقوعه نجد المسلمة التالية :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad .... \quad (3-5)$$

ومن هذه المسلمة نحصل على النتيجتين التاليتين :

النتيجة الأولى : احتمال وقوع حادث مستحيل الوقوع يساوي صفر .

النتيجة الثانية : احتمال وقوع حادث مؤكد الوقوع يساوي الواحد .

مثـــال (5-9)

عند سحب ورقة لعب من أوراق الكوتشينة التي عددها 52 فإن احتمـــال وقوع الحادث A الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الورقة المسحوبة دينارية هو :

$$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

كما أن احتمال وقوع الحادث B الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل الرقم 5 هو:

$$P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

أما احتمال أن لا تكون الورقة المسحوبة تحمل الرقم 5 :

$$P(\overline{B})=\frac{40}{52}=\frac{12}{13}$$

8.5 التعريف الإحصائي للاحتمال
(Statistical Definition of Probability)

أن ما يعيب التعريف الكلاسيكي التقليدي للاحتمال أن عبارة " كـل منهـا له نفس الفرصة في الظهور " هي عبارة غامضة نوعاً ما ، وقد تبـدو أنهـا مرادفة للعبارة " كلٌ منها له نفس الاحتمال " وبذلك نكون قد عرفنا الاحتمال بدلالة نفسه . ولهـذا فـإن الـبعض يلجـأ عـادةً إلـى إعطـاء الاحتمـال تعريفاً إحصائياً بحتاً .

وهذا كله ما يقودنا إلى التعريف الذي أشرنا إليه سابقاً وهو إن احتمال حدث ما هو التكرار النسبي لوقوع هذا الحدث عندما يكون عدد المشاهدات كبيراً جداً أي أنه نهاية التكرار النسبي لوقوع هذا الحادث عندما يؤول عدد المشاهدات إلى المالانهاية .

مثال (5 -10)

إذا ألقيت قطعة نقود 1000 مرة وحصلنا على 529 صورة فإن التكرار النسبي للصورة هو :

$$\frac{529}{1000} = 0.529$$

ثم إذا قذفنا قطعة النقود 1000 مرة أخرى وحصلنا على 493 صورة فإن التكرار النسبي للصورة في 2000 رمية هو :

$$\frac{493 + 529}{2000} = 0.511$$

وإذا قمنا بتكرار التجربة مرات ومرات فإننا نقترب أكثر فأكثر من عدد نسميه احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة لقطعة النقود .

ونلاحظ هنا أننا نقترب من العدد 0.5 ، بعد أجراء كل تجربة ، ولكن للوصول إلى عدد دقيق يجب إعادة التجربة مرات ومرات .

9.5 التعريـف الحديـث للاحتمـال
(The Modern Definition of Probability)

إن التعريف الإحصائي يـبدو مفيداً من الناحية العمليـة ، لكنـه صـعب التحقيق من وجهة النظر الرياضية لأنه يتطلب تكرار التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات للوصول إلى نهاية للتكرار النسبي وقد لا نصل أحياناً إلـى هـذه النهاية . كما إن اعتماد التعريف التقليدي يتطلب فضاء عينة عناصرها كلهـا متساوية الاحتمال .

إن التعريف الحديث للاحتمال هو فرضي بحـت (Purely Axiomatic) حيث يجب أن نذكر أولاً تعريف التابع الاحتمالي (Probability Function) لفضاء عينة فئة . فمثلاً لتكن S فضاء عينة ما ولتكن P هي دالة من مجموعة أجزاء من S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R فإن P يسمى تابعاً احتماليـاً إذا حققت الشروط التالية :

مهما يكن :

$$A \leq S$$

فإن :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

وإن :

$$P(S) = 1$$

من أجل حدثين متنافيين مثل A و B فإن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots (4-5)$$

وذلك بفرض S فضاءاً منتهياً ، أي نو عدد محدد من العناصر ، واعتمادا على التعريف السابق وبفرض S ذات عدد n من العناصر وهي x_1, x_2, k, x_n ، ويمكن أن نستنتج أن :

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5-5)$$

فإذا كانت جميع الحوادث الابتدائية $\{x_i\}$ متساوية الاحتمال فإن :

$$P(x_i) = \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6-5)$$

وبالتالي فإن احتمال حدث A عدد عناصره k هو :

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

كما ينتج مباشرة من هذا التعريف أن :

$$P(\phi) = 0$$

مثــال (5-11)

عند إلقاء قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين أوجد احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل .

الحــل :

بما أن قطعة النقود متوازنة فإن احتمال ظهور الكتابة وظهور الصورة متساويا الإمكانية في الظهور أي إن فضاء العينة هو :

$$S = \{ HH , HT , TH , TT \}$$

وعناصر S كلها متساوية الاحتمال ، إن الحدث الذي يقع إذا ظهرت صـــورة واحدة على الأقل هو :

$$A = \{ HH , HT , TH \}$$

وبالتالي فإن :

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

مثـــال (12-5)

عائلة لديها ثلاثة أطفال ، ما احتمال أن يكون عددهم صبيان وبنت علمـــاً أن للبنت وللصبي نفس الفرصة بالولادة .

الحـــل :

نقوم بوضع فضاء العينة S حيث :

$$S = \{ GGG, GGB, GBG, BGG, GBB, BGB, BBG, BBB \}$$

إن الحدث المطلوب هو :

$$A = \{ GBB, BBG, BGB \}$$

وبالتالي احتمال أن يكون لهذه العائلة صبيان وبنت :

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

مثـــال (5-13)

ألقي زهر نرد بطريقة ما بحيث أن فــرصة ظهور العدد الزوجي تساوي ضعف فرصة ظهور العدد الفردي . ما هو احتمال الحدث A الــذي يقــع إذا وفقط إذا كان الناتج أقــل من 4 ، وما هو احتمال الحدث B الذي يقع إذا وفقط إذا كان الناتج يقبل القسمة على 3 ، ثم ما هو احتمال الحدث C الذي يقــع إذا وفقط إذا كان الناتج عدداً زوجياً .

الحــل :

إن فضاء العينة S هو :

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

فإذا فرضنـــا أن فــرصة ظهور العدد الفردي هي x ، فإن احتمـــال ظهــور العدد الزوجي ستكون 2 x وبالتالي فإن :

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

$$1 = x + 2x + x + 2x + x + 2x \Rightarrow \quad \therefore 1 = 9x \quad \rightarrow \therefore x = \frac{1}{9}$$

وعلى هذا الأساس فإن الحدث هو :

$$A = \{ 1,2,3 \}$$

واحتماله هو :

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

أما الحدث B أي ظهور عدد يقبل القسمة على ثلاثة فهو :

$$B = \{ 3 ,6 \}$$

واحتماله هو:

$$P(B) = P(\{3\}) + P(\{6\})$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

والحادث C أي إذا كان الناتج عدد زوجي هو :

$$C = \{ 2,4,6 \}$$

واحتماله هو :

$$P(C) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$$
$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

10.5 احتمـــال اجتمـــاع حادثيـــن
(Probability of the Union of Two Events)

مبرهنة 1:

ليكن A و B حادثين غير متنافيين أي أن $A/B \neq \phi$ فإن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A/B) \quad ....(7-5)$$

البرهـــان :

إن الحدث A والحدث $B-(A/B)$ حدثان متنافيان فإن :

$$AUB = AU\left[B-(A/B)\right]$$

وبالتالي فإن:

$$(1)\,P(AUB) = P(A) + P\left[B-(A/B)\right]$$

ولكن A/B و $B-(A/B)$ حادثان متنافيان :

$$B = (A/B)U\left[B-(A/B)\right]$$

إذن :

$$(2)\,P(B) = P(A/B) + P\left[B-(A/B\right]$$
$$\therefore P\left[B-(A|B)\right] = P(B) - P(A/B)$$

من (1) و(2) نستنتج أن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A|B)$$

مثـــال (5 – 14)

ســـحبت ورقة لعب من شـــدة عدد أوراقها 52 . ما هو احتمال أن تكون ديناريه أو ملك .

الحــل :

ليكن A الحدث الــذي يقــع إذا وفقــط إذا كانــت الورقــة المســحوبة دينارية ، و B الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الورقة المســحوبة هي ملك وبالتالي فإن A/B هو الحادث الذي يقع إذا وفقط إذا كانت الورقة المسحوبة ملك ديناري .

أن احتمال الحدث A هو :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

واحتمال الحدث B هو :

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

وأن :

$$P(A/B) = \frac{1}{52}$$

وعلى هذا الأساس فإن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A/B)$$

$$\therefore P(AUB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{13+4-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

11.5 الاحتمـــالات المركبـــة (Compound Probabilities)

في كثير من الأحيان قد تتكون التجربة من تجربتين بسيطتين ، فمثلاً قــد نقوم عند أجراء التجربة البسيطة رمي قطعة نقود ، بأجراء التجربة البســيطة رمي حجر النرد ، وبذلك نحصل على التجربة المركبة أو الاحتمالية المركبة وهي " رمي قطعة نقود ورمي حجر النرد بنفس الوقت " ، وإذا رمزنا للتجربة البســيطة الأولى بالرمز C_1 ، والتجربة البســيطة الثانية بــالرمز C_2 فــإن التجربة المركبة تكون هي الزوج المرتب $(C_1 \;,\; C_2)$. وهنا يجــب أتبــاع القواعد التالية :

القاعــدة الأولى :

إذا أمكن أن يكون للتجربة C_1 نتائج عــددها n_1 ، والتجربــة C_2 نتــائج عددها n_2 ، فإنه يكون للتجربة المركبة C_1, C_2 نتائج عددها $n_1 \times n_2$. فمثلاً للتجربة " رمي قطعة نقود " نتيجتان هما " صورة وكتابة " وللتجربــة رمــي زهر النرد 6 نتائج فإذا رمزنا للصورة بالرمز x والكــتابة بــالرمز y فــإن للتجربة المركبة نتائج عددها 2 x 6 وهي :

$$(x,1),(x,2),(x,3),(x,4),(x,5),(x,6)$$
$$(y,1),(y,2),(y,3),(y,4),(y,5),(y,6)$$

حيث أن (x,1) تعني الصورة على ظهــر قطعة النقــود والعــدد 1 عـــلى الحجر ، وهكذا (y,2) يعني ظهور الكتابة على ظهر قطعة النقود والعــدد 2 على الحجر . كذلك إذا ألقي حجرا نرد زهر معاً فإن لهذه التجربــة المركبــة نتائج عددها 36 وهي موضحة في الجدول (1-5) .

جـــدول (5-1)

نتائــج التجربـــة المركبـــة من رمـــي حجري نرد زهر

(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 3)	(1 , 4)	(1 , 5)	(1 , 6)
(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 3)	(2 , 4)	(2 , 5)	(2 , 6)
(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 3)	(3 , 4)	(3 , 5)	(3 , 6)
(4 , 1)	(4 , 2)	(4 , 3)	(4 , 4)	(4 , 5)	(4 , 6)
(5 , 1)	(5 , 2)	(5 , 3)	(5 , 4)	(5 , 5)	(5 , 6)
(6 , 1)	(6 , 2)	(6 , 3)	(6 , 4)	(6 , 5)	(6 , 6)

حيـــث أن x , y تعني ظهور العدد x على الزهـــر الأول والعـــدد y علـــى الزهر الثاني .

القاعدة الثانية :

إذا كان للتجربة C_1 نتائج أوليـــة متســـاوية فرصـــة الوقـــوع عـــددها n_1 وللتجربة C_2 نـــتائج متســـاوية فرصة الوقوع عددها n_2 فإن النتائج الأولية للتجربة المركبة " C_2 , C_1 " والتي عددها $n_2 \times n_1$ تكون أيضا متساوية فـــي فرص الحدوث والوقوع .

مثـــال (5 – 15)

يلقي لاعب حجري نرد معاً مرة واحدة . أوجد احتمال أن يحصل علـــى مجموع أقل من 4 أو أكثر من 10 .

الحــل :

يكون المجموع أقــل من 4 أو أكثر من 10 إذا ظهر على أحد الوجهين العلويين للحجرين عددان كمـا فـي أحـد الحـالات السـتة المبينـة فـي الجدول (5-2) .

الجـدول (5-2)

العدد على الحجر الأول	1	1	2	5	6	6
العدد على الحجر الثاني	1	2	1	6	5	6
المجموع	2	3	3	11	11	12

عدد النتائج الأولية للتجربة يساوي $6 \times 6 = 36$ ، ومن هذه النتائج المتساوية الإمكان حسب القاعدة السابقة توجد 6 احتمالات ينجح فيها الحادث " المجموع أقل من 4 أو أكثر من 10 " . ومنه يكون الاحتمال المطلوب يساوي :

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

12.5 قوانيــن الاحتمــالات (Probabilities Laws)

1.12.5 قانــون جمــع الاحتمــالات (Addition Law)

تعريــف

يقال للحدثين A و B أنهما مانعان بالتبادل (Mutually Exclusive) إذا كان وقوع أحدهما يتنافى مع وقوع الآخر . ومن الواضح أن هــذا يعنــي أن

الحدث A والحدث B يسميان مانعين بالتبادل إذا كانت النتائج التي يتكون منها A لا تتداخل في النتائج التي يتكون منها B .

فمثـــلاً إذا ألقي زهر النرد فإن النتائج (3,1) لا تتداخل مع النتائج $\{6,4,2\}$ لذا فإن الحدث $\{odd\ number\}$ أو عدد فردي والحدث $\{even\ number\}$ أو عدد زوجي مانعان بالتبادل .

ومن الواضح أنه إذا كان A و B مانعان بالتبادل فإن عدد النتـــائج فـــي الحدث AUB أي $A \vee B$ ، تعني A أو B وهي أحد أدوات الربط المنطقيـــة يساوي مجموع عدد النتائج في A وعدد النتائج في B . ففي مثال إلقاء حجـــر النرد نجد أن عدد نتائج الحادث فردي أو زوجي يساوي 3 + 3 = 6 ومن هذا سوف ينتج أن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) \quad \text{.......... ....}(8-5)$$

أما إذا كان الحدثين غير مانعين بالتبادل فإن :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{..................}(9-5)$$

13.5 الاحتمـــال المشروط (Conditional Probability)

ذكرنا أنه توجد في أساس احتمال مجموعة معينة من الظروف . وأن لـــم تكن هناك أية ظروف أخرى عند حساب الاحتمال لحدث ما مثل A ما عـــدا الظروف الأساسية المذكورة سابقاً فـــان هـــذه الاحتمـــالات تســـمى عندئـــذ بالاحتمالات اللاشرطية (Unconditional Probability) .

ولكن نضطر في بعض الحالات إلى أيجاد الاحتمال بشرط أضافي ينحصر في وقوع الحدث B . وتسمى مثل هذه الاحتمالات بالاحتمالات الشرطية (Conditional probability) ، ويرمز لها بالرمز P(A / B) وهذا يعني احتمال الحدث A بشرط وقوع الحدث B . وفي الحقيقة عند الحديث بصورة دقيقة ، فأن الاحتمالات اللاشرطية هي أيضاً احتمالات شرطية لأنه عند بناء نظرية الاحتمالات أفترض وجود مجموعة معينة ثابتة من الشروط .

لنفرض أن شخصاً ألقى زهر نرد ثم أخبرنا أن العدد الذي ظهر زوجي ، فما هو احتمال أن يقبل هذا العدد القسمة على 3 . لنفرض أن الحدث A هو الحدث الذي يمثل{عدد يقبل القسمة على 3} ، وليكن B هو الحدث الذي يمثل {عدد زوجي} ، والسؤال المطروح ما هو احتمال وقوع الحادثA مع العلم بأن B قد وقع .

وسنرمز لهذا الاحتمال بالرمز $P(A/B)$ ويعني احتمال A بفرض أن الحدث قد وقع B ، أو بعبارة أخرى الاحتمال المشروط للحدث A عند وقوع B ونسميه احتمالاً شرطياً .

فمثلاً عند إلقاء حجر النرد نجد أن الحدث{عدد زوجي} له النتائج 2 ,4 ,6 وعددها 3 ، والحدث{يقبل القسمة على 3} له النتائج 3 , 6 .

إذن الحادث {عدد زوجي ويقبل القسمة على 3} له النتيجة 6 وعددها 1 ، فعلى فرض تساوي فرص الوقوع فإن :

$$P(\text{3 يقبل القسمة على} \mid \text{زوجي}) = \frac{\text{عدد نتائج \{عدد زوجي ويقبل القسمة على 3\}}}{\text{عدد نتائج \{عدد زوجي\}}} = \frac{1}{3}$$

وبصورة عامة فإنه إذا كان A و B هما حادثين غير مانعين بالتبادل أو غير متنافيين كما تم الإشارة سابقاً فإن :

$$P(A/B)=\frac{P(A/B)}{P(B)} \quad \text{..............................}(10-5)$$

$$\therefore P(A/B)=P(B).P(A/B) \quad \text{........................}(11-5)$$

مثـــال (16-5)

توجد ثلاثة أكياس متشـــابهة بها كرات بعضها أبيض والآخر أسود . في الكيس الأول 30 كرة وفي الثاني 20 كرة وفي الثالـث 10 كـرات . عـدد الكرات البيضاء في كل كيس 5 بالضبط . وقد اختير أحد الأكياس كيفما أتفق وسحبت منه كرة . أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكـيس الأول وتكون بيضاء في نفس الوقت .

الحـــل:

احتمال أن تكون الكرة من الكيس الأول يساوي $\frac{1}{3}$ ، وذلك بفـرض تسـاوي فرص السحب لكل من الأكياس الثلاثة . أما احتمال سحب كرة بيضـــاء مـــن الكيس الأول فيساوي :

$$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

على هذا الأســـاس فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة مـــن الكـــيس الأول وبيضاء هو :

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

مثـــــال (17-5)

في أحدى الكليات الهندسية وجد أن 25% من الطلبة رســبوا فــي مــادة مقاومة المواد ، ووجد أيضا أن 15% من الطلبة رسبوا في مادة الرياضيات ، وأن 10% رسب في مادتي مقاومة المواد والرياضيات . إذا اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية فأوجد ما يلي :

1- احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات إذا كان راسباً في مقاومة المواد .
2- احتمال أن يكون راسباً في مقاومة المواد إذا كان راسباً في الرياضيات .
3- احتمال أن يكون راسباً في المادتين أي في مقاومة المواد والرياضيات .

الحـــل :

نفرض أن الحدث A هو الرسوب في مادة مقاومة المواد . والحدث B هو الرسوب في مادة الرياضيات ، فيكون لدينا :

$$P(A)=0.25$$
$$P(B)=0.15$$
$$P(A\cap B)=0.10$$

أولاً : احتمال أن يكون الطالب راسباً في مقاومة المواد علماً بأنه راسباً فــي الرياضيات هو احتمال مشروط يمكن الحصول عليه كما يلي :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{0.10}{0.15}=\frac{2}{3}$$

ثانياً : احتمال أن يكون الطالب راسباً في الرياضيات علماً بأنه راسب في مادة مقاومة المواد هو :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}$$

ثالثاً : أما احتمال أن يكون راسباً في المادتين فهو :

$$P(A \cup B) = P(A) + (B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.25 + 0.15 - 0.10$$
$$= 0.3$$

أن هذا المثال يقودنا إلى تعريف نظرية الضرب للاحتمال المشروط ، ففي العلاقة المستخدمة في حل المثال السابق نجد أن :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

إذا ضربنا الطرفين في الوسطين نحصل على العلاقة التالية :

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A/B)$$

وتسمى هذه العلاقة بنظرية الضرب للاحتمال المشروط ، ويمكن تعميم هـذه النظرية بالاستنتاج الرياضي التالي :

لأي مجموعة من الإحداث مثل A_1 , A_2 .... , A_n :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) ....P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ...... A_{n-1})$$

مثـــال (5-18)

صندوق يحتوي على 12 كرة سلة ، منها 4 كرات معيبة ، إذا اختيـــرت بطريقة عشوائية ثلاث كرات من هذا الصندوق واحدة تلو الأخـــرى ، أوجـــد الاحتمال P أن تكون الثلاث كرات سليمة .

الحـــل :

أن احتمال أن تكون الكرة الأولى سليمة يساوي 8/12 ، حيث أن هناك 8 كرات سليمة من بين 12 كرة موجودة في الصندوق . إذا كانت الكرة الأولـــى سليمة فأن احتمال أن تكون الكرة الثانية سليمة يساوي 7/11 حيث أن هناك 7 كرات فقط سليمة من بين 11 كرة باقية في الصندوق .

إذا كانت الكرة الأولى والكرة الثانية سليمتين فأن احتمال أن تكون الكـــرة الأخيرة سليمة هو 6/10 حيث أن هناك 6 كرات فقط ســـليمة مـــن بـــين 10 وحدات باقية في الصندوق . أذن باستخدام نظرية حاصل الضرب للاحتمـــال المشروط نجد أن :

$$P = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

أن دراسة الاحتمال المشروط ونظرية الضرب للاحتمال المشروط تقودنا إلى دراسة التجزيئات ونظرية " العالم بييز " والتي تتضمن ما يلي :

نفرض أن الأحداث A_1 , A_2 ...., A_n تمثل مجموعات جزئية لفضاء العينة S ، أي أن الأحداث متنافية واتحادهما يعطينا فضاء العينة S ، ونفرض أن الحدث B هو أي حدث آخر فيكون :

$$B=S\cap B=(A_1\cup A_2\cup.......\cup A_n)\cap B$$
$$=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup......\cup(A_n\cap B)$$

وبما أن الأحداث $A_i\cap B$ متنافية أذن :

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+.............+P(A_n\cap B)$$

وباستخدام نظرية حاصل الضرب للاحتمال المشروط نجد أن :

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+.......+P(A_n)P(B/A_n)$$

ومن ناحية أخرى لكل i يكون الاحتمال المشروط للحدث A_i عند وقوع B هو :

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

وللوصول إلى نظرية العالم بييز سوف نقوم بالتعويض في هذه المعادلة عن P(B) من العلاقة السابقة ونعوض عن $P(A_i\cap B)$ بالمقدار $P(A_i)P(B/A_i)$.

نظرية بييز :

نفرض أن الأحداث A_1 , A_2 .... , A_n تمثل مجموعات جزئية لفضاء العينة S ، أي تجزيئي لفضاء العينة S ، ونفرض أن الحدث B هو أي حدث آخر فيكون لكل i :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) P(B / A_i)}{P(A_1) P(B / A_1) + P(A_2) P(B / A_2) + ... + P(A_n) P(B / A_n)}$$

أن هذه النظرية تعتبر من النظريات والقواعد الهامة في علم الاحتمالات . والمخطط العام لاستخدام هذه النظرية في حل المسائل العملية هو أن نفرض أنه يمكن أن يجري الحدث B في ظروف مختلفة ، ويمكن لطبيعتها وضع n من الفرضيات A_1 , A_2 .... , A_n . ولسبب من الأسباب عرفنا الاحتمالات $P(A_i)$ ، ونعلم أيضا أن الفرضية A_i تكسب الحدث B احتمالا مقداره $P(B / A_i)$. وأجريت تجربة وقع فيها الحدث B فأن هذا يقودنا في النهاية إلى أعادة تقدير احتمالات الفرضيات A_i ، حيث تقوم نظرية بييز بحل هذه المسألة من الناحية الكمية وأن الأمثلة الآتية سوف توضح لنا أهمية هذه النظرية في التطبيقات العملية .

مثال (5-19)

في أحد المراكز الخاصة بالتدريب البدني وجد أن 4% من الطلبة الرجال و 1% من الطلبة النساء أطول من 1.75m . وكان 60% من طلبة هذا المركز من النساء . فإذا اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية ووجد أنه أطول من 1.75m . أوجد احتمال أن يكون ها الطالب امرأة .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو أطول من 1.75m ، والمطلوب هو أيجاد احتمال أن يكون الطالب المختار امرأة بمعلومية أنه أطول من 1.75m أي المطلوب إيجاد P(W/A) . من نظرية بييز يمكننا إيجاد الاحتمال المطلوب حيث :

$$P(W/A)=\frac{P(W)P(A/W)}{P(W)P(A/W)+P(M)P(A/M)}$$
$$=\frac{(0.60)(0.02)}{(0.60)(0.02)+(0.40)(0.40)}$$
$$=\frac{3}{11}=0.27$$

وهذا هو احتمال أن يكون الطالب المختار بطريقة عشوائية امرأة وأطول من 1.75m .

مثـــال (5-20)

في شركة صناعية كبرى متخصصة بصناعة الرقائق الكترونية تنتج ثلاث ألآلات A , B , C على التوالي 60% ، 30% ، 4% مــن الإنتــاج الكلــي للشركة . فإذا كان نسبة أنتاج الرقائق المعيبة لهذه الآلات هي علـــى التـــوالي 2% ،3% ،4% . فإذا اختيرت رقيقة الكترونية بطريقة عشوائية ووجدت أنها معيبة . أوجد احتمال أن تكون هذه الرقيقة من أنتاج الآلة C .

الحـــل :

نفرض أن الحدث M هو أن تكون الرقيقة معيبة . والمطلوب إيجـــاد أن الرقيقة من إنتاج الآلة C ، أي أيجاد P(C/M) . باســـتخدام نظريــــة بييــــز نجد أن :

$$P(C/M)=\frac{P(C)P(M/C)}{P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)}$$
$$=\frac{(0.10)(0.04)}{(0.60)(0.02)+(0.30)(0.30)+(0.10)(0.04)}$$
$$=\frac{4}{25}=0.16$$

مثـــال (5-21)

ثلاثة صناديق A , B , C ، في الصندوق الأول A ثلاثة كرات حمـــراء وخمسة كرات بيضاء ، في الصندوق الثاني B كرتان من اللون الأحمر وكرة بيضاء ، وفي الصندوق الثالث C كرتان من اللون الأحمر وثلاثة كرات مـــن بيضاء . إذا اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه كرة ووجد أن الكرة حمراء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الأول A .

الحـــل :

من معطيات السؤال نجد أننا نبحث عن احتمال الصندوق A بمعلومية أن الكرة حمراء . أي أن المطلوب إيجاد P(A/R) . من أجل إيجاد هذا الاحتمال أي P(A/R) ، يجب علينا أولاً حساب P(A∩R) ، P(R) ، أن احتمـــال أن يكون الصندوق الأول A قد اختير وأن تكون الكرة الحمراء قد ســـحبت منـــه يساوي :

$$\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$$

أي أن :

$P(A\cap R) = 1/8 = 0.125$

وحيث أنه توجد ثلاث طرق تؤدي إلى ظهور كرة حمراء فأن احتمـــال P(R) يمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5} \\ &= \frac{173}{360} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

ومنه نجد الاحتمال المطلوب وهو $P(A \cap R)$:

$$\begin{aligned} P(A / R) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0.125}{0.48} \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

كما يمكن أيجاد قيمة الاحتمال المطلوب أي أن يكون الصندوق الأول A قـد اختير بمعلومية أن الكرة حمراء باستخدام نظرية بييز حيث أن :

$$\begin{aligned} P(A / R) &= \frac{P(A)P(R / A)}{P(A)P(R / A)+P(B)P(R / B)+P(C)P(R / C)} \\ &= \frac{(0.33)(0.375)}{(0.33)(0.375)+(0.33)(0.6)+(0.33)(0.4)} \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

وهكذا حصلنا على نفس قيمة الاحتمال باستخدام نظرية بييز .

14.5 الإحداث المستقلــة (Independent Events)

يقال لمجموعة من الأحداث بأنها مستقلة إذا كان وقوع أحــدهما أو عــدم وقوعه لا يؤثر في وقوع أي من باقي الأحداث . ومعنى هــذا أنـــه يقـــال أن الحدث B مستقل عن الحدث A إذا كان احتمال حدوث B لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث A أو بمعنى آخر إذا كان احتمال B يساوي الاحتمال المشـــروط للحدث B عند وقوع الحدث A : P(B/A) . وبالتعويض عن قيمة P(B/A) بالمقدار P(B) في نظرية حاصل الضرب :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$$

ومنه نحصل على :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

وسوف نستخدم هذه العلاقة في التعريف الرياضي للاستقلال الحوادث حيث :

* يقال للحدثان A , B أنهما مستقلان إذا تحقق الشرط :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط قيل أنهما غير مستقلين .

يتضح من التعريف مباشرة أن الحادثين A و B مستقلان إذا كان :

$$P(A/B) = P(B).P(A) \quad \text{.....................................} (12-5)$$

وذلك لأن :

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B) = P(B).P(A)$$

كما نلاحظ أن الشرطين :

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{و} \quad P(A/B) = P(A)$$

متكافئان لأن :

$$P(A/B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

فأحدهما يقضي بحدوث الآخر أي عند التعويض عن قيمة أحدهما في المعادلة أعلاه سوف نجد قيمة الآخر .

مثـــال (5-22)

صندوق فيه 20 مصباح كهربائي5 منها تالفة . سحبنا عشوائياً مصباحين على التـــوالي دون إعادة . ما هــو احتمال أن يكون كلا المصباحين تالفين .

الحـــل :

نفرض أن الحادث A الذي يقع إذا وفقط إذا كان المصباح الأول تالفــاً ، ومن الواضح أن :

$$P(A/B) = P(A)$$

لأنه لا علاقة بين تــلف المصباح الأول وتلف المصباح الثـــاني إذن يتحقــق الشرط :

$$P(A/B) = P(B).P(A)$$

وبما أن :

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{4}{19}$$

$$\therefore P(A/B) = P(A).P(B)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$$

لاحظ أنه لو كان المصباح بعد سحبه يعاد إلى الصندوق ثم يعاد إلى السحب ثانية بعد إعادة ترتيب المصابيح عشوائياً فإنه عندئذٍ نحصل على :

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A/B) = P(A).P(B)$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

مثـال (5-23)

في تجربة أطلاق على هدف ما إذا كان احتمال أن يصيب الشخص الأول A يساوي 0.25 ، واحتمال أن يصيب الشخص الثاني B هو 0.4 . ما هو احتمال إصابة الهدف إذا صوب كل من A , B نحو الهدف مرة واحدة .

الحـل :

من معطيات السؤال نجد أن لدينا :

$P(A) = 0.25$
$P(B) = 0.40$

ونلاحظ أيضا أن احتمال أن يصيب A أو احتمال أن يصيب B لا يتأثر بنتيجة الآخر ، وذلك يعني أن الحدث A يصيب الهدف مستقل عن الحدث B يصيب الهدف أي أن :

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned} P(AUB) &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \\ &= 0.25 + 0.4 - (0.25 \times 0.4) \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن احتمال إصابة الهدف إذا صوب كل من A و B نحو الهدف مرة واحدة يساوي 0.55 .

مثال (5-24)

إذا كان احتمال أن يعيش رجل 15 سنة أخرى هو 0.25 ، واحتمال أن تعيش زوجته 15 سنة أخرى هو 0.33 أوجد :

1- احتمال أن يعيش الزوج والزوجة 15 سنة أخرى .
2- احتمال أن يعيش احدهماعلى الأقل 15 سنة أخرى .
3- احتمال أن يموت الاثنان خلال الخمسة عشر سنة .
4- أن تعيش الزوجة 15 سنة .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو أن يعيش الرجل 15 سنة ، والحدث B أن تعيش الزوجة 15 سنة وعليه فأن :

$P(B) = 0.33$ ، $P(A) = 0.25$

1- لإيجاد احتمال أن يعيش الزوج والزوجة 15 سنة أخرى يجب علينا البحث عن $P(A \cap B)$ ، وحيث أن الحدثان مستقلان فأن :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$= 0.25 \times .033 = 0.083$$

2- احتمال أن يعيش أحداهما على الأقل يعني أنه يجب البحث عن $P(AUB)$ حيث :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.25 + 0.33 - 0.083 = 0.49$$

3- أما احتمال أن يموت الاثنان خلال 15 سنة فيعني أنه يجب أيجاد $P(A^c \cap B^c)$ حيث أن :

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1- 0.25 = 0.75$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1- 0.33 = 0.66$$

وحيث أن A^c , B^c حدثان مستقلان أيضاً فأن :

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\,P(B^c)$$
$$= 0.75 \times 0.66 = 0.49$$

4- أما احتمال أن تعيش الزوجة 15 سنة فيعني أنه يجب البحث عن $P(A^c \cap B)$ ، وحيث أن $P(A^c) = 0.75$ ، والحدثان A^c ، B مستقلان فأن :

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)\,P(B)$$
$$= 0.75 \times 0.33 = 0.247$$

مثـــال (5-25)

في مسابقة رماية للسيدات على هدف متحرك إذا كان احتمال أن تصـــيب ثلاث سيدات هو 0.15 ، 0.25 ، 0.35 على التوالي . وكان كل منهم يصوب مرة واحدة على الهدف فأوجد :

1- احتمال أن تصيب سيدة واحدة منهم فقط الهدف .
2- احتمال أن تكون السيدة الأولى هي التي أصابت الهدف إذا أصيب الهـــدف من قبل سيدة واحدة فقط .

الحـــل :

نفرض أن الحدث C هو السيدة الأولى تصيب الهدف ، وأن الحدث D هو السيدة الثانية تصيب الحدث ، والحدث E هو السيدة الثالثة تصـــيب الحـــدث وعليه فأن :

$$P(C)=0.15 \quad , \quad P(D)=0.25 \quad , \quad P(E)=0.35$$

وهذه الإحداث الثلاثة مستقلة ، ونجد أيضا أن :

$$P(C^c)=0.85 \quad , \quad P(D^c)=0.75 \quad , \quad P(E^c)=0.65$$

أولاً : نفرض أن الحدث W هو حدث سيدة واحدة تصيب الهدف أذن :

$$W=(C\cap D^c\cap E^c)\cup(C^c\cap D\cap E^c)\cup(C^c\cap D^c\cap E)$$

أي أنه إذا كانت سيدة واحدة فقط قد أصـــابت الهـــدف فـــلا بـــد أن تكـــون الأولى فقط أي :

$(C \cap D^c \cap E^c)$

أو أن تكون السيدة الثانية فقط أي :

$(C^c \cap D \cap E^c)$

أو أن تكون السيدة الثالثة أي :

$(C^c \cap D^c \cap E)$

وبما أن هذه الأحداث الثلاثة متنافية فإننا نحصل على احتمال أن تصيب سيدة واحدة منهم الهدف هو :

$$\begin{aligned}P(W) &= P(C \cap D^c \cap E^c) \cup P(C^c \cap D \cap E^c) \cup P(C^c \cap D^c \cap E)\\ &= P(C)P(D^c)P(E^c) + P(C^c)P(D)P(E^c) + P(C^c)P(D^c)P(E)\\ &= (0.15)(0.75)(0.65) + (0.85)(0.25)(0.65) + (0.85)(0.75)(0.35)\\ &= 0.073 + 0.138 + 0.223\\ &= 0.44\end{aligned}$$

ثانياً : أما احتمال أن تكون السيدة الأولى هي التي أصابت الهدف فقط فأنه يعني أن علينا البحث عن $P\ (C/W)$ وهو احتمال أن تصيب السيدة الأولى الهدف بمعلومية أن سيدة واحدة قد أصابت الهدف ، وحيث أن :

$$C \cap W = C \cap D^c \cap E^c$$

هو حدث إصابة السيدة الأولى فقط للهدف ، فأن احتمال ذلك يساوي :

$$\begin{aligned}P(C \cap W) &= P(C \cap D^c \cap E^c)\\ &= 0.073\end{aligned}$$

أما احتمال أن تصيب الهدف سيدة فقط P(W) فقد تم حسابه في المطلوب الأول ويساوي 0.44 ، وعليه نجد الاحتمال المشروط والمطلوب حيث :

$$P(C \cap W) = \frac{P(C \cap W)}{P(W)}$$

$$= \frac{0.073}{0.44} = 0.17$$

مثـــال (5-26)

تطلق طائرة صورايخ ضد أهداف معينة ، إذا كان احتمال إصابة الهـدف لهذه الصواريخ يساوي 0.4 فما هو عدد الصواريخ التي يجب إطلاقها لكـي يكون احتمال إصابة الهدف المطلوب على الأقل 90% .

الحــل :

نفرض أن A هو حدث إصابة الهدف ، وعليه فأن $P(A) = 0.4$ ، ومنه فأن احتمال عدم إصابة الهدف هو $P(A^c) = 0.6$. لذا لإيجـاد احتمـال أن يخطأ عدد من الصواريخ n هو $(0.6)^n$ ، لذلك يجب علينـا أن نبحـث عـن أصغر عدد صحيح n بحيث يكون :

$$1-(0.6)^n > 0.9$$

أو أن :

$$(0.6)^n < 0.1$$

$$(0.6)^1 = 0.6\ ,\ (0.6)^2 = 0.36\ ,\ (0.6)^3 = 0.21\ ,\ (0.6)^4 = 0.13,\ (0.6)^5 = 0.07$$

وهكذا يجب أن يكون عدد الصواريخ اللازم إطلاقها خمسة لكي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 90% .

15.5 التكــرار النسبــي والاحتمـــالات التجريبيـــة
(Relative Frequency and Empirical Probabilities)

أشرنا سابقاً إلى أنه لوحظ تجريبياً أن النسبة $f = s/n$ ، والتـــي تســـمى التكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما ، ويعتبر هذا الاستقرار هو أساس نظرية الاحتمالات . وأن الأمثلة التالية سوف تساعدنا عـــلى فهم فكرة الاحتمالات التجريبية .

مثـــال (5 -27)

لندرس بعض الافتراضات التالية :

a) تتكون أسرة معينة من أب وأم و 4 أطفال دون سن 16 سنة .

b) وتعيش هذه الأسرة في قرية فيها 400 طفل دون سن 16 سنة .

c) وتقع هذه القرية في محافظة بها 400,000 طفل دون سن 16 سنة .

أوجد نسبة الذكور من الأطفال في كـــل مـــن a , b , c فـــي كـــل مـــن الافتراضات الثلاث الموجودة .

الحـــل :

يمكن أن نبني الحكم على مشاهداتنا السابقة ، حيث أنه لابد أن كـــلاً منـــا شاهد أسرة كل أطفالها من الذكور وأخرى كل أطفالها من الإنـــاث وغيرهـــا وعليه فـــأن نســـبة الـــذكور أمـــا أن تكـــون صـــفراً أو 25 % أو50% أو 75 %، 100% ، وأخرى كل أطفالها من الإناث وغيرها .

في الافتراض الثـاني لا نســـتطيع أن نصدق بناءً على مشـــاهداتنا السابقة أن يكون جميع أطفال القرية ذكوراً أو جميعهم إناثاً بل لا نستطيع أن نصـــدق أن نسبة الذكور من أطفال القرية هي 25 % أو 75 % ، حيث نتوقع أن تكون

نسبة الذكور واقعة بين 45 % - 55 % مثلاً من أطفال القرية ما لم تحدث هجرة للأطفال الذكور أو الأطفال الإناث .

وفي الافتراض الثالث إذا قيل لنا أن نسبة الذكور في المحافظة 54 % أو 46 % فأن ذلك سوف يكون غريباً نوعا ما حيث أننا ننتظر أن تكون النسبة قريبة جداً من 50 % أو 51 % .

ومن دراستنا للإحصائيات السابقة ومن مشاهداتنا نعرف أنه كلما زاد عدد الأسر التي تأخذ بيانات عنها ، كلما اقتربت نسبة الذكور لجميع هؤلاء الأطفال من نسبة 50 % أو 51 % ، حيث تبدو هذه النسبة طبيعية وسوف لن تكون غريبة ، حتى ولو وجدنا فيها ابتعادا كبيراً عن هذه القيمة بخصوص أسرة معينة .

مثال (5 - 28)

لندرس الافتراضات التالية :

a) يبلغ عمر رجل معين 40 عاماً .

b) ويعيش هذا الرجل في قرية بها 75 رجلاً في نفس السن .

c) تقع القرية في محافظة بها 75,000 في نفس السن .

فكم ننتظر أن يكون عدد الأحياء من الرجال الموجودين بعد مضي سنة في كل من الافتراضات السابقة .

الحل :

في الافتراض الأول لا نستطيع أن نجزم بشيء فقد يعيش الرجل إلى العام القادم وقد يموت قبل ذلك . وفي الافتراض الثاني لن نستغرب إذا مات واحد مثلاً من الرجال خلال سنة . ولكننا لا نتوقع موت نسبة كبيرة منهم في سنة واحدة إلاّ إذا حدثت كارثة .

أما في الافتراض فإننا نميل إلى الاعتقاد بأن نسبة معينة من رجال المحافظة الذين عمرهم اليوم 40 سنة تماماً سيموتون خلال سنة . فلو كانت هذه النسبة مثلاً تساوي (0.006) ، لوجدنا أن عدد الوفيات يساوي :

$$75000 \times \frac{6}{1000} = 450$$

مثال (5-29)

في أحد المعاهد المهنية العليا قام طلبة ثلاثة فصول بإجراء تجربة ، حيث قام كل طالب برمي قطعة نقود فضية في الهواء وعندما استقرت القطع تم إحصاء عدد القطع التي كان بوجهها العلوي صورة . وقد كرر كل طالب هذه التجربة 10 مرات ، وهذا يكافئ رمي الطالب قطعة نقود 100 مرة ، وكانت النتيجة كما موضحة في الجدول(5-3) .

جدول (5-3)

نتائج مشاهدة لتجارب قطعة نقود

الفصل	عدد الطلبة	عدد الرميات	عدد الصور	نسبة الصور
الأول	232	232000	11821	% 50.9
الثاني	325	325000	16582	% 51.0
الثالث	152	152000	7450	% 49
ثلاثة فصول	709	709000	35853	% 50.6

فما الذي يمكننا أستنتاجه من هذه التجربة .

الحــل :

من الواضح أنه إذا كــان عدد رميات قطعة نقود من النوع الذي أجريــت عليه التجربة كبيراً فإن ظهــور الصورة في أعلى القطعة بعد استقرارها يميل إلى الحدوث في نصف الرميات تقريباً . وهذا ما يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريــف

إذا تعرض حدث للتجربة لعدد n من المرات وكانت نتيجة كل تجربة هي أن يــقع الحادث أو لا يقع ، وكــانت s هــي عــدد مــرات وقوعــه فــإن النسبة f = s/n تسمى التكرار النسبي(Relative Frequency) لوقوع الحدث في هذه المجموعة من التجارب أي أن :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث}}{\text{عدد مرات تعرض الحدث للتجربة}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13\text{-}5)$$

ويبين الجدول (5 -4) التكرار النسبي لظهور الصورة في تجربة رمي قطعــة النقود وظهور الصورة .

جدول (5 – 4)

التكرار النسبي لظهور الصورة في عدد من محاولات إلقاء قطعة النقود

الفقرة	الفصل الأول	الفصل الثاني	الفصل الثالث	الفصول الثلاثة
عدد التجارب (n)	232000	325000	152000	709000
عدد مرات الوقوع (ω)	11821	17450	16582	35853
التكرار النسبي ($\frac{w}{n}$)	0.509	0.510	0.490	0.506

وقد أدت هذه الاعتبارات والافتراضات أي استباق الحدث قبل وقوعه إلى ظهور ما يسمى بنظرية التكرار والتي تنص على أنه إذا تعرض حدث لتجربة لعدة مرات فإنه يمكن أخذ قيمة التكرار النسبي كتقدير لقيمة احتمال وقوع ذلك الحدث . إن الاحتمالات بهذا المعنى تدعى " الاحتمالات التجريبية " ونلاحظ أن القيم المستنتجة تساوي تقريباً الاحتمالات القبلية التي تم عرضها سابقاً .

16.5 التوقع الرياضي (Mathematical Expectation)

قبل لبدء بدراسة التوقع الرياضي يجب علينا توضيح مفهوم المتغير العشوائي (RandomVariable) . نفرض أن S فضاء عينة لتجربة ما ، وأردنا تخصيص عدد معين لكل ناتج ، مثل طول عمر مصباح كهربائي بالأيام ، مجموع العددين عند إلقاء حجري الزهر وغيرها ، حيث نلاحظ مما سبق دراسته أن نواتج التجربة أي نقط المعاينة في S لا تكون أعدادا دائماً .

ويسمى مثل هذا التخصيص بشكل عام بالمتغير العشوائي ، و يرمز له بالرمز X ويعرف على أنه دالة من S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R ، بحيث تكون الصورة العاكسة لأي فترة من مجموعة الأعداد الحقيقة R حدثاً في فضاء العينة S . ويجب الإشارة هنا إلى أنه إذا كان فضاء العينة S فضاءً متقطعاً حيث تعرف كل مجموعة جزئية حدثاً فأن كل دالة حقيقية على S هي متغير عشوائي .

فلو كان X هو متغير عشوائي معرف على فضاء العينة S بحيث تكون صورته مجموعة منتهية X(S) :

$$X(S) = \{ x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots, x_n \}$$

ووجدنا من $X(S)$ فضاء احتمال بتعريف احتمال x_i على أنه $P(X = x_i)$ ويكتب عادة على شكل دالة $f(x_i)$ ، وتسمى هذه الدالة f المعرفة على $X(S)$ $f(x_i)=P(X=x_i)$ بدالة التوزيع أو دالة الاحتمال المتغير X وتعطى عـــادة على صورة جدول وتحقق دالة التوزيع f الشروط التالية :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

$$(2) \quad f(x_i) \geq 0$$

وكان X متغيراً عشوائياً له دالة توزيع فأن التوقع أو القيمة المتوقعة للمتغيـــر X والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ يعرف حسب العلاقة التالية :

$$E(X)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+\ldots\ldots\ldots+x_n f(x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

ويمكن أيضا تعريف التوقع الرياضي $E(X)$ على أنه الوسط المـــرجح أو المقيم للقيم الممكنة للمتغير العشوائي ، حيث ترجح كل قيمـــة مـــن المتغيـــر باحتمالها . أن مفهوم ومعنى التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة ستتوضح أكثر من خلال حلول الأمثلة والتجارب التالية .

مثـــال (5-30)

توجد قطعة نقود معدنية مثقلة من أحد وجهيها بحيث إذا رميـــت مـــرات عديدة ظهرت الصورة في 0.3 من الرميات وظهرت الكتابة فـــي 0.7 مـــن الرميات . وقد أتفق A مع B على أن يرمي طفل قطعة النقود ويأخذ B مـــن A مبلغ مقداره خمسون ديناراً إذا ظهرت الصورة ، ولا يأخذ شيئاً إذا ظهرت الكتابة فإذا أعيدت التجربة لعدة مـــرات فمـــا هـــو متوســـط المبلـــغ الـــذي يأخذه B في الرمية .

الحــل :

إذا رميت قطعة النقود عدد n من المرات وكانت S كبيرة بدرجة كافية ، يكون عدد مرات ظهور الصورة يساوي 0.3S . إذن مجموع مــا يأخــذه B يساوي $50 \times 0.3S$ ، وبالقسمة على S يكون متوسط ما يأخذه B في الرمية الواحدة هو :

$$\frac{0.3\,S \times 50}{S} = 50 \times 0.3 = 15$$

ويسمى هذا المتوســط بالقيمة المتوقعة (Expected Value) وهــو المبلــغ الذي يأخذه A من B في الرمية . في هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً – للتجربة نتيجتان ممكنتان وهما :

ظهور الصورة واحتمال حدوث هــذه النتيجــة 0.3 أو ظهــور الكتابــة واحتمال حدوث النتيجة الأخرى 0.7 .

ثانياً – ربطنا المبلغ خمسون دينــار بظهــور الصــورة ولــم نــربط شــيئاً بظهور الكتابة .

ثالثاً – وجدنا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه B من A يساوي 0.3×50 أي يساوي المبلغ الذي ربطناه بظهور الصورة x احتمال ظهور الصورة .

مثــال (5-31)

في المثال السابق إذا أتفق كل من C وD على أن يرمي طفل قطعة النقود المذكورة ويأخذ C من D مبلغ خمسون ديناراً إذا ظهرت الصورة ، ومبلغ 20 ديناراً إذا ظهرت الكتابة . فإذا أعيدت هذه التجربة مرات عديــدة فمــا هــو متوسط المبلغ الذي يأخذه C من D في الرمية الواحدة .

الحـل :

إذا رميت قطعة النقود عدد n من المرات وكانت n كبيـرة يكـون عـدد مرات ظهور الصورة يساوي $0.3\,n$ وعدد مرات ظهور الكتابـة يسـاوي $0.7\,n$ فأن مجموع ما يأخذه C يساوي :

$$50 \times 0.3\,n + 20 \times 0.7\,n$$

وبالقسمة على n يكون متوسط ما يأخذه C في الرمية يساوي :

$$0.7 \times 20 + 0.3 \times 50 = 14 + 15 = 29$$

إن هذا المتوسط هو ما نسميه القيمة المتوقعة وهو المبلغ الذي يأخذه C في الرمية وفي هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً - للتجربة نتيجتان ممكنتان :

ظهور الصورة واحتمال حدوث هـذه النتيجـة 0.3 أو ظهـور الكتابـة واحتمال حدوث النتيجة الأخرى 0.7 .

ثانياً - ربطنا المبلغ 50 دينار باحتمال ظهور الصورة وربطنا المبلغ 20 دينار باحتمال ظهور الكتابة .

ثـالثـاً - وجدنـا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه C من D يساوي :

$$0.7 \times 20 + 0.3 \times 50$$

أي ما يعادل المبلغ الذي ربطناه باحتمال ظهور الصورة ضرب احتمال ظهور الصورة مضافاً إليه المبلغ الذي ربطناه باحتمال ظهور الكتابة ضرب احتمال ظهور الكتابة .

مثـــال (5-32)

أتفق شخصان A , B على رمي حجر نرد عادي بحيث يأخـــذ الشـــخص الأول A من الشخص الثاني B عدداً من الدنانير يساوي مربع العـــدد الـــذي يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد . فإذا أعيدت هذه النتيجة لعدة مرات فكم هو متوسط المبلغ الذي يأخذه الشخص الأول من الشخص الثاني في الرمية .

الحـــل :

إذا أعيدت التجربة لعدد n من المرات وكانت n كبيرة بدرجة كافية فإننـــا نتوقع أن تكون عدد مرات ظهور العدد1 يساوي :

$$\frac{1}{6}n$$

إذن مجموع ما يأخذه الشخص الأول A عند ظهور العدد 1 يساوي :

$$1^2 \times \frac{1}{6}n$$

وبالمثل مجموع ما يأخذه الشخص الأول A عند ظهور العدد 2 يساوي :

$$2^2 \times \frac{1}{6}\, n$$

إذن مجموع ما يأخذه الشخص الأول A في n من الرميات يعادل التالي :

$$1^2 \times \frac{1}{6}n + 2^2 \times \frac{1}{6}n + 3^2 \times \frac{1}{6}n + 4^2 \times \frac{1}{6}n + 5^2 \times \frac{1}{6}n + 6^2 \times \frac{1}{6}n$$

وبالقسمة على n نحصل على :

$$1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$$
$$=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{6}+16\times\frac{1}{6}+25\times\frac{1}{6}+36\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{9}{6}+\frac{16}{6}+\frac{25}{6}+\frac{36}{6}$$
$$=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}$$
$$=\frac{91}{6} \quad =15\frac{1}{6}$$

وهذا المتوسط يمثل المبلغ الذي يأخذه الشخص الأول A من الشخص الثاني B . وفي هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً – للتجربة 6 نتائج محتملة الظهور وهي العدد 1 أو العدد 2 ,....., أو العدد 6 واحتمال ظهور أي من هذه النتائج يساوي $\frac{1}{6}$.

ثانياً – ربطنا بظهور أي عدد مبلغاً من القروش يساوي مربع هذا العدد .

ثالثاً – وجدنا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه الشخص الأول A من الشخص الثاني B يساوي القيمة :

$$1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$$

أي يساوي المبلغ الذي ربطناه بظهور العدد 1 ضرب احتمال ظهور العدد 1 مضافاً إليه المبلغ الذي ربطناه بظهور العد 2 ضرب احتمال ظهور العدد 2 +..............+ المبلغ الذي ربطناه بظهور العدد 6 ضرب احتمال ظهور العدد 6 .

مثــال (5-33)

في تجربة سحب ورقة بورقة من مجموعة أوراق الكوتشينة بدون إعــادة الورقة المسحوبة حتى تظهر صورة الولد السـباتي . أوجـد متوسـط عـدد الأوراق التي تسحب حتى تظهر تلك الصورة .

الحـل :

نفرض تساوي فرص السحب لكل أوراق المجموعة . حيث أنه يوجد 52 ورقة في مجموعة أوراق اللعب ، فإن احتمال ظهور الصورة المسحوبة فـي أي سحب معين يساوي $\frac{1}{52}$ ومعنى هذا إذا اعتبرنا أن سحب ورقة بورقة من مجموعة أوراق اللعب لغاية ظهور الولد ألسباتي تجربة ، فإنــه إذا أجريـت التجربة لعدد مساوي لـــ n من المرات فإننا نتوقع ما يلي :

ظهور الصورة المطلوبة في مرة واحدة $\frac{1}{52}S$ مـن التجـارب أو ظهـور الصورة المطلوبة بعد :

$$2\times\frac{1}{52}\,S$$

أو بعد :

$$3\times\frac{1}{52}\,S$$

وهـكذا لغايـــة الوصول إلى :

$$52\times\frac{1}{52}\,S$$

فيكون المجموع يساوي :

$$1\times\frac{1}{52}S+2\times\frac{1}{52}S+3\times\frac{1}{52}S+\ldots\ldots\ldots\ldots+52\times\frac{1}{52}S$$

وبالقسمة على S يكون متوسط الأوراق المسحوبة في التجربة لغاية ظهور صورة الولد السباتي مساوي إلى :

$$1\times\frac{1}{52}+2\times\frac{1}{52}+3\times\frac{1}{52}+4\times\frac{1}{52}+\ldots\ldots\ldots\ldots+52\times\frac{1}{52}$$

$$=\frac{1}{52}+\frac{2}{52}+\frac{3}{52}+\frac{4}{52}+\frac{5}{52}+\ldots\ldots\ldots+\frac{52}{52}$$

$$=\frac{1378}{52}=26\frac{26}{52}=26.5$$

17.5 قاعدة حساب القيمة المتوقعة

(Expected Value Approximation Rule)

من البند السابق نجد أنه إذا ربطت قيمة ما n بحدث A احتمال وقوعه P فإن القيمة المتوقعة للحدث يساوي الاحتمال x.P(A) عدد مرات الوقوع n ، وقد استخدم نمط التوقع (Expectation) بدلاً من القيمة المتوقعة .

وعليه إذا ربطت القيم $n_1 , n_2 , n_3 \ \mathrm{K}\ \mathrm{K}\ , n_m$ بالأحداث A_m , ... A_3 , A_2 , A_1 فإن التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة تعطى حسب العلاقة التالية :

$$E=P_1(A).n_1+P_2(A).n_2+\ldots\ldots+P_m(A).n_m\ldots\ldots\ldots\ldots(14-5)$$

وهكذا نجد من هذه العلاقة أن التوقع الرياضي E هو الوسط المرجح أو المقيم للقيم الممكنة للمتغير العشوائي ، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها كما تم الإشارة إليه سابقاً .

مثال (5-34)

إذا ألقي حجر نرد مرة واحدة . فأوجد احتمال ظهور عدد أقل أو يساوي 4 واحتمال ظهور عدد أكبر من 4 .

الحل :

الحدث أقل أو يساوي 4 هو الحدث :

$$\{1,2,3,4\}$$

ويتكون من أربعة عناصر من العناصر الستة لفضاء العينة أثناء إلقاء حجر النرد والحدث أكبر من 4 هو الحدث :

$$\{5,6\}$$

إذن :

$$P(n \le 4) = \frac{4}{6} \quad \text{و} \quad P(n > 4) = \frac{2}{6}$$

لأحظ أن مجموع الاحتمالين يساوي 6 لأن الحدث الثاني لا يقع إذا ما وقع الحدث الأول ونعبر عن هذا بان نقول أن الحدثين هما شاملين ومانعين بالتبادل .

وعلى وجه العموم إذا كانت نتائج تجربة صدفة تحتويها الأحداث الشاملة المانعة بالتبادل A_1 , A_2 , A_3.... , A_m فإن :

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+........+P(A_m)=1 \quad ....(15-5)$$

وصيغة الشمول هنا معناها أنه لا يمكن أن يقع أي حادث آخر نتيجة التجربة .

مثـــال (5-35)

إذا ألقي حجرا نرد مرة واحدة وكان P_R هو الحادث الذي يقـــع إذا كـــان المجموع على الوجهين العلويين مساوياً لـــR فالمطلوب بيان العناصر التـــي يتكون منها كل من الأحداث P_1 , P_2 , P_3 ,...., P_{21} ثم إيجاد قيمة كل من :

a) احتمال الحصول على مجموع زوجي .
b) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 .
c) احتمال الحصول على مجموع زوجي ويقبل القسمة على 3 .
d) احتمال الحصول على مجموع زوجي أو يقبل القسمة على 3 .
e) احتمال أن يكون المجموع يقبل القسمة على 3 إذا علم أنه زوجي .

الحـــل :

نفرض أن (y , x) رمزاً للحـــدث حيـــث أن العـــدد علـــى الحجـــر الأول x ، والعدد على الحجر الثاني y .

$\sum_R$ - رمزاً للحدث ، المجموع على الحجرين يساوي r .

A - رمزاً للحدث ، المجموع عدد زوجي .

B - رمزا للحدث ، المجموع يقبل القسمة على 3 .

P(R) - رمزاً لاحتمال الحصول على مجموع يساوي R .

أن الجدول (5-5) يحتوي على جميع النتائج الممكنة لإلقاء حجري النرد معاً وقد جمعت النتائج التي تكون الحدث(P_R) معاً حيث :

$$(R = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots\ldots,12)$$

فمثلاً الحدث P_2 يتكون من النتيجة الوحيدة (1,1) بينما الحادث P_3 سوف يتكون من النتيجتين(2,1) ، (1,2) وهكذا .

a) احتمال الحصول على مجموع زوجي هو:

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(10) + P(12)$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

b) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 هو :

$$P(B) = P(3) + P(6) + P(9) + P(12)$$
$$= \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

c) احتمال الحصول على مجموع زوجي ويقبل القسمة على 3 هو :

$$P(A \cap B) = P(6) + P(12)$$
$$= \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

جـــدول (5-5)

الحوادث الشاملة المانعة بالتبادل التي يحتمل وقوعها إذا القي حجرا نرد لمرة واحدة فقط

R	P_R	R	P_R
2	(1,1)	3	(1,2);(2,1)
4	(1,3);(2,2);(3,1)	5	(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)
6	(5,1);(4,2);(5,1) (1,5);(2,4),(3,3)	7	(4,3);(5,2);(6,1) (1,6);(2,5);(3,4)
8	(4,4);(5,3);(6,2) (2,6);(3,5)	9	(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)
10	(4,6);(5,5);(6,4)	11	(5,6);(6,5)
12	(6,6)		

d) احتمال الحصول على مجموع زوجي أو يقبل القسمة على 3 هو :

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A/B)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

e) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 إذا علم أنه زوجي هو :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ويجب ملاحظة أنه يمكن إيجاد الإجابات السابقة من الجدول (4-5) مباشرة . فمثلاً تقع جميع الأحداث التي يكون فيها المجموع عدداً زوجياً في النصف الأيمن من الجدول وعدد نتائجها معاً 18 ، وبذلك يكون الاحتمال المطلوب في البند (a) يساوي $\frac{18}{36}$.

والنتائج التي تعطي مجموعاً يقبل القسمة على3 هي نتائج الحوادث P_3 ، P_6 و P_{12} ، P_9 وعددها :

$$1 + 4 + 5 + 3 = 12$$

و يكون الاحتمال المطلوب في البند (b) في أعلاه هو $\frac{12}{36}$. ونترك للطالب إيجاد بقية الاحتمالات من الجدول .

مثال (5-36)

أتفق شخصان على أن يرمي الأول قطعة نقود 3 مرات بطريقة عشوائية ، ويأخذ من الثاني عدداً من الدنانير يساوي مربع عدد الصور التي تظهر . أوجد القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه الأول من الثاني .

الحل :

لو رمزنا لظهور الصورة (Head) بالرمز H والكتابة (Tail) بالرمز T فإن إحدى النتائج الممكنة هي(H , H , T) أي ظهور الصورة في المرة

الأولى وظهورها في المرة الثانية وظهور الكتابة في المرة الثالثة . ويحتوي الجدول (6-5) على جميع النتائج الممكنة لتجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية .

جدول (6-5)

النتائج الممكنة لإلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية حيث x = عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاثة

x	النتائج الممكنة أو المحتملة
0	(T , T , T)
1	(T , T , H) ; (T , H , T) ; (H , T , T)
2	(T , H , H) ; (H , T , H) ; (H , H , T)
3	(H , H , H)

ويلاحظ أن عدد النتائج الممكنة كلها 8 ، فإذا اعتبرنا أن كل هذه النتائج متساوية الإمكان فإن احتمال حدوث أي نتيجة معينة منها يساوي 1/8 . والسؤال هو ما هو احتمال الحصول على صورة واحدة بالضبط في الرميات الثلاثة بغض النظر عن موضع الرمية التي ظهرت فيها . للإجابة على هذا السؤال نلاحظ أن الحدث صورة واحدة في الرميات الثلاثة يمكن أن يتم بإحدى ثلاث نتائج مانعة بالتبادل كما يبين الجدول عند 1 = x واحتمال كل من هذه النتائج يساوي 1/8 .

فإذا كتبنا P(x) يساوي احتمال الحصول على x بالضبط من الصور في الرميات الثلاث فإن احتمال الحصول على صورة واحدة هو :

$$P(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

وبنفس الطريقة يمكن إكمال الجدول (5-7) .

جـــدول (5-7)

احتمال الحصول على كل عدد ممكن من الصور عند إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية

X	0	1	2	3
P (X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1 . إذن القيمة المتوقعة المطلوبة فـــي المسألة تحسب بالشكل التالي :

$$(0)^2 \times P(0) + (1)^2 \times P(1) + (2)^2 \times P(2) + (3)^2 \times P(3)$$

$$= (0)\frac{1}{8} + (1)\frac{3}{8} + (4)\frac{3}{8} + (9)\frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

أن هذا الجواب يعني أنه إذا تكررت التجربة مرات عديدة بدرجة كافية فإن متوسط ما يأخذه A من B بعد إلقاء قطعة النقود ثلاث مرات يساوي تقريباً 3 قروش .

مثـــال (5 -37)

يحتوي صندوق على 4 كرات صفراء و 6 زرقاء ويحتوي صندوق آخــر على 3 كرات صفراء و 5 زرقاء . وكــل الكــرات متشــــابهة فيمــا عــدا اللون . وقد طلب من طفل أن يسحب كرة عشــوائياً من كل صندوق . وأتفق شخص مع شــخص آخر على أن يدفع الأول للثــاني مبلغ 20 دينار إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد وأن يدفع 40 دينار إذا كانت الكرتان مــن لونين مختلفين . أوجد القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يدفعه الشخص الأول .

الحــل :

نفرض أن P(Y) رمزاً لاحتمال سحب كرة صفراء من الصــــندوق الأول ونفرض P(B) لاحتمال سحب كرة زرقاء منه . وســـنكتب $P'(Y)$ و $P'(B)$ للاحتمالين المناظرين للصندوق الثاني فيكون :

$$P(Y) = \frac{4}{10}, \quad P(B) = \frac{6}{10}$$

$$P'(Y) = \frac{3}{8}, \quad P'(B) = \frac{5}{8}$$

وبما أن نتيجة الســـحب من الصندوق الثاني لا تتوقف على نتيجة السحب من الصندوق الأول فإن احتمال سحب كرة صفراء من الصــــندوق الأول وكـــرة صفراء من الصندوق الثاني هو :

$$P(Y).P'(Y) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{80} = \frac{6}{40}$$

احتمال سحب كرة زرقاء من الكيس الأول وكرة زرقاء من الكيس الثاني هو:

$$P(B).P'(B)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{8}=\frac{30}{80}=\frac{15}{40}$$

فإذا رمزنا للحدث سحب كرتين صفراوين بالرمز A والحدث سحب كرتين زرقاوين بالرمز B فيكون الحدث كرتان من لون واحد هو الحدث $A \vee B$ (A أو B) مع ملاحظة أن A ، B مانعان بالتبادل . إذن احتمال الحصول على كرتين من لون واحد هو :

$$\begin{aligned}P(AUB\ ) &= P(A)+P(B)\\ &=\frac{6}{40}+\frac{15}{40}\\ &=\frac{21}{40}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

واحتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين يساوي :

$$\frac{19}{40}=\frac{21}{40}-1$$

إذن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يدفعه الأول يساوي احتمال سحب كرتين من لون واحد ضرب 20 مضافاً إليه احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين ضرب 40 أي يساوي :

$$20\times\frac{21}{40}+40\times\frac{19}{40}=\frac{21}{2}+19=10.5+19=29.5$$

مع ملاحظة احتمال أن تكون الكرتان من لونين مختلفين .

القيمة المتوقعة للمبلغ يساوي احتمال أن تكون الكرة الأولى صفراء والثانية زرقاء مضافاً إليه احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء أو ما يساوي :

$$\frac{4}{10}\times\frac{5}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{10}{40}+\frac{9}{40}=\frac{19}{40}$$

وهي نفس القيمة المحسوبة للاحتمال بالاعتماد على احتمال سحب كرتين من لون واحد .

18.5 التحليل التوافقي (The Harmonic Analysis)

إن إيجاد عدد عناصر فضاء العينة قد يكون سهلاً في بعض الأحيان وقد يصبح صعباً في أحيان أخرى . إذ أن فضاء العينة قد يحتوي على عدداً كبيراً من العناصر . لذا سنقوم في البنود القادمة بعرض بعض القواعد الرياضية المساعدة والمفيدة في حساب عدد عناصر فضاء العينة ، وبالتالي في حساب احتمال حدث ما .

1.18.5 المبدأ الأساسي في العد
(Fundamental Principles of Counting)

في هذا البند سوف نقوم بعرض بعض طرق تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة معينة بغير طريقة العد المباشرة المعروفة . وهذه الطرق تسمى كما أشرنا سابقاً بالتحليل التوافقي . ويمكن التعبير عن المبدأ الأساسي في العد بالشكل التالي :

إذا كان لدينا A_1 , A_2 , ... , A_k فئات مختلفة عدد عناصرها على الترتيب هو n_1 , n_2......, n_k , فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار عنصر واحد من كل منها هو :

$$n_1.n_2.n_3.\mathrm{KK}\,n_k = n! \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(16-5)$$

إن الرمز n! يسمى بمضروب العدد n ، ويظهر في أحيان كثيـرة فـي الرياضيات عند أيجاد حصل ضرب الإعداد الصحيحة الموجبة من العـدد 1 حتى العدد n ويعرف على النحو التالي :

$$n! = 1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)(n-1)n$$

ومن المفيد أن نعرف أن 1 = !0 .

19.5 التباديـل والتراتيـب والتوافيـق

(Permutations , Arrangements and Combinations)

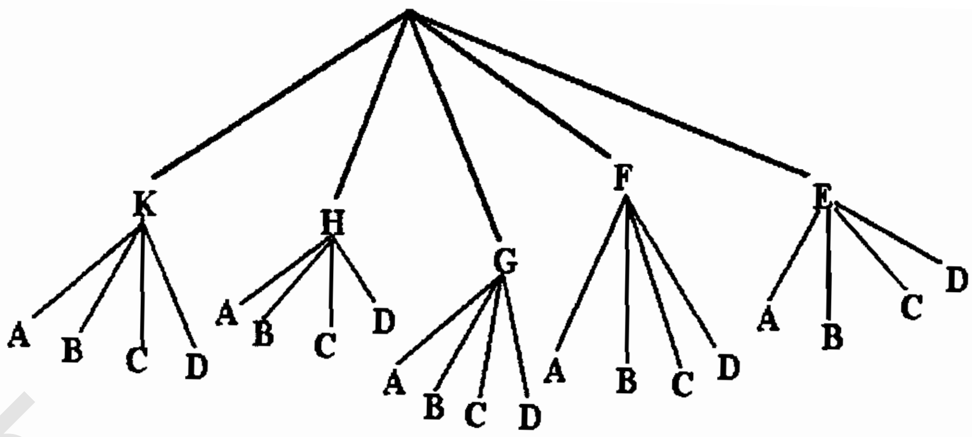
تستخدم هذه الطرق في تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة أو عـدد العناصر في مجموعـة معينـة بغيـر طريقـة العـد المباشـر ، وتوضـح من خلال دراسة الأمثلة التالية :

مثـال (5-38)

أعلنت شركة تجارية عن وظيفتين شاغرتين فتقدم 5 رجـال و4 سـيدات لملئ هاتين الوظيفتين . أوجد بكم طريقة يمكن تعيين رجل وامرأة في هـاتين الوظيفتين .

الحـل :

نفرض أن النساء هن A , B , C وD والرجال هـم E , F , G , H وK وعليه فأن اختيار الشجرة البيانية (Graphical Tree) يكـون علـى النحـو الموضح في الشكل (5-2) .



الشكــل (5 - 2)

الشجرة البيانية للاحتمالات المتوقعة لتعيين رجل وامرأة لوظيفتين شاغرتين

نلاحظ أن هناك 20 طريقة مختلفة لاختيار رجل وامرأة من المرشــحين التسعة .

1.19.5 التباديــل (Permutations)

يسمى وضع n من الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل لهذه الأشياء بشرط ان تؤخذ جميع هذه الأشياء ، ويسمى وضع a عدد مثــل r حيــث r أقــل أو يساوي u من هذه الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل العدد n مــن الأشــياء مأخوذة r في كل مرة ، وسيرمز لعدد التباديل من الأشياء المأخوذة r كل مرة بالرمز :

$P(n, r)$

مثــال (5-39)

ليكن لدينا ثلاثة عناصر هي c , b , a يمكن تشكيل ستة ثلاثيات مرتبة من هذه العناصر مع ملاحظة عدم تكرار العنصر في الثلاثية الواحدة . كــم هــو عدد تباديل هذه العناصر .

الحــل :

العناصر الثلاثة ترتب بالشكل التالي :

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$

إن هذه العناصر تبادلت المواقع فيما بينها فكان عدد الأوضاع المختلفة الممكنة هو 6 أي أن عدد التباديل يساوي 6 .

مثـــال (5 -40)

قطار مكون من 10عربات وقاطرة . أوجد بكم طريقة يمكن ترتيب هـــذه العربات خلف القاطرة .

الحل :

$$P_{10} = 10! = (10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 3628800$$

وهكذا نجد أنه يمكن ترتيب العشر عربات خلف القاطرة بـــــ3628800 طريقة .

نتيجة : عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة جميعها بنفس الوقت هو $n!$.

مثـــال (5-41)

ما هو عدد تباديل ثلاثـــة عناصـــر مثـــل a , b , c مـــأخوذة جميعهـــا بنفس الوقت .

الحــل :

من النتيجة السابقة نجد أنه يوجد لدينا ثلاث تباديل وعليه فأن :

$3! = 1 . 2 . 3 = 6$

وهذه التباديل هي :

abc , acb , bac , bca , cab , cba

ويمكننا الآن اشتقاق الصيغة العامة للمقدار P (n , r) بنفس الطريقة المتبعة في الأمثلة السابقة حيث يمكننا أختيار العنصر الأول في تبديل عناصر عـددها n مأخوذة r كل مرة بطرق مختلفة عددها n ، وبعد ذلك يمكن أختيار العنصـر الثاني في هذا التبديل بطرق عددها n-1 ، وبالاستمرار على هذا النحو يمكن اختيار العنصر الأخير الذي يكون ترتيبه r بطرق عددها هو :

$$n-(r-1) = n-r+1$$

ومنه نجد أن :

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17-5)$$

وفي بعض الحالات الخاصة $n = r$ نجد أن :

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2.19.5 التراتيـب (Arrangements)

يعرف الرمز $\binom{n}{r}$ لعددان صحيحان موجبان n , r بحيث يكون $r \leq n$ كما يلي :

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots(r-1)\,r}$$

وتسمى هذه الأعداد بمعاملات ذات الحدين . كما سيتم توضيحه عند تعريـف نظرية ذات الحدين لاحقاً .

مثـــال (42-5)

أوجد قيمة المعامل $\binom{10}{4}$.

الحـــل :

$$\binom{10}{4} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

ويمكن الحصول من العلاقة والتعريف السابق على صيغة هامة مـــن خـــلال ملاحظة أنه يوجد r معامل في كل من البسط والمقام للعدد $\binom{n}{r}$ ، حيث :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3.4......(r-1)r} = \frac{n(n-1).....(n-r+1)(n-r)!}{1.2.3.4......(r-1)r(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وبفضل هذه العلاقة أو الطريقة الثانية نستطيع توفير الوقت والعمليات الحسابية .

مثـــال (43-5)

أوجد قيمة المعامل $\binom{10}{7}$.

الحـــل :

باستخدام الطريقة الثانية نجد أن :

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

بالمقارنة مع الصيغة الأولى حيث :

$$\binom{10}{7} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{7.6.5.4.3.2.1} = 120$$

مثـــال (5-44)

ليكن لدينا 4 عناصر هي a , b , c , d . أوجد كم ثنائية مرتبـــة يمكــن تشكيلها من هذه العناصر مع عدم تكرار العنصر الواحد في الثنائية الواحدة .

الحـــل :

إن عدد هذه الثنائيات هو 12 وهي كما يلي :

$$(a,b),(c,a),(c,d),(b,a),(b,c),(b,d)$$
$$(c,b),(a,c),(a,d),(d,a),(d,b),(d,c)$$

مثـــال (5 -45)

إذا كان عدد المهندسين المرشـــحين للعمل في مصنع هــو 12 مهنــدس وذلك لشـــغل أربعة وظائف مختلفة . أوجد بكم طريقـــة يمكــن مــلء هــذه الوظائف الأربعة .

الحـــل :

$$A_n^k = A(n,k) = \frac{12!}{4!}$$
$$= 19958400$$

3.19.5 التوافيـــق (Combinations)

نفـــرض أن لـــدينا تجمعـــاً مـــن n مـــن الأشـــياء . يعـــرف توافيـــق (Combinations) هذه الأشياء والتـــي عـــددها n مـــأخوذة r كـــل مـــرة (r – توفيق) بأنه أي مجموعة جزئية بها r من الأشياء . وبمعنى أخر فـــأن التوفيق r هو أي أختيار لعدد r شيء من بين هذه الأشياء ودون اعتبار لطريقة الترتيب .

فإذا رمزنا بـــالرمز $\binom{n}{r}$ أو بـــالرمز C_r^n أو بـــالرمز C (n , r) لعـــدد توافيق r عنصر مأخوذة معاً من n عنصر فإن :

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\quad......(19-5)$$

وأيضاً فإن:

$$A_r^n=n!C_r^n\quad ....(20-5)$$

ويجب الإشارة إلى أن معاملات ذات الحدين $\binom{n}{r}$ قد عرفت بأنها :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وسوف نستمر باستخدام C (n , r) و $\binom{n}{r}$ بنفس المعنى .

مثــال (5-46)

لتكن لدينا العناصر a , b , c , d . أوجد بكم طريقة يمكن تشكيل فئــات تضم عنصرين فقط منها .

الحــل :

إن الفئات المشكلة هي :

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$$

وعدد هذه الفئات يساوي 6 .

مثــال (5-47)

أوجد بكم طريقة يمكن اختيار أربعة أوراق من أوراق الكوتشينة الشّــدة ذو الاثنتان وخمسون ورقة .

الحــل :

عدد الطرق الممكنة لاختيار أربعة أوراق يمكن الحصول عليها باســتخدام العلاقة (5-19) حيث :

$$C_{52}^{4}=\frac{52!}{(4!)(48!)}=\frac{(52)(51)(50)(49)(48!)}{(4)(3)(2)(1)(48!)}=270725$$

وهكذا نجد أنه يمكن أختيار أربعة أوراق من أوراق الكوتشــينة الشــدة بـــــ 270725 طريقة .

مثـــال (5-47)

أوجد كم لجنة رباعية يمكن تكوينها من ثمانية أشخاص .

الحـــل :

أن كل لجنة تعتبر توافيق من الثمانية أشخاص مأخوذة منهم ثلاثة كل مرة إذا يوجد :

$$C\,(8\ ,4) = \binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = \frac{1680}{24} = 70$$

وهكذا بسبعين طريقة يمكن تشكيل لجنة رباعية مختلفة من ثمانية أشخاص .

مثـــال (5-48)

في أحد المصانع يختار كل عام وفد من أربعة مهندسين عاملين في هـــذا المصنع لتمثيل المصنع في معرض المنتجات الدولي الذي يقام سنوياً في بلد ما أوجد :

1) عدد الطرق التي يمكن اختيار الوفد بها إذا كان عدد المهندسين المرشحين لذلك وتتوفر بهم الشروط هو 16 مهندس .

2) عدد الطرق التي يمكن الاختيار إذا كان اثنان من المهندسين المرشحين لا يستطيعان حضور المعرض في نفس الوقت أو بمعنى أخر معاً .

الحـــل :

أولاً : يمكن اختيار المهندسين الأربعة عن طريقة إيجاد توافيـــق أي عـــن طريق أيجاد :

$$\binom{16}{4} = \frac{16.15.14.13}{4.3.2.1} = 1820$$

ثانياً : نفرض أن المهندسين اللذان لا يمكن أختيارهما معاً هما D , C فيكون هناك طريقتان للحل ، الطريقة الأولى هي أنه إذا لم يتكون الوفد من C ولا من D . وفي هذه الحالة يمكن أختيار الوفد كما يلي :

$$\binom{14}{4} = \frac{14\,.13\,.12\,.11}{4.3.2.1} = 1001$$

أما أذا تكون الوفد من C أو من D ولكن ليس منهما معاً فأن الوفد يمكن أختياره بطرق عددها :

$$2.\binom{14}{3} = 2.\frac{14.13.12}{.3.2.1} = 728$$

وبذلك تكون الطرق الكلية لاختيار الوفد هي :

$$1001 + 728 = 1729$$

أما الحل بالطريقة الثانية فيتضمن أنه أذا تكون الوفد من المهندسين C وD معاً فأن المهندسين الآخرين يمكن أختيارهما بطرق عددها :

$$\binom{14}{2} = \frac{14\,.13}{2.1} = 91$$

وبذلك يكون عدد الطرق التي يمكن أختيار الوفد بها أذا لم يتكون الوفد من C , D معاً هو :

$$1820 - 91 = 1729$$

وهكذا حصلنا على نفس عدد الطرق والتي تساوي 1729 وهي النتيجة نفسها . ولكن الريق الثانية في الحل تعتبر ابسط واسرع .

مثـــال (5-48)

في أحدى الشركات الكبرى أذا كان أمتحان القبول لشغل وظيفة ما يتكون من عشرة أسئلة ، وكان يجب على المتقدم لشغل هذه الوضيفة أن يجيب على سبعة أسئلة فقط أوجد :

1) عدد الطرق التي يجب على المتقدم أن يختار بها الاسئلة .

2) عدد الطرق التي يمكنه الاختيار أذا كانت الاسئلة الاربعة الاولى أجبارية .

3) عدد الطرق التي يمكنه الاختيار أذا كان من الضروري أن يجيـــب علـــى أربعة أسئلة من الاسئلة الخمسة الاولى .

الحـــل :

أولاً : يمكن للمتقدم أختيار الاسئلة السبعة بطرق عددها كما يلي :

$$\binom{10}{7}=\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2.1}=120$$

ثانياً : أذا قام المتقدم بالاجابة على الاسئلة الاربعة الاولى ، فيمكنه بعد ذلك أن أختيار الاسئلة الثلاثة الاخرى من بين الاسئلة الستة الاخيرة بطرق عددها :

$$\binom{6}{3}=\frac{6.5.4}{3.2.1}=20$$

ثالثاً : أذا أجاب المتقدم على الاسئلة الخمسة الاولى فيمكنه اختيار الســـؤالين الآخرين من بين الخمسة أسئلة الاخيرة بطرق عددها :

$$\binom{5}{2}=\frac{5.4}{2.1}=10$$

ومن ناحية أخرى أذا أجاب المتقدم على أربعة أسئلة فقط من بين الاسئلة الخمسة الاولى فيمكنه أختيار الاسئلة الثلاثة الأخرى من بين الاسئلة الخمسة الاخيرة بطرق عددها :

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

وبذلك يمكنه أختيار الأسئلة السبعة بطرق عددها 100 = 10 . 10 ويكون عدد الأختيارات الكلية 105 أختيار .

مثـــال (5-49)

أوجد بكم طريقة يمكن أختيار فريق رياضي يتكون مـــن ثـــلاث رجـــال وسيدتين من بين سبعة رجال وخمس سيدات .

الحــل :

أولاً – يمكن أختيار السيدتين من بين الخمـــس ســـيدات بطـــرق عـــددها $\binom{5}{2}$ ، كما ويمكن أختيار الثلاث رجال من بين الســـبعة رجـــال بطـــرق عددها $\binom{7}{3}$ ، وبذلك طيمكننا أختيار الفريق المطلوب بطرق عددها :

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7.6.5}{3.2.1} . \frac{5.4}{2.1}$$
$$= 350$$

وهكـــذا نجـــد أنـــه يوجـــد 350 طريقـــة يمكـــن فيهـــا أختيـــار الفريـــق الرياضي المطلوب .

أشرنا في السابق إلى معاملات ذات الحدين وأوضحنا أن الرمز $\binom{n}{r}$ لعددان صحيحان موجبان n , r بحيث يكون $r \le n$ كما يلي :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...............(n-r+1)}{1.2.3.4...............(r-1)r}$$

وتسمى هذه الأعداد بمعاملات ذات الحدين . وبالعودة إلى هذا الموضع لتوضيح نظرية ذات الحدين نجد أن هذه النظرية تعطى بالاستنتاج الرياضي للصورة العامة لمفكوك الحد $(a + b)^n$. أن نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem) تعطى رياضياً كما يلي :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= a^n + n.a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + ...+ n a b^{n-1} + b^n$$

ويجب ملاحظة الخواص التالية لمفكوك $(a + b)^n$:

1- يتناقص أس a حداً بعد حد من n إلى الصفر ، ويتزايد أس b حداً بعد حد من الصفر إلى n .

2- معامل كل حد هو $\binom{n}{k}$ حيث k هو أس أي من a أو b .

3- تتساوى معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهاية المفكوك بنفس المقدار .

4- مجموع أسي a و b في كل حد هو n .

5- يوجد في المفكوك حدوداً عددها n + 1 .

مثـــال (5-50)

أوجد مفكوك الحد الرياضي باستخدام نظرية ذات الحدين $(x+y)^5$.

الحـــل :

نستخدم التعريف الرياضي لنظرية ذات الحـــدين لايجـــاد مفكـــوك هـــذا الحد حيث :

$$(x+y)^5=(x)^5+\frac{5}{1}(x)^4(y)^1+\frac{5.4}{2.1}(x)^3(y)^2+\frac{5.4}{2.1}(x)^2(y)^3+\frac{5}{1}(x)(y)^4+(y)^5$$
$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

مثـــال (5-51)

أوجد مفكوك المقدار $(x^2-2y)^6$ وبعد ذلـــك اختصـــر المقـــدار الـــى ابسط صورة .

الحـــل :

باستخدام نظرية ذات الحدين حيث :

$$(x^2-2y)^6=(x^2)^6+\frac{6}{1}(x^2)^5(-2y)+\frac{6.5}{2.1}(x^2)^4(-2y)^2+\frac{6.5.4}{3.2.1}(x^2)^3(-2y)^3$$
$$+\frac{6.5}{2.1}(x^2)^2(-2y)^4+\frac{6}{1}(x^2)(-2y)^5+(-2y)^6$$

$$=x^{12}-12x^{10}y+60x^8y^2-160x^6y^3+240x^4y^4-192x^2y^5+64y^6$$

وهكذا باستخدام نظرية ذات الحدين نجد أنه يمكننا أيجاد مفكوك المقادير كثيرة الحدود ، وأن هذة النظرية سوف تســاعدنا فـــي دراســـة التوزيعـــات الاحتمالية في الباب الاحق .

20.5 تمـــــارين

س1: أكتب فضاء العينة لتجربة ألقاء حجري نـــرد زهـــر ، الأول أخضـــر والثـــاني أحمر .

س2: أكتب فضاء العينة في تجربة إلقاء قطعة نقود فإذا كان النـــاتج صـــورة وأعدنا إلقاءها ثانية ، أما إذا كتابة فإننا نلقي حجر النرد الزهر .

س3: أربعة طلاب انتخبوا عشوائياً من فصل دراسي ما ، فأذا رمز بـــالرمز M للطالب ورمز للطالبة بـــالرمز F ، أكتب فضاء العينة S_1 . ثـــم أكتـــب فضاء عينة ثاني S_2 عناصره تمثل عدد الإناث المنتخبة .

س4: أفرض أن C , B , A أحداثاً معينة ، والمطلوب التعبير عن وتكـــوين شكل فن للحاث التالية :

a) وقوع حدث واحد بالضبط من هذه الاحداث .
b) عدم وقوع أي حدث منهما .
c) وقوع الحدث B والحدث C وعدم وقوع الحدث A .
d) وقوع حدثين على الاقل منهما .

س5: بالعودة إلى السؤال الاول أوجد :

a) أكتب عناصر الحدث A الذي يقع إذا كان المجموع أقل من 5 ثم أحســـب احتمال A .

b) أحسب احتمال الحدث B الذي يقـــع إذا ظهـــر العـــدد 2 علـــى الحجـــر الأخضر .

c) أحســـب احتمال الحادث C الذي يقع إذا ظهر العدد 6 على أحد حجـــري النرد .

d) أحسب احتمال الحادث B/C .

e) أحسب احتمال الحادث $AUBUC$.

س5: تقدم رجلان وامرأتان بطلباتهم لمل* وظيفتين شاغرتين مختلفتين في إحدى المؤسسات . أختار المدير عشوائياً شخص للوظيفة الأولى وآخر للوظيفة الثانية أوجد ما يلي :

a) فضاء العينة S .

b) احتمال الحادث A الذي يقع إذا كان رجلاً قد شغل الوظيفة الأولى .

c) احتمال الحادث B الذي يقع إذا كانت وظيفة واحدة فقط قد شغلت من قبل رجل .

d) احتمال الحادث C الذي يقع إذا كانت الوظيفتان قد شغلتا من قبل امرأتين .

س6: في لعبة حظ هناك صندوق يحتوي على 500 ظرف ، 50 منها تحتوي على 50 دينار في كل ظرف ، 100 ظرف منها تحتوي على 25 دينار في كل ظرف ، 350 ظرف منها تحتوي على 10 دنانير في كل ظرف . إذا تم دفع 25 دينار يمكن سحب أحد الظروف .

a) أحسب احتمال أن يحتوي الظرف المسحوب على 50 دينار .

b) أحسب احتمال أن يحتوي الظرف المسحوب على أقل من 50 دينار .

س7: سحبت ورقة من شدة كوتشينة عادية عددها 52 . إذا كان A يمثل الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة حمراء . B يمثل الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل رقماً أكبر من 2 وأقل من 9 ، أحسب ما يلي :

a) أحتمال الحدث A .

b) أحتمال الحدث B .

c) أحتمال وقوع الحدث A بشرط أذا كان الحدث B قد وقع أي $P(A/B)$.

d) $P(AUB)$.

س8: سحبت كرة عشـوائياً من كيس يحتوي على ثلاثة كرات حمـراء (R) و 4 كرات خضراء (G) و5 كرات صفراء(Y) أوجد :

a) احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة صفراء اللون .

b) احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء أو حمراء .

س9: في استفتاء تلفزيوني تلقت إدارة التلفزيون 2000 جواب موزعة كما هو مبينة في الجدول (5-8) .

جـدول (5-8)

المرسل	نعم	كلا	المجموع
ذكر	240	560	800
أنثى	270	930	1200
المجموع	510	1490	2000

a) سحب ظرف عشوائياً فكانـت النتيجـة نعـم ، مـا احتمـال أن يكـون المرسل ذكراً .

b) سـحب ظرف إجابة عشوائياً بعد إعادة الأول فكانت المرسلة أنثى ، ما احتمال أن يكون الجواب كلا .

س10: مجموعة من الطلاب العــرب 10 أردنيين و30 لبناني و10 عراقيين تقدموا لامتحان نهاية العام فنجح 3 أردنيون و 10 لبنــانيون و5 عراقيــون . اختير طالب عشوائياً من هذه المجموعة فكان من الناجحين . ما احتمال أن لا يكون هذا الطالب عراقياً .

س11: صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء (R) و3 كرات بيضــاء (W) و9 كـــرات زرقـــاء (B) . ســـحبت ثـــلاث كـــرات عشـــوائياً ، أوجد الأحتمالات التالية :

a) أحتمال أن تكون الكرات الثلاثة حمراء .
b) أحتمال أن تكون كرة حمراء وكرتين بيضاء .
c) أحتمال أن تكون كرة من كل لون .
d) أحتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء .

س12: مجموعة عشــوائية مؤلفة من n شخص ، ما احتمال أن يكون بينهــا أي شخصين لهما نفس تأريخ الميلاد . وبفرض أن 23 يساوي n ما قيمة هذا الاحتمال ، وما احتمال أن يكون هناك شــخصان على الأقل لهما نفس تأريخ الميلاد مع العلم أن $n = 23$ أيضاً .

س13: أوجد الاحتمالات لكل من الحوادث التالية :

a) احتمال الحصول على عدد فردي عند رمي حجر النرد لمرة واحدة .
b) احتمال الحصول على مجموع 9 عند رمي حجري نرد .
c) احتمال أن يكون مجموع نــاتج الوجهين العلويين للحجر أكبر مــن 10 أو أقل من 5 .

س14: فصل به 12 تلميذاً خمسة منهم ذكور والبقية إناث . فإذا اخترنا تلميذاً واحداً بطريقة عشـــوائية فما هو احتمال :

a) أن يكون التلميذ المختار فـــتاة .
b) إذا اخترنا تلميذين عشوائياً فما هو احتمال أن تكونا فتاتين .

س15: سحب كارتان من ورق اللعب فأوجد احتمال أن يكون كل منهمـــا آس حسب الشروط التالية :

a) فـــي حالـــة إرجـــاع الكــــارت الأول وخلــط الــورق جيـــداً قبــل سحب الكارت الثاني .
b) في حالة عدم إرجاع الكارت الأول .

س16: من مجموعة من الكرات مرقمة من 1 إلى 17 سحبت كرة عشوائياً فما هو احتمال :

a) أن يكون الرقم المدون عليها يقبل القسمة على 2 أو 7 .
b) أن يكون الرقم المدون عليها يقبل القسمة على 3 أو 5 .

س17: إذا سحبت كرتان عشوائياً من كيس به خمـــس كـــرات بيضـــاء(W) وثمانية كرات سوداء(B) فما هو احتمال :

a) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
b) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد .
c) أن تكون واحدة على الأقل من الكرتين سوداء .

س18: يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء (W) وثلاث كرات ســوداء (B) ويحتوي صندوق آخر على ثلاث كرات بيضاء وخمس كــرات ســوداء وسحبت كرة من كل صندوق ، أوجد احتمال أن تكون :

a) كل منهما بيضاء .

b) كل منهما سوداء .

س19: إذا أشترى شخص ورقة يانصيب حيث الجائزة الأولى 50 ديناراً والجائزة الثانية 20 ديناراً باحتمال 0.001 ,0.003 على الترتيب . فما هو السعر العادل الذي يدفعه لهذه الورقة .

س20: لوحظ أن متوسط المسامير التالفة نسبة لمواصفات معينة التي تنتجها آلة محددة في مصنع هو 20% . فإذا اخترنا 10 مسامير عشوائياً من الإنتاج اليومي لهذه الآلة . أوجد احتمال وجود ما يلي :

a) مسمارين تالفين فقط .

b) مسمارين تالفين أو أكثر .

c) أكثر من خمسة مسامير تالفة .

س21: إذا كان احتمال أن يعيش سعيد 20 عاماً آخراً هو 60 % واحتمال أن تعيش زوجة سعيد 20 عاماً آخراً أيضاً هو 80 % ، فما هو احتمال أن يظل الاثنان على قيد الحياة 20 عاماً .

س22: في مدينة ما إذا علم أن 40% من المواطنين لهم شعر بني اللون و 20% لهم عيون بنية اللون و 10% لهم شعر بني عيون بنية . فإذا أختير مواطن بطريقة عشوائية من هذه المدينة فإوجد كل من الأحتمالات التالية :

a) إذا كانت عينيه بنية فما هو أحتمال أن يكون شعره ليس بنياً .

b) ما هو أحتمال ان لايكون شعره بنياً وأن لا تكون عينيه بنية .

c) إذا كان شعره بني فما هو أحتمال ان تكون ايضاً عيناه بنيتان .

س23: في فصل دراسي 12 طالب و 4 طالبات ، إذا أختيــر 3 طلبــة مــن الفصل بطريقة عشوائية فما هو أحتمال أن يكونوا جميعاً طلاباً .

س24: في أحدى كليات الهندسة وجد أن 35% من الطلبة رسبوا في أمتحان خواص المواد ، ورسب 20% من الطلبة في أمتحان الميكانيكيــا النظريــة ، ورسب 15% في أمتحان خواص المواد والميكانيكيا النظرية . أختيــر أحــد الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي :

a) إذا كان راسباً في خواص المواد فما هو أحتمــال أن يكــون راســباً فــي الميكانيكيا النظرية .

b) ما هو أحتمال أن يكون راسباً في خواص المواد والميكانيكيا النظرية .

c) إذا كان راسباً في الميكانيكيا النظرية فما هو أحتمال أن يكون راسباً فــي خواص المواد .

س25: تنتج ثلاث ماكينات A , B , C على التوالي 20% و 35% و 5% من الانتاج الكلي لمصنع انتاج الرقائق الالكترونية الخاصة بتصنيع الحاسوب ، فإذا كانت نسبة الانتاج للرقائق المعيبة لهذه الماكينات هــي علــى التــوالي 4% ، 8% ، 3% . إذا أختيرت رقيقة الكترونية بطريقة عشوائية ووجــدت أنها معيبة ، أوجد أحتمال أن تكون الوحدة من انتاج المكينة B .

س26: قام رجل بزيارة زوجين لهما طفلان ، فدخل أحد الطفلين وهو ولد إلى حجرة الجلوس ، أوجد أحتمال أن يكون الطفل الأخر ولداً أيضاً إذا كان :

a) من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر .

b) إذا لم يكن لدينا أية معلومات عن الطفل الآخر .

س27: أوجد عدد الطرق التي يمكن أن تصف بها عشرة كتب من الحجم الكبير وستة كتب من الحجم المتوسط وأربعة كتب من الحجم الصغير على أحد الرفوف بشرط أن تكون جميع الكتب ذات الحجم الواحد مرتبة معاً .

س28: أوجد كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في سيارة أذا كان أثنان منهم يجيدون القيادة .

س29: رجل له ستة أصدقاء وأراد أن يدعوهم الى حفلة عيد ميلاده أوجد بكم طريقة يمكن أن :

a) يدعو أربع أصدقاء الى هذه الحفلة .

b) يدعو خمسة أصدقاء منهم أذا كان اثنان منهم متزوجون ولا بد من حضورهما .

س30: أذا كان مطلوب من أحد المهنسين المتقدمين لشغل وضيفة ما في أحد المصانع أن يجيب على عشرة أسئلة من بين أربعة عشر سؤالاً أوجد :

1) كم عدد الطرق التي يمكن لهذا المهندس أختيار اسئلته .

2) بكم طريقة يمكن للمهندس أختيار الاسئلة أذا كان لا بد أن يجيب على السؤالين الاولين .

3) بكم طريقة يمكنه الاختيار أذا الزم بالاجابة على ثلاثة أسئلة من بين الاسئلة الستة الاولى على الاقل .

س31: أحسب كلا من المقادير التالية :

1) $\binom{19}{14}$, 2) $\binom{13}{2}$, 3) $\binom{30}{10}$

س32: أختص كلاً من المقادير التالية :

1) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$ 2) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

3) $\frac{n!}{(n-2)!}$ 4) $\frac{(n+2)!}{n!}$

س33: أوجد مفكوك كل من الحدود الاتية ثم أختصر كلاً منها :

1) $(2x+y^2)^5$
2) $(x^2-3y)^7$
3) $(2x^2-y)^4$

س34: أوجد الحد الذي يحتوي على x^6 في مفكوك المقدار :

$$(2x^2+1/2y^3)^8$$

س35: تلقى قطعة نقود حتى تظهر الصورة لاول مرة أو تظهر الكتابة خمس مرات متتالية ، أوجد القيمة المتوقعة E لعدد مرات ألقاء القطعة .

س36: صندوق يحتوي على 10 وحدات انتاجية لاحدى المصانع من بينها ثلاث وحدات معيبة ، أختار مهندس ثلاث وحدات من الصندوق ، أوجد توقع عدد الوحدات المعيبة التي أختارها هذا المهندس .