الباب الثالث

مقاييس التشتت

(Measures of Dispersion)

1.3 مقدمة .

2.3 المدى.

3.3 الانحراف الربيعي .

4.3 الانحراف المتوسط .

1.4.3 الخواص العامة للانحراف المتوسط .

2.4.3 طرق حساب الانحراف المتوسط .

5.3 الانحراف المعياري .

6.3 إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة .

7.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات .

8.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة .

9.3 معامل الاختلاف .

10.3 الوحدات المعيارية .

11.3 المنحنى التكراري المتماثل والتوزيعات الاعتدالية .

12.3 الحيود عن التوزيع الاعتدالي .

13.3 تمارين .

3.1 مقدمـــة

يعرف التشـــتت (Dispersion) في أي مجموعة من القيم على أنه درجة التفاوت أو الاختلاف بين قيم هذه المجموعة ، فإذا كانت قيم المجموعة متقاربة من بعضها البعض يكون التشتت صغيراً وإذا كانت متباعـــدة عـــن بعضـــها البعض أي متباينة يكون التشتت كبيراً .

ولمقـــارنة مجموعتين من البيانات لا نكتفي بمقاييس التوســـط التي سبق لنا دراستها حيث قد يكون للمجموعتين نفس المتوســـــط الحســـابي ولكنهمـــا يختلفان في درجة التشـــتت ، فقـــد نجد أن مفـــردات إحـــدى المجمـــوعتين متـــجمعة حول متوسط المجموعة بينما مفردات المجموعة الأخرى متنـــاثرة ومتباعدة عن متوسطاتها ، وعندئذٍ يقال أن المجموعة الأولى أقل تشـــتتاً مـــن المجموعة الثانية كما يتضح من المثال التالي :

x : 12 , 17 , 20 , 25 , 26
y : 8 , 12 , 20 , 26 , 34

حيث نجد أن المتغيرين x , y لهما نفس المتوسط الحسابي ونفس الوسيط ولكنهما يختلفان في درجة التشتت حيث يتضح أن المتغير x أقل تشـــتتاً مـــن المتغير y .

مما ســـبق يتبين أن التشـــتت هو مقياس لقوة تجمع البيانات حول بعضها أو اختلافها عن بعضها ، فإذا كانت القيم متباعدة فإن مقياس التشـــتت يكـــون كبيراً أما إذا كانت القيم متقاربة من بعضها فإن مقياس التشتت يكون صغيراً ، وهناك عدة مقاييس تصلح لـــقياس درجة التشـــتت أهمها المدى ، الانحـــراف الربيعي ، الانحراف المتوسط ،والانحراف المعياري وسنقوم بدراسة كل من هذه المقاييس مع توضيح كيفية حسابها واستخداماتها .

1.3 المـــــدى (Range)

يعرف المدى على أنـــه الفــرق بــين أقــل قيمــة وأكبــر قيمــة فـــي المجموعة . ويعتبر من أبسط مقاييس التشتت وأسهلها حساباً ، غير أنه يعاب عليه اعتماده على القيمتين الطرفيتين فقط واللتين كثيراً ما تكونا شاذتين عـــن قيم المجموعة ، فإذا كانت القيمتين الطرفيتين من القيم الشاذة وكانت أحـــداهما كبيرة جداً والأخرى صغيرة جداً فإن المدى سوف يبالغ في إظهـــار تشـــــتت هذه القيم ويظهره أكثر من حقيقته .

المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة (Range = Max.Value – Min.Value)

أما في حالة البيانات المبوبة فإن المدى يحسب كما يلي :

المدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى

ويكون المدى مضللاً أيضاً في حالة مقارنة المجموعات التي يختلف عدد مفرداتها اختلافاً كبيراً هذا بالإضافة إلى صعوبة حسابه من الجداول التكرارية وخاصة إذا كانت مفتوحة .

مثـــال (3-1)

أوجد المدى للقيم التالية :

55 ، 99 ، 40 ، 65 ، 35 ، 70 ، 93

الحـــل :

المدى = أعلى قيمة – أصغر قيمة

99 – 35

= 64 درجة .

مثـــال (3-2)

الجدول (3-1) يبين ثلاثة مجموعات من البيانات . والمطلـــوب أجـــراء مقارنة بين تشتت هذه المجموعات باستخدام المدى .

جـــدول (3-1)

المجموعة الأولى	6	6	6	6	6
المجموعة الثانية	4	5	6	7	8
المجموعة الثالثة	0	1	6	10	13

الحــل :

نلاحـــظ أن المجموعـــات الثلاثـــة لهـــا نفـــس المتوســـط الحســـابي والوسيط ، فكليهما في جميع المجموعات يساوي القيمة 6 وذلك بـــالرغم مـــن وجود اختلاف واضح بين المجموعات الثلاثة في انتشار القيم وتباعدها . ففي المجموعة الأولى نلاحظ عدم وجود اختلاف أو تشتت بين القيم فكـــل القـــيم متساوية ، وتساوي قيمة المتوسط الحسابي وهي القيمة 6 . أما في المجموعة الثانية فنلاحظ أن القيم تختلف عن بعضها البعض وعن متوســـطها الحســـابي ولكن ليس اختلافاً كبيراً ، أي أن تشتت القيم داخل هذه المجموعة صغـــــير بينما في المجموعة الثالثـــة نلاحظ أن القيم تختلف عن بعضها البعض وعـــن متوسطها الحســـابي اختلافـــاً كبيـــراً ، أي أن تشـــتت القـــيم داخـــل هـــذه المجموعة أكبر . بالنسبة لمدى المجموعات الثلاثة يكون كما يلي :

مدى المجموعة الأولى = 6 – 6 = صفر .

مدى المجموعة الثانية = 8 – 4 = 4 .

مدى المجموعة الثالثة = 13 – 0 = 13 .

بما أن مدى المجموعة الأولى هو صفــر ، فذلك يعني أنه لا يوجد اختلاف أو تشتت بين قيم هذه المجموعة أي أن كل قيم هذه المجموعة متســاوية ، أمــا المجموعتين الثانية والثالثة فنلاحظ أن مدى المجموعة الثالثة أكبر من مــدى المجموعة الثانية وهذا يعني أن تشتت المجموعة الثالثــة أكبــر مــن تشــتت الثانية .

مثـــال (3-3)

قارن بين تشــتت درجات مادة الإحصاء لثلاث مجموعات مــن الطلبــة المبينة في الجدول (3-2) .

جــدول (3-2)

المجموعة الأولى	50	62	30	70	45	80	---	----
المجموعة الثانية	20	0	70	55	65	82	77	35
المجموعة الثالثة	54	49	85	50	60	63	65	75

الحـــل :

مـــدى المجموعة الأولى = 80 – 30 = 50 درجة .

مـــدى المجموعة الثانية = 82 – 0 = 82 درجة .

مـــدى المجموعة الثالثة = 85 – 49 = 36 درجة .

نلاحظ أن المجموعة الثالثة أقل تشتتاً تليها المجموعة الأولى ثم الثالثة .

3.3 الانحـــراف الربيعـــي (The Quartile Deviation)

أشرنا إلى أن من عيوب المدى اعتماده على القيم الطرفية التي غالباً مــا تكون متطرفة وشاذة ، ويمكن التغلب على هذا الســبب بحذف بعض الـــقيم الطرفية فإذا أهملنا الربع الأول والربع الأخيــر من هذه القيم فإنــه يـــمكن

الحصول على مقياس للتشتت يعتبر أفضل من المدى ويعتمد في حسابه على كل من الربيعين الأدنى والأعلى ويسمى بالانحراف الربيعي وهو عبارة عن نصف المدى الربيعي أي أن :

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الاعلى} - \text{الربيع الادنى}}{2}$$

أو بمعنى آخر :

$$Q.D. = \frac{R_3 - R_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1-3)$$

حيث أن :

Q.D – الانحراف الربيعي .

R_3 – الربيع الأعلى .

R_1 – الربيع الأدنى .

ويمكن الحصول عليه بيانياً وذلك برسم منحني التكرار المتجمع الصاعد أو النازل واستخراج قيمة الربيعين من الرسم ثم حساب نصف المدى بينهما .

ولغرض استنتاج الانحراف الربيعي لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس العينة العشوائية التي تم دراستها في الباب الأول الجدول(1- 6) أو الشكل (1-7) لغرض حساب قيمة الربيعين الربيع الأدنى والربيع الأعلى ، ومن الفقرة (2 - 9) في الباب السابق فقد تم مسبقاً حساب قيمة كل من الربيع الأدنى والربيع الأعلى لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس ووجد أنهما يساويان الآتي :

$R_1 = 106.8$

$R_3 = 124.1$

وعلى هذا الأساس فإن قيمة الانحراف الربيعي تساوي :

$$Q.D. = \frac{R_3 - R_1}{2} = \frac{124.1 - 106.8}{2} = \frac{17.3}{2} = 8.65$$

مثـــال (3-4)

أحسب الانحراف الربيعي للبيانات التالية التي تمثل درجات سبعة طلبة في امتحان مادة الفيزياء الجامعية :

34 , 20 , 39 , 25 , 41 , 30 , 22

الحـــل :

نرتب القيم تصاعدياً ومنها نستنتج قيمة الربيعين حيث :

$$41 \quad \underset{R_3}{\boxed{39}} \quad 34 \quad 30 \quad 25 \quad \underset{R_1}{\boxed{22}} \quad 20$$

أن ترتيب الربيع الأدنى(R_1) يساوي :

$$\frac{n+1}{4} = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

وذلك لأن عدد القيم يساوي 7 ، إذن قيمة الربيع الأدنى هي القيمة الثانية في الترتيب التصاعدي أي أن الربيع الأدنى يساوي 22 .

أما ترتيب الربيع الأعلى(R_3) فتساوي :

$$\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(1+7)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

إذن قيمة الربيع الأعلى هي القيمة السادسة في الترتيب التصاعدي أي أن الربيع الأعلى يساوي 39 ومنه :

$$\therefore Q.D. = \frac{R_3 - R_1}{2} = \frac{39-22}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

مثـــال (3-5)

أحسب الانحراف الربيعي للبيانات والمبينة في الجـــدول (3-3) .

جـــدول (3-3)

التكرار المتجمع الصاعد	التكـــــرار	الفئـــــات
1	1	- 50
7	6	-56
19	12	-62
34	15	- 68
56	22	-74
66	10	-80
72	6	-86
76	4	98- 92

الحـــل :

عدد القيم يساوي 76 ورتبة الربيع الأدنى تساوي :

$$\frac{76}{4} = 19$$

$$\therefore R_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} = 62 + \frac{19 - 7}{19 - 7} x\, 6 = 62 + 6 = 68$$

أما رتبة الربيع الأعلى فتساوي :

$$57 = \frac{(76)(3)}{4}$$

$$\therefore R_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - k_1}{k_2 - k_1}$$

$$= 80 + \frac{57 - 56}{66 - 56} \times 6$$

$$= 80 + \frac{1}{10} \times 6 = 80 + 0.6 = 80.6$$

إذن الانحراف الربيعي يساوي :

$$\frac{R_1 - R_3}{2} = \frac{68 - 80.6}{2} = \frac{12.6}{2} = 6.3$$

أن الانحراف الربيعي وإن كان أفضل من المدى كمقياس للتشتت إلاّ أنـــه يعتمد على قيمتين فـــقط وهما الربيع الأدنى R_1 والربيع الأعلى R_3 ولا يضع في اعتباره كل القيم المتضمنة ومن ثم كانت هناك حاجة إلى مقاييس أفضـــل سنقوم بدراستها في البنود اللاحقة من هذا الباب .

4.3 الانحــراف المتوســط (The Mean Deviation)

يمكن دراسة درجة تشــتت أي مجموعة من القيم تبعاً لقرب مفرداتها من أو بعدها عن المتوسط العام للمجموعة فإذا استخدمنا الوسط الحســابي نظــراً لأنه أكثر المتوسطات حســاسية للتغييرات في أي قيمة من قيم المجموعة نجد أن مجوع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفراً ، وذلــك مــن خواص المتوسط الحسابي كما أشرنا إلى ذلك سابقاً ، مهما كانت درجة التشتت والسبب في ذلك هو وجود انحرافات موجبة وأخرى سالبة تلاشــي بعضــها البعض ، فلو استبعدنا الإشــارات أي أخذنا القيمة العددية لهــذه الانحرافــات نجدها تكبر كلما زاد انتشار القيم وبعدت عن متوسط المجموعة وتقل كلما قل تشتت القيم . لذلك يمكننا أن نأخذ متوسط القيمة العددية لانحرافات القيم عــن متوســطها الحســابي كمقياس للتشتت وهذا المقيــاس يعــرف بــالانحراف المتوسط ويرمز له (M.D.) .

1.4.3 الخواص العامة للمتوسط (Properties of Mean Deviation)

a) يأخذ في حسابه كل القيم .
b) يمكن حسابه عن طريق الانحرافات .
c) لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة .
d) يتأثر بالقيم المتطرفة .

2.4.3 طرق حساب الانحراف المتوسط

أولاً : في حالة البيانات المفردة

يحسب الانحراف المتوسط المطلق في هذه الحالة بعد حســاب المتوســط الحسابي ، ومن ثم نطرح كل القيم من المتوسط الحسابي ونأخذ القيمة المطلقة أي الموجبة للانحراف وبعد جمع الانحرافات المطلقة نقسمها على عدد القــيم فنحصل على الانحراف المتوسط أي أن :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2-3)$$

حيث أن :

$|x_i - \bar{x}|$ - هي القيمة العددية المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي .

n - هي عدد المفردات .

فإذا توفرت لدينا القيم التالية مثلاً :

26 , 25 , 20 , 17 , 12

فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\bar{x} = \frac{12+17+20+25+26}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

إن انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو :

6 , 5 , 0 , 3 - , 8 -

$$\therefore \sum [x - \bar{x}] = 8+3+0+5+6 = 22$$

أي أن الانحراف المتوسط يساوي :

$$\frac{22}{5} = 4.4$$

مثـــال (3 -6)

أوجد الانحراف المتوسط للأعداد :

77 , 85 , 63 , 45 , 70

الحـــل:

نجد أولاً المتوسط الحسابي للقيم ويساوي :

$$\bar{x} = \frac{45 + 63 + 70 + 77 + 85}{5} = \frac{340}{5} = 68$$

ثم بترتيب القيم والحدود كما يبين الجدول (3-4) حيث

جـــدول (3-4)

القيمـــة	الوسط الحسابي $\bar{x}$	الانحراف عن الوسط الحسابي	القيمة المطلقة
45	68	23 − = 68 − 45	23=|23−|
63	68	5 − = 68 − 63	5=|5−|
70	68	2 = 68 − 70	2=|2|
77	68	9= 68 − 77	9=|9|
85	68	17= 68 − 85	17=|17|
المجمـــوع Total		———	56

$$\therefore M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{56}{5} = 11.2$$

ثانياً : في حالة البيانات المبوبة

لإيجاد الانحراف المتوسط في حالة التوزيعات التكرارية تتبع الخطوات التالية :

a) يتم تحديد مراكز الفئات أو الفترات $\bar{x}_i$.

b) يحسب الوسط الحسابي كما في السابق من المعادلة $\bar{x} = \dfrac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i}$

c) تستخدم المعادلة التالية لحساب الانحراف المتوسط :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| \bar{x}_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad \text{...}(3-3)$$

إن الجدول (3-5) يبين حساب الانحراف المتوسط لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس الذي تم حساب المتوسط الحسابي له مسبقاً في الجدول رقم(2-1) في الباب الثاني وكانت قيمته 116 .

جدول (3 - 5)

إيجاد الانحراف المتوسط لدرجات الذكاء للخمسين مهندس

$f_i \left\| \bar{x}_i - \bar{x} \right\|$	$\left\| \bar{x}_i - \bar{x} \right\|$	مركز الفئة $\bar{x}_i$	تكرار الفئة f_i	الفئات x_i
63	21	95	3	- 90
154	11	105	14	- 100
16	1	115	16	- 110
99	9	125	11	- 120
76	19	135	4	- 130
78	29	145	2	150- 140
466	——	——	50	المجموع

ولحساب الانحراف المتوسط من الجدول التكراري (3-5) نوجد الوسط الحسابي كما ذكرنا سابقاً ، بإحدى الطرق التي تمت مناقشتها في الباب السابق ثم نوجد القيمة العددية للانحرافات عن المتوسط الحسابي $|\bar{x}_i - \bar{x}|$ وأخيراً نضرب كل قيمة من هذه القيم في التكرار المناظر لنحصل على $f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|$ ثم نجمع حاصل الضرب وبالقسمة على مجموع التكرارات نحصل على الانحراف المتوسط بالشكل التالي :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{466}{50} = 9.32$$

مثال (3 -7)

أحسب الانحراف المتوسط لدرجات 50 طالب والمبينة في الجدول (3-6) :

جدول (3-6)

الفئات	0-	10-	20 -	30 -	40 -	50 -60
التكرار	3	10	12	20	4	1

الحل :

نرتب الجدول (3-6) بالشكل الموضح في الجدول (3-7) ونوجد كل من المتوسط الحسابي أولاً ثم الانحراف المتوسط ثانياً حيث :

جـدول (3-7)

$f_i\lvert\bar{x}_i-\bar{x}\rvert$	$\lvert\bar{x}_i-\bar{x}\rvert$	$\bar{x}_i-\bar{x}$	$\bar{x}_i\ f_i$	المركز $\bar{x}_i$	التكرار f_i	الفئة x
69	23	23 -	15	5	3	- 0
130	13	13 -	150	15	10	- 10
36	3	3 -	300	25	12	- 20
140	7	7	700	35	20	- 30
68	17	17	180	45	4	- 40
27	27	27	55	55	1	60 - 50
470		—	1400	—	50	المجموع

من الجدول نجد أن المتوسط الحسابي يساوي :

$$\overline{X} = \frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1400}{50} = 28$$

إذن الانحراف المتوسط يساوي :

$$M.D = \frac{\sum f_i\lvert\bar{x}_i - \bar{x}\rvert}{\sum f_i} = \frac{470}{50} = 9.4$$

5.3 الانحـــراف المعيـــاري (The Standard Deviation δ)

وهو من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وذلك لدخوله في حساب الكثير من المقاييس الإحصائية الأخرى . وهو مثل الانحراف المتوسط في اعتماده على كل قيم المجموعة ، ونحصل عليه بتربيع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بدلاً من إهمال الإشارات كما في حالة الانحراف المتوسط وبذلك نحصل على :

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4-3)$$

وهذه الصيغة تعطي لنا ما يسمى بالتباين (Variance) ، وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي ولكي نحصل على مقياس للتشتت يكون بنفس وحدات المتغير x نأخذ الجذر التربيعي فنحصل على الانحراف المعياري من المعادلة التالية :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5-3)$$

أي أن الانحراف المعياري (S) هو الجذر التربيعي للتباين (S^2) ، ومن الواضح أن الحساب بالطريقة الحسابية يحتاج لحسابات كثيرة وخاصة إذا كثر عدد تلك المفردات (n) وإذا أحتوى المتوسط الحسابي ($\bar{x}$) على كسور مما ينتج عنه احتواء الانحرافات على كسور أيضاً ومن ثم صعوبة حساب مربعاتها لذلك كان من الأفضل استخدم صيغة أخرى لحساب التباين لا تتضمن هذه العمليات الحسابية كما يلي :

$$S^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n} (\sum x^2 - \sum 2x\bar{x} + \sum \bar{x}^2)$$

$$= \frac{\sum x^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum x}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum x}{n} + \bar{x}^2$$

وبما أن :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

أذن :

$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} - 2\left(\frac{\sum x}{n}\right)\left(\frac{\sum x}{n}\right) + \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$= \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6-3)$$

أي أن التباين هو متوسط المربعات ناقص مربع المتوسط ، ونستنتج من ذلك صيغة سهلة لحساب الانحراف المعياري وهي :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7-3)$$

وإذا أردنا تسهيل العمليات الحسابية أكثر من ذلك يمكن اختيار وسط فرضي من بين القيم ونحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي . فإذا كان هذا الوسط الفرضي هو (a) نجد أن التباين :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum\left[(x-a)-(\bar{x}-a)\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8-3)$$

وهنا نجد أن :

$x - a = d$ هي انحرافات القيم عن الوسط الفرضي a ومن دراستنا للمتوسط الحسابي سبق أن رأينا أن :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum d}{n} = a + \bar{d} \quad \text{..................................} (9-3)$$

$$\therefore (\bar{x} - a) = \bar{d} \quad \text{......................................} (10-3)$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{n} \sum (d - \bar{d})^2 \text{......................................} (11-3)$$

أي أنه يمكن أن نستبدل قيم المفــردات (x) بانحرافات هذه القيم عــن الوسط الفرضي دون أن يؤثر ذلك على حساب التباين والانحراف المعيــاري فنجد أن :

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum \bar{d}}{n}\right)^2} \quad \text{..................................} (12-3)$$

ويســـمى اســـتخدام الطريقـــة الأخيـــرة بالصـــيغة المختصـــرة (Shortcut Formula) بينما تعرف الصيغة الســابقة بالطريقــة المطوّلــة (Prolongated Method) وفيما يلي استخدام الطريقتين لحساب الانحــراف المعياري للبيانات التالية :

26 , 25 , 20 , 17 , 12

أولاً بالطريقة المطوّلة :

$$\sum x = 12 + 17 + 20 + 25 + 26 = 100$$

$$\sum x^2 = 144 + 289 + 400 + 625 + 676 = 2134$$

$$\therefore S^2 = -\sqrt{\left(\frac{2134}{5}\right) - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{426.8 - 400} = \sqrt{26.8} = 5.177$$

ثانياً بالطريقة المختصرة :

بما أن n = 5 وبأخذ القيمة 17 كوســط فرضي نجد أن انحرافات القيم عــن الوسط الفرضي هي − 5 , صفر , 3 , 8 , 9 لذلك :

$$\sum d = -5+0+3+8+9=15$$

$$\sum d^{2}= 25+0+9+64+81=179$$

$$\therefore S = \sqrt{\left(\frac{179}{5}\right)-\left(\frac{15}{5}\right)^{2}} = \sqrt{35.5-9} = \sqrt{26.8} = 5.177$$

ويبين المثال التالي بعض الخصائص العامة للانحراف المعيــاري التــي تساعد في تسهيل العمليات الحسابية :

يحتوي العمود الأول على عشرة من القيم وقد أشتقت من هذه القيم الأصلية قيم أخرى مرة بإضافة رقم ثابت (10 مثلاً) ومرة أخرى بطرح الرقم الثابت ومرة أخرى بالضرب في الرقم الثابت وفي العمود الأخير بالقسمة على الرقم الثابت كما هو مبين في الجدول (3-8) :

جـدول (3-8)

	x	x + 10	x − 10	(x) (10)	x + 10
	1	11	-6	10	0.1
	5	15	-5	50	0.5
	7	17	-3	70	0.7
	8	18	-2	80	0.8
	12	22	2	120	1.2
	15	25	5	150	1.5
	16	26	6	160	1.6
	20	30	10	200	2.0
	22	32	12	220	2.2
	34	44	24	340	3.4
مجموع القيم	140	240	40	1400	14.0
مجموع مربعات القيم	2804	6604	1004	280400	28.04
متوسط القيم	14	24	4	140	1.4
التباين	84.4	84.4	84.4	8440	0.844
الانحراف المعياري	9.187	9.187	9.187	91.87	0.9187

يتضح من النتائج السابقة المبينة أسفل الجدول (3-8) أن كلاً من التباين والانحراف المعياري لا يتأثران بإضافة أو طرح رقم ثابت من القيم الأصلية ، بينما يتأثران بعمليات الضرب والقسمة فقط فإذا قسمت القيم الأصلية على رقم ثابت ، فإنه لا بد وأن نضرب تباين القيم المختصرة في مربع الرقم الثابت وأن نضرب الانحراف المعياري للقيم المختصرة في الرقم الثابت وذلك لنستنتج التباين والانحراف المعياري للقيم الأصلية .

فمثلاً لكي نستنتج التباين للقيم الأصلية يجب ضرب قيمة التباين المحسوب في العمود الأخير في 100 . ولكي نستنتج الانحراف المعياري للقيم الأصلية يجب ضرب قيمة الانحراف المعياري للقيم المختصرة في العمود الأخير في 10 .

6.3 إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة

(Standard Deviation for Data Set)

لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جداول تكرارية تصبح صيغة التباين بالشكل التالي :

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum f(x-\bar{x})^2 \qquad \text{.....}(13-3)$$

حيث :

$\sum f = n$ = عدد المفردات

$\bar{x}$: هي مراكز الفئات ولصعوبة استخدام هذه الصيغة يمكن وضعها على الصورة التالية :

$$S = \sqrt{\frac{\sum \bar{x}_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i}\right)^2} \qquad \text{.....}(14-3)$$

وتسمى طريقة الانحراف المعياري باستخدام هذه الصيغة بالطريقة المطولة .

جـــدول (3 - 9)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس

$\overline{x}_i^{\,2} f_i$	$\overline{x}_i f_i$	مركز الفئة $\overline{x}_i$	التكرار f_i	الفئات x_i
27075	285	95	3	90 -
154350	1470	105	14	100 -
211600	1840	115	16	110 -
171875	1375	125	11	120 -
72900	540	135	4	130 -
42050	290	145	2	150 - 140
679850	5800	——	50	المجموع

ولحساب الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس باستخدام البيانات المدرجة في الجدول (3-3) ، نجد كل من التباين والانحراف المعياري كما يلي :

$$S^2 = \frac{679850}{50} - \left(\frac{5800}{50}\right)^2 = 13597 - 13456 = 141$$

$$\therefore S = \sqrt{141} = 11.874$$

إذن التباين يساوي 141 والانحراف المعياري يساوي 11.874 .

7.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات

(Standard Deviation Using Divergence Method)

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن اختيار وسط فرضي من بين مراكز الفئات وتحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي وفي هذه الحالة يمكن كتابة الصيغة السابقة على الشكل التالي :

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum d_i f_i}{\sum f_i}\right)^2} \quad \text{...}(15-3)$$

واضح أن هذه العلاقة أفضل وأسهل كثيراً من العلاقة (3-14) ، لذلك يجب استخدامها دائماً لتسهيل العمليات الحسابية . ويلاحظ أنه عند استخدام هذه الصيغة تتبع نفس الخطوات التي سبق شرحها عند حساب الوسط الحسابي ثم نزيد على الجدول عموداً واحداً هو($d_i^2 f_i$) كما يتضح من الجدول (3-10) ، وتسمى هذه الطريقة " طريقة الانحرافات " نظراً لاعتمادها على حساب الانحرافات عن الوسط الفرضي الذي نختاره لتسهيل العمليات الحسابية .

جدول (3-10)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس باستخدام وسط فرضي

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	الانحراف d_i	$d_i f_i$	$d_i^2 f_i$
- 90	3	95	20 -	60 -	1200
- 100	14	105	10 -	140 -	1400
- 110	16	$\boxed{115}$	صفر	صفر	صفر
- 120	11	125	10	110	1100
- 130	4	135	20	80	1600
150 -140	2	145	30	60	1800
المجموع	50	——	——	50	7100

ولحساب الانحراف المعياري لدرجات الذكاء بطريقة الانحرافات أخترنا القيمة 115 كوسط فرضي من بين مراكز الفئات ، ثم حسبنا الانحرافات عنه كما يبين الجدول (3-10) حيث نجد أن :

$$S = \sqrt{\frac{7100}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)^2} = \sqrt{142 - 1} = \sqrt{141} = 11.874$$

8.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة
(Standard Deviation by Shortcut Deviations Method)

في حالة التوزيعات التكرارية المنتظمة أي الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية الطول يمكننا استخدام الانحرافات المختصرة وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط الفرضي على طول الفئة أي أن :

$$\frac{d_i}{L} = \bar{d}_i$$

حيث أن :

$\bar{d}_i$ – هو الانحراف المختصر .

L – هو طول الفئة .

بذلك نجد أن العلاقة (3-15) لحساب الانحراف المعياري تصبح على الصورة التالية :

$$S = L\sqrt{\frac{\sum \bar{d}_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum \bar{d}_i f_i}{\sum f_i}\right)^2} \quad \text{.......................}(16-3)$$

وهذه العلاقة وإن كانت أسهل من العلاقة السابقة إلاّ أنها لا يمكن أن تستخدم إلاّ في حالات التوزيعات المنتظمة ، أي في حالة تساوي أطوال الفئات .

جــدول (3-11)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء لخمسين مهندس باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	الانحراف d_i	$\bar{d}_i$	$\bar{d}_i f_i$	$\bar{d}_i^2 f_i$
90 -	3	95	20 -	2 -	6 -	12
100 -	14	105	10 -	1 -	14 -	14
110 -	16	$\boxed{115}$	صفر	صفر	صفر	صفر
120 -	11	125	10	1	11	11
130 -	4	135	20	2	8	16
140 - 150	2	145	30	3	6	18
المجموع	50	—	—	—	5	71

ولحساب الانحراف المعياري للمثـال الســابق باسـتخدام الانحرافـات المختصرة نتبع نفس الخطوات التي سبق دراستها عنـد حسـاب المتوسـط الحسابي ثم نضيف عموداً آخراً هو$(\bar{d}_i f_i)$ كما موضح في الجدول (3-11) ثم نوجد قيمة الانحراف المعياري حيث :

$$S = 10\sqrt{\frac{71}{50} - \left(\frac{5}{50}\right)^2} = \sqrt{1.42 - 0.01}$$

$$= \sqrt{1.41}$$

$$= 11.874$$

مثـــال (3-8)

أحسب الانحراف المعياري لدرجات 70 طالب في مادة الإحصاء والمبينة في الجدول (3-12).

جـــدول (3-12)

الفئات	10-	15-	20-	25-	30-	35-	40-	45-	50-	55-	65-60
التكرار	1	3	7	13	15	10	8	6	4	2	1

الحــل :

عدد الفئات هو فردي لذلك فإن فئة الوسط الفرضي هي (35-40) ، أي أن الوسط الفرضي هو مركز تلك الفئة = 37.5 ومن الجدول (3-12) نجد أن n = 70 وطول الفئة = 5 ، ثم نحسب الانحرافات كما يبين الجدول (3-13) :

جـــدول (3-13)

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة	الانحراف d_i	معدل الانحراف $\bar{d}_i$	$\bar{d}_i f_i$	$\bar{d}_i^2 f_i$
-10	1	12.5	25-	5-	5-	25
-15	3	17.5	20-	4-	12-	48
- 20	7	22.5	15-	3-	21-	63
-25	13	27.5	10-	2-	26-	52
-30	15	32.5	5-	1-	15-	15
-35	10	37.5	0	0	0	0
- 40	8	42.5	5	1	8	8
- 45	6	47.5	10	2	12	24
- 50	4	52.5	15	3	12	36
- 55	2	57.5	20	4	8	32
65 - 60	1	62.5	25	5	5	25
المجموع	70	——	——	——	34 -	328

$$\therefore S=(5)\sqrt{\frac{328}{70}-\left(\frac{-34}{70}\right)^2}=(5)\sqrt{4.686-(0.486)^2}$$

$$=(5)\sqrt{4.686-0.2362}=(5)(2.11)=10.553$$

مثـــال (3-9) :

أوجد كل من الانحراف المتوسط والانحراف الربيعي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري وكما هو مبين في الجدول (3-14) :

جـــدول (3-14)

الفئـــات	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 وأقل من 80
التكـــرار	10	15	30	22	14	9

الحـــل:

أولاً لإيجاد الانحراف المتوسط نحسب المتوسط الحسابي وننظم الجدول (3-14) على النحو المبين في الجدول (3-15) :

جـــدول (3-15)

الفئـــات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	$\bar{x}_i\, f_i$	$\lvert\bar{x}_i-\bar{x}\rvert$	$f_i\lvert\bar{x}_i-\bar{x}\rvert$
-20	10	25	250	24.2	242
-30	15	35	525	14.2	213
-40	30	45	1350	4.2	126
-50	22	55	1210	5.8	127.6
-60	14	65	910	15.8	221.2
70 -80	9	75	675	25.8	232.2
المجموع	100	—	4920	—	1162

بما أن المتوسط الحسابي للبيانات :

$$\bar{x} = \frac{4920}{100} = 49.2$$

إذن الانحراف المتوسط

$$M.D. = \frac{1162}{100} = 11.62$$

ثـانياً لإيجاد الانحراف الربيعي نحسب كلاً من الربيع الأدنى والأعلى وهذا يتطلب تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:

نجد ترتيب الربيع الأدنى حيث :

$$\frac{100}{4} = 25$$

وحيث أن هذه القيمة موجودة بجدول التكرار المتجمع الصاعد لذلك فإن الربيع الأدنى يساوي 40 ، وهي القيمة المقابلة لترتيب الربيع بالجدول (3-16) :

جـدول (3-16)

حـدود الفئـات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 20	صفر
أقل من 30	10
أقل من 40	25
أقل من 50	55
أقل من 60	77
أقل من 70	91
أقل من 80	100

ترتيب الربيع الأعلى يساوي : $100\times 3/4=75$

ويتضح من جدول الـتكرار المتجمع الصاعد (3-16) ، أن فئـة الربيـع الأعـلى هي (50 وأقل من 60) والتكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيـب الربيع الأعلى يساوي 55 والتكرار المتجمع الصاعد اللاحق يساوي 77 وعلى هذا الأساس فإن الربيع الأعلى :

$$R_3 = 50 + \left(\frac{75-55}{77-55}\right)(10) = 50 + \frac{(20)(10)}{22} = 50 + 9.1 = 59.1$$

أي أن الانحراف الربيعي :

$$\frac{R_1 - R_3}{2} = \frac{19.1}{2} = \frac{40-59.1}{2} = 9.55$$

ثالثا لإيجاد الانحراف المعياري باستخدام طريقة الانحرافات المختصـرة نكون الجدول (3-17) ، ثم نختار للبيانات وسطاً فرضياً وبما أن عدد الفئـات هو 6 أي زوجي لذلك قيمة الوسط الفرضي هي مركز الفئة المقابـل لأعلـى تكرار ويساوي 45 .

جدول (3-17)

الفئات	التكرار	مركز الفئة	الانحرافات d_i	الانحرافات المختصرة $\bar{d}_i$	$\bar{d}_i f_i$	$\bar{d}_i^2 f_i$
20 -	10	25	-20	-2	-20	40
30 -	15	35	-10	-1	-15	15
40 -	30	$\boxed{45}$	0	0	0	0
50 -	22	55	10	1	22	22
60 -	14	65	20	2	28	56
70- 80	9	75	30	3	27	81
المجموع	100	——	——	——	42	214

$$\therefore S = (10)\ \sqrt{\frac{214}{100} - \left(\frac{42}{100}\right)^2} = (10)\ \sqrt{2.14 - (0.42)^2}$$

$$= (10)\ \sqrt{2.14 - 0.1764} = (10)(1.4013) = 14.013$$

9.3 معامـــل الاختـــلاف (Coefficient of Variation)

عند مــقارنة التـــوزيعات التكراريــة تقابلنــا عــادةً صـــعوبة وهـــي الاختـــلاف في وحدة القياس . فإذا أردنا مثلاً مقارنة تشتت أطوال مجموعـــة من الأشخاص بتشتت توزيع أوزانهم نجد أن وحدات القياس المستخدمة فـــي الحالة الأولى هي السنتيمترات ، بينما الوحدات المستخدمة في الحالة الثانيـــة هي الكيلوجرامات وللتخلص من هذه المشكلة يمكن اســتخدام مقياس نســـبي للتشـــتت لا يتأثر بوحدات القياس المستخدمة في كل من التـــوزيعين . فـــإذا قسمنا الانحراف المعياري لكل توزيع على الوسط الحسابي لـــنفس التوزيـــع نحصل على مقياس نسبي للتشتت يعرف بمعامل الاختلاف D حيث أن :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\therefore D = \frac{S}{\bar{x}} x100 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17-3)$$

واستخدام التشتت النسبي لا يقتصر فقط على التخلص من وحدات القياس ولكن أيضاً لمقارنة التوزيعات التي يوجد فرق كبير بين متوســطاتها ، حتـــى ولو كانت مقاسة بنفس وحدات القياس . فمثلاً إذا كان المتوســـط الحسابي لقوة التحمل لنوع معين من الأسلاك هو 128.64 باوند بانحراف معياري 15.37 باوند ، والمتوسط الحســـابي لقوة التحـــمل لنوع آخر مـــن الأســـــلاك هـــو 87.66 باوند بانحراف معياري 14.12 باوند ، وأردنا مقارنة درجة التشـــتت

للنوعين من الأسلاك فلا يمكن مقارنة القيم المطلقة لتشتت النوعين نظراً لاختلاف متوسطيهما . لذلك نحسب معامل الاختلاف لكل من النوعين حيث :

معامل الاختلاف للنوع الأول يساوي :

$$\frac{15.37}{128.64} \times 100 = 11.95\,\%$$

أما معامل الاختلاف للنوع الثاني فيساوي :

$$\frac{14.12}{87.66} \times 100 = 16.11\,\%$$

وهكذا نجد أن التشتت النسبي مقاساً بمعامل الاختلاف يشير إلى أن النوع الأول أقل تشتتاً من النوع الثاني ، وهذه النتيجة التي نحصل عليها تخالف تماماً النتيجة التي نحصل عليها بالاعتماد على المقياس المطلق للتشتت الانحراف المعياري فقط .

وفي حالة الجداول التكرارية المفتوحة لا يمكن حساب كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري . لذلك تستخدم صيغة أخرى تعتمد على الربيعين الأعلى والأدنى . ولما كان معامل الاختلاف عبارة عن مقياس للتشتت مقسوماً على مقياس المتوسط فإنه يمكن إيجاده بقسمة الانحراف الربيعي على الوسيط وباعتبار أن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للربيعين :

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأعلى} + \text{الربيع الأدنى}} \times 100 \qquad \text{أو}$$

$$D = \frac{R_3 - R_1}{R_3 + R_1} \times 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18-3)$$

وتستخدم هذه الصيغة أيضاً إذا أردنا إيجاد معامل الاختلاف بيانياً حيث يمكن حساب قيمة الربيعين الأعلى والأدنى من منحنى التكرار المتجمع الصاعد.

10.3 الوحدات المعيارية (Standard Units z – Score)

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات ثم حسبنا المتوسط الحسابي $\bar{x}$ ، والانحراف المعياري S لهذه المجموعة ، ثم طرحنا قيمة المتوسط الحسابي من كل مفردة من مفردات المجموعة وقسمنا الناتج على قيمة الانحراف المعياري فإن القيم الجديدة التي نحصل عليها تكون مقاسة بوحدات تعرف بالوحدات المعيارية فإذا رمزنا للقيم الجديدة بالرمز z نجد أن :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \qquad \text{...}(19-3)$$

حيث أن الوسط الحسابي للقيم $\bar{x}$ يساوي صفراً والانحراف المعياري لها يساوي الواحد الصحيح .

وتفيدنا الصيغة المعيارية (19-6) في أنها تمكننا من مقارنة قيم المجموعات المختلفة وذلك بتحويل الوحدات المستخدمة في كل مجموعة إلى وحدات معيارية وذلك باستخدام الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

مثال (3-9)

قامت باحثة في مجال التغذية بدراسة كميات البروتين المتناولة من قبل عدد من الأشخاص البالغ عددهم مائة شخص . ووجدت أن المتوسط الحسابي لمأخذ البروتين لهولاء الأشخاص هو 77 gm ، وكان الانحراف المعياري لمأخذ البروتين للأشخاص هو 8 gm.أحسب الوحدة المعيارية لمأخذ بروتين يساوي 93 gm.

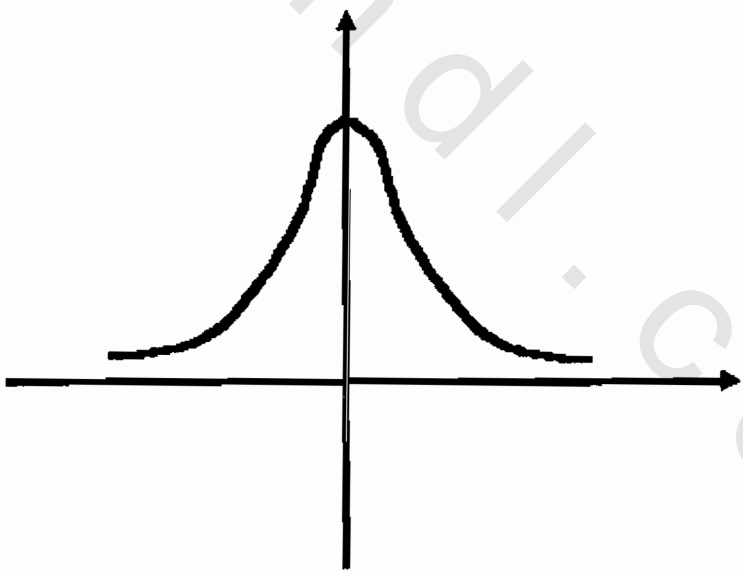
الحـــل :

نقوم بحساب الوحدة المعيارية بتطبيق العلاقة (3 - 19) نحصل على :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{93 - 77}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

11.3 المنحنى التكـــراري المتمـــاثل والتـــوزيعات ألاعتداليـــة (Symmetric Distribution Curve & Moderate Distribution)

يكون التوزيع التكراري المتماثل متوازناً بحيث إن نصفي المنحنى الـــذي يمثله يكون كل منهما صورة انعكاسية للآخر بالنسبة للخط الرأسي المار بقمة المنحني كما موضح في الشكل (3 -1) .



الشكـــل (3 -1)

منحنـــى تكـــراري متمـاثـــل

وإذا كان المنحنى المتماثل يشبه الجرس (Bell – Shaped) وكانت معظم الحالات تتجمع حول مركز التوزيع وتقل تحت طرفي المنحنى وذلك بنسب معينة فإن التوزيع يسمى توزيعاً اعتدالياً . ومن الناحية النظرية فإن توزيع البيانات الخاصة بأية صفة من صفات مجتمع ما أو أي عينة غير متحيزة تتبع التوزيع ألاعتدالي ، مثل توزيع درجات الذكاء للخمسين مهندس ومن الخواص الهامة في منحنى التوزيع التكراري أن :

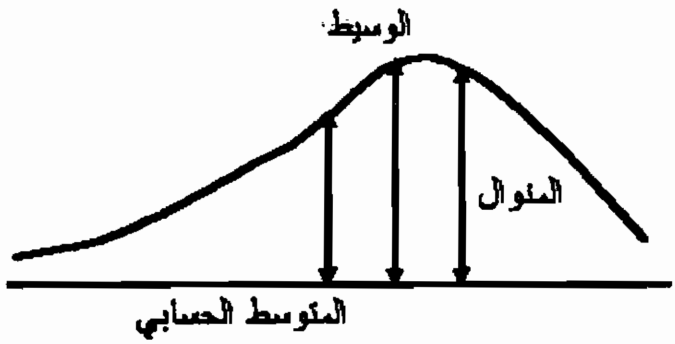
المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean) يساوي الوسيط (Median) ويساوي المنوال (Mode) ، كما أن المساحة الواقعة تحته تتوزع بنسب مرتبطة بالوسط الحسابي وبالانحراف المعياري للتوزيع .

12.3 الحيود عن التوزيع ألاعتدالي
(Diffraction from Moderate Distribution)

من الناحية العملية ، نجد أن الكثير من البيانات تحيد توزيعاتها عن الاعتدال في التوزيعات التكرارية ومنها :

a) الالتواء (Skewness)

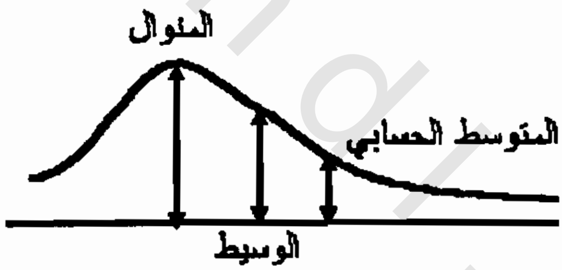
قد ينحرف التوزيع عن الاعتدال بحيث يصبح شكل المنحنى غير متماثل وذلك عندما تزداد القيم الكبرى مثلاً في التوزيع التكراري ، فيلتوي منحنى التوزيع تجاه اليسار حيث ينجذب المتوسط الحسابي تجاه القيم الشاذة الصغيرة ، بينما يكون المنوال والوسيط في صالح الأغلبية من الحالات ذات القيم الكبيرة كما موضح في الشكل (2-3) .



الشكـــل (3 -2)

المنحنـــى ذو الالتـــواء السالــــب

كذلك قد يزداد في التوزيع عدد القيم الصغرى فيلتوي منحنى التوزيع تجاه اليمين حيث ينجذب المتوسط الحسابي تجاه القيم الشاذة الكبيرة بينمـــا يكـــون المنوال والوسيط في صالح الأغلبية من الحالات ذات القـــيم الصـــغيرة كمـــا موضح في الشكل (3 -3) .



الشكـــل (3-3)

منحنـــى ذو التـــواء موجـــب

وهناك عدة مقاييس للالتواء نذكر منها المقياس التالي :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{3\,(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$Skewness\ Factor = \frac{3(\bar{x} - M)}{\delta} \quad ....(20-3)$$

ومن الواضح من هذه العلاقة أنه :

1- معامل الالتواء يساوي صفر في حالة المنحني المتماثل .

2- معامل الالتواء أكبر من صفر في حالة الالتواء تجاه القيم الكبرى .

3- معامل الالتواء أصغر من صفر في حالة الالتواء تجاه القيم الصغرى .

مثـــال (3-11)

أحسب معامل الالتواء للتوزيع التكراري المعطى في المثـــال (3-8) ثـــم أرسم شكل منحنى التوزيع .

الحـــل:

ننظم جدول التكرار المتجمع الصاعد للفئات كما هو مبين في الجدول (3-18):

جـــدول (3-18)

الحـــدود العليـــا للفئـــات	التكـــرار المتجمـــع الصاعـــد
أقـــل مـــن 10	0
أقـــل مـــن 15	1
أقـــل مـــن 20	4
أقـــل مـــن 25	11
أقـــل مـــن 30	24
أقـــل مـــن 35	39
أقـــل مـــن 40	49
أقـــل مـــن 45	57
أقـــل مـــن 50	63
أقـــل مـــن 55	67
أقـــل مـــن 60	69
أقـــل مـــن 65	70

من الجدول (3-18) نلاحظ أن :

نجد رتبة الوسيط تساوي 35 = 2 / 70 ، ومن ثم نجد معامل الالتواء حيث :

$$\therefore M = 30 + \frac{35-24}{15} \times 5$$

$$= 30 + \frac{(5)(11)}{(15)}$$

$$= 30 + \frac{11}{3}$$

$$= 33.7$$

أن الوسط الحسابي من المثال (3 -8) يحسب كما يلي :

$$\bar{x} = 37.5 + \frac{(-34)(5)}{70} = 37.5 - 2.4 = 35.1$$

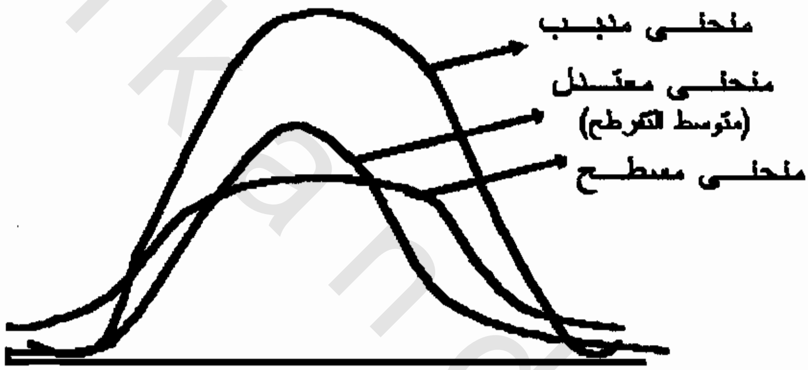
أما الانحراف المعياري من نفس المثال فيساوي S = 10.5 ، إذن معامل الالتواء يساوي :

$$0.4 = \frac{(33.7 - 35.1)\,(3)}{10.5}$$

وهذا يعني أن المنحني يعاني من التواء موجب بسيط . أما رسم شكل منحنى التوزيع فنتركه كتمرين للطالب .

b) التفــرطــح (Oblation)

قد يكون شكل منحنى التوزيع متماثلاً ولكن التوزيع نفســه قــد لا يكــون اعتدالياً ، وذلك لاختلاف نسب التوزيع بين المركز والأطــراف فقــد يكــون المركز ذا قيمة رفيعة حيــث تــزداد الحالات المتجمعــة حـــول المركـــز وتــزداد الحالات عند الطرفين . ويقاس ذلــك بمقيــاس يســـمى معامــل التفرطح . فإذا كان التوزيع ذا قمة رفيعة سمي التوزيع مدبب التفــرطح وإذا كان ذا قمة عريضة سمي التوزيـــع مســطح التفــرطح كمــا موضـــح فــي الشكل (3-4) .



الشكـــل (3-4)

وهناك عدة مقاييس للتفرطح نذكر منها المقياس التالي :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2\,(\text{المئين التسعين} - \text{المئين العاشر})}$$

أو بالرموز :

$$Oblation \quad Factor = \frac{R_3 - R_1}{2\,(P_{90} - P_{10})}$$

حيث أن :

R_1 - الربيع الأدنى .

R_3 - الربيع الأعلى .

P_{10} - المئين العاشر .

P_{90} - المئين التسعين .

وطبقاً لهذه المقاييس فإن منحنى التوزيع يكون :

1- اعتدالياً (Moderate) إذا كان معامل التفرطح يساوي 0.263 .

2- مسطحاً (Flatten) إذا كان معامل التفرطح أكبر من 0.263 .

2- مدبباً (Sharpened) إذا كان معامل التفرطح أقل من 0.263 .

مثـــال (3 -12)

أحسب معامل التفرطح في التوزيع المعطى في المثال (3 -8) .

الحـــل :

أن ترتيب P_{10} يساوي 7 = 70/10 ومنه :

$$\therefore \; P_{10} = 20 + \frac{7-4}{11-4} \times 5$$
$$= 20 + \frac{(5)(3)}{(7)}$$
$$= 22.857$$

أما ترتيب الربيع الأدنى فهو :

$R_1 = 70/4 = 17.5$

$$\therefore R_1 = 25 + \frac{17.5 - 11}{24 - 11} \times 5$$

$$= 25 + \frac{(5)(6.5)}{(13)}$$

$$= 27.5$$

أما ترتيب الربيع الأعلى فيساوي $R_3 = 3\times70/4$ ومنه :

$$\therefore R_3 = 40 + \frac{52.5 - 49}{57 - 49} \times 5$$

$$= 40 + \frac{(5)(3.5)}{(8)}$$

$$= 42.185$$

أما ترتيب فيساوي :

$$P_{90} = 70\times9 \;/\; 10$$
$$= 63$$

إذن P_{90} = 50 وعلى هذا الأساس فإن معامل التفرطح يساوي :

$$\therefore Oblation\ Factor = \frac{R_3 - R_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$= \frac{(42.185 - 27.5)}{2(50 - 22.857)} = 0.2702$$

ومن هذا نرى أن لهذا التوزيع منحني مســطحاً قليلاً بالنســبة لمنحنى التوزيع الاعتدالي .

13.3 تمـــارين

س1: أحســـب كل من المدى والانحراف المتوســـط والانحـــراف المعيـــاري لكل مجموعة من البيانات ، وبعد ذلك أحسب معامل الاخـــتلاف للمجموعـــة الثانية (b) :

a) 12 , 6 , 13 , 5 , 14 , 7 , 2
b) 11 , 1 , 2 , 9 , 6 , 4 , 7 , 3 , 5 , 2

س2: أوجـــد معامـــل الاخـــتلاف للتوزيـــع التكـــراري المبـــين فـــي الجدول (3-19) :

جـــدول (3-19)

الفئـــات	أقل من 20	20 -	25-	30 -	35 وأقل من 40
التكـــرار	8	25	26	22	9

س3: الجدول (3-20) يبين التـــوزيع التكراري لمائة عامل من عمـــال أحـــد المصانع حسب فئات الأجر الأسبوعي بالدنانير .

جـــدول (3-20)

فئات الأجر	20 -	30 -	40 -	50 -	60 وأقل من 70
عدد العمال	26	40	18	10	3

المطلوب هو إيجاد كل من الربيع الأعلى والأدنى بيانياً ، ثم استنتاج معامـــل الاختلاف ، وحساب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

س4: الجدول (3-21) يبين التوزيع التكراري لدخل 100 عائلة بالدنانير في الأسبوع .

جـدول (3-21)

الفئات	5 -	10 -	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -45
التكرار	4	22	28	18	12	9	4	3

أوجد ما يلي :

a) حساب المتوسط الحسابي .

b) حساب الانحراف المعياري .

س5: في عينة من 200 شخص في إحدى القرى وجد أن التوزيع التكراري للرجال المتزوجين حسب أعمارهم بالسنين كما يبينه الجدول (3-22) والمطلوب :

a) أوجد الانحراف المعياري والانحراف المتوسط للبيانات .

b) أحسب معامل الاختلاف للبيانات .

جـدول (3-22)

الفئات	15 -	25 -	35 -	45-	55 -	65 وأقل من 75
التكرار	49	65	41	26	16	3

س6: حصل طالب على 84 درجة في أحد الامتحانات النهائية في مادة الاستاتيكا ، حيث كان متوسط درجات جميع الطلبة في هذه المادة 76 درجة بانحراف معياري 10 درجات ، وفي امتحان مادة خواص المواد حصل نفس الطالب على 90 درجة حيث كان متوسط درجات جميع الطلبة في هذه المادة 82 بانحراف معياري 16 درجة . في أي المادتين كان الطالب أكثر تفوقاً .

س7: أرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد للتوزيع المبين في الجدول (3-23) ثم أستنتج منه ما يلي :

a) الانحراف المعياري .

b) معامل الالتواء ومعامل التفرطح .

جـدول (3-23)

الفئات	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	100 -	110 -	120 -	130 -	140 - 150
التكرار	8	10	17	34	42	32	22	15	11	9

س8: أدرس التوزيع المبين في الجدول (3-24) ، إذا كان المنحنى متماثلاً أم غير متماثل ، ثم أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والدرجة المعيارية لمراكز الفئات التي يشملها هذا التوزيع .

جـدول (3-24)

الفترة	50 -	60 -	70 -	80 -	90 -	100 -	110 - 120
التكرار	10	15	30	50	25	20	10

س9: أوجد كلاً من التشتت المطلق والتشتت النسبي للتوزيع التكراري المبين في الجدول (3-25) :

جـدول (3-25)

الفئات	أقل من 5	5 -	10 -	20 -	40 فأكثر
التكرار	8	32	50	7	3

وذلك باستخدام كل من :

a) الطريقة البيانية .
b) الطريقة الحسابية .

س10: أسفرت الدراسة التي أجريت عن الأجور الأسبوعية بالدنانير لعدد من العمال في مصنعين يعملان في صناعة واحدة عن النتائج الدرجة في الجدول (26-3) :

جــدول (26-3)

المقيـــاس	المصنـــع الأول	المصنـــع الثاني
الوسط الحسابي	62	54
الانحراف المعياري	16	15

المطلوب مقارنة تشتت الأجور الأسبوعية للعمال في المصنعين .

س11: إن الجدول التوزيع التكراري (27-3) يمثـل درجـات التحصيـل في مادتي اللغة العربية والرياضيات لمائة طالب .

جــدول (27-3)

الفترة	-0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	90 - 100
اللغة العربية	1	3	2	13	29	31	13	2	4	2
الرياضيات	2	4	10	15	19	20	15	10	4	1

والمطلوب ما يلي :

1- قارن بين تشـــتتي الدرجات في التـــوزيعين عــن طريق رسم مـــدرجين تكرارين لهما.

2- أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من التوزيعين .

س12: قارن بين تشـــتتي المجموعتين A وB في كل من الحـــالات التاليـــة المبينة في الجدول (3-28) باستخدام معامل الاختلاف مع التعليق علـــى كـــل حالة من الحالات .

جـــدول (3-28)

المقياس	$\bar{x}$	S
A	65	5
B	65	10

المقياس	$\bar{x}$	S
A	100	5
B	120	5

المقياس	$\bar{x}$	S
A	100	10
B	50	4

س13: الجدول (3-29) يمثل توزيع المرتبات في إحدى الـــدوائر الحكوميـــة مقدرة بالدنانير لعدد 140 مستخدم فيها :

جـــدول (3-29)

الفئات	-70	-90	-110	-130	-150	-170	-190	230 - 210
التكرار	8	12	25	40	20	17	13	5

والمطلوب ما يلي :

a) أحسب التشتت والانحراف الربيعي والمتوسط للبيانات .

b) أحسب الانحراف المعياري للبيانات أعلاه .

b) أحسب معامل الالتواء ومعامل التفرطح للبيانات .