الباب الثاني

مقاييس النزعة المركزية

(Measures of Central Tendency)

1.2 مقدمة .

2.2 المقاييس الإحصائية للبيانات .

3.2 مقاييس النزعة المركزية .

4.2 المتوسط الحسابي .

5.2 طرق حساب المتوسط الحسابي .

6.2 حساب الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي .

7.2 حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة .

8.2 خواص المتوسط الحسابي .

1.8.2 المتوسط الحسابي المرجح .

9.2 الوسيط .

1.9.2 خواص الوسيط .

2.9.2 طرق حساب الوسيط .

10.2 الربيع الأدنى والربيع الأعلى .

11.2 إيجاد الوسيط والربيعين بيانياً .

12.2 خواص الوسيط .

13.2 المنوال .

1.13.2 الخواص العامة للمنوال .

2.13.2 طرق حساب المنوال .

14.2 الوسط الهندسي والوسط التوافقي والعشيرات والمئينات .

1.14.2 الوسط الهندسي .

2.14.2 الوسط التوافقي .

3.14.2 العشيرات .

4.14.2 المئينات .

15.2 العلاقة بين المتوسطات .

16.2 تمارين .

1.2 مقدمـــــــة (Introduction)

لاحظنا في الـــباب الســـابق أن الطرق البيانية لـــها أهميـــتها الخاصـــة عند تقديم المعلومات الإحصائية ، فهي تعطي وصفاً عاماً وســـريعاً للبيانـــات الإحصائية ، ولكن فوائدها الاستقرارية قليلة . فالمضــلّع التكـــراري لعينـــة عشوائية مأخوذة من مجتمع ما يعطينا تصوراً عن شـــكل المضلّع التكـــراري للمجتمع نفسه ، واســـتقراؤنا يقف عند الفرض بأنه يوجد تشـــــابه مـــا بـــين مضلعين ولكن المشكلة التي نقف عندها هنا هي كيفية قياس مدى الاخـــتلاف بينهما أو بصورة إيجابية قياس درجة التشابه بينهما . وهكذا يفضـــل وجـــود مقاييس وصفية أخرى يمكن استخدامها للتنبوء بشكل توزيع التكرار الخـــاص بالمجتمع المدروس .

2.2 المقاييـــــس الإحصـــائيـــة للبيانـــات
(Statistical Measures of Data)

في كثير من التـــوزيعات التكرارية نجد أن عدداً كبيراً من المفردات يميل إلى التجمع حول قيمة متوسطة معينة والتي تمثل مركز التوزيـــع ويصـــطلح على تسمية هذه الظاهرة بالنزعـــة المركزيـــة (Central Tendency) ، أو نزعة المفردات المختلفة إلى التجمع حـــول مركز التـــوزيع ، ويتضـــح مـــن ذلك أن لكل مجموعة من البيانات قيمة متوســـطة معينة خـــاصة بها تميزهـــا عن مجموعات البيانات الأخرى والتي يمكن اســـتخدامها لوصـــف الفئـــة أو المجموعة حيث أنها تحدد مركز أو متوسط الفئة .

وعلى سبيل المثال ، لو أخذنا عينة عشوائية من مجموع الطلاب الناجحين في شهادة الثـــانوية العامة الفرع العـــلمي للعام الدراســـــي (1980–1981) في مدينة عمان وسجلنا مجموع درجاتهم باستثناء مادة التربية الإسلامية فكانت على النحو المبين في الجدول (2-1) :

جـــدول (1-2)

117	109	210	125	105	190	143
173	130	125	221	145	105	137
103	111	180	105	93	112	106
101	117	172	102	98	107	94
102	98	104	153	103	99	112

من الدراسة سريعة لبيانات هذه العينة نلاحظ أنها تدل على ما يلي :

1) أكبر مجموع في هذه البيانات هو 221 .

2) المتوسط الحسابي لتلك البيانات هو 125.3 تقريباً .

إن العدد 221 يمثل مجموع درجات أحسن طالب في هـــذه العينـــة لكـــن المتوسط الحسابي 125.3 هو خـــاصية وصفية لـــهذه العينة . إن كـــلاً من هـــــذين الـــرقمين ســـندعوه إحصـــائية فـــي هـــذه العينـــة . وعلـــى هذا الأساس فإن أية قيمة عددية تصف عينـــة تـــدعى بالقيمـــة الإحصـــائية (Statistical Value) ، بينما أية قيمة عددية تصف مجتمعاً تدعى بالوســيط الإحصائي (Statistical Parameter) .

وهـــنا يجدر بنا الملاحظة بأننا يمكننا اختيار عدة عينات عشـــوائية مـــن مجتمع ما وبالتالي نتوقع تغير الإحداثيات من عينة إلى أخرى . ففي مثـــالنا السابق إذا أخذنا عينة عشوائية أخرى من الطلاب الناجحين في مدينة عمـــان فسنجد أن المتوسط الحســـابي للعينة الجديدة يختلف عن المتوسط الحســـابي للعينة الأولى ، قد يختلف أحياناً ولكن هذه ليســـت بقاعـــدة كمـــا أن الحـــد الأعـــلى للعينة أي مجموع درجات أحسن طالب فيها سيتغير أيضاً .

وسنستخدم الإحصائيات التي نحصل عليها من عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع ما لتقدير وسطاء هذا المجتمع . أي سنأخذ هذه الإحصائيات كقيم تقريبية لوسطاء المجتمع . حيث أن حجم المجتمع سيكون في أغلب الأحيان كبيراً . ولكن هل إن هذه الإحصائيات التي نحصل عليها لعينة ما تعبّر تعبيراً دقيقاً عن وسطاء المجتمع المأخوذة منه ، وكم هي درجة هذه الدقة ، وهل نكتفي بإحصائيات لعينة أم نلجأ لاختيار عدة عينات من المجتمع ، في الحقيقة سنلجأ لاختيار عدة عينات وسندرس توزيع الإحداثيات في هذه العينات المتعددة ونحدد درجة الدقة فيها .

3.2 مقاييس النزعة المركزية (Measures of Central Tendency)

ذكرنا في البند السابق بأنه عند دراسة مجموعة بيانات وصفية يكون من المفيد أن نعيّن مقاييس عددية إحصائيات أو وسطاء ، تصف الميزات الهامة لهذه البيانات وفي طليعة هذه البيانات العددية الهامة تأتي مقاييس النزعة المركزية أي القياسات المعبّرة عن مواضع تمركز التوزيع (Measures of Location) .

وفي الكثير من التوزيعات التكرارية التي تصادفنا نجد بأنها تتسم بخواص عامة . فمثلاً القيم الصغرى يكون تكرارها قليلاً وبزيادة القيمة يكبر التكرار حتى يصل إلى نهاية عظمى ثم يعود التكرار إلى التناقص بكبر القيم الواردة بعد ذلك . كذلك فإننا نجد في معظم التوزيعات التكرارية أن عدداً كبيراً من الحالات تتجمع حول قيم في المدى الموزع فيه التكرار الكلي . أي أن عدداً كبيراً من الحالات تنجذب نحو قيمة معينة ، أي أن هذه القيمة تمثل مركز جذب لقيم الحالات الأخرى في التوزيع وتسمى مثل تلك الظاهرة بالنزعة المركزية .

فمثلاً ، إذا أجرينا لتلاميذ مدرسة ما اختباراً في الذكاء سوف نجد بأن معظمهم هم ذو ذكاء متوسط ، وأن قلة منهم تميل نحو العبقرية وقلة أخرى تميل نحو الغباء ، وإذا قمنا بقياس أطوال التلاميذ لأحد الفصول الثانوية في المدرسة فنجد بأن معظمهم يقتربون من طول معين وقلة منهم أكبر من هذا الطول وقلة أخرى أصغر منه ، وهكذا في الكثير من الظواهر الطبيعية والنفسية والاجتماعية .

إن كل قياس عددي يعبر عن موضع تمركز التوزيع لمجموعة من البيانات يدعى " بمقياس النزعة المركزية " لهذه البيانات . إن وجود قيمة متوسطة تنزع إليها معظم القيم خاصية مفيدة في نواحي متعددة ، أبسطها أنه يمكن التعرّف على مجموعة من البيانات من خلال قيمة واحدة هي القيمة المتوسطة . إن أحد أهم المقاييس المفيدة والأكثر استخداما هو المعدّل الوسطي(Average) ، وهو ما ندعوه غالباً بالوسط الحسابي (Arithmetic Mean) ، كذلك هناك الوسيط (Median) ، والمنوال (Mode) ولكل من هذه القيم المتوسطة معناه واستخداماته وطرق حسابه ، كما أنها تتساوى في بعض التوزيعات التكرارية وتختلف في توزيعات أخرى واختلاف قيمها أكثر تواردًا من تساويها ولكن أهم تلك المتوسطات هو الوسط الحسابي .

4.2 المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean)

يعتبر المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية بالرغم من وجود العديد من المتوسطات التي سوف نقوم بدراستها ضمن هذا الباب ، مثل الوسط التوافقي والوسط الهندسي وغيرها ويرمز له بالرمز $\overline{x}$ ويمكن تعريفه بالشكل التالي :

إذا كانت لدينا مجموعة من القياسات وهي $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_i$ والتي ليس بالضرورة أن تكون مختلفة ، فإن الوسط الحسابي لهذه القياسات يعـــرّف كما يلي :

$$\text{الوسط الحسابي } (\textit{Arithmetic Mean}) = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

أو بمعنى آخر فإن الوسط الحسابي يحسب من المعادلة الرياضية التالية :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum i = n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}2)$$

حيث أن :

$\bar{x}$: يمثل الوســـط الحسابي .

i : يمثل رتبة القيمة الموجودة ضمن مجموعة القياسات التي تمثل مجتمعـــاً محدوداً حجمه n أما الرمز $\sum$ فيرمز لمجموع القيم .

ويمكن كتابة القيمة الموجودة في البسط $\sum_{i=1}^{n} x_i$ بالرمز $\sum x$ حتى لا يكون هناك أي نوع من الالتباس . إن المعادلة (1-2) يمكن كتابتهـــا أيضـــاً علـــى الصورة التالية :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{-}2)$$

5.2 طــرق حســاب المتوســط الحسابــي
(Methods of Calculating Arithmetic Mean)

1- في حالة البيانات المفردة بدون تكرار
(For Data Set without Frequency)

إذا كان المطلوب إيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من القياسات عـددها n فأنه يمكن استخدام المعادلة (2-2) لذلك الغــرض والمثــال (2-1) يوضــح لن ذلك .

مثــال (2-1)

أوجد الوسط الحسابي للقيم التالية: 125 , 60 , 75 , 100 , 120

الحــل :

نلاحظ أن عدد القيم هو 5 نستخدم المعادلة (2-1) أو (2-2) حيث :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{125 + 60 + 75 + 100 + 120}{5} = \frac{480}{5} = 96$$

مثــال (2-2)

في خمس مباريات أشترك فيها فريق مدينة ما في كرة السلّة قام بتسـجيل النقاط التالية في تلك المباريات وكانت بالشكل التالي :

99 , 85 , 92 , 104 , 87

المطلوب :

أيجاد الوسط الحسابي للنقاط المسجلة لهذا الفريق .

الحــل :

نلاحظ هنا أيضاً أن عدد المباريات هو خمسة أي أن n = 5 لذلك فإن :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{87 + 104 + 92 + 85 + 99}{5} = \frac{467}{5} = 93.4$$

مثــال (2 -3)

أخذت 6 سجائر كعينات من علب مختلفة مــن الــدخان وســجلت كميــة النيكوتين في كل منها بالمليجرام فكانت كما يلي :

21.2 , 16 , 10 , 15.7 , 18.1 , 12.3

المطلوب :

أحسب متوسط كمية النيكوتين في هذه العينة .

الحــل :

نلاحظ هنا أن n = 6 وعلى هذا الأساس فإن الوسط الحسابي للعينة هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{12.3 + 18.1 + 15.7 + 10 + 16 + 21.2}{6} = \frac{93.3}{6} = 15.55\, mg$$

2- في حالــة البيانـــات المفــردة مع وجــود تكــرار
(For Data Set with Frequency)

إذا كان المطلوب إيجاد المتوسط الحسابي لقيم مختلفة متكررة مثل القــيم المبينة في الجدول (2-2) :

جــدول (2-2)

القيــم (x_i)	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
التكرار (f_i)	f_1	f_2	f_3	.....	f_n

فإن المتوسط الحسابي يحسب من المعادلة التالية :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} \qquad \text{........}(3-2)$$

حيث أن :

f_i - يمثل تكرار القيمة في البيانات و n هو مجموع التكرارات .

مثـــال (4-2)

أوجد الوسط الحسابي لنتيجة الامتحان النهائي لعدد 100 من طلبة الفصل الأول في مادة الرياضيات في أحد المعاهد المهنية العليا ، والموضـــحة فـــي الجدول (3-2) علماً أن النهاية العظمى لدرجة الامتحان هي 10 .

جدول (2-3)

الدرجة (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار (f_i)	2	3	5	8	12	24	22	14	6	3	1

الحـــل:

نستخدم المعادلة رقم (2-3) ، لأن القيم هنا مكررة ولذلك فـإن الوسـط الحسابي لهذه القيم يحسب بالشكل التالي :

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i f_i}{n}$$

$$\sum x_i f_i = (0)(2)+(1)(3)+(2)(5)+(3)(8)+(4)(12)+(5)(24)$$
$$+(6)(22)+(7)(14)+(8)(6)+(9)(3)+(10)(1)=520$$

$$n=\sum f_i = 2+3+5+8+12+24+22+14+6+3+1=100$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{520}{100}=5.2$$

مثـــال (2-5)

من إحصاء عدد الناجحين في شـهادة الثانويـة العامـة للفـرع العلمـي لعام (1980–1981) الحاصلين على معدل دون 50% ، بعد اسـتثناء مـادة التربية الإسلامية في مدينة عمان كما تم إدراج مجمـوعهم وأعـدادهم فـي الجدول (2-4) :

جـــدول (2-4)

المجموع (x_i)	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102
العدد (التكرار) (f_i)	2	7	12	23	58	62	51	87	99	81	85

أوجد الوسط الحسابي لهذه العينة.

الحـــل :

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i f_i}{n}$$

$$\sum x_i f_i=(92)(2)+(93)(7)+(94)(12)+(95)(23)+(96)(58)+(97)(62)$$
$$+(98)(51)+(99)(87)+(100)(99)+(101)(81)+(102)(85)$$

$$\therefore \sum x_i f_i=56092$$

$$n=\sum f_i=2+7+12+23+58+62+51+87+99+81+85=567$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{56092}{567}=98.9$$

مثـــال (2-6)

في إحدى التجارب المعملية تم الحصول على قياسات لدرجـــة حـــرارة ثرمومتر وقد أدرجت تلك القياسات وتكراراتها في الجدول(2-5) :

جـــدول(2-5)

القيمـــة (القياس) x_i	2	6	8	5
التكــرار (f_i)	1	4	2	3

المطلوب : إيجاد الوسط الحسابي لهذه العينة .

الحــل :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \ f_i}{n}$$

$$\sum x_i \ f_i = (1)(2) + (6)(4) + (8)(2) + (5)(3)$$

$$\therefore \sum x_i f_i = 57$$

$$n = \sum f_i = 1 + 4 + 2 + 3 = 10$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{57}{10} = 5.7$$

3- في حالــة التوزيعــات التكراريــة ذات الفتــرات

(For Frequency Distributions with Intervals)

في هذه الحالة يمكن اســتخدام العلاقة (2-3) علــى أن نعتبــر مراكــز الفترات هي القيم المتكررة . وفي هذه الحالة فان العلاقة (2-3) يمكن كتابتها عل النحو التالي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\bar{x}_1 \ f_1 + \bar{x}_2 \ f_2 + \bar{x}_3 \ f_3 + \cdots + \bar{x}_n \ f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \ f_i}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4-2)$$

ومن المهــم أن نذكر هــنا أن ظهور الآلات الحاســبة الحديثة وأجهــزة الحاسوب وسهولة استخدامها قد جعل من حســاب الوسط الحســابي عمليــة سهلة لا تستغرق الكثير من الوقت .

فإذا أردنا مثلاً معرفة الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الموضـــح فـــي الجدول(1-3) أي حساب المتوســـط الحسابي لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس ، نجد في الفئة الأولى ثـــلاثة مهندســــين حصـــلوا علـــى درجـــات تـــتراوح بين 90 وأقل من 100 ، وبافتراض أن المهندسين فـــي كـــل فئـــة حصلوا على درجات متساوية وأن كلاً منها يســـاوي مركز الفئة (95) ، فإن مجموع الدرجات التي حصـــل عليهـــا مهندســـو الفـــئة الأولـــى يكـــون (95(مركز الفئة) x 3 (تكرار الفئة)) ، ويكون مجموع الدرجات التي حصـــل عليها مهندســـو الفئة الثانية(105 x 14)...وهكذا و يكون المجمـــوع الكلـــي للدرجات التي حصل عليها كل المهندسين مساويا ($\sum \bar{x}_i f_i$)... ، وبقســـمة هذا المجموع على عدد المهندسين($\sum f_i$) ، نحصل على الوسط الحسابي لدرجة المهندس في الاختبار كما يوضح الجدول(2-6) ذلك .

جـــدول (2-6)

إيجاد الوسط الحسابي لدرجة المهندس في اختبار الذكاء

ت	الفئـــة (x_i)	التكرار (f_i)	مركز الفئة ($\bar{x}_i$)	مجموع تكرار الفئة ($\bar{x}_i f_i$)
1	- 90	3	95	285 = 3 x 95
2	- 100	14	105	1470 = 14 x 105
3	- 110	16	115	1840 = 16 x 115
4	- 120	11	125	1375 = 11 x 125
5	- 130	4	135	540 = 4 x 135
6	150 - 140	2	145	290 = 2 x 145
المجموع Total		50	————	5800

وبواسـطة المعادلة(2 -4) يمكن حسـاب الوسط الحسابي لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس بالشكل التالي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f_i}{n} = \frac{5800}{50} = 116$$

ونظراً لكثرة العمليات الحسابية التي تتضمنها هذه الطريقة حيـث نقـوم بضرب أرقام التكرارات في مراكز الفئات التي قد تحتوي على كسور لـذلك يفضل استخدام طرق أخرى مختصرة لتبسيط العمليات الحسابية .

مثـال (2-7)

من إحصاء عدد الناجحين في شهادة الثانوية العامة الفرع العلمـي العـام للعام الدراسـي(1992–1993) في مدينة عمان وجد أن المجاميع كما يبـين الجدول (2-7) :

جـدول (2-7)

الفئة	110 -	120 -	130 -	140 -	150 -	160 -	170 -	180 -	190 -	200 -
التكرار	415	252	135	102	37	21	9	5	2	1

المطلوب :

أوجد الوسط الحسابي لهذه العينة .

الحـل

نرتب الجدول بالشكل الذي يبينه الجدول (2-8) :

جـــدول (2-8)

ت	حدود الفئة x_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	التكرار f_i	مركز الفئة x التكرار $\bar{x}_i f_i$
1	- 110	115	415	47725
2	- 120	125	252	31500
3	- 130	135	135	18225
4	- 140	145	102	14790
5	- 150	155	37	5735
6	- 160	165	21	3465
7	- 170	175	9	1575
8	- 180	185	5	925
9	- 190	195	2	390
10	- 200	205	1	205
المجموع Total			979	124535

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, f_i}{n} = \frac{124535}{979} = 127.2$$

مثـــال (2-8)

الجدول (2-9) يمثل توزيع دخل 100 منتج في أحد المصانع والمطلــوب حساب الوسط الحسابي لهذا الدخل .

جـــدول (2-9)

فترات الأجور	- 40	- 46	- 52	- 58	- 64	- 70	- 76	- 82	- 88	100 - 94
التكرار	2	10	12	15	20	17	11	8	4	1

الحــل :

في هذا المثـــال نعتبر مراكز الــفئات هي الدخل الذي نـــريد إيجاد وسطه الحسابي والخطوات موضحة في الجدول أدناه ومن الجدول نجد أن :

$$\sum f_i = n = 100 \quad , \quad \sum x_i f_i = 6742$$

ولذلك نحسب الوسط الحسابي كما يبين الجدول (2-10) :

جــدول (2-10)

ت	فئات الدخل x_i	عدد المنتجين(التكرار)	مراكز الفئات	المركز x التكرار
1	−40	2	43	86
2	−46	10	49	490
3	−52	12	55	660
4	−58	15	61	915
5	−62	20	67	1340
6	−68	17	73	1241
7	−76	11	79	869
8	−82	8	85	680
9	−88	4	91	364
10	100 −94	1	97	97
	Total المجموع	100	——	6742

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{6742}{100} = 67.42$$

6.2 حساب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي
(Finding Arithmetic Mean Using Assumed Mean)

تتضمن هذه الطريقة اختيار وسطاً فرضياً وحساب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي ، فإذا كان مجموع هذه الانحرافات صفراً ، فأن ذلك يدل على أن الوسط الفرضي الذي اخترناه هو نفسه المتوسط الحسابي ، وإذا كان مجموع الانحرافات موجباً كان المتوسط الحسابي أكبر من الوسط الفرضي ، وإذا كان مجموع الانحرافات سالباً كان المتوسط الحسابي أصغر من الوسط الفرضي وعلى هذا الأساس فإن المتوسط الحسابي يعرف من المعادلة التالية :

المتوسط الحسابي الأصلي = الوسط الفرضي + متوسط الانحرافات

وإذا رمزنا للوسط الفرضي بالرمز a وإلى مجموع الانحرافات عن الوسط الفرضي بالرمز d حيث إن:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)}{n}$$

فإنه يمكن حساب الوسط الحسابي كما يلي:

$$\bar{x} = a + d = a + \frac{\sum (x_i - a)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5-2)$$

ولتوضيح كيفية حساب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي نقوم بدراسة المثال (2-9) والذي يوضح لنا ذلك .

مثـــال (2 – 9)

باستخدام طريقة الوسط الفرضي ، أوجد الوسط الحسابي للبيانات التالية :

30 , 15 , 20 , 12 , 5 , 8

<u>الحـــل</u>:

نلاحظ أن القياسات غير مرتـــبة لذلك نقوم بترتيبها تـــصاعدياً أو تنازلياً بالشكل التالي :

.30 , 20 , 15 , 12 , 8 , 5

ثم نختار وسطاً فرضياً من بين القيم وليكن العدد 12 ثـــم نحســـب مجمـــوع الانحرافات عن الوسط الفرضي بالشكل الموضح في الجدول (2-11) :

جــدول (2-11)

ت	القيمة	الوسط الفرضي	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي
1	5	12	$5 - 12 = -7$
2	8	12	$8 - 12 = -4$
3	12	12	$12 - 12 = 0$
4	15	12	$15 - 12 = 3$
5	20	12	$20 - 12 = 8$
6	30	12	$30 - 12 = 18$
المجموع Total		———	مجموع الانحرافات = 18

وسنلاحظ أن :

مجموع الانحرافات = 18 عدد القيم أو الحالات = 6

ولذلك فإن متوسط الانحرافات تساوي 18/6=3 ، وعلى هذا الأساس فإن الوسط الحسابي الأصلي يساوي 12 + 3 = 15 ، ويمكن التحقق من ذلك بتطبيق التعريف مباشرة حيث نجد أن :

$$\bar{x}=\frac{5+8+12+15+20+30}{6}=\frac{90}{6}=15$$

مثــال (2 - 10)

أوجد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي للبيانات التالية :

2 , 9 , 8 , 13 , 10 , 12

الحــل:

نرتب القيم تصاعدياً فتكون على النحو التالي:

13 , 12 , 10 , 9 , 8 , 2

ثم نختار الوسط الفرضي بطريقة بحيث تكون الانحرافات السالبة عن يمينه تساوي الانحرافات الموجبة عن يساره ، أي نختار أما العدد 9 أو العدد 10 ولنأخذ العدد 10 مثلاً كوسط فرضي . نرتب القيم كما هو مبين في الجدول (12-2) ، ونلاحظ بأن مجموع الانحرافات يساوي (- 6) وعدد القيم أو الحالات تساوي 6 أيضاً ، ولذلك فإن متوسط الانحرافات تساوي 6/6-=-1 وعلى هذا الأساس فإن الوسط الحسابي الأصلي سيساوي 10 + (1-) = 9 ويمكن التحقق من ذلك بتطبيق التعريف مباشرة حيث نجد أن :

جدول (2-12)

ت	القيمة	الوسط الفرضي	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي
1	2	10	8 − = 10 − 2
2	8	10	2 − = 10 − 8
3	9	10	1 − = 10 − 9
4	10	10	0 = 10 − 10
5	12	10	2 = 10 − 12
6	13	10	3 = 10 − 13
المجموع Total	———		مجموع الانحرافات = − 6

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{2+8+9+10+12+13}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

مثـــال (2 – 11)

أوجد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي للقياسات التالية :

25 , 20 , 15 , 10 , 6 , 2

<u>الحـــل :</u>

نلاحظ أن القياسات مرتبـــة تصـــاعدياً ولـــذلك نختـــار العـــدد 15 كوســـط فرضي . ونرتب القيم في الجدول (2-13) .

جـــدول (2-13)

ت	القيمة	الوسط الفرضي	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي
1	2	15	13 − = 15 − 2
2	6	15	9 − = 15 − 6
3	10	15	5 − = 15 − 10
4	15	15	0 = 15 − 15
5	20	15	5 = 15 − 20
6	25	15	10 = 15 − 25
المجموع Total	———		مجموع الانحرافات = − 12

$$\therefore\ \bar{x} = 15 + \frac{-12}{6} = 15 - 2 = 13$$

أما عند حساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة أي البيانات المرتبة في جداول التوزيعات التكرارية والمتكونة من فئات فإنه يجب أتباع الخطوات التالية :

1- نجد مركز الفئة $\bar{x}_i$.

2- نختار وسطاً فرضياً (a) من بين قيم $\bar{x}_i$ ، ومن المفضل أن تكون القيمة الوسطية للفئات .

3- نطرح قيم $\bar{x}_i$ من الوسط الفرضي ونكون بذلك قد وجدنا الانحرافات عن الوسط الفرضي (d) .

4- نضرب قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي (d) في تكرار الفئة (f) فنحصل على مجموع الانحرافات لتلك الفئة .

5- نجمع الانحرافات لكل الفئات ونقسمها على مجموع التكرارات فنحصل على معدل الانحرافات للفئات .

6- نضيف معدل الانحرافات إلى الوسط الفرضي فنحصل على الوسط الحسابي وكما موضح في المعادلة التالية :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum d_i f_i}{\sum f_i} = a + \frac{\sum d_i f_i}{n} \qquad \text{.......... ....}(6-2)$$

حيث أن d_i يمثل انحراف قيم مراكز الفئات عن الوسط الفرضي(a) والذي يتم اختياره من بين الفئات أما f_i فهو تكرار الفئة.ويراعى عند اختيار الوسط الفرضي أن يكون في منتصف الجدول ويستحسن أن يكون أمام أكبر تكرار . ويوضح الجدول (2-14) كيفية إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي لاختبار درجات الذكاء للخمسين مهندس .

ولتوضيح كيفية ترتيب الجدول لإيجاد الوسط الحسابي باستخدام طريقة الانحرافات أي الوسط الفرضي نتبع ما يلي :

جــدول (2-14)

مجموع الانحرافات $d_i f_i$	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي d_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	تكرار الفئة f_i	الفئات
60 -	20 -	95	3	- 90
140 -	10 -	105	14	- 100
0	0	$\boxed{115}$	16	- 110
110	10	125	11	- 120
80	20	135	4	- 130
60	30	145	2	150 - 140
50	——	——	50	المجموع

1- نعين مراكز الفئات كما موضح في الجدول .

2- نختار وسطاً فرضياً من بين مراكز الفئات وهو في هذه الحالة 115 وكما تم توضيح ذلك ، أي المركز المقابل لأكبر تكرار ونحسب انحرافات مراكز الفئات عنه .

3- نضرب تكرار كل فئة (f_i) في انحراف هذه الفئة (d_i) .

4- نجمع حاصل الضرب فنحصل على $\sum f_i d_i$ ، ثم نوجد الوسط الحسابي بواسطة المعادلة (2-6) . وبإتباع هذه الخطوات نجد أن الوسط الحسابي هو:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum d_i f_i}{\sum f_i} = 115 + \frac{50}{50} = 115 + 1 = 116$$

مثـــــال (2 -12)

أوجد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي الانحرافات لـــدخول 100 منتج والمعطاة في المثال (2 - 8) .

الحـــــل:

نرتب الجدول القيم كما يبين الجدول (2-15) حيث :

جـــدول (2-15)

الفئات x_i	تكرار الفئة f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي d_i	مجموع الانحرافات $d_i f_i$
- 40	2	43	24 -	48 -
- 46	10	49	18 -	180 -
- 52	12	55	12 -	144 -
- 58	15	61	6 -	90 -
- 64	20	$\boxed{67}$	0	0
- 70	17	73	6	102
- 76	11	79	12	132
- 82	8	85	18	144
- 88	4	91	24	96
100 - 94	1	97	30	30
المجموع	100	—	—	36

$$\bar{x} = a + \frac{\sum d_i f_i}{\sum f_i} = 67 + \frac{36}{100} = 67 + 0.36 = 67.36$$

7.2 حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة
(Calculation of Arithmetic Mean Using Shortcut Deviations)

لزيادة اختصار العمليات الحسابية نلاحظ أنه في حالة الجداول المنتظمة أي عند تساوي أطوال الفئات يمكن قسمة كل من الانحرافات(d) على طول الفئة (L) لنحصل بذلك على الانحرافات المختصرة أي أن :

$$\bar{d} = \frac{d}{L} \qquad (7-2)$$

وبذلك نحصل على الوسط الحسابي من العلاقة التالية :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum \bar{d}_i f_i}{\sum f_i} L = a + \frac{\sum \bar{d}_i f_i}{n} L \qquad (8-2)$$

حيث أن $\bar{d}$ هي الانحرافات المختصرة ، L هو طول الفئة ويلاحظ أن إتباع هذه الطريقة يسهل من العمليات الحسابية كثيراً ويكشف الأخطاء في حساب الانحرافات ، حيث أن الانحرافات المختصرة للفئات التي تلي فئة الوسط الفرضي تكون دائماً 1 , 2 , 3 والتي تسبق فئة الوسط الفرضي تكون - 1 , - 2 , - 3 ..ألخ .

ويبين الجدول(2-16) كيفية إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس ، حيث تراعى نفس الخطوات السابقة مع مراعاة وضع :

$$\bar{d} = \frac{d}{L}$$

حيث أن L تمثل طول الفترة ويلاحظ أن النتيجة النهائية هي نفسها التي تم حسابها بواسطة الطريقة السابقة .

جدول (2-16)

إيجاد الوسط الحسابي باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس

مجموع الانحرافات المختصرة $f_i d_i$	الانحراف المختصر عن الوسط الفرضي $\bar{d}_i$	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي d_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	تكرار الفئة f_i	الفئات
6 -	2 -	20 -	95	3	- 90
14 -	1 -	10 -	105	14	- 100
0	0	0	$\boxed{115}$	16	- 110
11	1	10	125	11	- 120
8	2	20	135	4	- 130
6	3	30	145	2	150 - 140
5	—	—	—	50	المجموع

$$\therefore \bar{x} = a + \frac{\sum \bar{d}_i f_i}{n} = 115 + \left(\frac{5}{50} \ x \ 10\right) = 115 + 1 = 116$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها من قبل . ويعتبر المتوسط الحسابي من أكثر المتوسطات استخداماً في علم الإحصاء ، وذلك لأنه يستخدم كل القيم المعطاة في البيانات ، كما أنه أكثر المتوسطات ثباتاً من عينة إلى أخرى للتعبير عن خواص مجتمع معين . هذا بالإضافة إلى الدقة في طريقة حسابه غير أنه في بعض الأحيان لا يكون المتوسط معبراً تماماً عن الصورة الحقيقية للبيانات ، ففي حالة وجود بعض القيم المتطرفة في الصغر مثلاً فإننا نجد أن الوسط ينجذب ناحية القيم الصغرى رغم أن معظم

الحالات تكون ذات قيم كبرى ، وقد يحدث وضع شاذ مماثل في حالة تطـــرف عدد قليل من البيانات الكبيرة القيمة فنجد أن الوسط ينجذب إلى القيم الكبـــرى رغم أن معظم الحالات تكون قيماً صغيرة . ولعلك سمعت أو قرأت في بعض الأحيان عن مواقف يساء فيها استخدام المتوسط للتعبير عـــن مجموعـــة مـــن البيانات فمثلاً قد نجد عشرة أشخاص في إحدى المنشآت مرتباتهم كمـــا يبـــين الجدول (2-17) :

جـــدول (2-17)

الوظيفـــة	العـــدد	المرتب (بالدينار)
المديـــر	1	800
الكاتـــب	1	80
المنتجـــون	8	60

أن المتوسط الحسابي لهذه المرتبات هو 136 دينار . فإذا أدعى المسؤول عن العمل بأن متوسط المرتبات هو 120 دينار فإن هذا الإدّعاء لا يمثل الصـــورة الحقيقية لدخل المنتجين ، والتي هي أقل من هذا المبلغ ولكن لأن مرتب المدير قد رفع المتوسط الحسابي ، ومن هنا يتضح أن المتوسط الحسابي لن يعطـــي الصورة الحقيقية لمتوسط المرتبات في هذه المنشأة .

مثـــال (2 - 13)

أوجد الوسط الحســـابي بطريقة الانحرافات المختصرة لدخل 100 منـــتج والمعطاة في المثال (2 – 8) .

الحـل :

نرتب القيم في الجدول (2-17) حيث :

جـــدول (2-17)

الفئات x_i	تكرار الفئة f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	قيمة الانحراف عن الوسط الفرضي d_i	معدل الانحرافات المختصرة $\bar{d}_i$	مجموع الانحرافات المختصرة $\bar{d}_i f_i$
- 40	2	43	24 -	4 -	8 -
- 46	10	49	18 -	3 -	30 -
- 52	12	55	12 -	2 -	24 -
- 58	15	61	6 -	1 -	15 -
- 64	20	$\boxed{67}$	0	0	0
- 70	17	73	6	1	17
- 76	11	79	12	2	22
- 82	8	85	18	3	24
- 88	4	91	24	4	16
100 - 94	1	97	30	5	5
المجموع	100	—	—	—	7

$$\therefore \bar{x} = a + \frac{\sum \bar{d}_i f_i}{n} = 67 + \left(\frac{7}{100} x\, 6\right) = 67 + 0.42 = 67.42$$

نلاحظ أن قيمة المتوسط الحسابي المحسوبة بهذه الطريقة هي نفس القيمة المحسوبة في المثال (2 – 8) .

8.2 خــواص المتوســط الحسابــي (Arithmetic Mean Properties)

من أهم خواص الوسط الحسابي النقاط التالية :

1- سهولة حسابه وخضوعه للعمليات الجبرية .

2- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحســابي يســاوي صفراً ، ويمكــن أثبات ذلك جبرياً بالشكل التالي :

$$
\begin{aligned}
d_1 &= x_1 - \bar{x} \\
d_2 &= x_2 - \bar{x} \\
\vdots & \qquad \vdots \\
d_n &= x_n - \bar{x}
\end{aligned}
$$

وبالجمع نجد أن :

$$\sum d_i = \sum x_i - n\bar{x}$$

أي أن :

$$\therefore \sum d_i = \sum x_i - n\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = 0$$

3- مجموع انحرافات مربع القيم عن متوسطها الحسابي يقل عــن مجمــوع انحرافات مربعات القيم عن أية قيمة أخرى وسنثبت ذلك فيما بعد .

4- إذا كان لدينا عدداً من القــيم لمتغيرين وهــما x و y فإن المتوســـط الحســـابي لمجمـــوع قـــيم المتغيـــرين يســـاوي مجمـــوع الوســـطين الحسابيين للمتغيرين .

فإذا كان :

$$z_1 = x_1 + y_1$$
$$z_2 = x_2 + y_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$z_n = x_n + y_n$$

وبالجمع نجد أن :

$$\sum z = \sum x + \sum y$$

وبالقسمة على عدد القيم n نجد أن :

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة في حالة أي عدد من المتغيرات فإذا كانت :

$$m = x + y - z$$

فإن :

$$\overline{m} = \bar{x} + \bar{y} - \bar{z}$$

5- إذا احتوت مجموعة من المفردات على بعض القيم المتطرفة الكبيرة جـداً أو الصغيرة جداً ، فإن المتوسـط الحسابي للمجموعة يكون مضللاً لأنه يتأثر بهذه القيم بالرغم من قلّتها وفي مثل هذه الحالة يفضل الاعتماد على مقيـاس آخر من مقاييس المتوسطات .

6- لا يمكن حساب الوسط الحسابي من الجداول المفتوحة .

7- لا يمكن إيجاد الوسط الحسابي بالطرق البيانية .

وفي بعض الأحيان قد لا نستطيع حساب المتوسط حينما يكون لدينا توزيع تكراري في فترات مفتوحة سـواء كانت من أدنى أو من أعلى حيث لا نتمكن من معرفة مركز الفترة المفتوحة ولمثل هذه الأسـباب قد نلجأ إلى المؤشـر الثاني لمقاييس النزعة المركزية المسّمى بالوسيط .

1.8.2 المتوسـط الحسابـي المرجـح

(Predominant Arithmetic Mean)

إذا كانت القيم المشـاهدة ليس لها نفس الأهمية أو الوزن ، فعندئذٍ لحساب المتوسط الحسابي لتلك المجموعة يجب أن لا نعامل جميع القيم نفس المعاملـة بل نكرر كل قيمة عدد من المرات حسب أهميتها أو وزنها ، أي نرجح كـل قيمة بوزنها وعليه يطلق على المتوسط الحسابي في هذه الحالـة المتوسـط الحسابي المرجح أو الموزون .

فإذا فرضنا أن لدينا القيم التالية : $x_1 , x_2 , x_3 ,........, x_n$ وكانت أهمية كل قيمة متناسـبة مـع الأوزان : $w_1 , w_2 , w_3 ,.........., w_n$ فيحسـب المتوسط الحسابي المرجح من العلاقة التالية :

$$\tilde{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + \cdots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad ....(9-2)$$

7- لا يمكن إيجاد الوسط الحسابي بالطرق البيانية .

وفي بعض الأحيان قد لا نستطيع حساب المتوسط حينما يكون لدينا توزيع تكراري في فترات مفتوحة ســواء كانت من أدنى أو من أعلى حيث لا نتمكن من معرفة مركز الفترة المفتوحة ولمثل هذه الأســباب قد نلجأ إلى المؤشـــر الثاني لمقاييس النزعة المركزية المسّمى بالوسيط .

1.8.2 المتوســط الحسابــي المرجــح

(Predominant Arithmetic Mean)

إذا كانت القيم المشـــاهدة ليس لها نفس الأهمية أو الوزن ، فعندئذٍ لحساب المتوسط الحسابي لتلك المجموعة يجب أن لا نعامل جميع القيم نفس المعاملـــة بل نكرر كل قيمة عدد من المرات حسب أهميتها أو وزنها ، أي نرجح كــل قيمة بوزنها وعليه يطلق على المتوسط الحسابي في هذه الحالــة المتوســـط الحسابي المرجح أو الموزون .

فإذا فرضنا أن لدينا القيم التالية : $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ وكانت أهمية كل قيمة متناســبة مــع الأوزان : $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ فيحســب المتوسط الحسابي المرجح من العلاقة التالية :

$$\tilde{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + \cdots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \quad \ldots\ldots\ldots(9-2)$$

ونلاحظ أن صيغة المتوسط الحسابي المرجح مماثلة لصيغة المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة في جدول تكراري لأن التكرار يعبر عن وزن أو أهمية القيمة .

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا 3 سلع ، وكان سعر الوحدة من السلعة الأولى 26 ديناراً وسعر الوحدة من السلعة الثانية 20 ديناراً وسعر الوحدة من السلعة الثالثة 6 دنانير ، وكانت أهمية السلعة الثانية ضعف أهمية السلعة الأولى وكانت أهمية السلعة الثالثة خمسة أمثال السلعة الأولى فإن الوسط الحسابي المرجح يحسب كما هو مبين في الجدول (2-18) :

جدول (2-18)

المفردة	السلعة الأولى	السلعة الثانية	السلعة الثالثة
سعر الوحدة (x_i)	26	20	6
الأهمية (w_i)	1	2	5

وبتطبيق الصيغة الأولى للمتوسط الحسابي المرجح نحصل على :

$$\tilde{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}=\frac{(26)(1)+(20)(2)+(6)(5)}{1+2+5}=12$$

9.2 الوسيط (The Median)

يعرف الوسيط بأنه القيمة التي تتوسط البيانات أي القيمة التي تقع في المنتصف ، فإذا أردنا إيجاد الوسيط لمجموعة من المفردات ، فإننا نقوم بترتيب هذه المجموعة تصاعدياً أو تنازلياً ثم نبحث عن القيمة التي يسبقها

ويليها نفس العدد من القيم ، ويمكن تعريف الوسيط أيضا بأنه القيمة التي تقسم المجموعة إلى قسمين بحيث يكون عدد القيم الأصغر منه مساوياً لعدد القيم الأكبر منه .

1.9.2 خواص الوسيط (The Median Properties)

1- يصف البيانات بواقعية أكثر في حالة وجود القيم المتطرفة .
2- يمكن إيجاده من الجداول المفتوحة .
3- يمكن تحديده من الرسم البياني .
4- لا يتأثر بالقيم المتطرفة .
5- ليس له معنى في حالة عدم ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .

2.9.2 طرق حساب الوسيط (Methods for Calculating Median)

أولاً : في حالة البيانات المفردة نقوم لحساب الوسيط بإتباع الخطوات التالية :

a) نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .
b) نحدد رتبة الوسيط فإذا كانت القيم فردية فإن رتبة الوسيط تساوي :

$$\frac{n+1}{2}$$

c) أما إذا كانت القيم زوجية العدد فإن رتبة الوسيط هي :

$$.(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)$$

مثـــال (2-14)

أوجد الوسيط للقيم التالية :

.5 , 15 , 3 , 10 , 8 , 6 , 20

الحـــل :

نرتب أولاً القيم تصاعدياً بالشكل التالي:

.20 , 15 , 10 , 8 , 6 , 5 , 3

وبما أن عدد القيم فردي وهو 7 لذلك فإن رتبة الوسيط تساوي :

$$.4 = \frac{8}{2} = \frac{1+7}{2}$$

أي إن رتبة الوسيط هي الرتبة الرابعة من اليمين أي العدد 8 ($\therefore M = 8$) .

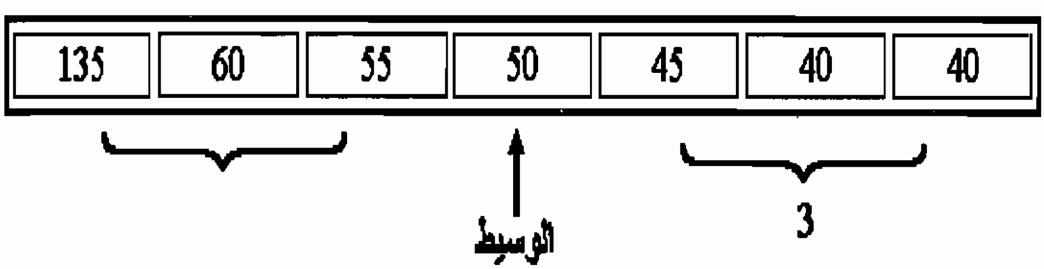
مثـــال (2 – 15)

أوجد الوسيط للقيم التالية :

.60 , 135 , 55 , 40 , 45 , 40 , 50

الحـــل :

نقوم بترتيب القيم تصاعدياً ويكون الوســـيط مساوياً لقيمة الحد الأوسط في الترتيب بالشكل التالي :



أي أن الوسيط يساوي 50 . ونلاحظ أن الوسـيط هنا هو الحد الرابع ، أي أن رتبة الوسـيط هي 4 حيث عدد الحالات هو 7 كما في المثال السابق .

مثـال (2-16)

أوجد الوسيط للبيانات التالية :

3 , 5 , 9 , 12 , 18 , 30 , 25 , 20 , 32 , 21

<u>الحـل</u> :

نلاحظ أن عدد البيانات هنا هـو 10 وهـو رقـم زوجـي لـذلك نقـوم أولاً بترتيب البيانات تصاعدياً كما يلي :

35 , 32 , 30 , 25 , 21 , 18 , 12 , 9 , 5 , 3

إن رتبة الوسيط هي :

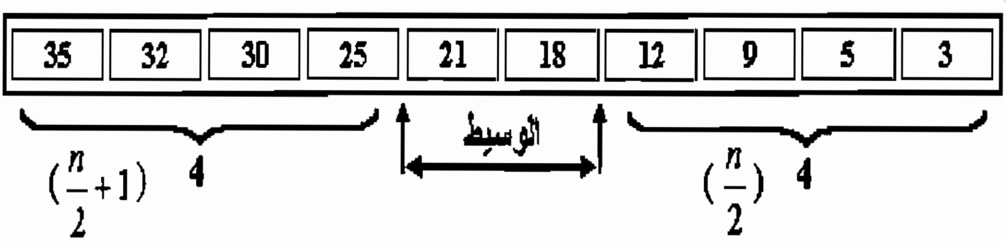
$$\frac{n}{2} , \frac{n}{2} + 1$$

أي أن :

$$\frac{10}{2} , \frac{10}{2} + 1 = 5.6$$

أي الترتيب الخامس والسـادس وعلى هذا الأسـاس فإن العددين الذين بينهما الوسيط هما 21,18 على التوالي ولذلك فإن الوسيط يحسب بالشكل التالي:

$$M = \frac{18+21}{2} = \frac{39}{2} = 19.5$$



ثانياً : في حالـــة البيانـــات المبوبـــة (In Case of Tabulated Data)
اي البيانات المرتبة في جداول التوزيعات التكرارية فأنه يجب لحساب الوســيط أتباع الخطوات التالية :

1- نوجد أولاً جدول التكرار المتجمع الصاعد (أو النازل) للبيانات .

2- نحدد رتبة الوسيط والتي تساوي $\frac{n}{2}$.

3- نجد الفترة الوسيطية (Median Interval) التي تقع فيها رتبة الوسيط .

4- نطبق القانون حسب العلاقة (14-2) لإيجاد الوسيط حيث :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{k_2 - k_1} i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14-2)$$

حيث أن :

M : الوسيط .

L : الحد الأدنى للفترة الوسيطية .

$\frac{n}{2}$: رتبة الوسيط .

k_1 : التكرار المتجمع الصاعد الذي يسبق الفترة الوسيطية .

k_2 : التكرار المتجمع الصاعد الذي يلي الفئة الوسيطية .

i : طول الفئة أو الفترة .

أو

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \left\{ \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الوسيط}}{\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الوسيط}} \right\} \times \text{طول فئة الوسيط}$$

ولحساب الوسيط للتوزيع التكراري الخاص باختبار درجات الذكاء للخمسين مهندس نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما موضح في الجدول (19-2) حيث :

جدول (19-2)

إيجاد الوسيط والربيعين للتوزيع التكراري الخاص

باختبار درجات الذكاء للخمسين مهندس

ت	الفئات	التكرار	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
1	——	——	أقل من 90	صفر
2	90 -	3	أقل من 100	3
3	100 -	14	أقل من 110	17
			الفئة الوسيطية	⟵
4	110 -	16	أقل من 120	33
5	120 -	11	أقل من 130	44
6	130 -	4	أقل من 140	48
7	140 - 150	2	أقل من 150	50

والخطوات هي كما يلي :

1- نحسب ترتيب الوسيط وهو في هذه الحالة يساوي $\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=25$.

2- نحدد الفئة الوسيطية كما يشير السهم فنجدها الفئة (110 وأقل من 120) وهنا سنجد أن :

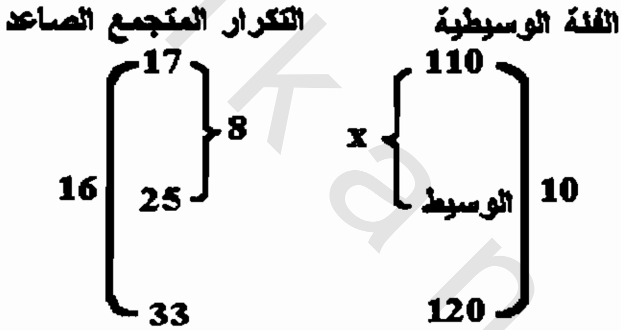
$i = L_2 - L_1 = 120 - 110 = 10$ ، $k_2 = 33$ ، $k_1 = 17$

3- بتطبيق المعادلة (2-14) نجد قيمة الوسيط بالشكل التالي :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{k_2 - k_1} i = 110 + 10\left(\frac{25-17}{33-17}\right) = 110 + 10\left(\frac{8}{16}\right)$$

$$\therefore M = 110 + \frac{10}{2} = 110 + 5 = 115$$

وهناك طريقة اخرى تتمثل بالشكل التالي :



1- بعد تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد نكون قوسين كما في الشكل أعلاه ، أحدهما بين الفئة الوسيطية والآخر يبين التكرار المتجمع الصاعد المناظر .

2- سوف نجد أن طول الفئة الوسيطية يساوي 10 وتكرار الفئة الوسيطية هو 16.

3- بحسابنا البعد بين ترتيب الوسيط (25) وبين التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط وهو 17 سنجد بأن هذا البعد هو $25 - 17 = 8$.

4- إن هذا البعد يناظر بعد الوسيط عن الحد الأدنى للفئة الوسيطية والذي سنرمز له بالرمز x أي أن الوسيط = 110 + x حيث أن x يمكن الحصول عليها من العلاقة التالية :

$$\frac{x}{10} = \frac{8}{16}$$

5- ولحساب قيمة x نجد أن :

$$80 = 16\ x$$

أي أن :

$$x = 5$$

6- إذن الوسيط يساوي 110 + 5 = 115 درجة .

وهناك معادلة أخرى يمكن حساب الوسيط بواسطتها وتتمثل بالشكل التالي :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \left\{ \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{تكرار فئة الوسيط}} \right\} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

ويمكن اختصار الصيغة أعلاه بالعلاقة (2-15) حيث :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{F}\ x\ \ i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15-2)$$

حيث يمثل F تكرار الفئة الوسيطية ولو أردنا تطبيق هذه القاعدة لإيجاد الوسيط لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس وبالعودة إلى الجدول (2-19) سنجد أن :

$L = 110,\ k_1 = 17$ وأيضاً $25 = \frac{50}{2} = \frac{n}{2}$ و $F = 16$ أما i فتساوي 10

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (2 - 15) نحصل على:

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{F} \; x \; i = 110 + 10\left(\frac{25-17}{16}\right) = 110 + \frac{(10)(8)}{(16)}$$

$$\therefore M = 110 + 5 = 115$$

وهي نفس القيمة السابقة .

مثـــال (2 – 17)

أوجد الوسيط لدخل ألـــ 100 منتج والمعطى في المثال (2– 8) .

الحـــل:

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد بالصورة الموضحة فـــي الجـــدول (2-20) وأتباع الخطوات التالية :

1- نحدد رتبة الوسيط وهي في هذا المثال تساوي $50 = \frac{100}{2} = \frac{n}{2}$.

2- من جدول التكرار المتجمع الصاعد للفئات نلاحظ ما يلي :

$L_1 = 58$, $L_2 = 62$, $i = 62 - 58 = 4$, $k_1 = 39$, $F = 15$, $k_2 = 59$

3- نعوض القيم أعلاه أما في المعادلة (2-14) أو المعادلة (2-15) فنحصـــل على قيمة الوسيط كما يلي :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{k_2 - k_1} i = 58 + 4\left(\frac{50 - 39}{59 - 39}\right) = 58 + 4\left(\frac{11}{20}\right)$$

$$\therefore M = 58 + \frac{11}{5} = 58 + 2.2 = 60.2$$

جـــدول (2-20)

ت	الفئات	التكرار	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
1	——	——	أقل من 40	صفر
2	40 -	2	أقل من 46	2
3	46 -	10	أقل من 52	12
4	52 -	12	أقل من 58	24
5	58 -	15	أقل من 62	39
فئة الوسيط				→
6	62 -	20	أقل من 68	59
7	68 -	17	أقل من 76	76
8	76 -	11	أقل من 82	87
9	82 -	8	أقل من 88	95
10	88 -	4	أقل من 94	99
11	94 - 100	1	أقل من 100	100

أو باستخدام المعادلة (2-15) :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{F} \; x \;\; i = 58 + 4\left(\frac{50-39}{20}\right) = 58 + \frac{(4)(11)}{(20)}$$

$$\therefore M = 58 + 2.2 = 60.2$$

وهي نفس القيمة السابقة.ولتحقيق الدقة في حساب الوسيط ينصـــح باســـتخدام المعادلة (2-14) لحسابه .

مثــال (2- 18)

أوجد الوسيط لعمر مائة عضو في جمعية نسائية حسب البيانات المبينــة فــي الجدول (2-21) :

جـدول (2-21)

الفترة	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -	55 - فما فوق
التكرار	3	9	13	16	20	15	13	11

الحــــل :

أن مجموع التكرارات = 100 إذن رتبة الوسيط تساوي :

$$50=\frac{100}{2}$$

ثم نكمل جــدول التكــرار المتجمــع الصــاعد لهــذه البيانـــات كمـــا يبـــين الجــدول (2-22) ، مــن جــدول التكــرار المتجمـــع الصـــاعد الســـابق حيث نلاحظ أن :

$$L_1 = 35 , L_2 = 40 , \ i = 40 - 35 = 5 , k_1 = 41 \ , F = 20 , k_2 = 61$$

وباستخدام المعادلة (2-14) أو المعادلة (2-15) نوجد قيمة الوسيط :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{k_2 - k_1} i = 35 + 5\left(\frac{50-41}{61-41}\right) = 35 + 5\left(\frac{9}{20}\right)$$

$$\therefore M = 35 + \frac{9}{4} = 35 + 2.25 = 37.25$$

جـــدول (2-22)

ت	فئات العمر	التكرار	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
–	——	——	أقل من 20	صفر
1	20 -	3	أقل من 25	3
2	25 -	9	أقل من 30	12
3	30 -	13	أقل من 35	25
4	35 -	16	أقل من 40	41
		فئة الوسيط		$\longrightarrow$
5	40 -	20	أقل من 45	61
6	45 -	15	أقل من 50	76
7	50 -	13	أقل من 55	89
8	55 فما فوق	11	أقل من 60	100
	المجموع Total	100	——	——

أما باستخدام المعادلة (2-15) :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{F} \; x \;\; i = 35 + 5\left(\frac{50-41}{20}\right) = 35 + \frac{(5)(9)}{(20)}$$

$$\therefore M = 35 + 2.25 = 37.25$$

10.2 الربيـــع الأدنـــى والربيـــع الأعلـــى
(Quartile Lower Quartile & Upper)

هناك قيم أخرى شبيهة بالوسيط في طريقة حسابها ولكنهـا ليسـت مـن المتوسطات مثل الربيع والعشيـرة والثمين وغيرهـا . وسـنكتفي هـنا بدراسـة الربيـع الأدنـى (Lower Quartile) والربيـع الأعلـى (Upper Quartile) نظراً لحاجتنا إليهما فيما بعد لقياس تشتت البيانات .

أن الربيع الأدنى هو القيمة التي تقسم المجموعـة إلـى قسـمين بحيـث تقع 25% من القيم قبلها و 75% من القيم بعـدها ، بشـرط ترتيـب القـيم تصاعدياً ، والربيع الأعلى هو القيمة التي تقسـم مجموعة القيم إلى قسـمين بحيث يقع 75% من القيم قـبلها و 25% من القيم بعدها . ويمكن حسـاب الربيعين من التوزيعات التكرارية بإتباع نفس الطريقة التي حسب بها الوسيط ففي حالة حساب الربيع الأدنى لتوزيع درجات الذكاء للخمسين مهندس نتبع ما يلي :

1- نجد أولاً ترتيب الربيع الأدنى والذي يساوي :

$$12.5 = \frac{50}{4} = \frac{n}{4}$$

2- نعين فئة الربيع الأدنى من جدول التكرار المتجمع الصاعد للبيانات . فـي حالتنا هذه نجدها الفئة (100 وأقل من 110) .

3- نوجد قيمة الربيع الأدنى باستخدام العلاقة التالية :

$$R_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i \quad \text{...} (16-2)$$

حيث أن :

R_1 – الربيع الأدنى للبيانات .

L – الحد الأدنى لفئة الربيع الادنى .

n – عدد القيم أو البيانات .

k_1 – التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الربيع الأدنى .

k_2 – التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لترتيب الربيع الأدنى .

i – طول فئة الربيع الأدنى .

ولغرض تطبيق المعادلة (2-16) لإيجاد الربيع الأدنى لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس وعند مراجعة جدول التكرار المتجمع الصاعد ، نجد أن :

$k_1 = 3$ و $k_2 = 17$ أما $i = 110 - 100 = 10$

وعند تعويض القيم في المعادلة(2 - 16) نحصل على :

$$R_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i = 100 + 10\left(\frac{12.5 - 3}{17 - 3}\right) = 100 + \frac{(10)(9.5)}{14}$$

$$\therefore R_1 = 100 + 6.8 \approx 106.8$$

4– وبنفس الطريقة يمكن إيجاد الربيع الأعلى لتلك البيانات من المعادلة (2-17) حيث :

$$R_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i \text{.......................................} (17-2)$$

حيث ان :

R_3 – الربيع الأعلى للبيانات .

L – الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى .

n – عدد القيم أو البيانات .

k_1 – التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الربيع الأعلى .

k_2 – التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لترتيب الربيع الأعلى .

i – طول فئة الربيع الأعلى .

لغرض تطبيق المعادلة (2-17) لإيجاد الربيع الأعلى لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس وعند مراجعة جدول التكرار المتجمع الصاعد ، سنجد بأن فئة الربيع الأعلى هي :

(130 - 120) و $k_1 = 33$ و $k_2 = 44$

أما طول الفئة فسوف نجده يساوي :

$i = 110 - 100 = 10$

أما ترتيب الربيع الأعلى فهو:

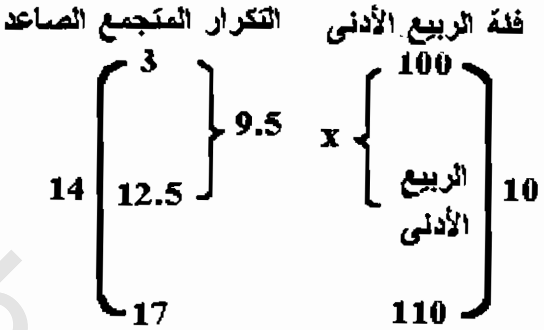
$$37.5 = \frac{150}{4} = \frac{3n}{4}$$

وعند تعويض القيم في المعادلة(2 -17) نحصل على :

$$R_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i = 120 + 10\left(\frac{37.5 - 33}{44 - 33}\right) = 100 + \frac{(10)(4.5)}{11}$$

$$\therefore R_3 = 120 + 4.1 \approx 124.1$$

وبطريقة أخرى :



1- نجد ترتيب الربيع الأدنى والذي يساوي $\frac{50}{4} = 12.5$.

2- من جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن فئة الربيع الأدنى هي الفئة (100 وأقل من 110) وطولها 10 وتكرارها 14 .

3- وبحسابنا لبعد ترتيب الربيع الأدنى (12.5) عن التكرار المتجمع الصاعد السابق وهو 3 ، نجد أن:

$9.5 = 3 - 12.5$

وهذا البعد يناظر بعد الربيع الأدنى عن الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى والذي سنرمز له بالرمز x حيث الربيع الأدنى = x + 100 .

4- إن البعد x يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

$$\frac{x}{10} = \frac{9.5}{14} \Rightarrow \therefore 14x = 95 \Rightarrow \therefore x = \frac{95}{14} = 6.8$$

وعليه فإن الربيع الأدنى يساوي 100 + 6.8 = 106.8 .

وبنفس الطريقة يمكن حساب الربيع الأعلى كما موضح في الشكل :

فئة الربيع الأعلى		التكرار المتجمع الصاعد	
120	x	33	4.5
الربيع الأعلى	10	37.5	11
130		44	

1-نجد ترتيب الربيع الأعلى والذي يساوي $\frac{(50)(3)}{4} = 37.5$.

2- من جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن فئة الربيع الأعلى هي الفئة (120 وأقل من 130) وطولها 10 وتكرارها 11 .

3- وبحسابنا لبعد ترتيب الربيع الأعلى (37.5) عن التكرار المتجمع الصاعد السابق وهو 33 ، نجده يساوي :

$4.5 = 33 - 37.5$

وهذا البعد يناظر بعد الربيع الأعلى عن الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى والذي سنرمز له بالرمز x ، حيث أن الربيع الأعلى = x + 120 . إن البعد x نحصل عليه من العلاقة التالية :

$$\frac{x}{10} = \frac{4.5}{11} \Rightarrow \therefore 11x = 45 \Rightarrow \therefore x = \frac{45}{11} = 4.1$$

إذن الربيع الأعلى = 120 + 4.1 = 124.1 .ويجب الإشارة إلى أنه في كثير من الأحيان يطلق على الوسيط أيضاً بالربيع الثاني R_2 .

مثـــال (2-19)

أوجد كل من الوسيط والربيعين الادنى والأعلى للبيانات كما هو مبين في الجدول (2-23) :

جـــدول (2-23)

الفئة	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 - 55
التكرار	3	4	9	8	11	15	2	6

الحـــل :

نكون أولاً جـــدول التكـــرار المتجمـــع الصـــاعد للبيانـــات والمبـــين فـــي الجدول (2-24) .

جـــدول (2-24)

ت	الفئة	التكرار	حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
—	——	——	أقل من 15	صفر
1	15 -	3	أقل من 20	3
2	20 -	4	أقل من 25	7
3	25 -	9	أقل من 30	16
4	30 -	8	أقل من 35	24
		الفئة الوسيطية		→
5	35 -	11	أقل من 40	35
6	40 -	15	أقل من 45	50
7	45 -	2	أقل من 50	52
8	50- 55	6	أقل من 55	58
	المجموع	58	——	——

a) لحساب الوسيط نقوم أولاً بإيجاد رتبة الوسيط والتي تساوي $29 = \frac{58}{2}$.

من جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن :

L = 30, k_1 = 24, k_2 = 35, i = 5

وباستخدام المعادلة (2 - 14) نوجد الوسيط :

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - k_1}{k_2 - k_1} i = 30 + 5\left(\frac{29 - 24}{35 - 24}\right) = 30 + 5\left(\frac{5}{11}\right)$$

$$\therefore M = 30 + \frac{25}{11} = 30 + 2.27 = 32.27$$

b) أم لحساب الربيع الأدنى نجد رتبة الربيع الأدنى حيث $14.5 = \frac{58}{4}$.

ومن جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن :

L = 20, k_1 = 7, k_2 = 16 , i = 5

باستخدام المعادلة (2-16) نوجد الربيع الأدنى :

$$R_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i = 20 + 5\left(\frac{14.5 - 7}{16 - 7}\right) = 20 + \frac{(5)(7.5)}{9}$$

$$\therefore R_1 = 20 + 4.167 \approx 24.167$$

c) أما لحساب الربيع الأعلى نجد رتبة الربيع الأعلى والتي تساوي $43.5 = \frac{(58)(3)}{4}$.

من جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن :

$L = 35, k_1 = 35, k_2 = 50 , i = 5$

وباستخدام المعادلة (2-17) نجد الربيع الأعلى :

$$R_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} i = 35 + 5\left(\frac{43.5 - 35}{50 - 35}\right) = 35 + \frac{(5)(8.5)}{15}$$

$$\therefore R_3 = 35 + \frac{8.5}{3} \approx 35 + 2.83 \approx 37.83$$

11.2 إيجـــاد الوسيــط والربيعيــن بيانيـــاً
(Finding Median and Quartiles Graphically)

لإيجاد الوسيط بيانيا نتبع الخطوات التالية :

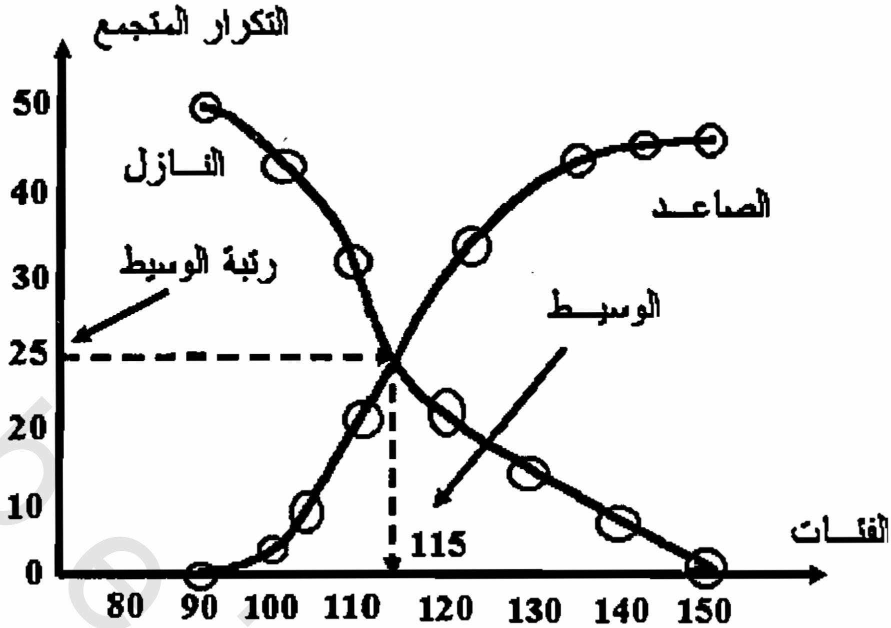
1- نرسم منحني التكرار المتجمع الصاعد (أو النازل) للبيانات .

2- نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي .

3- نرسم خطاً أفقياً حتى يقابل المنحني المتجمع في نقطة ما .

4- نسقط من تلك النقطة عموداً على المحور الأفقي فيقابله عند قيمة الوسيط .

5- وإذا رسمنا كلاً من منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل في شكل واحد نجد أن المنحنيين يلتقيان في نقطة واحدة تحدد لنا قيمة الوسيط . إذا أسقطنا منها عموداً على المحور الأفقي فسوف نجد الفئة التي يقع فيها الوسيط ، والشكل (2-1) يوضح كيفية إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية من تقاطع منحني التكرار المتجمع الصاعد ومنحني التكرار المتجمع النازل لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس ونجد أن قيمة الوسيط يساوي 115 .



الشكــل (2 - 1)

إيجاد الوسيط بيانياً لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس

ولإيجاد الربيعين بـيانياً نتبع نفس الخـطوات التـي أتـبعت لإيجاد الوسيط فإذا استخدمنا منحنى التكرار المتجمع الصاعد ، يكون ترتيب الربيع الأدنى :

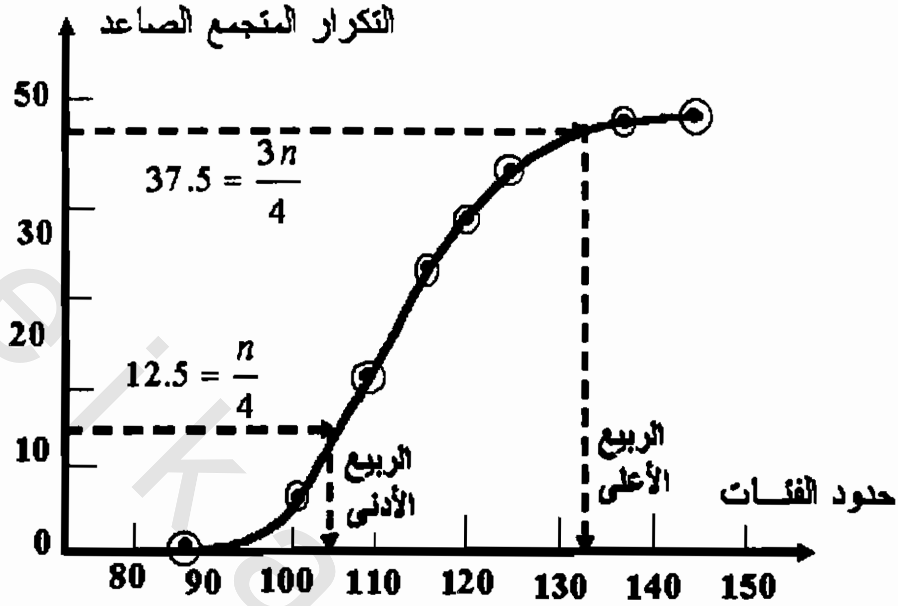
$$\frac{\sum f_i}{4}$$

ويكون ترتيب الربيع الأعلى :

$$\frac{3(\sum f_i)}{4}$$

1- لإيجاد الربيع الأدنى نعين ترتيبه على المحور الرأسي ونرسم خطاً أفقياً ليقابل المنحني المتجمع الصاعد في نقطة.نسـقط منها عموداً ليقابل المحـور الأفقي عند قيمة الربيع الأدنى ونجده في حالة درجات الذكاء للخمسين مهندس يساوي 107 درجة تقريباً كما موضح في الشكل (2-2) .

2- ولإيجاد قيمة الربيع الأعلى نعين ترتيبه على المحور الرأسي ونتبع نفس الطريقة لتعيين قيمته على المحور الأفقي فنجد قيمته 124 درجة تقريباً لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس كما موضح في الشكل (2-2) .



الشكل (2- 2)

إيجاد الربيعين الأدنى والأعلى بيانيا لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس

12.2 خواص الوسيط (The Median Properties)

1- قيمة الوسيط على العكس من المتوسط الحسابي لا تتأثر بوجود القيم الشاذة أي القيم الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً ، ففي حالة وجود مثل هذه القيم يفضل استخدام الوسيط .

2- يمكن حساب الوسيط من الجداول المفتوحة لأننا في حسابه لا نحتاج لمعرفة مراكز الفئات مثل المتوسط الحسابي .

3- يمكن إيجاد الوسيط باستخدام الرسم البياني .

إن الوسيط هو مؤشر مفيد في بعض الأحوال لمعرفة النزعة المركزية لمجموعة من البيانات مثل التوزيعات المركزية ذات الفترات المفتوحة والتوزيعات ذات القيم المتطرفة وطرق حسابه أبسط من طرق حساب المتوسط الحسابي ولكنه كما ذكرنا أقل ثباتاً من المتوسط من عينة لأخرى لذلك فإن استعماله محدودة مقارنة مع الاستخدامات الواسعة للمتوسط الحسابي . وكما أن المتوسط مؤشر أبسط فهناك مؤشر ثالث أبسط من الوسيط يعطينا فكرة سريعة عن النزعة المركزية لمجموعة من البيانات ذلك هو المنوال Mode .

13.2 المنـــوال (The Mode)

إن المنــوال لمجموعة من البيانات هو القيمة التي تحظى بأكبر تكرار من هذه المجموعة من البيانات أو هو القيمة التي تحدث بصورة أكثر من غيرها وهو القيمة الأكثر شيوعاً فمثلاً إذا كان لدينا مجموعة القيم التالية :

1 , 5 , <u>3</u> , 12 , 7 , 4 , <u>3</u> , 9 , 12 , 4 , <u>3</u>

نجد أن القيمة 3 تكررت أكثر من غيرها ولذلك تعتبر منوال المجموعة أما القيم التالية :

1 , 5 , 12 , 7 , 9 , 12 , 4 , 3

فلا يوجد لها منوال في حين أن القيم التالية :

1 , <u>5</u> , 12 , 7 , <u>5</u> , <u>3</u> , 9 , 4 , <u>3</u>

نجد لها منوالين حيث إن كل من القيمتين 3 , 5 قد تكررت نفس العدد من المرات وقد تختلف قيمة المنوال المحسوبة من التوزيع التكراري عن قيمة المنوال للبيانات غير المبوبة كما أن اختلاف طول الفئات في التوزيعات التكرارية يؤدي أحياناً إلى تغيير موضع المنوال .

1.13.2 الخواص العامة للمنوال (General Properties for Mode)

هناك عدة خواص للمنوال من أهمها :

1- لا يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) التي قد توجد بين قيم المجموعة.
2- يمكن حسابه من الجداول التكرارية المفتوحة.
3- ليس له معنى إذا كانت التكرارات قليلة.
4- يعتبر من أحسن المتوسطات في وصف البيانات النوعية.
5- يمكن إيجاده من الرسم البياني كما سيتم توضيحه لاحقاً.
6- يتأثر المنوال بتغيير أطوال الفئات مما يقلل من أهميته ومن استخدامه وفي حالة المنحنيات التكرارية التي لها نهاية صغرى والمنحنيات ذات الفرع الواحد يصبح المنوال قيمة طرفية لا معنى لها.
7- يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استخدامه لإيجاد متوسط الظواهر التي لا يمكن قياسها كمياً (مثل الصفات) حيث يمكن اعتبار الصفة الأكثر شيوعاً هي منوال المجموعة.

إن المنوال رغم استخدامه في بعض الأحيان كمؤشر سريع لمجموعة من البيانات أو لمعرفة القيمة الأكثر شيوعاً لأغراض اجتماعية أو اقتصادية إلاّ أنه أقل المتوسطات استخداماً في العمليات الإحصائية الأكثر عمقاً وذلك لأنه لا يأخذ بنظر الاعتبار كل القيم كما أنه يتغير من عينة إلى أخرى لنفس المجتمع .

2.13.2 طـــرق حســـاب المنـــوال
(Methods for Calculating The Mode)

أولاً : في حالة البيانات المفردة (For Single Data)

كما قلنا سابقاً فإن قيمة المنوال تحدد من القيمة الأكثر شـــيوعاً أو الأكثـــر تكراراً في البيانات والمثال (2-20) سوف يوضح لنا ذلك .

مثـــال (2-20)

أوجد المنوال للقيم التالية :

31, 36 , 31, 19 , 30 , 31, 35 ,36 , 31, 50 ,31

الحـــل :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً وهو في هذه الحالة "$M_o = 31$" .

ثانياً : في حالة البيانات المبوبة (In Case of Tabulated Data)

لإيجاد المنوال من الجداول التكرارية نتبع ما يلي :

a) نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار .

b) نحدد التكرار ما قبل وبعد الفترة المنوالية .

c) نطبق القانون التالي :

$$M_o = L + \frac{F_1}{F_2 + F_1} i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19-2)$$

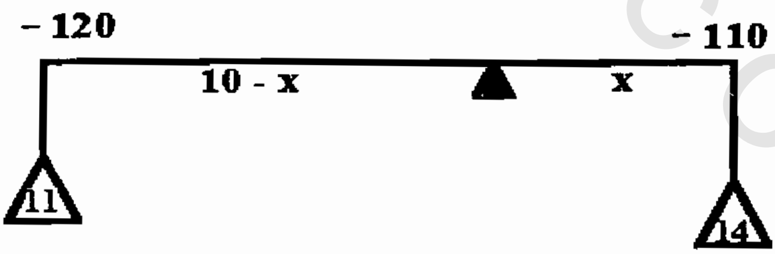
حيث أن :

M_o – المنوال .
F_1 – التكرار ما قبل الفئة المنوالية .
F_2 – التكرار ما بعد الفئة المنوالية .
L – الحد الأدنى للفئة المنوالية و i هو طول الفئة المنوالية .

أي نلاحظ الفئة التي يقع فيها المنوال وهي الفئة التي تحتوي على أكبر تكرار وتسمى بالفئة المنوالية(Mode Interval) ويقع المنوال عند مركز الفئة هذه إذا كان تكرار الفئة قبل المنوالية يساوي تكرار الفئة بعد المنوالية.ولتحديد موضع المنوال داخل الفئة المنوالية هناك طرق مختلفة لتحقيق ذلك منها :

1– طريقة الرافعة (The Crane Method)

لتحديد موضع المنوال داخل الفئة المنوالية ، تصوّر أن الفئة المنوالية عبارة عن رافعة (Crane) ، ويمثل تكرار الفئة قبل المنوالية القوة وتكرار الفئة بعد المنوالية المقاومة وعلى هذا الأساس يتحدد موضع المنوال عند موضع ارتكاز هذه الرافعة كما موضح في الشكل(2 - 3) .



الشكل (2- 3)

طريقة الرافعة لإيجاد المنوال لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس

أما لحساب المنوال للتوزيع التكراري الخاص باختبار الذكاء للخمسين مهندس نجد أن أكبر تكرار يقع أمام الفئة (110 وأقل من 120) أي أنها الفئة المنوالية . ولتحديد موضع المنوال داخلها ، نفرض أنه يبعد مسافة قدرها x عن بداية الفئة وهي القيمة 110 وبالتالي سيبعد مسافة قدرها(طول الفئة − x) أي(10− x) عن نهاية الفئة 120 وبالتالي نجد أن :

القوة x ذراعها = المقاومة x ذراعها

$$14x = 11(10 - x)$$

$$14x = 110 - 11x$$

$$\therefore 25x = 110 \Rightarrow \therefore x = \frac{110}{25} = 4.4$$

أي أن المنوال يساوي :

114.4 = 4.4 + 110 درجة.

2- طريقة الفروق أو ما يعرف بطريقة العالم بيرسون

(The Differences or Person's Method)

أقترح " كارل بيرسون " أن الذي يحدد موضع المنوال داخل الفئة المنوالية هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية ، وتكراري الفئتين السابقة واللاحقة لها . وعليه يتحدد موضع المنوال بحيث يقسم الفئة المنوالية إلى قسمين هما Δ_1 ; Δ_2 حيث أن Δ_1 هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها ، Δ_2 هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها . ولحل المثال الخاص باختبار درجات الذكاء للخمسين مهندس وإيجاد المنوال بطريقة بيرسون أي طريقة الفروق نجد أن :

$5 = 11 - 16 = \Delta_2$, $2 = 14 - 16 = \Delta_1$

والمنوال يكون القيمة التي تقسم الفئة المنواليـــة (110 وأقــل مــن 120) بنسبـــة5:2 فإذا كان بعد المنوال من بداية الفئــة هو x فيكــون بعــده عــن نهايتها(10 – x) ، وهنا نجد أن x : 10 – x يجب أن تكون كنسبة 2 : 5 أي أن :

$$\frac{x}{10-x}=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \therefore 5x=2(10-x)$$

$$5x=20-2x \Rightarrow \therefore 7x=20 \Rightarrow \therefore x=\frac{20}{7}=2.86$$

أي أن المنوال يساوي : 110 + 2.86 = 112.86 .

ويمكن الحصول على هذه القيمة مباشرة من العلاقة (2-20) حيث .

$$M_o=L+\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)i \qquad \text{..................................}(20-2)$$

حيث أن :

M_o و L و i قد تم تعريفيهما مسبقاً في المعادلة (2 - 19) .

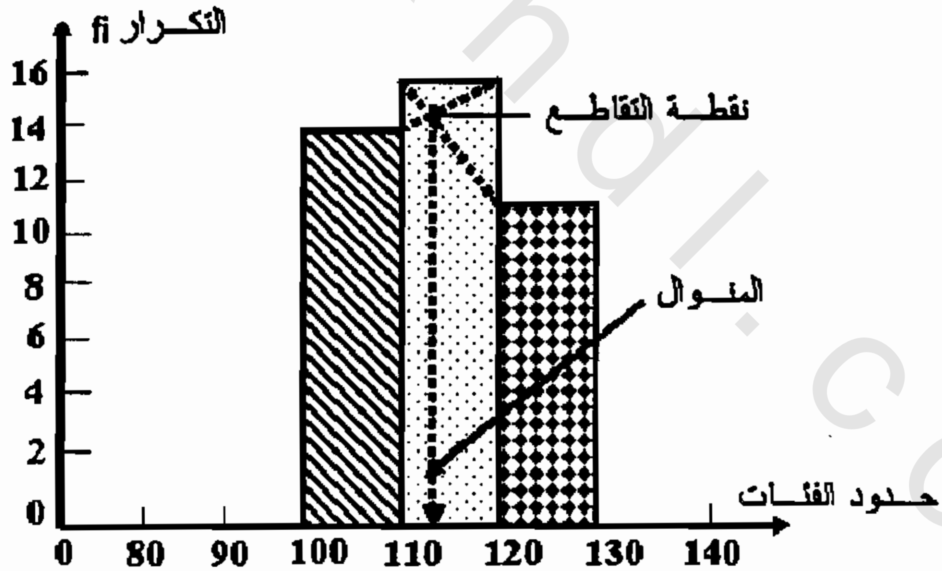
وبالتعويض نحصل على :

$$M_o=L+\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)i=110+(10)\left(\frac{2}{5+2}\right)=110+\frac{20}{7}$$
$$=110+2.86=112.86$$

3- الطريقـــة البيانيـــة (Graphical Method)

يمكن الحصول على المنوال بيانياً بأن نرسـم مـن المـدرج التكـراري (Histogram) ، الثلاثة مستطيلات التي تمثـل تكـرارات الفئـة المنواليـة والفئتين السابقة واللاحقة كما موضح في الشـكل (4-2) ، ثم نصـل الـركن الأيمن العلوي للمسـتطيل الذي يمثل تكرار الفئة المنوالية بالركن الذي يماثله في المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة التي قبلها .

ثم نصل الركن الأيسـر العلوي للمسـتطيل الذي يمثـل تكـرار الفئـة المنوالية بالركن الذي يماثـله في المسـتطيل الذي يمثل تـكرار الفئـة بعـد المنوالية ، فيتقابل المستقيمان في نقطة . نسقط منها عموداً على المحور الأفقي فيحدد لنا موقع المنوال .



الشكـل (4-2)

إيجاد المنوال بيانياً لاختبار الذكاء للخمسين مهندس

مثـــال (2-20)

أحســـب المنـــوال بالطريقـــة الجبريـــة والبيانيـــة وطريقـــة بيرســـون للجدول التكراري (2-24) :

جـدول (2-24)

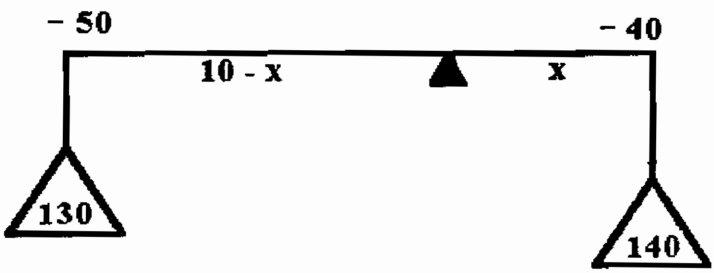
الفترة	1 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
التكرار	10	40	80	140	170	130	100	70	40	30

الحـــل :

إن الفئة المنوالية هي التي تقابل أكبر تكرار وهي (40 - 50) .

1) طريقة الرافعة أو الطريقة الجبرية :

الحـــد الأدنـــى للفئـــة المنواليـــة هـــو 40 = L ، طـــول الفئـــة المنوالية = 10 تكرار الفئة المنوالية = 170 ، وتكرار الفئة قبـــل المنواليـــة يساوي 140 ، وتكرار الفئة بعد المنوالية = 130 ، نفرض بعد المنوال عـــن الحد الأدنى للفئة المنوالية = x ، إذن بعد المنوال عن الحـــد الأعلـــى للفئـــة المنوالية يساوي 10 − x . وباستخدام طريقة الرافعة كما موضح في الشـــكل الآتي نجد أن :



$$140\ x = 130\ (10 - x)$$

$$140\ x = 1300 - 130\ x$$

$$\therefore 270\ x = 1300 \Rightarrow \therefore x = \frac{1300}{270} \approx 4.82$$

أي أن المنوال يساوي :

$$44.82 = 4.82 + 40$$

2) طريقة الفروق (طريقة العالم بيرسون) :

$$40 = 130 - 170 = \Delta_2 \quad , \quad 30 = 140 - 170 = \Delta_1$$

ونعوض في المعادلة رقم (2- 20) فنحصل على قيمة المنوال حيث :

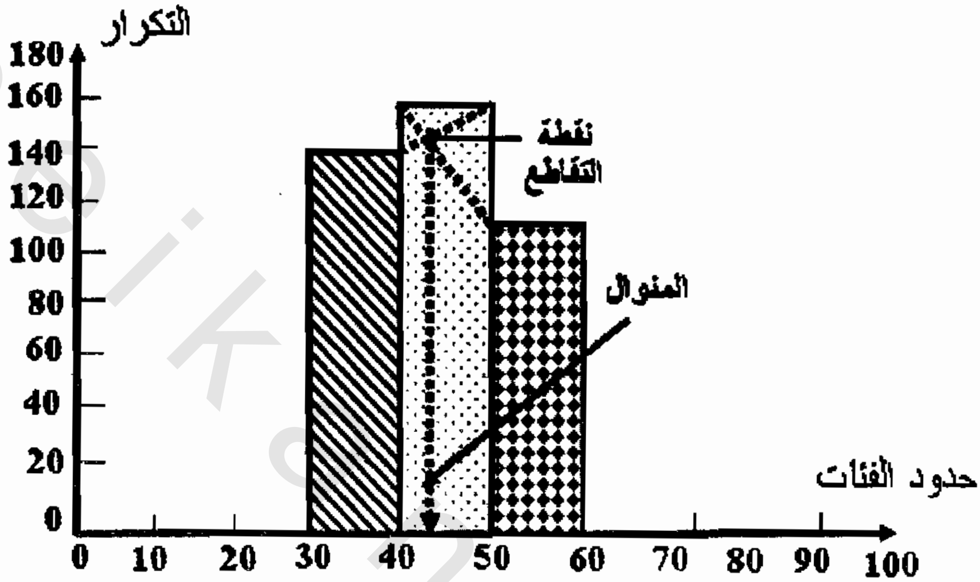
$$M_o = L + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) i = 40 + (10)\left(\frac{30}{30 + 40}\right) = 40 + \frac{300}{70}$$

$$= 40 + 4.286 = 44.286$$

3) الطريقة البيانية :

كما أشرنا في البند السابق ، نرسم من المدرج التكراري الثلاثة مستطيلات التي تمثل تكرارات الفئة المنوالية والفئتين السابقة واللاحقة ، ثم نصل الركن الأيمن العلوي للمستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المنوالية بالركن الذي يماثله في المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة التي قبلها . ثم نصل الركن الأيسر العلوي للمستطيل الذي يمثل تكرار الفئة المنوالية بالركن الذي يماثله في المستطيل الذي يمثل تكرار الفئة بعد المنوالية ، فيتقابل المستقيمان في

نقطة . نسقط منها عموداً على المحور الأفقي فيحدد لنا موقع المنوال ومن الرسم في الشكل (2-5) ، يتبين أن مسقط نقطة تقاطع المستقيمين على المحور الأفقي هي 44.2 تقريباً والتي تمثل قيمة المنوال وهي قيمة مقاربة للقيمتين المحسوبتين في الطريقتين السابقتين والشكل (2 - 5) يوضح ذلك .



الشكـل (2 - 5)

إيجـاد المنـوال بيانيـاً

4- إيجاد المنوال بيانياً للتوزيعات التكرارية غير المنتظمة :

عند إيجاد المنوال للبيانات المبوبة في جداول تكرارية غير منتظمة أي في جداول تكرارية أطوال فئاتها غير متساوٍ ، يجب إجراء عملية تعديل التكرارات التي سبق شرحها عند دراستنا للمدرج التكراري قبل إيجاد المنوال بأية طريقة من الطرق السابقة .

14.2 الوسـط الهندسي والوسـط التوافقـي والعشـيرات والمئينـات
(Geometric Mean, Harmonic Mean, Deciles and Percentiles)

1.14.2 الوسـط الهندسـي (G)- (Geometric Mean)

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم الموجبة عددها n يساوي الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم . فإذا كانت هذه القيم هي $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots, x_n$ فإن الوسط الهندسي لهذه القيم G يحسب من المعادلة التالية :

$$G=\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3.\cdots x_n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21-2)$$

وإذا قمنا بأخذ لوغاريتم العلاقة (2-21) فأننا نحصل على :

$$Log\ G=Log\left[(x_1.x_2.x_3\cdots\cdots x_n\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore Log\ G=\frac{1}{n}Log[x_1.x_2.x_3\cdots\cdots x_n]=\frac{1}{n}[Log\,x_1+Log\,x_2+\cdots+Log\,x_n]$$

$$\therefore Log\ G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Log\ x_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22-2)$$

أي أن لوغاريتم الوسـط الهندسـي لمجموعة مـن القـيم يسـاوي الوسـط الحسابي للوغاريتمات هذه القيم .

فإذا كـانت لدينا مثـلاً القـيم التالية :

122,116,126,130,116,120,132,107

فيمكن عندئذٍ حساب الوسط الهندسي بالشكل التالي :

$$Log\ G = \frac{1}{8}\left[Log\, x_1 + Log\, x_2 + Log\, x_3 + Log\, x_4 + Log\, x_5 + \cdots + Log\, x_n\right]$$

$$Log\ G = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} Log 107 + Log 132 + Log 120 + Log 116 + \\ Log 130 + Log 126 + Log 116 + Log 122 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2.0294 + 2.1206 + 2.0792 + 2(2.0645) \\ + 2.1139 + 2.1004 + 2.0864 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{16.6589}{8} = 2.0824$$

$$\therefore G = 120.893$$

مثـــال (2-21)

أوجد الوسط الهندسي للسرعات الثلاثة التالية :

150 , 100 , 50

الحـــل :

$$G = \sqrt[3]{(50)(100)(150)} = \sqrt[3]{750{,}000} = 90.8$$

إيجـــاد الوســـط الهندســـي للبياتـــات المبوبـــة

(Geometric Mean for Data Set)

لإيجاد الوســـط الهندســـي G للبيانات المبوبة في شـــكل جداول تكرارية نستخدم المعادلة التالية :

$$G = \sqrt[\sum f_n]{\bar{x}_1^{\,f_1} . \bar{x}_2^{\,f_2} \cdots \bar{x}_n^{\,f_n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23-2)$$

حيث أن $\bar{x}_i$ هي مراكز الفئات و f_i هي تكرارات الفئات المقابلة للمراكز .

$$\therefore Log\ G = Log\left[\bar{x}_1^{f_1}.\bar{x}_2^{f_2}.\cdots\bar{x}_n^{f_n}\right]^{\frac{1}{\sum f_n}}$$

$$= \frac{1}{\sum f_n}\left[f_1\ Log\ \bar{x}_1 + f_2\ Log\ \bar{x}_2 + \cdots + f_n\ Log\ \bar{x}_n\right]$$

$$\therefore Log\ G = \frac{\sum f_n\ Log\ \bar{x}_n}{\sum f_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24-2)$$

وتكون خطوات الحل كالآتي :

1- نعين مراكز الفئات .

2- نوجد قيم لوغاريتمات مراكز الفئات .

3- نضرب لوغاريتم مركز كل فئة في تكرار هذه الفئة .

4- نجمع حاصل الضرب فنحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\ Log\ \bar{x}_i$$

وبقسمتها على $\sum f_n$ نحصل على Log G .

5- باستخدام الحاسبة أو بيانات جداول اللوغاريتمات نجد قيمة الوسط الهندسي .

وكمثال على ذلك يمكن إيجاد الوسط الهندسي للجدول التكراري الخاص باختبار درجات الذكاء للخمسين مهندس كما يبين الجدول (2-25) حيث أن :

$$Log\ G = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\ Log\ \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{103.1110}{50} = 2.0622 \Rightarrow \therefore G = 115.4°$$

جـــدول (2 - 25)

إيجاد الوسط الهندسي لدرجة المهندس في اختبار الذكاء

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	لوغاريتم مركز الفئة $Log\ \bar{x}_i$	$f_i\ Log\ \bar{x}_i$
90 -	3	95	1.9777	5.9331
100-	14	105	2.0212	28.2968
110-	16	115	2.0607	32.9712
120-	11	125	2.0969	23.0659
130-	4	135	2.1303	8.5212
140 - 150	2	145	2.1614	4.3228
المجموع	50	ــــ	ــــــ	103.1110

والوسط الهندسي قليل الاستخدام ، إذا ما قورن بالمتوسط الحسابي ويستخدم عادةً لإيجاد مجموعة من النسب وهو لذلك يستخدم في حساب الأرقام القياسية كما سنرى فيما بعد .

2.14.2 الوسط التوافقي (H) -(Harmonic Mean)

يعرف الوسط التوافقي بأنه عبارة عن مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب القيم ويفضل استخدام هذا الوسط في حساب معدل السرعة إذ أنها تعطى بدلالة الزمن .

طـــرق حساب الوســـط التوافقـــي

أولاً في حالة البيانات المفردة يستخدم القانون التالي :

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \qquad \text{.......................................}(25-2)$$

حيث أن n هو عدد القيم و x_i هي القيمة المفردة في مجموعة البيانات .

مثـــال (2-22)

أوجد الوسط التوافقي للقيم التالية: 6,2,10,4,8

الحـــل :

باستخدام المعادلة (2 - 22) نحصل على الوسط التوافقي كما يلي :

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{5}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{5}{1.1417}=4.37$$

مثـــال (2 23)

أحسب الوسط التوافقي للقيم التالية: 13 – 18 – 15 – 8 – 22 – 10

الحـــل:

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{6}{\frac{1}{10}+\frac{1}{22}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{13}}=\frac{6}{0.461}=15.01$$

ثانياً في حالة البيانات المبوبة تستخدم المعادلة التالية :

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i}{\bar{x}_i} \right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26-2)$$

حيث أن $\bar{x}_i$ هي مراكز الفئات و f_i هو تكرار الفئة . وكمثال على ذلك يبين الجدول(2 - 26) كيفية إيجاد الوسط التوافقي لدرجات الــذكاء للخمســين مهندس .

جــدول (2-26)

إيجاد الوسط التوافقي لدرجات الذكاء للخمسين مهندس

$fi / \bar{x}_i$	مركز الفئة $\bar{x}_i$	التكرار f	الفئات
0.0316	95	3	90 -
0.1333	105	14	100-
0.1391	115	16	110-
0.088	125	11	120-
0.0296	135	4	130-
0.0138	145	2	150 - 140
0.4354	——	50	المجموع

$$\therefore\ H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{\overline{x}_i}\right)} = \frac{50}{0.4354} = 114\ .837$$

خواص الوسط التوافقي (Harmonic Mean Properties)

هناك عدة خواص عامة للوسط التوافقي من أهمها :

1- يتأثر بالقيم المتطرفة حاله كحال المتوسط الحسابي .

2- لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة مثل المتوسط الحسابي .

3- قابل للعمليات الجبرية .

4- يستخدم في وصف تغيرات الظواهر النسبية .

5- دائماً يكون $H \leq G \leq \overline{x}$ ويحدث هذا التناوب عندما تكـون جميـع القيم متساوية .

مثـــال (2-24)

أوجد الوسط التوافقي للجدول التكراري (2-27) :

جـــدول (2-27)

الفئـــات x_i	3 -	7-	11 -	15 -	19-	23 -27
التكـــرار f_i	8	12	10	9	6	5

الحــل :

نرتب الجدول (2-27) كما هو مبين في الجدول (2-28) ومنــه نجــد أن الوسط التوافقي يساوي :

جــدول (2-28)

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	$f_i / \bar{x}_i$
3 -	8	5	$1.6 = \frac{8}{5}$
7 -	12	9	$1.33 = \frac{12}{9}$
11 -	10	13	$0.77 = \frac{10}{13}$
15 -	9	17	$0.53 = \frac{9}{17}$
19 -	6	21	$0.286 = \frac{6}{21}$
23 - 27	5	25	$0.2 = \frac{5}{25}$
المجموع	50	———	4.716

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{\bar{x}_i}\right)}$$

$$= \frac{50}{4.716} = 10.6$$

مثــال (2-25)

أوجد الوسط التوافقي للتوزيع التكراري كما هو مبين في الجدول (2-29) :

جــدول (2-29)

الفئــات x_i	2 -	4-	6 -	8 -	10-	12 -14
التكــرار f_i	3	1	4	15	5	9

الحــل :

نرتب الجدول (2-29) كما هو مبين في الجدول (2-30) ومنه نستطيع أن نجد الوسط التوافقي والذي يساوي :

جــدول (2-30)

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة $\bar{x}_i$	$f_i / \bar{x}_i$
2 -	3	3	$1.0 = \frac{3}{3}$
4 -	1	5	$0.2 = \frac{1}{5}$
6 -	4	7	$0.57 = \frac{4}{7}$
8 -	15	9	$1.67 = \frac{15}{9}$
10 -	5	11	$0.45 = \frac{5}{11}$
12 - 14	9	13	$0.69 = \frac{9}{13}$
المجموع	37	——	4.58

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{\bar{x}_i}\right)}$$

$$= \frac{37}{4.58} = 8.1$$

3.14.2 العشيــرات (Deciles)

ويرمز لها بالرمز Q_r وتحسب في حالة البيانات المبوبــة مــن المعادلــة التالية :

$$Q_r = L + \frac{\frac{n_r}{10} - k}{F} i \quad \text{..........} (27-2)$$

حيث أن :

D_r - تساوي العشير .

L - تساوي الحد الأدنى لفئة العشير .

k - تساوي التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة العشير .

i - تساوي طول فئة العشير .

F - تساوي تكرار فئة العشير .

مثـــال (2-27)

أوجد D_1 , D_5 , D_8 للتوزيع التكراري المبين في الجدول (1-31) :

جدول (1-31)

الفئة	- 2	- 4	- 6	- 8	- 10	- 12	- 14	- 16	20 - 18
التكرار	5	7	15	20	11	10	21	3	5

الحــل :

نبدأ بعمل جدول التكرار المتجمع الصاعد ومنه نجد العشير الأول D_1 والعشير الخامس D_5 والعشير الثامن D_8 كما هو مبين في الجدول (2-32) .

جـــدول (2-32)

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد	
أقل من 2	0	
أقل من 4	5	
أقل من 6	12	D_1 - العشير الأول
أقل من 8	27	
أقل من 10	47	
أقل من 12	58	D_5 - العشير الخامس
أقل من 14	68	
أقل من 16	89	D_8 - العشير الثامن
أقل من 18	92	
أقل من 20	97	

أن رتبة العشير الأول هي :

$$D_1 = \frac{(97)(1)}{10} = 9.7$$

وبما أن طول فئة العشير يساوي 2 أي أن :

$$\therefore D_1 = L + \frac{\frac{n_r}{10} - k}{F} i = 4 + \frac{9.7 - 5}{7} x\, 2$$

$$\therefore D_1 = 5.34$$

أما رتبة العشير الخامس تساوي :

$$D_5 = \frac{(97)(5)}{10} = 48.5$$

لذلك فإن :

$$\therefore D_5 = L + \frac{\frac{n_r}{10} - k}{F} i = 10 + \frac{48.5 - 47}{11} x\ 2$$

$$\therefore D_5 = 10.27$$

أن رتبة العشير الثامن هي :

$$D_8 = \frac{(97)(8)}{10} = 77.6$$

لذلك فإن :

$$\therefore D_8 = L + \frac{\frac{n_r}{10} - k}{F} i = 14 + \frac{77.6 - 68}{21} x\ 2$$

$$\therefore D_8 = 14.9$$

4.14.2 المثينـــات (Percentiles)

ويرمز لها بـــالرمز M_r وتحســـب فـــي حالـــة البيانـــات المبوبـــة مـــن المعادلة التالية :

$$M_r = L + \frac{\frac{n_r}{100} - k}{F} i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28-2)$$

حيث أن :

M_r- المثين .

L- الحد الأدنى لفئة المثين .

k- التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة المثين

i- طول فئة المثين .

F- تكرار فئة المثين .

مثــال (2-28)

أوجد M_{20} , M_{60} , M_{90} للتوزيع التكـــراري كمـــا هـــو مبـــين فـــي الجدول (2-33) :

جــدول (2-33)

الفئة	125-	150-	175-	200-	225-	250 - 275	المجموع
التكرار	16	164	400	320	93	7	1000

الحــل :

نبدأ بعمل جدول التكرار المتجمع الصاعد ومنه نجد المثين العشرين M_{20} والمثين الستين M 60 والمثين التسعين M_{90} كما مبين في الجــدول (2-34) حيث أن رتبة المثين العشرين :

$$M_{20} = \frac{(1000)(20)}{100} = 200$$

وبما أن طول فئة المثين تساوي25 فأن :

$$M_{20} = L + \frac{\frac{n_r}{100} - k}{F} i = 175 + \frac{200 - 180}{400} x\, 25 = 176.25$$

جـــدول (2-34)

	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
	أقل من 125	0
	أقل من 150	16
M_{20} - المئين العشرين	أقل من 175	180
M_{60} - المئين الستين	أقل من 200	480
M_{90} - المئين التسعين	أقل من 225	900
	أقل من 250	993
	أقل من 275	1000

أما رتبة المئين الستين فتساوي :

$$M_{60} = \frac{(1000)(60)}{100} = 600$$

وبما أن طول فئة المئين يساوي 25 فأن :

$$M_{60} = L + \frac{\frac{n_r}{100} - k}{F} i = 200 + \frac{600 - 480}{320} x 25 = 209.37$$

أما رتبة المئين التسعين فتساوي :

$$M_{90} = \frac{(1000)(90)}{100} = 900$$

وبما أن طول فئة المثين يساوي 25 فأن :

$$M_{90} = L + \frac{\frac{n_r}{100} - k}{F} i = 200 + \frac{900 - 480}{320} x 25 = 232.8$$

15.2 العلاقة بين المتوسطات (Relation between Means)

في حالة المنحنيات التكرارية المتماثلة نجد أن المتوسط الحسابي يساوي الوسيط ويساوي المنوال . وإذا كان المنحني التكراري قريباً جداً من التماثل نجد علاقة تقريبية تربط بين المتوسطات الثلاثة وهي :

المتوسط الحسابي – المنوال = 3 (المتوسط الحسابي – الوسيط)

أو :

Arithmetic Mean – Mode = 3 (Arithmetic Mean – Median)

ويلاحظ هنا أن الوسيط يقع بين المتوسط الحسابي والمنوال ، ويمكن استخدام هذه العلاقة في تقدير قيمة الوسط الحسابي من الجداول المفتوحة وذلك بواسطة حساب كل من الوسيط والمنوال .

مثـال (2 – 29)

فصل دراسي فيه 42 طالب في مادة الإحصاء في أحد المراكز المهنية العليا. جلس منهم 40 في أحد امتحانات المادة وتغيب اثنان بسبب المرض فكان المتوسط الحسابي لدرجاتهم 67 من 100 . وبعد أسبوع تقدم الطالبان اللذان تغيبا عن الامتحان في المادة نفسها فتم إعادة الامتحان لهما فحصل

الأول على درجة 45 وحصل الثاني على 90 . فكم يصبح المتوسط الحسابي لدرجات جميع طلبة هذا الفصل الدراسي . وإذا قدرت قيمة المنوال لهذا الفصل 56 درجة كم هي قيمة الوسيط .

الحل :

بما أن المتوسط الحسابي يعرف على أنه هو مجموع القيم على عددها لذلك فإن 40 طالب الذين أدوا الامتحان في وقته قد جمعوا درجات مساوية إلى :

$$67 \times 40 = 2680$$

وعندما قام الطالبان اللذان تخلفا عن الامتحان في وقته بإعادة الامتحان وحصلا على الدرجات المبينة في المسألة لذا فأن مجموع درجات الفصل يصبح كالتالي :

$$90 + 45 + 2680 = 2815$$

وعلى هذا الأساس يصبح المتوسط الحسابي كما يلي:

$$\bar{x} = \frac{2815}{42} = 67.024$$

ولغرض حساب قيمة الوسيط نطبق العلاقة التقريبية بين المتوسطات حيث :

الوسط الحسابي – المنوال = 3 (الوسط الحسابي – الوسيط)

أي أن :

$$Mean - Mode = 3\,(Mean - Mediane)$$

$$\therefore 67.024 - 30 = 3\,(67.024 - M)$$

$$\therefore M = \frac{201.072 - 37.024}{3} = 54.683$$

16.2 تمـــارين

س1: يمثل الجدول التكراري (2-35) توزيع مائة عامـــل حســـــب الأجـــر الأسبوعي للعامل بالدنانير .

جـــدول (2-35)

الفئـــات	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 وأقل من 80
التكـــرار	10	15	30	22	14	9

أوجد ما يلي :

a) الوسط الحسابي باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة .

b) الوسيط .

c) المنوال بطريقة بيرسون .

d) الوسط الهندسي .

س2: الجدول (2-36) يبين متوسط أوزان خمسة مجموعـــات مـــن الطلبـــة حيث :

جـــدول (2-36)

عـــدد الطلبة	13	27	33	18	90
الـــوزن ، كجم	50	55	60	65	70

والمطلوب إيجاد الآتي :

a) الوسط الحسابي المرجح للقيم .

b) الوسط الهندسي لأوزان الطلبة في المجموعات الخمسة .

س3: أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والوسط الهندسي للتوزيع التكراري المبين في الجدول (2-37) :

جـدول (2-37)

الفئات	12.5 -	22.5 -	32.5 -	42.5 -	52.5 وأقل من 62.5
التكرار	6	17	43	26	8

س4: أوجد كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للقيم التالية :

21 , 18 , 26 , 15 , 21 , 16 , 9 , 5 , 7 , 3

س5: التوزيع التكراري المبين في الجدول (2-38) يبين عدد مرات التوقف لآلة ما في مائة يوم عمل متتالية والمطلوب :

a) أحسب متوسط مدة التوقف مستخدماً كل من المتوسط الحسابي والوسيط .

b) هل من المفضل اختيار مقياساً آخراً خلاف هذين المقياسين مع تفسير ذلك .

c) أوجد الربيعين الأدنى والأعلى والمنوال للتوزيع التكراري .

جـدول (2-38)

مدة التوقف , بدقيقة	0 -	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 - 90
عدد مرات التوقف	3	14	28	22	14	10	4	2	3

س6: الجدول (2-39) يوضح فئات أعمار 250 شخصاً يعملـون فـي أحـد الشركات الصناعية .

جـدول (2-39)

فئة العمر، سنة	25 -	28 -	31 -	34 -	37 -	40 -	43 -	46 -	49 -
عدد الأشخاص	2	13	22	39	75	47	27	18	7

أوجد كل من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال مقرباً لأقرب سنة .

س7: فيما يلي التوزيع التكراري (2-40) للأجور اليومية لعدد من العـاملين لمؤسسة ما :

جـدول (2-40)

فئات الأجور بالدينار	60 -	120 -	180 -	240 -	300 -	المجموع
عدد العاملين	3	5	20	10	12	50

أحسب متوسط أجور العاملين مستخدماً طريقة الوسط الفرضي .

س8: جمعت بيانات عن الأجور الأسـبوعية للعاملين في أربعة مصانع تعمل كلها في صناعة واحدة ووجد أن :

a)عدد عمال المصنع الأول300 والوسط الحسابي لأجـورهم الأسـبوعية45 دينار .

b)عدد عمال المصنع الثاني600 والوسط الحسابي لأجـورهم الأسـبوعية50 دينار .

c)عدد عمال المصنع الثالث450 والوسط الحسابي لأجورهم الأسبوعية63 دينار .

d)عدد عمال المصنع الرابع 300 موزعين حسب أجورهم الأسبوعية كما هو مبين في الجدول (2-41) :

جدول (2-41)

فئات الأجور بالدينار	30 -	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 وأقل من 100
عدد العمال	16	25	45	60	53	43	34

المطلوب ما يلي :

a) إيجاد المتوسط الحسابي للأجور اليومية لعمال المصنع الأربعة .

b) إيجاد الوسيط والمنوال والربيعين الأدنى والأعلى لعمال المصنع الرابع .

س9: أرسم المدرج التكراري للبيانات المبينة في الجدول (2-42) ومنه قدر قيمة المنوال :

جدول (2-41)

الفئات	5 -	10 -	20 -	50 -	100 -	200 وأقل من 300
التكرار	26	94	369	380	410	180

ثم تحقق من القيمة التي يتم الحصول عليها من الرسم البياني حسابياً .

س**10:** الجدول (2-42) يبين العمر بالسنة الذي تزوج عنده مجموعـــة مـــن الرجال .

جـــدول (2-42)

سن الزواج	15 -	20 -	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 فما فوق
التكرار	15	44	46	13	10	13	7	2

المطلوب أيجاد :

a) أســتخدم أي مقاييس تراها مناســبة لإيجاد متوسط ســن الزواج في هذه المجموعة ثم علّل سبب اختيارك للمقاييس التي استخدمتها .

b) أحسب الربيع الأدنى والأعلى والعشير الأول والعشــير الســابع والمئــين الخامس والثلاثين والمئين التاسع والسبعين في التوزيع المذكور .

c) أوجد كلاً من الوسيط والمنوال بالطريقة البيانية .

س**11:** الجدول (2-43) يبين التوزيع التكــراري لخمســين طالبــاً حســب أوزانهم :

جـــدول (2-43)

فئات الوزن بالكيلوجرام	50 -	55 -	60 -	65 -	70 -	75 -	80 فأكثر
عدد الطلبة	3	5	11	16	9	4	2

المطلوب إيجاد :

a) أوجد كل من الوسيط والمنوال لجدول التوزيع التكراري .

b) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع باستخدام العلاقة بين المتوسطات .

س12: أوجد المتوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي للتوزيع كما هو مبين في الجدول (2-44) :

جـــدول (2-44)

الفئات	70 -	77-	84 -	91-	98 -	105 -	112 وأقل من 119
التكرار	6	11	21	30	17	11	4

كذلك أوجد كـــلاً من المنوال والوســـيط والربيع الأدنى والربيع الأعلـــى بيانياً وحسابياً للتوزيع التكراري .

س13: في جدول التوزيع التكراري (2-45) أوجد ما يلي :

جـــدول (2-45)

الفئات	32-	36-	40-	44-	48-	52-	56-	60-	64-68
التكرار	9	12	14	25	45	35	26	41	5

a) الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي .
b) الوسيط .
c) المنوال .
d) الربيع الأدنى .
e) الربيع الأعلى .
f) العشير الرابع والعشير السادس .
g) المثين العشرين والمثين الثمانين .
h) الوسط الهندسي والوسط التوافقي للقيم .