الباب الثالث

الدالة والنهايات

مقدمـــــة :

يعتبر مفهوم الدالة حجر الأساس فى دراسة التحليل الرياضى فعن طريق هذا المفهوم حلت كثير من المشاكل التى واجهت الباحثين فى التحليل الرياضى.

وتجدر الاشارة هنا إلى أن لمفهوم الدالة أهمية قصوى فى دراسة معظم موضوعات الرياضيات إن لم يكن جميعها.

ويعتبر التفاضل والتكامل من أبرز موضوعات الرياضيات التى تعتمد على مفهوم الدالة.

وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما تعتمد على أو تتوقف على أو تتعين بواسطة كمية أخرى:

أ- فمثلا مساحة المربع تعتمد على طول ضلعه حيث يمكن حساب مساحة المربع إذا علم طول ضلعه.

ب - حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.

جـ - متوسط انتاج الفدان من المحاصيل يتوقف على كمية السماد المستخدم.

د - متوسط ارتفاع نوع معين من أنواع النباتات تتوقف على سن النبات.

هـ - متوسط دخل الفرد تتوقف على كمية الانتاج.

وهكـــــــذا.

وعلى ذلك يكون من الضـرورى الاهتـمـام بهـذه الدراسـة فى هذا البـاب والتى سوف تتناول :

1 - الدالة وأنواعها.

2 - العمليات على الدوال.

3 - المجال والمدى للدوال المقررة فى هذا المنهج.

4 - الدوال السامية .

5- النمط التى تكتب بها الدوال (صريحة أو ضمنية)

الدالة الحقيقية

مثال تمهيدي:

إذا كان X ، Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية حيث:

$X = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

$Y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

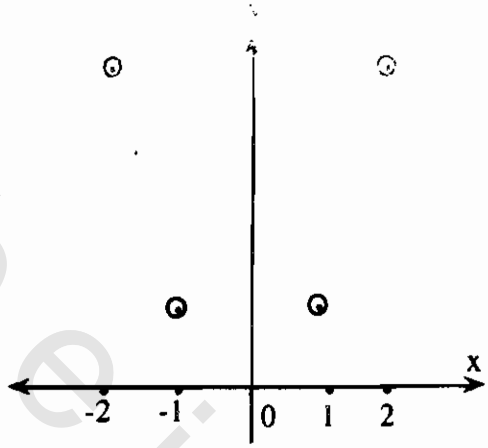
وأعطيت العلاقة Z بينهما من X إلى Y بالقانون :

$y = x^2 \quad : x \in X , y \in Y$

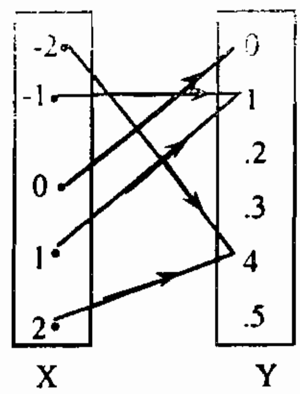
فإن بيان هذه العلاقة هو الأزواج المرتبة :

$Z = (-2, 4), (-1 ,1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

بتمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمى وكذلك بالمخطط البيانى شكل (53) شكل (54) على الترتيب.



شكل 54



شكل 53

في بيان هذه العلاقة : نلاحظ أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر Y .

في المخطط السهمي : نلاحظ أن سهم واحد فقط يخرج من كل عنصر من عناصر X.

والعلاقة Z المعطاه في هذا المثال تسمى داله حقيقية F وأن :

المجموعة X تسمى مجال الدالة F ويرمز لها بالرمز D_F حيث :

$D_f = \{ -2 , -1, 0, 1, 2 \}$

المجموعة Y تسمى المجال المقابل للدالة ويساوى:

$Y = \{ 0 , 1, 2 , 3 , 4 , 5 \}$

ومجموعة قيم y المناظرة لجميع قيم x تسمى مدى الدالة ويرمز له بالرمز R_F يساوى :-

$R_F = \{0 , 1, 4 \}$

القانون $y = x^2$ يسمى قاعدة الدالة، y تسمى صورة x أو قيمة الدالة للمتغير المستقل x.

مفهوم الدالة الحقيقية:

إذا كانت X , Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية فإن العلاقة Z من X إلى Y تسمى دالة حقيقية إذا كان :

كل عنصر من المجموعة X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة Y ويعبر عن هذه العلاقة بالصورة:

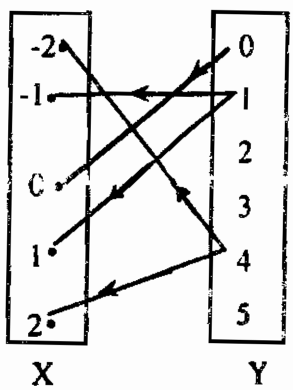
$$F : X \rightarrow Y$$

وتقرأ F دالة من X إلى Y .

أما معكوس الدالة السابقة أي بعكس الأزواج المرتبه السابقة والتى تكون على الصورة :

$$F^{1} = \{ (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2) \}$$

إنها لا تكون دالة لأنها تتعارض مع المفهوم فالعنصر 4 من المجموعة Y ارتبط بعنصرين من عناصر المجموعة X (2 ,-2) شكل 55.



شكل 55

مثال 1:

أي من العلاقتين التاليتين تعتبر دالة ؟

(a) $G = \{ (-1, 2), (2, 2), (3, 5), (6, 1) \}$

(b) $H = \{ (0, 7), (1, 5), (1, 2), (3, -4) \}$

الحـــل:

(a) G تعتبر دالة لأن لكل قيمة للمتغير x توجد قيمة واحدة للمتغير y.

ويتضح ذلك من الآتي :

x y

$-1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 2$

$3 \longrightarrow 5$

$6 \longrightarrow 1$

(b) H ليست دالة لوجود قيمتين للمتغير y مناظرتين للقيمة $x = 1$:-

x y

$0 \longrightarrow 7$

$1 \longrightarrow 5$

$1 \longrightarrow 2$

$3 \longrightarrow -4$

وهذا ما يتعارض مع مفهوم الدالة.

تمثيل العلاقة بين متغيرين x ,y بيانيا :

(1) نعوض عن x ببعض القيم التى تنتمى إلى مجال العلاقة X ونوجد قيم y المناظرة لنحصل على بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى هذه العلاقة.

(2) ننشئ نظام إحداثى مناسب للأزواج التى حصلنا عليها.

(3) نعين على مستوى الاحداثيات النقط التى تمثل هذه الأزواج.

(4) فقط إذا كانت العلاقة بين x , y من الأعداد الحقيقية نرسم منحنى بيانى مار بهذه النقط ليمثل العلاقة المعطاة.

مثال 2 :

إرسم الخط المستقيم الذى تمثله كل مجموعة :

$$F = \{ (x, y) : 2x - y = 6 \}$$

$$G = \{ (x, y) = 2x + 2y = 5 \}$$

الحـــل :

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظر ةفى الدالة F:

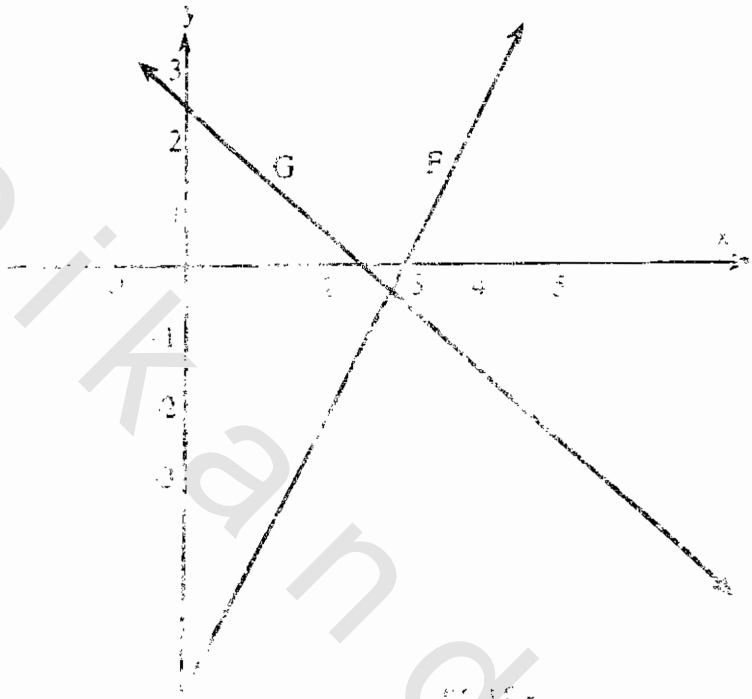
x	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2

الرسم البيانى يوضحه شكل (56)

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظرة فى الدالة G :

x	0	1	2	3
y	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

الر سم البيانى يوضحه شكل (56)



مثال ( ) :

لكل من العلاقات التاليه بين المجال والمدى ووضع بالرس البيانى :

$$G = \{ (-2, 0), (-1, -2), (1, 2), (0, -1) \}$$

$$H = \{ (x, y): -1 \leq x \leq 2 , -3 \leq y \leq 4 \}$$

الحـــل :

مجال G يساوى :

$$D_G = \{ -2, -1 , 1, 0 \}$$

مجال H يساوى :

$D_H = \{ x : -1 \le x \le 2 \}$

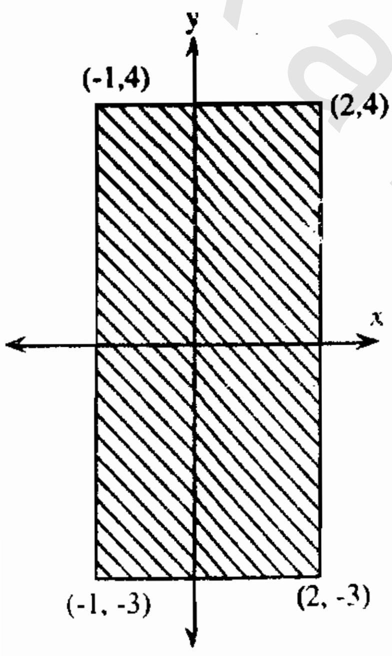
مدى G يساوى :

$R_G = \{ 0 , -2 , 2, -1 \}$

مدى H يساوى :

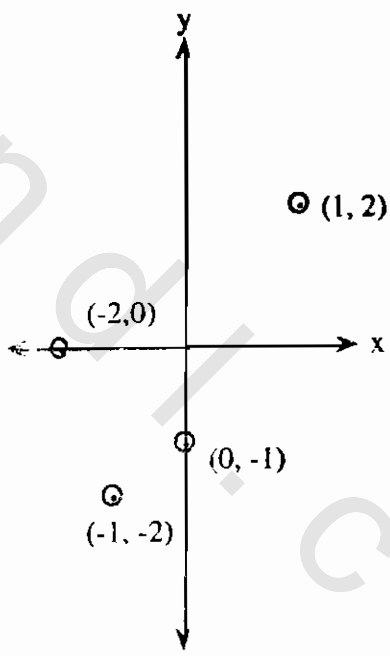
$R_H = \{ y : -3 \le y \le 4 \}$

العلاقة H تبينها المنطقة المظللة شكل (57 - a)



العلاقة H

- a -



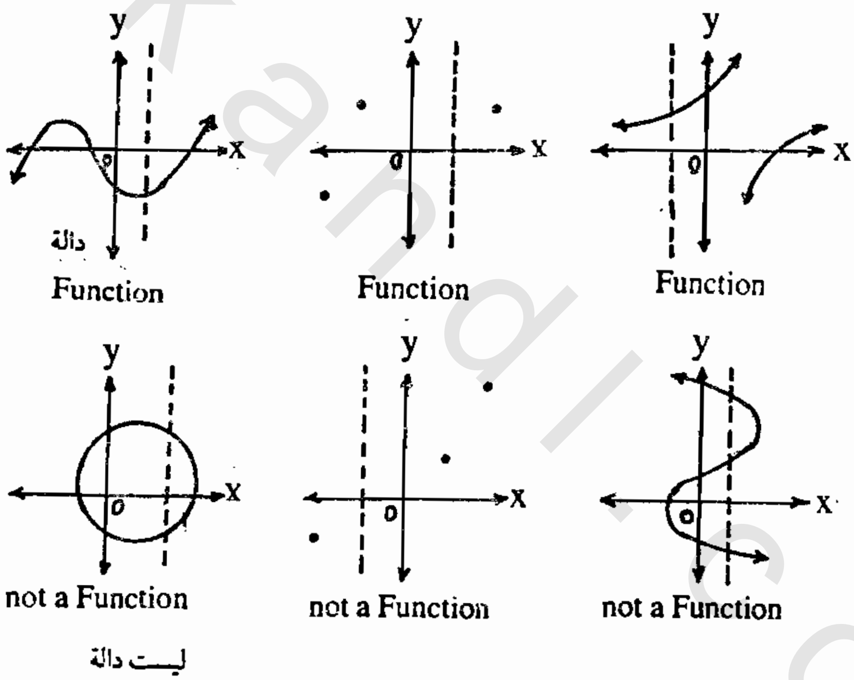
العلاقة G

- b -

شكل 57

استخدام الخط العمودى للكشف عن الدوال :

يتم إستخدام اختبار الخط العمودى لمعرفة ما إذا كانت العلاقة الجبرية تمثل دالة أو لا تمثل دالة. فإذا قطع الخط العمودى الموازى لمحور y المنحنى فى أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة وإذا قطعه فى نقطة واحدة فقط فإن المنحنى يمثل دالة ويبين شكل 58 أمثلة وغير الدوال.



شكل (58)

تماريـــــن (20)

1 - أذكر مجال ومدى كل من العلاقات الآتيه مع الرسم:

(a) $F = \{ (1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9) \}$

(b) $F = \{1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5) \}$

(c) $F = \{ (5, 0), (0, 1), (0, 7) \}$

(d) $F = \{ (-7, 2), (-3, 0), (5, -1), (-3, 6) \}$

(f) $F = \{(-3, 1), (-1, 1), (0, 0), (4, 1) \}$

2 - أى من العلاقات السابقه تمثل دالة.

3 - إذا كانت :-

$F(x) = \sqrt{x+5} \quad , \quad x \geq -5$

أوجد قيمة $F(0)$ $F(5)$, $F(-5)$,

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{7x - 1}{x + 5} \quad , \quad x \neq -5$$

أوجد قيمة $F(5)$ $F(1)$, $F(-1)$,

ثم أوجد المجال

5 - إذا كانت :

$F(x) = 5x^2$

أوجد قيمة :-

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

العمليات على الدوال :

(أولا) الجمع والطرح:

إذا كانت G, F دالتين مجالهما D_F , D_G فإن :-

$$(F \pm G)(x) = F(x) \pm G(x)$$

مجالهما هو :-

$$D_{(F \pm G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أي بحالهما هو تقاطع المجالين.

· (ثانيا) الضرب والقسمة:-

حاصل ضربهما :

$$D_{(F \cdot G)}(x) = F(x) \cdot G(x)$$

ومجالهما هو :-

$$D_{(F \cdot\cdot G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أى مجالهما هو تقاطع المجالين

خارج قسمتهما :-

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \quad , \quad G(x) \neq 0$$

ومجالهما هو :

$$D_{\frac{F}{G}}(x) = D_F \cap D_G - \{\text{أصفار المقام}\}$$

مثال 1 :

إذا كان :-

$F(x) = x^2 - 3x + 9$, $D_F = [-5, 2]$

$G(x) = 4 - 7x$, $D_G = [-3, 7]$

أوجـــــد:

$F(x) + 6(x)$, $F(x) - G(x)$

$D_{(F(x) + G(x))}$

الحـــــل :

$F(x) + g(x) = (x^2 - 3x + 9) + (4 - 7x)$

$F(x) - G(x) = (x^2 - 3x + 9) + (4 - 7x)$

$D_{F \pm G} = D_F \cap D_G$

$= [-3, 2]$

مثال 2 :

إذا كانت :

$F(x) = x^2 + 9$, $D_F = [-4, 5]$

$G(x) = x^2 = -2x - 3$, $D_G = [-2, 7]$

أوجد :

$(F . G), (F / G)$, $D(F . G), D(F / G)$

الحـــــل :

$(F . G) = (x^2 - 9) . (x^2 - 2x - 3)$

$(F / G) = (x^2 - 9) / (x^2 - 2x - 3)$

$$D_{(F.G)} = D_F \cap D_G$$

$$= [-2 , 5]$$

$D_{(F/G)} = D_F \cap D_G$ - {أصفار المقام}

$$\because x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

{أصفار المقام} = $\{-1 , 3\}$

$$D_{(F/G)} = [-2, 5] - \{-1 , 3\}$$

تمارين (21)

1 - إذا كانت :-

$$F(x) = 2x - 1 \quad , \quad G(x) = \frac{1}{3x + 1}$$

أوجد :

$$F \pm G \,,\ \frac{G}{F} \,,\ \frac{F}{G} \,,\ F.G$$

2 - إذا كانت :-

$$F(x) = x^2 \quad , \quad G(x) = 2x - 3$$

أوجد:

$$F \pm G \,,\ F.G \,,\ F/G$$

3 - إذا كانت :-

$$F(x) = \sqrt{x} \quad , \quad G(x) = \sqrt{4 - x}$$

أوجد :

$$F \pm G \,,\ F.G \,,\ F/G \,,\ G/F$$

والمجالات الخاصة بكل دالة.

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{1}{x + 1} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

أوجد :

$$F.G \,,\ F/G \,,\ G/F$$

5 - إذا كانت :

$$F(x) = \sqrt{7 - 2x} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{x - 2}$$

أوجـــد :

$$D_{F.G} \quad , \quad D_F \quad , \quad D_G$$

مثـــال 3 :

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية:-

(a) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

(b) $F(x) = x^2 - 1$

(c) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

الحـــــل :

(a) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

المقادير تحت الجذر التربيعى يجب أن تكون ≤ صفر

$$\therefore x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\therefore D_F = [1 , \infty)$$

أقل قيمة لـ $x = 1$ عندها $F(x) = 0$ وتزيد بعد ذلك $F(x)$ بزيادة x

$$\therefore R_F = [0 , \infty)$$

(b) $F(x) = x^2 - 1$

$D_F = R$

R_F :

x	0	-1	-2	-3	1	2
F(x)	-1	0	3	8	0	3

واضح من الجدول أن أقل قيمة للدالة F(x) تساوى 1- وتزداد بزيادة x

$\therefore R_F = [-1 , \infty)$

(c) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\qquad x \neq 2$

$D_F = R - \{2\}$

R_F:

$F(x) = x + 2$

$R_F = R - \{4\}$

مثال 4 :

أوجد المجال والمدى للدالة :

$$F(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

الحـــل :

يكون مجال خارج قسمة دالتين هو تقاطع مجاليهما ما عدا أصفار دالة

المقام أي أن :

$D_F = R - \{4\}$

لاحظ أن المتغير x متغير مستقل ، F(x) أو y متغير تابع ولإيجاد المدى بدون رسم بيانى لهذا النوع من الدوال نجعل المتغير y متغير مستقل والمتغير x متغير تابع كالآتى:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

بضرب الطرفين فى (x - 4)

$$y(x - 4) = 2x + 3$$

$$yx - 4y = 2x + 3$$

$$yx - 2x = 4y + 3$$

$$x(y - 2) = 4y + 3$$

$$x = \frac{4y + 3}{y - 2}$$

لاحظ أن المتغير y فى هذه الصورة متغير مستقل ويمكن أن يأخذ الأعداد الحقيقية ما عدا العدد 2 وبالتالى يكون المدى :

$$R_F = R - \{2\}$$

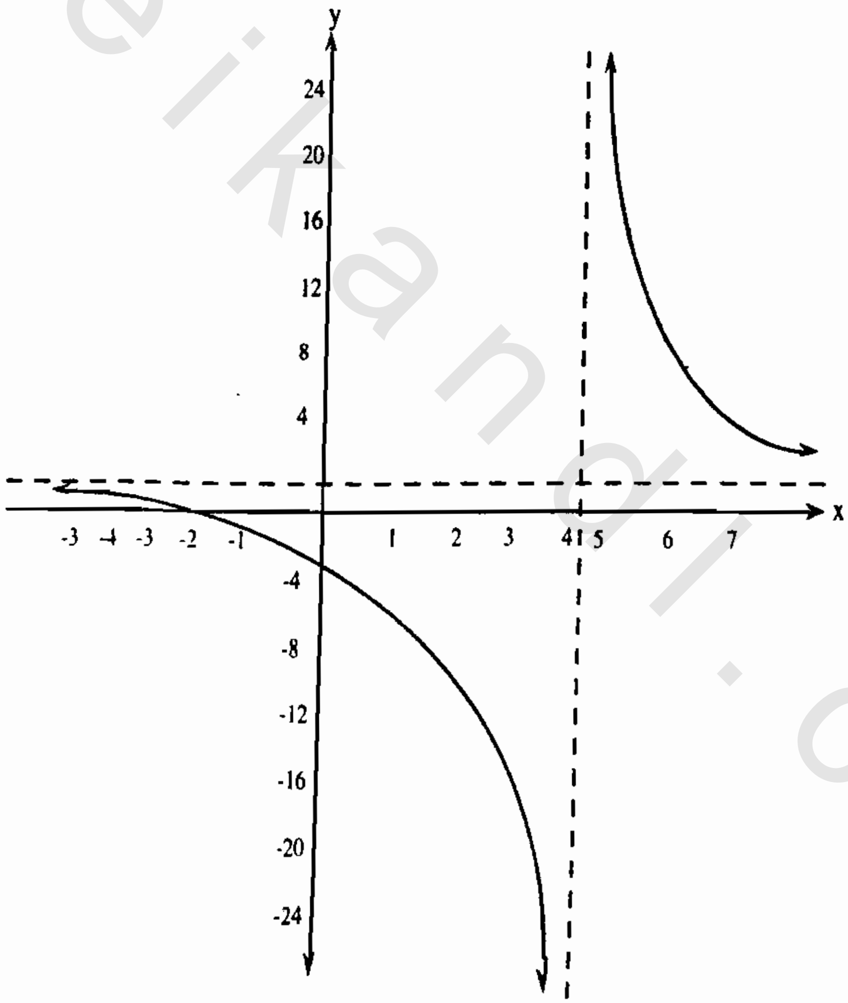
مثـــال 5 :

حل المثال السابق بالرسم البيانى وأوجد المدى بهذه الطريقة والمجال.

الحـــــل :

يتم عمل الجدول ثم الرسم البيانى شكل 59

x	-4	-3	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
f(x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{2}$	-9	-20	∞	24	13



شكل 59

نلاحظ من الرسم البيانى شكل (59) الآتى بـ

١- عند الاقتراب من x = 4 تقترب قيم الداله من مالا نهايه ولذلك يكون المجال:-

$D_F = R - \{4\}$

2- تأخذ قيم قيم لا نهائية عند y = 2 ولذلك يكون المدى:-

$R_F = R - \{2\}$

تمارين (22)

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية :

1- $F(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

2- $F(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

3- $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

4- $F(x) = \dfrac{5x - 3}{x - 1}$

5- $F(x) = 2$

6- $F(x) = \sqrt{x}$

7- $F(x) = x^2 - 1$

8- $F(x) = x^2 + 1$

9- $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

10- $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$

11- $F(x) = 2x + 3$

12 - $F(x) = x + x^2$

13- $F(x) = x^2 + 4x - 5$

14- $F(x) = x^2 - 6x + 9$

15- $F(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

16- $F(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

17- $F(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

18 - أوجد مجال كل من المعرفتين بالمعادلتين:

(a) $F(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

(b) $F(x) = \dfrac{2x - 1}{2x^2 + 7x - 7}$

بعض أنواع الدوال الحقيقية :

تصنف الدوال الحقيقيه حسب شكل قواعدها الجبرية ومنها:

(أولا) الدوال كثيرات الحدود

(ثانيا) الدوال القياسية

(ثالثا) الدوال المتسامية:-

1- الدوال المثلثية

1-الدوال الأسية

3- الدوال اللوغاريتيمة

(رابعا) دوال غير قياسية

(أولا) الدوال كثيرات الحدود :

هى دوال حقيقية على الصورة :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$an \neq 0$

$a_0 , a_1 , a_2 , \dots \quad an \in R$

$n \in N$

قاعدة كثيرة الحدود عبارة عن المجموع الجبرى لعدة حدود كل منهما على

الصورة:-

$a_r x^r \ , \ r \in N$

وهى على سبيل المثال مثل :-

(a) $F(x) = 7$ (دالة ثابتة)

(b) $F(x) = -3$ (دالة ثابته)

(c) $F(x)= 2x + 5$ (دالة خطيه)

(d) $F(x) = 2x^2 + 5x + 6$ (دالة تربيعية)

وتكون درجة دالة كثيرة الحدود هى أكبر أس للمتغير x ، ويكون الحد المطلق هو الحد الخالى من x.

مجال هذه الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية أما المدى فيتوقف على شكل الدالة أو الرسم البيانى لها وهذا ما توضحه الأمثلة الآتية:

مثال 1 :

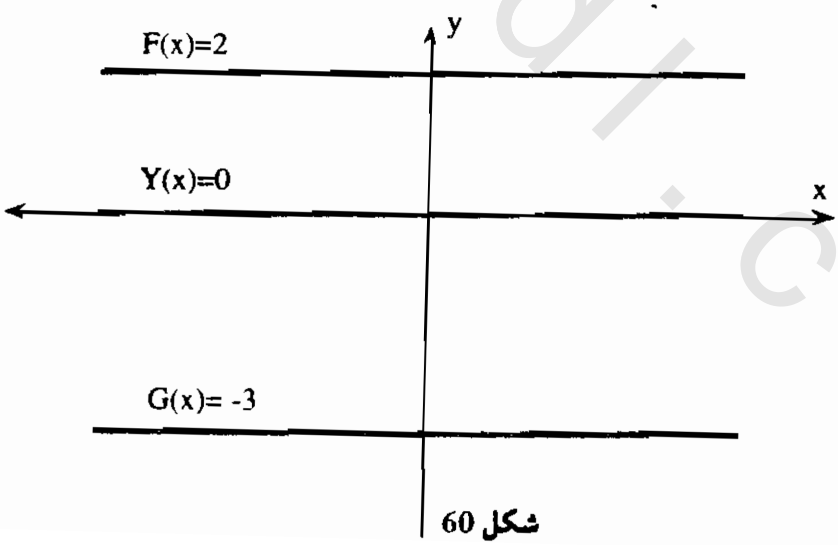
ارسم الشكل البيانى لكل من المداول الآتية :-

I- $F(x) = 2$ II- $G(x) = -3$ III- $Y(x) = 0$

مع إيجاد المجال والمدى لكل دالة.

الحل :

رسم الدوال شكل 60



شكل 60

I- $F(0) = 2$, $F(1) = 2$, $F(2) = 2$, $F(\infty) = 2$

$F(-1) = 2$, $F(-2) = 2$, $F(-3)=2$, $F(-\infty)=2$

$\therefore D_F = R$

$R_F = 2$

II- $G(0) = -3$, $G(1) = -3$, $G(2) = -3$, $G(\infty) = -3$

$G(-1) = -3$, $G(-2) =-3$, $G(-3)=-3$, $G(-\infty)=-3$

$\therefore D_G = R$

$R_G = -3$

III- $Y(0) = 0$, $Y(1) =0$, $Y(2) = 0$, $Y(\infty)=0$

$Y(-1)=0$, $Y(-2)=0$, $Y(-3) =0$, $Y(-\infty)=0$

$\therefore D_Y = R$

$R_Y = 0$

مثـــال 2 :

إذا علم أن :-

$F(x) = 2x + 3$

(أ) أوجد :-

$F(-2)$, $F(-1)$, $F(0)$, $F(2)$

(ب) إرسم $F(x)$

الحـــل:

(أ) $F(-2) = 2(-2) + 3 = -1$

$F(-1) = 2(-1) + 3 = -1$

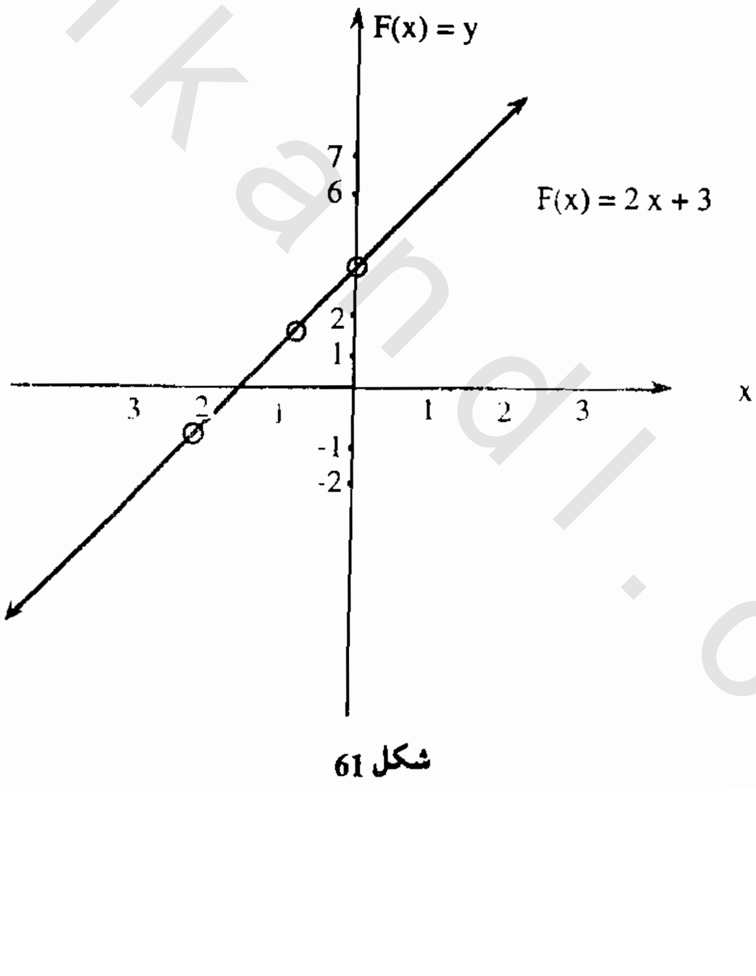
$F(0) = 2(0) + 3 = -3$

$F(2) = 2(2) + 3 = -7$

(ب) ارسم من الجزء (أ) لدينا النقاط الآتية:

(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (2, 7)

يتم توقيعها على الرسم البياني وتوصيلها (شكل 61)



شكل 61

مثال 3:

أوجد المجال والمدى للدالة :-

$$F(x) = 2x + 3$$

الحـــــل:

الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى . مجالها جميع الأعداد الحقيقية

$$\therefore D_F = R$$

من الرسم البيـانى في المثـال السـابق نجد أن الدالة عـبارة عن خط مـستقيم ممتد إلى مالا نهـاية من جهتـيه أى عندما x تقتـرب من مالانهـاية فإن y تقتـرب من مالا نهـاية وعندما x تقترب من سالب مالا نهـاية فإن y تقرب من سالب مالا نـهاية أي أن المدى لهذه الدالة هو جميع الأعدادا الحقيقية بمعنى :-

$$R_F = R$$

الدالة متعددة القواعد:

يقال للدالة $F(x)$ إنها متعددة القواعد إذ اكان مجالها مقسما إلى فترات ولكل فترة قاعدة خاصة بها كما فى المثال التالى:

مثـــال :

إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \quad x < 0 \\ 2x + 3 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

أوجد كل من :

$F(-1)$, $F(0)$, $F(1)$ إذا كان لها

وجود ثم عين مجال ومدى هذه الدالة

الحـــــل :

مجال هذه الدالة مقسم إلى فترتين هما :

1- $(-\infty, 0)$, $F(x) = 2x - 3$
2- $(0, \infty)$, $F(x) = 2x + 3$

كما أن العدد صفر لا ينتمى لأى من الفترتين

$\therefore F(0) \rightarrow$ غير معرف

$\therefore D_F = \{ R - \{0\} \}$

أى أن مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

$\because -1 \in (-\infty, 0)$

$\therefore F(-1) = 2(-1) - 3 = -5$

$\because 1 \in (0, \infty)$

$\therefore F(1) = 2(1) + 3 = 5$

وعند $x < 0$ يكون :

$2x < 0$

$\therefore 2x - 3 < -3$

$\therefore F(x) \in (-\infty, -3)$ I

وعند $x > 0$ يكون :- $2x > 0$

$2x + 3 > 3$

$\therefore F(x) \in (3, \infty)$ II

من I , II يكون مدى هذه الداله هو :-

$R_F = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$= \{ x : R - [-3, 3] \}$

أى أن مدى هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الفترة :

$[-3, 3]$

تماريـــــن (23)

1- ارسم الشكل البيانى لكل من الدالتين :

(a) $$F(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} \quad , \quad x \neq \frac{3}{2}$$

(b) $$G(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3} & , \quad x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6 & , \quad x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ثم عين مجال ومدى كل منهما وهل هما متساويتان ؟

2 - إرسم الشكل البيـانى لكل من الدوال الآتية مبينا مجال ومدى كل منهم:

(a) $$F(x) = \begin{cases} 2 - 3x & , \quad 0 \geq x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x > 0 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x < -1 \\ 2 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} -1 & , \quad 1 > x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

دالة المقياس:

درسنا فى البـاب الأول القيـمـة المطلقـة لأى عـدد حـقـيـقى x والخـواص الأساسية لها.

ونعرف دالة المقياس على نفس النمط كالآتى:

$$F(x) = |x| \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

أى أن مقياس (صفر) = صفر

ومقياس (أى عدد بخلاف الصفر) = عدد موجب

أى أن مجال دالة المقايس هو جميع الأعداد الحقيقية R

ويكون مدى دالة المقياس هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

بالإضافة الى الصفر، تكتب كالآتى كل من المجال والمدى :-

$$D_F = R$$
$$R_F = [0 , \infty)$$

مثـــال 1 :

إرسم بيانيا الدالة الآتيه:

$$F(x) = |x|$$

الحـــل :

يتم عمل جدول من سالب مالا نهاية وحتى الصفر للدالة :

$$F(x) = -x \quad , (-\infty , 0]$$

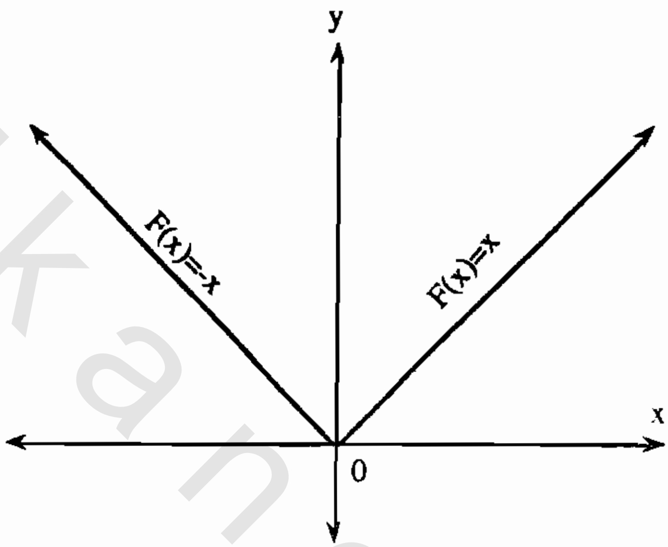
x	-3	-2	-1
y	3	2	1

ثم عمل جدول من صفر إلى موجب مالانهاية للدالة :-

$F(x) = x \quad , [0 , \infty)$

x	0	1	2
y	0	1	2

الرسم البيانى يوضحه شكل 62



شكل 62

: ومن الشكل البيانى نستنتج أن

1- $D_F = R$

2- $R_F = [0 , \infty)$

3- $F(x) = F(-x)$ ∴ الدالة زوجية

مثال 2 : ارسم بيانيا الدالة الآتية:

$F(x) = | x - 3 |$

ثم أوجد مجال ومدى هذه الدالة

الحل:

عندما $x - 3 = 0$

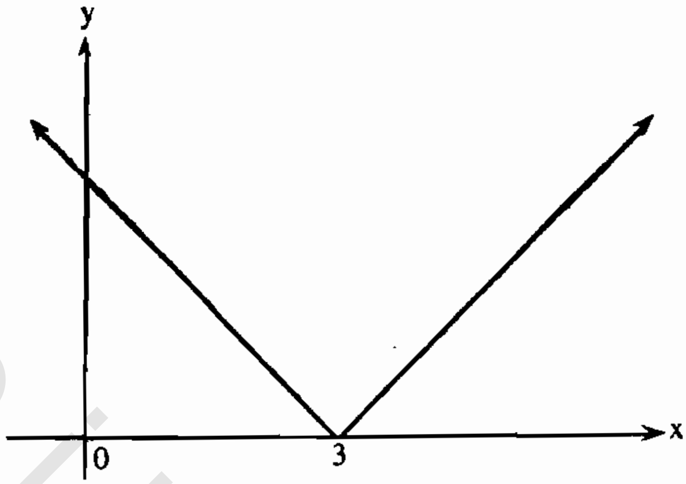
$\therefore x = 3$

$$\therefore (x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 3 \\ x - 3 & , x \geq 3 \end{cases}$$

ويتم عمل الجدول حيث لكل قاعدة مجال كالآتى:

الفترة	$(-\infty , 3)$			$[3 , \infty)$			
القاعدة	$3 - x$			$x - 3$			
x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	2	1	0	1	2	3

نوقع النقاط بالجدول على الرسم البيانى كما هو موضح بشكل 63



شكل 63

نلاحظ من الشكل البيانى (شكل 63) الآتى:

1 - الدالة بأكملها تقع فوق المحور x

2 - مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها من صفر حتى مالانهاية وتكتب بالأسلوب الرياضى كالتالى :-

$D_F = R$

$R_F = [0 , \infty)$

تماريـــــــن (24)

I - إرسم الدوال الآتيه مع إيجاد المجال والمدى:-

1- $F(x) = x + |x|$

2- $F(x) = |2x - 3|$

3- $F(x) = x + |x^2 - 6x|$

4- $F(x) = -x + |x^2 - 6x|$

5- $F(x) = x - |x|$

6- $F(x) = -x + |x|$

II -أوجد مجال الدوال :

1- $F(x) = \dfrac{|2x - 3|}{x - 3}$

2- $F(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 2|}$

3- $F(x) = \dfrac{-x + |x|}{x - 2}$

4- $F(x) = \dfrac{|2x^2 + 3 + 5|}{\sqrt{x^2 - 1}}$

الدوال السامية

تعرف كل دالة ليست جبرية بأنها دالة سامية وأشهر هذه الدوال هي:

- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتيمة
- الدوال المثلثية

الدالة الأسية:

إذا كان a عدد حقيقى موجب ، $a \neq 1$ فإن الدالة الأسية للأساس a هىF (x)تعرف كالآتى:

$$F(x) = a^x$$

حيث x أى عدد حقيقى.

ومن القواعد المعروفة فى الدوال العكسية تكون هذه الدالة أحادية وبالتالى فإن لها معكوس هو $F^{-1}(x)$.

مثال تمهيدى:

إرسم الرسم البيانى للدوال الآتية:

(a) $y = 2^x$ (b) $y = 3^x$

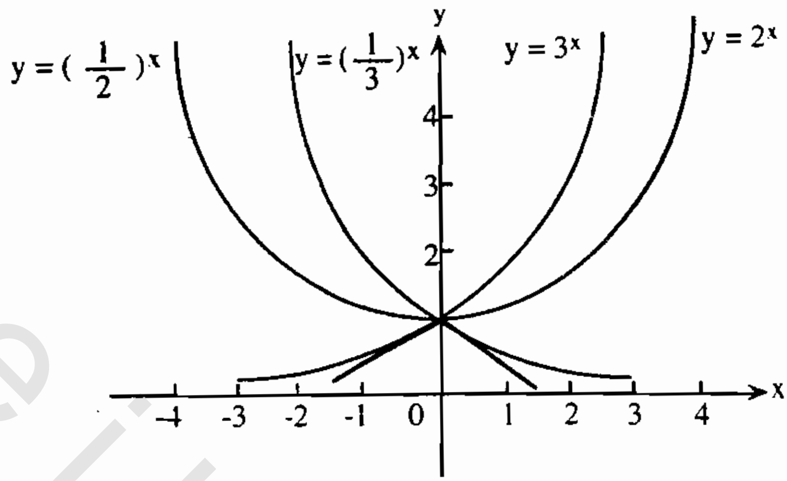
(c) $y = (\frac{1}{2})^x$ (d) $y = (\frac{1}{3})^x$

الحـــل :

يتم عمل الجدول البيانى الآتى للدوال السابقة:-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$(\frac{1}{3})^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

ثم توقيع هذه النقاط بيانيا ويمثلها شكل 64



شكل 64

نلاحظ من الجدول والرسم البيانى الآتى:

1 - الدوال (a) , (b) تزايدية حيث الأساس $1 < a$

2 - الدوال (c) , (d) تناقصية حيث الأساس $1 > a$

3 - مجال جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

4 - مدى جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

5 - جميع الدوال تمربالنقطة $A\ (0\ ,\ 1)$.

وعلى ذلك تكون الدالتين (a) , (b) ممثلة للدوال الأسية التى يزيد فيها الأساس a عن الواحد ($a > 1$) وهى فى هذه الحالة تزايدية والدالتين (c) , (d) ممثلة للدوال الأسية التى يقل فيها الأساس a عن الواحد ($a < 1$) وهى فى هذه الحالة تناقصية.

مثـال 1:

أوجد قيم a للدوال $y = a^x$ التى تحتوى النقاط الآتية:

B (2, 49) , E (3, 8) , T (2, 64)

الحـــــل :

بالنسبة للنقطة B (2, 49) نعوض فى معادلة الداله $y = a^x$

$\therefore 49 = a^2$

$7^2 = a^2$

$\therefore a = 7$

بالنسبة للنقطة E (3, 8) نعوض فى معادلة الدالة $y = a^x$:

$\therefore 8 = a^3$

$2^3 = a^3$

$\therefore a = 2$

بالنسبة للنقطه T (2, 64) نعوض فى معادلة الداله $x = a^x$

$\therefore 64 = a^2$

$8^2 = a^2$

$\therefore a = 8$

مثـــــال 2 :

أوجد جميع الأعداد الحقيقية التى تحقق المعادلة :

$5^{x(x-3)} = 625$

الحل:

يتم تحليل الطرف الأيمن وبالتالى تكتب المعادلة على الصورة:

$5^{x(x-3)} = 5^4$

$\therefore x(x-3) = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = 4 \qquad\qquad \mathrm{I}$

أو

$x = -1 \qquad\qquad \mathrm{II}$

مثـــال 3 :

أوجد قيمة x فى المعادلة

$$5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5}$$

الحــــل :

يتم فك الطرف الأيسر حسب قواعد الأسس وتصبح المعادلة كالآتى:

$$5^x \cdot 5^{-3} + 5^2 \cdot 5^{-x} = \frac{6}{5}$$

$$5^x \left(\frac{1}{125}\right) + 25 \left(\frac{1}{5^x}\right) = \frac{6}{5}$$

ضع $y = 5^x$

$$\therefore \frac{y}{125} + \frac{25}{y} = \frac{6}{5}$$

بضرب الطرفين فى 125 y

$$\therefore y^2 + 25\,(125) = 150\,y$$

$$y^2 - 150y + 3125 = 0$$

$$(y - 125)(y - 25) = 0$$

$\therefore y = 125 \qquad\qquad \mathrm{I}$

$$\therefore 5^x = 125$$

$5^x = 5^3$

$\therefore x = 3$

, $y = 25$

$5^x = 25$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

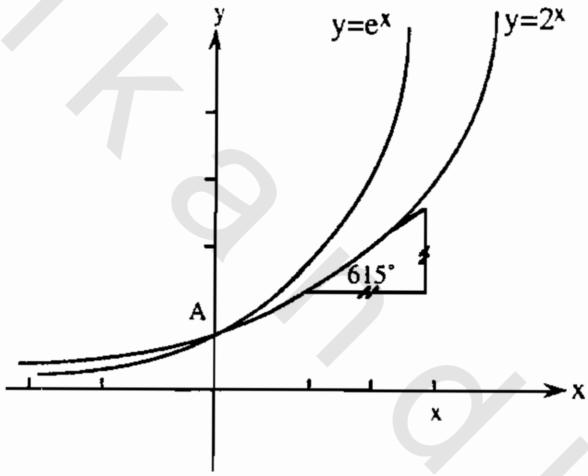
$\therefore x = 2$

∴مجموعة الحل للمعادلة هى:-

$X = \{ 3 , 2 \}$

الدالة الأسية الطبيعية e^x

عرفنا مما سبق أن جميع الدوال الأسية تمر بالنقطة (1 , 0) A وعند رسم مستقيم يمر بهذه النقطة وميله 1 + يكون هذا المستقيم مماسا لمنحنى دالة واحدة $x = a^x$ ويكون ثابت هذا المنحنى مساويا لـ 2.718281 حيث يكون ميل هذا الماس هو نفس المنحنى – أى المشتقة الأولى للمنحنى تساوى نفس المنحنى – وقد تغير رمز ثابت هذا المنحنى من a ليصبح e ‏(Euler number)ويكون أساسا للوغاريتم الطبيعى ‏(e = 2.718281828) شكل 65.



شكل 65

ومن هذا التعريف يمكن تقديم النظرية الآتية :

نظريـــــــــــة:

إذا كانت $f(x) = e^x$

فإن : $f^{`}(x) = e^x$

تمارين (25)

1 - بإستخذام قواعد الأسس أكتب المقادير الآتية بطريقة مبسطة:

(a) $2^{\sqrt{8}} \, . \, 2^{\sqrt{32}}$ (b) $2^{\sqrt{27}} \quad 2^{\sqrt{12}}$

(c) $2^{\sqrt{7}} \, . \, 2^{\sqrt{28}}$ (d) $3^{5\sqrt{3}} \quad {}^{2\sqrt{3}} \, . \, 3^{\sqrt{3}}$

2- حدد فى كل مما يأتى الدالة التزايدية والدالة التناقصية مع ذكر السبب:

(a) $F(x) = 3^{-x}$ (b) $F(x) = (\frac{1}{4})^{x}$

(c) $F(x) = (\frac{3}{2})^{x}$ (d) $F(x) = (\frac{2}{3})^{x}$

3 - إذا كانت :-

$F(x) = 3^{x} + 3^{-x}$

$G(x) = 3^{x} - 3^{3-x}$

أوجـــد :

(a) $F(x) + G(x)$

(b) $F(x) - G(x)$

(c) $F(x^{2}) + G(x^{2})$

4- حل المعادلات الآتيه

(a) $2^{x-5} = 8$ (b) $2^{x-3} = 1$

(c) $3^{x-1} = \frac{1}{3}$ (d) $3^{x-2} = 27$

(e) $4^{x-1} = 1$ (f) $2^{x} = (4^{2})^{x+1}$

(g) $3^{x} = 9^{x-1} \cdot 27$ (h) $3^{x} = 9^{x-1} \cdot 27^{1-3x}$

(i) $2^{2x} - 12 \cdot 2^{x} + 32 = 0$

(k) $4\,(2^{x} + 2^{-x}) = 17$

الدوال اللوغريتيمية:

الدالة اللوغرتيمية هى معكوس الدالة الأسية ويرمز لها بالرمز $F^{-1}(x)$

حيث:

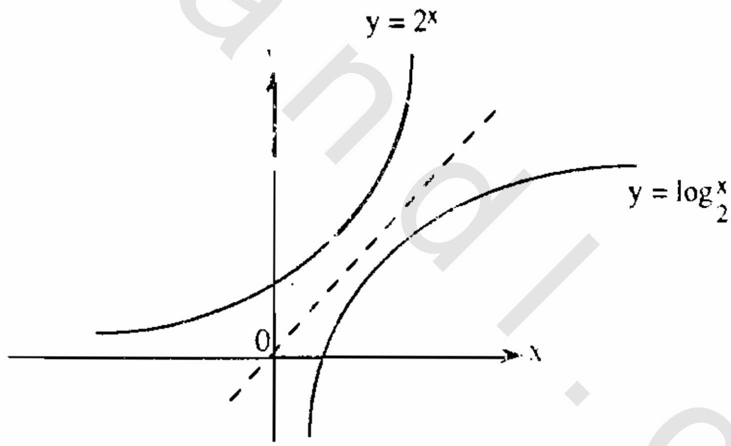
$$F^{-1}(x) = \log_a x$$

وتقرأ لوغاريتم العدد x للأساس a

ويمكن رسم الدالة اللوغاريتيمة بطريقة خط المرآة العاكس $(y = x)$ للدالة الأسية (راجع الدوال العكسية) فى الحالتين:

الحالة الأولى:

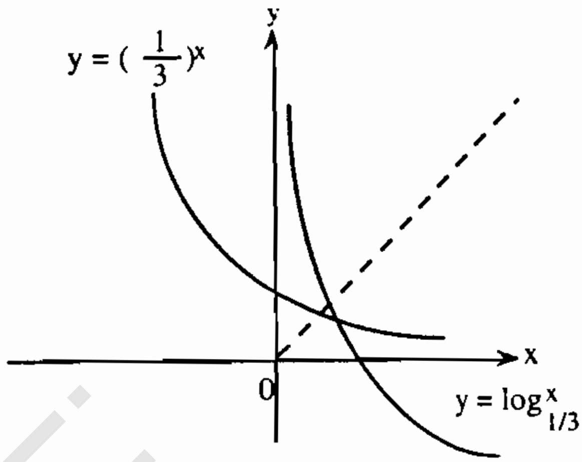
الأساس $a > 1$ شكل 66



شكل 66

الحالة الثانية :-

$0 < a < 1$ شكل 67



شكل 67

نلاحظ من الرسم البيانى للحالتين الآتى :-

الحالة الأولى : $a > 1$	الحالة الثانية : $0 < a < 1$
1 - الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
2 - عند $x > 1$ يكون $\log_a x$ موجب	عند $x > 1$ يكون $\log_a x$ سالب
عند $x = 1$ يكون $\log_a^x$ = صفر	عند $x = 1$ يكون $\log_a x$ = صفر
عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ سالب	عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ موجب

وحيث أن الدالة اللوغاريتيمة هى معكوس للدالة الأسية يكون:

I- 1 - مجال الدالة اللوغاريتيمة هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

2 - مدى الدالة اللوغاريتية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

II - خصائص الدالة اللوغاريتيمة يمكن إستنتاجها من خواص الدالة الأسية.

وتكون كالآتى:

عندما يكون $1 \quad \log_a M = \log_a N$

$M = N$

2- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

3- $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$

4- $\log_a M^k = k \log_a M$

5- $\log_a 1 = o$

6- $\log_a a = 1$

7- $a \log_a M = M$

حيث M ، N ، a عدد حقيقيا موجبا $a \neq 1$

مثال 1 :

إستعمل التعريف لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي:-

(a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ (b) $\log_x 8 = 3$

(c) $\log_2 16 = x$ (d) $\log_3 (x + 3) = 2$

الحــــل :

باستخدام التعريف يكون :

(a) $x = 3^{\frac{1}{2}}$

(b) $8 = x^3$

$2^3 = x^3$

وحيث ان الاس للطرف الأيمن = الأس فى الطرف الأيسر

الأساس للطرف الأيمن = الأساس فى الطرف الأيسر

$\therefore x = 2$

(c) $16 = 2^x$

$2^4 = 2^x$

وحيث أن الأساس للطرف الأيمن = الأساس فى الطرف الأيسر

∴ الأس للطرف الأيمن = الأس فى الطرف الأيسر

$\therefore x = 4$

(d) $x + 3 = 3^2$

$x = 9 - 3$

$x = 6$

مثـــال 2 :

حل كل من المعادلات الأتية :

(a) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 4) = 1$

(b) $\log_6 (x + 6) - \log_6 x = \log_6 (x - 4)$

الحـــل :

(a) $\log_2 (x - 3) (x - 4) = 1$

وباستخدام تعريف اللوغاريتم :-

$\therefore (x - 3) (x - 4) = 2^1$

$x^2 - 7x + 12 = 2$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2) (x - 5) = 0$

أما $(x - 2) = 0 \rightarrow x = 2$

أو $(x - 5) = 0 \rightarrow x = 5$

مجموعة الحل للمعادلة هى :-

$X = \{2 , 5\}$

b- باستخدام تعريف اللوغاريتم :

$$\therefore \frac{x+6}{x} = x - 4$$

$$x + 6 = x (x - 4)$$

$$= x^2 - 4x$$

$$\therefore x^2 - 4x - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

أما $(x - 6) = 0 \rightarrow x = 6$

أو $(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هى :

$X = \{6, -1\}$

مثـــــال 3 :

إذا كان :

$\log_a = 0.21$, $\log_a 3 = 0.27$

أوجد قيمة كل مما يأتي:-

(a) $\log_a 6$ (d) $\log_a 72$

(c) $\log_a \sqrt{3}$ (d) $\log_a \sqrt{2}$

الحـــــل :

(a) $\log_a 6 = \log_a 2 + \log_a 3$

$= 0.21 + 0.27 = 0.48$

(b) $\log_a 72 = \log_a 8 + \log_a 9$

$= \log_a 2^3 + \log_a 3^2$

$= 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$

$= 3\,(0.21) + 2\,(0.27) = 1.17$

(c) $\log_a \sqrt{3} = \log_a 3^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_a 3$

$= \frac{1}{2}\,(0.27) \qquad = 0.135$

(d) $\log_a \sqrt{2} = \log_a 2^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_a 2$

$= \frac{1}{2}\,(0.21) \qquad = 0.105$

مثـــــال 4 :

إذا كان :

$$\frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5}$$

إثبت أن :

$x\,y = z$

الحــــل :

بتطبيق قواعد النسب والتناسب :-

$$\therefore \frac{\log_a x + \log_a y}{2+3} = \text{إحدى النسب}$$

$$= \frac{\log_a z}{5}$$

$$\therefore \frac{\log_a x\, y}{5} = \frac{\log_a z}{5}$$

$$\log_a xy = \log_a z$$

وبتطبيق الخاصية رقم (1) فى اللوغاريتمات .

$$\therefore x\, y \equiv z$$

حل آخـــــر :

نضع كل من هذه النسب = k

$$\therefore \frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5} = k$$

$$\therefore \log_a x = 2k \qquad \rightarrow x = a^{2k}$$

$$\therefore \log_a y = 3k \qquad \rightarrow y = a^{3k}$$

$$\log_a z = 5k \qquad \rightarrow z = a^{5k}$$

بإيجاد قيمة الطرف الأيسر :-

$$x \,.\, y = a^{2k} \,.\, a^{3k}$$

$$= a^{5k}$$

$$= z$$

$$\therefore x\, y = z$$

اللوغاريتم الطبيعي :

يسمى اللوغاريتم للأساس e باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز ln

حيث :-

$$\log_e x = \ln x$$

ويستخدم اللوغاريتم الطبيعي في التفاضل والتكامل والعلوم علما بأن e عدد غير نسبي ويساوي تقريبا 2.71828 , $\ln e = 1$

اللوغاريتم الاعتيادي :

يسمى اللوغريتم للأساس 10 باللوغاريتم الاعتيادي ويرمز له بالرمز log

حيث :-

$$\log_{10} x = \log x$$

ويستخدم عادة في الحسابات ومن خواصه :

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$$

$$\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

العلاقة بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم الاعتيادي:

بفرض أن : $y = e^x \qquad (1)$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي للطرفين للمعادلة (1)

$\therefore \log y = x \log e$

$\therefore x = \log y / \log e$ (2)

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للمعادلة (1)

$\therefore \ln y = x \ln e = x$

$x = \ln y$ (3)

من (2) , (3) نستنتج أن :-

$\ln y = \log y / \log e$

$= 2.3 \log y$

مثـــال :

إذا علمت أن : $\log 100 = 2$ فأوجد $\ln 100$

الحـــل :

$\ln 100 = 2.3 \log 100$

$\ln 100 = 2.3\ (2)$

$\therefore \ln 100 = 4.6$

تمارين (26)

1 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة اللوغاريتيمة :-

(a) $2^4 = 16$ (b) $3^4 = 81$

(c) $(\frac{1}{2})^3 = 8^{-1}$ (d) $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

(e) $(64)^{\frac{2}{3}} = 16$ (f) $a^x = y$

(g) $e^x = 5$ (h) $e^{x^2} = y$

2 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة الأسية :-

(a) $\log_{16} 10 = 1$ (b) $\log_5 625 = 4$

(c) $\log_a x = 2$ (d) $\log_a 4 = 2$

(e) $\log_a 3 = 0.49$ (f) $\log_a 1 = 0$

(g) $\ln 25 = x$ (h) $\ln x = y$

3 - عبر عن اللوغريتمات التالية بدلالة اللوغاريتميين:-

$\ln 2 = a$
$\ln 3 = b$

(a) $\ln 16$ (b) $\ln 2\sqrt{2} \cdot 3$

(c) $\ln 0.25$ (d) $\ln \frac{4}{9}$

(e) $\ln 12$

(f) $\ln 4.5$

(g) $\ln \frac{4.5}{9}$ (h) $\ln \sqrt{13.5}$

4- حل المعادلات الآتية :

(a) $\log_4 (x - 2) - \log_4 (x + 2) = 1$

(b) $\log_2 (7 - x) - \log_2 (x + 2) = 2$

(c) $\log_7 3x + \log_7 (2x - 1) = \log_7 (16x - 10)$

(d) $\ln x (x + 2) = 4$

5- أوجد مجال الدالة ثم إرسم الرسم البيانى لها لكل من :

(a) $F(x) = \log_2 (x - 1)$

(b) $F(x) = \log_3 (-x)$

(c) $F(x) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$

(d) $F(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$

6 - أكتب التعبيرات الآتية على صورة لوغاريتم عدد واحد :

(a) $\log_5 \frac{21}{4} - \log_5 \frac{7}{2} + \log_5 \frac{8}{9}$

(b) $3 \log_4 10 - 2 \log_4 5$

(c) $3 \log_6 12 - 4 \log_6 9 + \frac{3}{2} \log_6 4$

7 - إثبت أن :

$$\log_{10} \frac{a^2}{bc} + \log_{10} \frac{b^2}{ca} + \log_{10} \frac{c^2}{ab} = 0$$

8 - إذا كان :-

$$\log_6 \frac{x + y}{7} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

إثبت أن :-

$$x^2 + y^2 = 47\, x\, y$$

9 - إذا كان :-

$$\frac{\log_{10} x}{2} = \frac{\log_{10} y}{3} = \frac{\log_{10} z}{5}$$

إثبت أن :

(a) $x\, y = z$ (b) $= y^2 z^2 = x^8$

10 - إذا كان

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

إثبت أن :

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

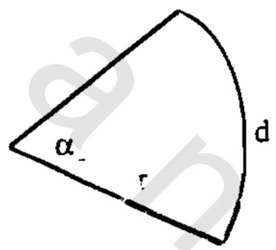
الدوال المثلثية

القياسات الدائريه والقياسات الزاوية:

أولا: القياسات الدائرية (Circular measure):

هو النسبة بين المسافة (d) مقاسة على المحيط إلى نصف القطر (r) وتكون وحداتها هى النصف قطرية (radian) والتى ليس لها أبعاد شكل 68.

$$\alpha = \frac{d}{r} \ \text{rad}$$



شكل 68

ثانيا : القياسات الزوايه (Angular measure) :

حيث تقسم الزوابة المتواجدة فى مركز الدائرة إلى 360 قسم يعرف كل قسم بالدرجة وتكون وحدات هذه القياسات الدرجة °.

العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الزاوى:

$$360^{\circ} = 2\,\Pi \ \text{rad}$$

$$\therefore\ 1 \ \text{rad} = 57.3^{\circ}$$

النسب المثلثية للمثلث القائم الزاويه بشكل 69 كما يلى:

$\text{Sin } \alpha = \frac{a}{c}$

$\text{Cos } \alpha = \frac{b}{c}$

$\text{Tan } \alpha = \frac{a}{b}$

$= \frac{\text{C Sin } \alpha}{\text{C cas } \alpha}$

$= \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha}$

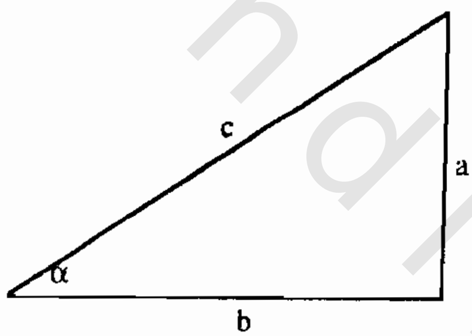
$\text{Csc } \alpha = \frac{c}{a}$

$\text{Sec } \alpha = \frac{c}{b}$

$\text{Cotan } \alpha = \frac{b}{a}$

$= \frac{\text{C Cos } \alpha}{\text{C Sin } \alpha}$

$= \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin } \alpha}$



شكل 69

$\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$

$\text{Tan}^2 \alpha + 1 = 1/\text{Cos}^2 \alpha = \text{Ses}^2 \alpha$

$1 + \text{Cot}^2 \alpha = 1 / \text{Sin}^2 \alpha = \text{Csc}^2 \alpha$

$\text{Tan } \alpha \, . \, \text{Cot } \alpha = 1$

مجمـــوع وفرق الزوايا :

$$\text{Sin}(\alpha \pm B) = \text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,B \pm \text{Cos}\,\alpha\ \text{Sin}\,B$$

$$\text{Cos}(\alpha \pm B) = \text{Cos}\,\alpha \,.\, \text{Cos}\,B \mp \text{Sin}\,\alpha\ \text{Sin}\,B$$

$$\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,B = 2\,\text{Sin}\,\frac{\alpha + B}{2} \,.\, \text{Cos}\,\frac{\alpha - B}{2}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}^2\frac{\alpha}{2} - \text{Sin}^2\frac{\alpha}{2}$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الهامة :

يبين شكل (70) بند 10 النسب المثلثية للزوايا الهامة.

العلاقة بين دالة الجيب ودالة جيب التمام (Sine & Cosine):

يبين هذه العلاقة شكل رقم (70) البندين e11 , e12 عندما تكون , K = 1 A = 1 . وأيضا شكل العلاقة بالنسبة للجيب (Sine α) عندما تكون A - 1.5 , A = 2 كما يظهر فى نفس الشكل أن منحنى جيب التمام (Cosine) هو نفسه منحنى الجيب (Sine) مع إزاحة مقدارها $\frac{\Pi}{2}$ -

Functions of the more important angles

10

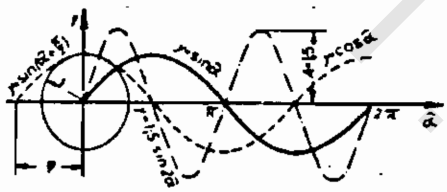
angle a	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
sin a	0	0.500	0.707	0.866	0.966	1	0	-1	0
cos a	1	0.866	0.707	0.500	0.259	0	-1	0	1
tan a	0	0.577	1.000	1.732	3.732	∞	0	∞	0
cot a	∞	1.732	1.000	0.577	0.268	0	∞	0	∞

Relations between sine and cosine functions

Basic equations

e 11 Sine function $y = A \sin(ka - \phi)$

e 12 Cosine function $y = A \cos(ka - \phi)$



——— aine curve with an	A = 1	and k = 1
—·— sine curve ampll ude of	A = 1.5	and k = 2
- - - cosine curve	A = 1	and k = 1
or aine curve with a phase shift of		$\phi - \frac{\%}{2}$

شكل 70

الدوال المثلثية للزوايا المختلفة:

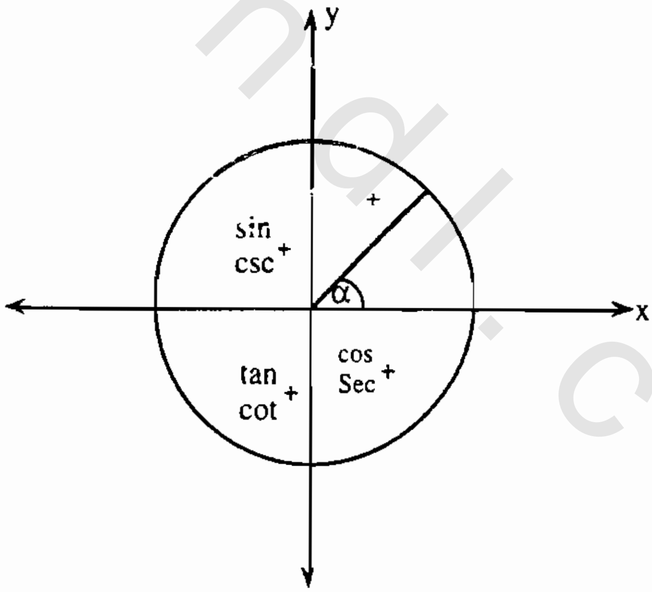
أى زاوية ممكن أن تكون فى ربع واحد من الأربعة أرباع. وتتوقف إشارة النسبة المثلثية على هذا الربع كالتالى شكل (71) .

1- فإذا كانت الزاوية فى الربع الأول تكون جميع النسب المثلثيه موجبة.

2 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثانى تكون النسب المثلثية الموجبة هى Csc , Sine وبقية النسب المثلثية سالبة.

3 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثالث تكون النسب المثلثية الموجبة هى Cot , Tan وبقية النسب المثلثية سالبة.

4- إذا كانت الزاويه فى الربع الرابع تكون النسبة المثلثية الموجبة هى Sec , Cos وبقية النسب المثلثية سالبة.



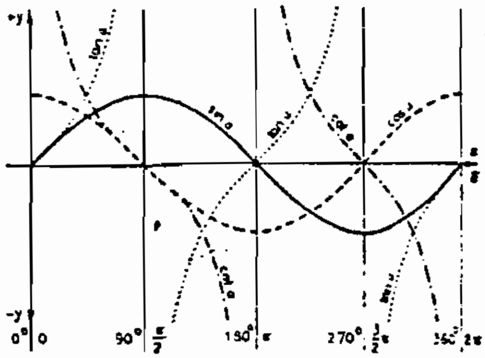
شكل 71

وتكون النسبة المثلثية في شكل (72) وفي جزئه العلوى يبين قيمة الدوال في حالة ما إذا كانت الزاوية محصورة بين الصفر °90 أو °90 , °180 أو , °270 °180 أو 270 , 360 . وأيضا في حالة تكرار الزاوية °360.

كما يبين الشكل في جزئه السفلى الشكل البياني للدوال المختلفة (cost, tan, cot, sine للزاوية α في كل الأرباع أي ابتداءا من الصفر وحتى°360 .

FUNCTIONS OF A CIRCLE | **E3**
Quadrants

sin (90° - a)	+	=	cos a	sin (90° + a)	=	-	cos a
cos (90° - a)	+	=	sin a	cos (90° + a)	=	-	sin a
tan (90° - a)	+	=	cot a	tan (90° + a)	=	-	cot a
cot (90° - a)	+	=	tan a	cot (90° + a)	=	-	tan a
sin (180°-a)	+	=	cos a	sin (150° + a)	=	-	cos a
cos (180°-a)	-	=	sin a	cos (150° + a)	=	-	sin a
tan (180°-a)	-	=	cot a	tan (150° + a)	=	-	cot a
cot (180°-a)	-	=	tan a	cot (150° + a)	=	-	tan a
sin (270° - a)	-	=	cos a	sin (270° + a)	=	-	cos a
cos (270° - a)	-	=	sin a	cos (270° + a)	=	-	sin a
tan (270° - a)	+	=	cot a	tan (270° + a)	=	-	cot a
cot (270° - a)	+	=	tan a	cot (270° + a)	=	-	tan a
sin (360° - a)	-	=	cos a	sin (360° + a)	=	-	cos a
cos (360° -a)	+	=	sin a	cos (360° + a)	=	-	sin a
tan (360°-a)	-	=	cot a	tan (360° + a)	=	+	cot a
cot (360°-a)	-	=	tan a	cot (360° + a)	=	+	tan a
sin (- a)	-	=	cos a	sin (a ± n x 360°)	=	+	cos a
cos (- a)	+	=	sin a	cos (a ± n x 360°)	=	-	sin a
tan (- a)	-	=	cot a	tan (a ± n x 180°)	=	-	cot a
cot (- a)	-	=	tan a	cot (a ± n x 180°)	=	-	tan a



شكل 72

المجال (D_F) والمدى(R_F) لبعض الدوال المثلثية :

نجد من شكل (72) فى الشكل البيانى الآتى:

1 - $F(a) = \text{Sin } a$

$\therefore D_F = R$

$, \ R_F = [-1, 1]$

2- $F(a) = \text{Cos } a$

$\therefore D_F = R$

$, \ R_F = [-1, 1]$

3- $F(a) = \text{Tan } a$

$$= \frac{\sin a}{\cos a}$$

$\therefore D_F = \{ R - \{\text{أصفار المقام}\} \}$

أى أن الزاويه تخضع للعلاقة :

$$a = (2n + 1)\frac{\Pi}{2} \quad , \quad n \in z$$

z جميع الأعداد الصحيحة .

$, \ R_F = R$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

تماريـــــــن (27)

1 - إرسم الدوال الآتيه :

(a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) $\tan x$

فى الفترة $[0 , 2\Pi]$

2- أوجد قيمة كل من الدوال الآتيه :-

$\sin 15$	$\sin 95$	$\sin 200$
$\cos 15$	$\cos 59$	$\cos 200$
$\tan 15$	$\tan 95$	$\tan 20$

3 - أوجد قيمة الزوايا بالقياسات الدائرية والقياسات الزاوية لكل من :

(a) $r = 15$ وطول القوس 25

(b) $r = 30$ وطول القوس 50

(c) $r = 90$ وطول القوس 250

(d) $r = 120$ وطول القوس 720

ملحوظة: وحدة الأطوال تؤخذ بالمليمتر

4 - أوجد المجال لكل من الدوال الآتيه:

(a) $F(x) = \sin x + \cos x$

(b) $F(x) = \tan x$

(c) $F(x) = \sin^2 x$

(d) $F(x) = \ln(\sin x)$

(e) $F(x) = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

(f) $F(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

(g) $F(x) = \dfrac{\ln x}{\sin x}$

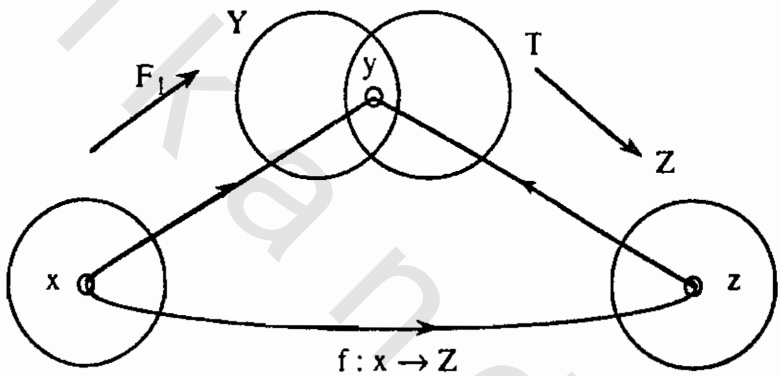
(h) $F(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

تحصيل الدوال (الدالة التركيبية)

إذا كانت $f_1(x)$, $f_2(x)$ دالتين حقيقيتين وكان :

1 - مدى $f_1(x)$ $(R_{f1}) \cap$ مجال $f_2(x)$ $(D_{F2}) \neq \phi$ فإنه يمكن تحصيل الدالتين $F_1(x)$ لإيجاد الدالة المحصلة أو الدالة التركيبية (شكل 73):

$$f = f_2(x) \circ f_1(x)$$
$$= f_2(f_1(x))$$



شكل 73

من الشكل يتضح أن :

$F_1(x) = y$, $\quad$, $F_2(y) = z$

$$F_2(x) \circ (F_1(x)) = F_2(F_1(x))$$
$$= F_2(y)$$
$$= z$$

2 - مدى $f_2(x)$ $(R_{f2}) \cap$ مجال $F_1(x)$ $(D_{f1}) \neq \phi$ فإنه يمكن إيجاد أيضا:-

$$F_1 \ o \ F_2(x) = F_1(f_2(x))$$

وينتج من التعريف أن :-

$$D_{f_1 o f_2} = \{ x : x \in D_{F_2} , f_2(x) \in D_{f_1} \}$$

مثـــال 1 :

إذا كانت $F_1(x)$, $F_2(x)$ دالتين معرفتين على المجموعة X

$X = \{ a , b , c \}$
$F_1 = (a , b) , (b , c) , (c ,)$
$F_2 = (a, a) , (b , a) , (a , b)$

فأوجد الآتى :

(a) $F_2 \, o \, F_1$ (b) $F_1 \, o \, F_2$

(c) $R_{f_2 o f_1}$ (d) $R_{f_2 o f_1}$

الحـــل :

(a) $F_2 \ o \ F_1 = f_2(f_1)$
$= (a , a) , (b , a) , (c , b)$

(b) $F_1 \, o \, F_2 = F_1(F_2)$
$= (a , b), (b , c) , (c , c)$

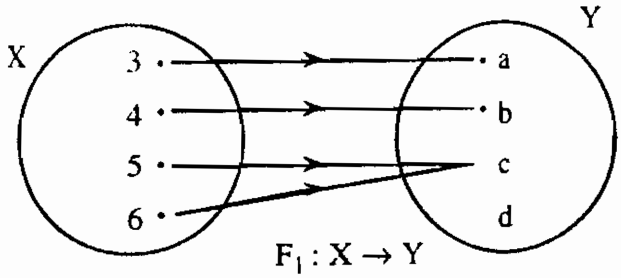
(c) $R_{f_2 o f_1} = \{a , b\}$
$R_{f_1 o f_2} = \{ b , c\}$

نلاحظ من المثال السابق أن :

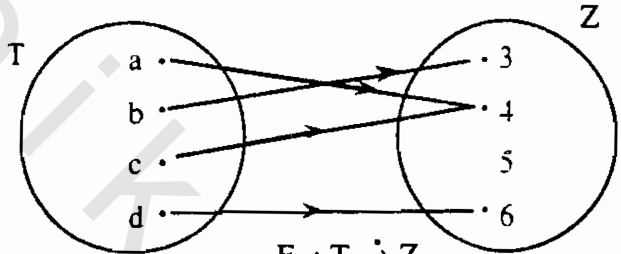
$$F_2 \, o \, F_1 \neq F_1 \, o \, F_2$$

مثـــال 2:

F_1 , F_2 دالتين معرفتين كما بالشكل (شكل 74)



$F_1 : X \rightarrow Y$



$F_2 : T \rightarrow Z$

شكل 74

أوجد الآتى:

(a) $F_2 \circ F_1$

(b) $D_{f_2 \circ f_1}$

(c) $F_1 \circ F_2$

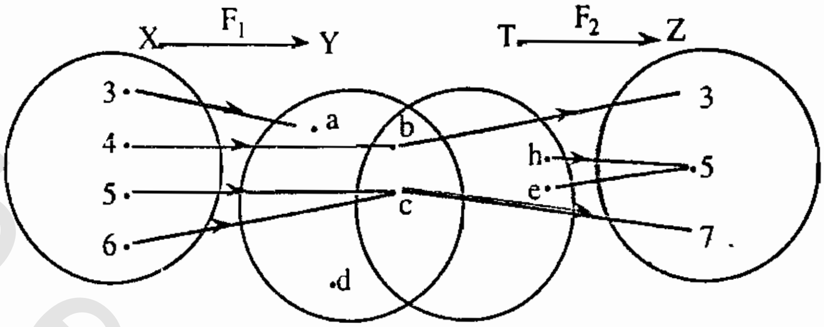
(d) $D_{f_1 \circ f_2}$

الحـــــل :

(a) $F_2 \circ F_1 = F_2 (F_1)$

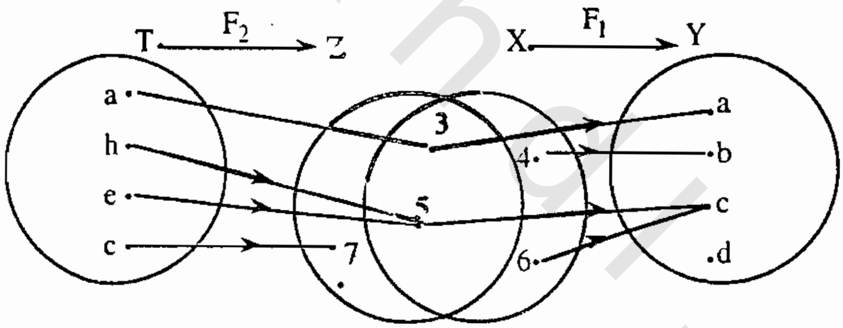
$= \{ (4 , 3) , (5 , 7) , (6 , 7) \}$ ..... شكل 75

(b) $D_{f_2 \circ f_1} = \{ 4 , 5 , 6\}$



$F2 \circ F1 : x \to z$

شكل 75



$F_1 \circ F_2 : T \to Y$

شكل 76

(c) $F_1 \circ F_2 = F_1\ (F_2)$

$= (h, c)\ ,\ (b\ ,\ a)\ ,\ (e\ ,\ c)$ .... 76 **شـــكل**

(d) $D_{f_1 0 f_2} = \{b , h , e \}$

نلاحظ من المثال الآتى:-

1- $F_2 \, 0 \, F_1 \neq F_1 \, 0 \, F_2$

2 - $3 \notin D_{f_2 0 f_1}$

3- $c \notin D_{f_1 0 f_2}$

مثـــال 3 :

a - اذكر مجال كل من الدالتين الحقيقيتين F_1 , F_2 المعرفتين كالآتى:

$F_1 (x) = 5 - x^2$

$F_2 (x) = \sqrt{x - 1}$

b- أوجد أيضـــاً :

$D_{f_2 0 f_1}$, $F_2 \circ F_1$

$D_{f_1 0 f_2}$ $F_1 \circ F_2$

الحــــل :

a- $F_1 (x) = 5 - x^2$

$D_{f_1} = R$

$F_2(x) = \sqrt{x - 1}$ $\therefore x \geq 1$, $D_{f_2} = [1 , \infty)$

b- $= f_2 \circ f_1 \; (x) = f_2 (f_1 \; (x))$

$= f_2 (5 - x^2)$

$\therefore \; F_2 \circ F_1 \; (x) = \sqrt{5 - x^2 - 1}$

$= \sqrt{4 - x^2}$

II $D_{f_2 0 f_1}$:

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 4$

$$2 \le x \le 2$$

$$\therefore D_{f_1 o f_1} = [-2, 2]$$

III $\quad F_1 \circ F_2 = F_1(F_2)$

$$\because F_2(x) = \sqrt{x-1}$$

$$, F_1(x) = 5 - x^2$$

$$\therefore F_1 \circ F_2 = 5 - (\sqrt{x-1})^2$$

$$= 5 - (x - 1)$$

$$= 6 - x$$

IV $\quad \therefore D_{f_1 o f_2} = \{ x : x \in D_{f_2} , F_2(x) \in D_{f_1} \}$

$$= [1, \infty)$$

مثـــال 4 :

أوجد $g(x)$ إذا كان :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad f \circ g(x) = x^2$$

الحـــل :

$$f \circ g(x) = x^2$$

$$= F(g(x))$$

$$\because F(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\therefore F(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1}$$

$$\therefore \sqrt{g(x) - 1} = x^2$$

$$\therefore g(x) = x^4 + 1$$

مثـــال 5 :

إذا كان :-

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x - 1}$$

أوجـــد $F \circ g(x)$

الحـــل :

$$F \circ g(x) = F(g(x))$$

$$= \frac{\ln g(x)}{g(x) - 2}$$

$$= \frac{\ln \frac{1}{x - 1}}{\frac{1}{x - 1} - 2}$$

$$= \frac{\ln 1 - \ln (x - 1)}{\frac{1 - 2(x - 1)}{x - 1}}$$

$$= \frac{0 - \ln (x - 1)}{-2x + 3} \cdot (x - 1)$$

$$= \frac{(x - 1)}{(3 - 2x) \ln (x - 1)}$$

تماريـــــن (28)

1 - إذا كانت :-

$F_1 = \{ (1 , 2) , (2, 2) , (3 , 1) \}$
$F_2 = \{ (1 , 1) , (2 , 3) , (3 , 3) \}$

دالتين معرفتين على المجموعة X حيث:

$X = \{ 1 , 2 , 3\}$

فأوجـــــد :

$F_2 \circ F_1 \quad , F_1 \circ F_2$

2 - إذا كانت f , g دالتيـن معرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية:-

$F(x) = 3 \qquad , g(x) = 3x$

فاذكر مجال ومدى كل من :-

$f \circ g \qquad , g \circ f$

وأوجد قيمـــــة :

$g \circ f(2) \quad , \quad f \circ g(2) \quad . \quad f \circ f(2) \quad . \quad g \circ g(2)$

3 - إذا أعطيت $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1}$ فأوجد قيمة :-

(a) $f \circ g(3)$

(c) $f \circ g(\frac{1}{3})$

4 - أوجد $f \circ g(x) \quad . \quad g \circ f(x)$ فى الحالات الآتية:

(a) $F(x) = \sqrt{x} + 1 \quad , \quad g(x) = x^2$

(b) $F(x) = 2 + \sqrt{x} \quad , g(x) = (x - 2)^2$

5 - إذا كانت :-

$$F(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad , \quad g \circ f(x) = \frac{3}{x-2}$$

أ وجد قيمـــــة $g(x)$

6 - أوجد مجال ومدى الدوال الآتية :

$$F_1 \quad , \quad F_2 \quad , \quad F_1 \circ F_2 \quad , \quad F_2 \circ F_1$$

وذلك إذا كان :

$$F_1(x) = \sqrt{x-1}$$

$$F_2(x) = x^2 + 1$$

أوجد أيضا قيمة :

$$F_1(2) \quad , \quad F_2(2) \quad . \quad F_2 \circ F_1(2) , F_1 \circ F_2(2)$$

7 - إذا كانت :

$$F_1(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x}$$

فأوجـــــد :

(a) $F_2 \circ F_1(x) \quad , \quad F31 \circ F_2(x)$

(b) $D_{f_2 \circ f_1} \quad , \quad D_{f_1 \circ f_2}$

8 - إذا كانت :

$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\infty < x < \infty$$
$$g(x) = \sin x \quad -\infty < x < \infty$$

أوجـــــد :

$$f \circ g(x) \quad , \quad g \circ f(x)$$

الدوال العكسية :

درسنا فيما سبق الدالة الحقيقية وعرفنا أن معكوس الدالة الحقيقية ليس بالضرورة دالة.

وعلى أية حال نستطيع القول بأن العلاقة العكسية للدالة تكون أيضا دالة إذا كان :

$$1 - F(x_1) = F(x_2) \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

أو

$$2- x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad F(x_1) \neq F(x_2)$$

حيث x_2 , x_1 فى مجال الدالة F (تعرفا بالقاعدة (1) أو القاعدة (2))

وتسمى الدالة F فى هذه الحالة بالدالة الآحادية وتسمى الدالة F^{-1} معكوس الدالة F

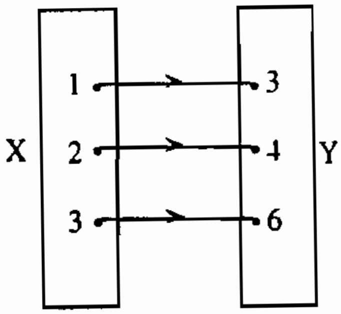
فمثلا إذا كان :

$$F_1 = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6) \}$$

يكون المعكوس لها F_1^{-1} حيث

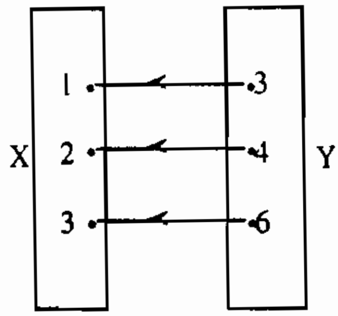
$$F_1^{-1} = \{ (3,1), (4,2), (6,3) \}$$

ويمكن تمثيلهما بالمخطط السهمى كالتالى (شكل 77 ، شكل 78).



$F_1 = X \rightarrow Y$

شكل 77



$F_1^{-1} = Y \rightarrow X$

شكل 78

حيث X المجال ، Y المدى للدالة F_1

، Y المجال ، X للدالة F_1^{-1}

وعلى ذلك نجد أن :-

$F_1\ (3) = 6$

$F_1^{-1}\ (3) = 1$

إذ أن العنصر $x = 3$ ينتمى إلى X وينتمى أيضا إلى Y

$\therefore\ F_1\left(F_1^{-1}\ (3)\ \right) = 3$ I

$,\ F_1^{-1}\left(F_1\ (3)\right) \ = F_1^{-1}\ (6)$

$= 3$ II

من I ، II نستنتج أن :-

$F_1\left(F_1^{-1}\ (3)\right) = F_1^{-1}\ \left(F_1\ (3)\ \right)$

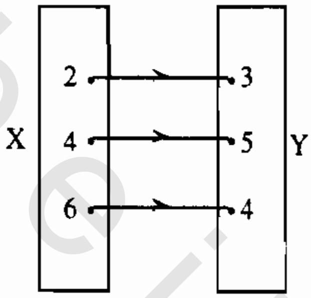
مثالا آخر يؤكد هذا الاستنتاج:

$F_2 = \{\ (2, 3)\ ,,\ (4. 5)\ ,\ (6\ ,\ 4)\ \}$

ويكون المعكوس للدالة F_2 هو F_1^{-1} حيث :-

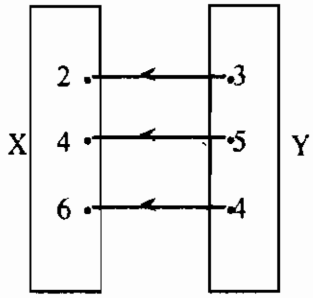
$F_2^{-1}\ = \{\ (3, 2)\ ,\ (5\ ,4), (4, 6)\ \}$

يمثلهما شكل 79 شكل 80 على الترتيب



$F_2 : X \rightarrow Y$

شكل 79



$F_2^{-1} : Y \rightarrow X$

شكل 80

وعلى ذلك نجد أن :

$F_2 (4) = 5$

$F_2^{-1} (4) = 6$

حيث العنصر x = 4 ينتمي إلى X وينتمي أيضا إلى Y

$F_2 (F_2^{-1} (4) = F_2 (6)$

$= 4$ III

$F_2^{-1} (F_2 (4)) = F_2^{-1} (5)$

$F_2^{-1} (F_2 (4)) = 4$ IV

من III , IV نستنتج أن :

$(F_2^{-1} (4)) = F_2 (F_2^{-1} (4))$

من I ، II في المثال الأول F_1 ، III, IV في المثال الثانى F_2 نستطيع أن نستنتج هذا التعريف :

إذا كانت F دالة أحادية مجالها X ومداها Y فإن الدالة F^{-1} التى مجالها Y ومداها X تسمى الدالة العكسية للدالة F إذا كان لجميع $x \in Y$

3- $F(F^{-1}(x)) = x$

4- $F^{-1}(F(x)) = x$

مثـــال 1 :

إذا كانت :-

$F_1 = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6) \}$

$F_2 = \{ (2, 3), (4, 5), (6, 4) \}$

فأوجـــــد :

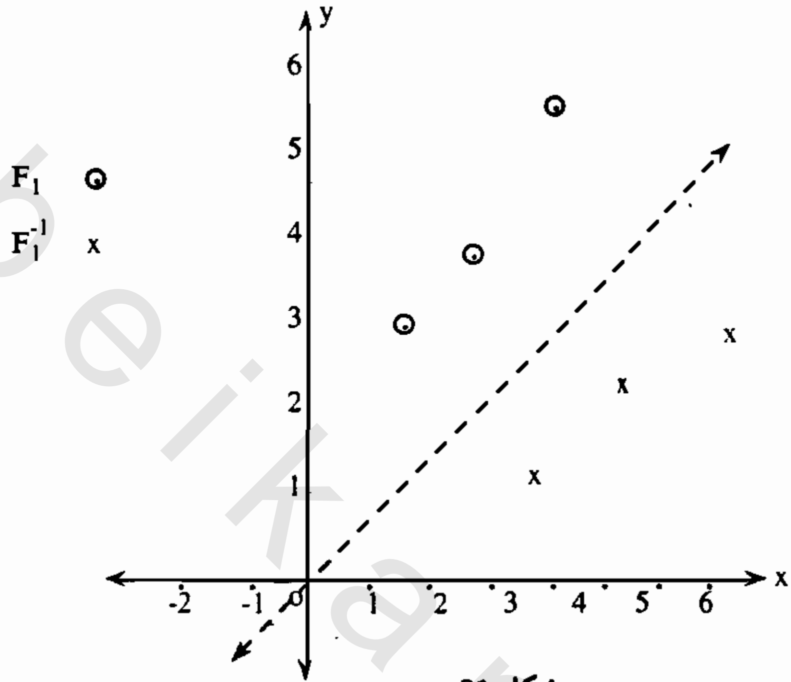
F_2^{-1} ، F_1^{-1} مع رسم كل دالة ومعكوسها على الرسم البيانى واكتب ملاحظاتك.

الحـــل :

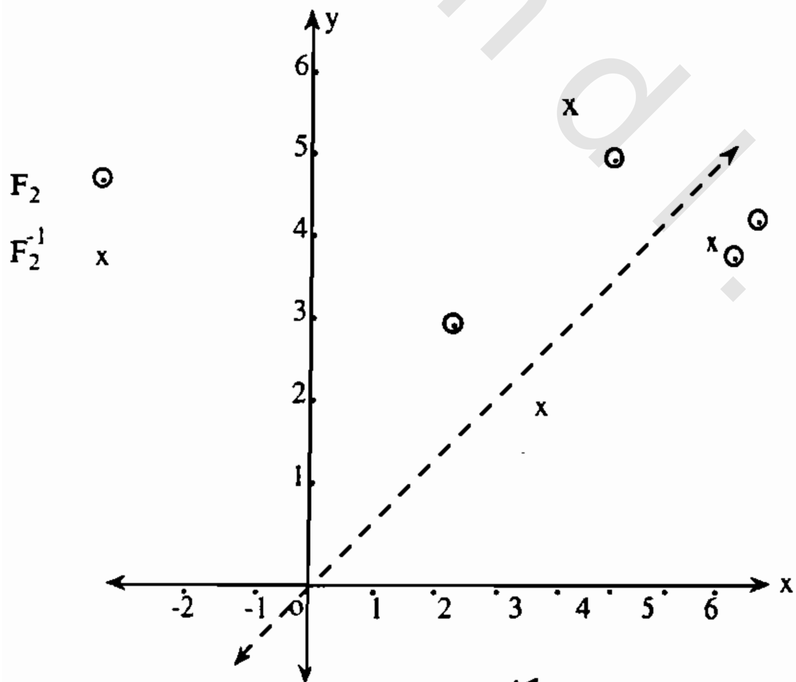
$F_1^{-1} = \{ (3, 1), (4, 2), (6, 3) \}$

$F_2^{-1} = \{ (3, 2), (5, 4), (4, 6) \}$

ويمثلهما شكل 81 ، شكل 82 على الترتيب .



شكل 81



شكل 82

من الرسم البيانى نجد أن الدوال F_2 , F_1^{-1} متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ وكذلك F_2 , F_2^{-1} متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ أى أن : الدالة والدالة العكسية لها متناظرتان بالنسبة للمستقيم $y = x$ أى كل منهما صورة للأخرى على الخط العاكس $y = x$.

مثـــال 2:

إذا كانت :-

$F = \{ (1, -2), (2, 0), (3, -3), (4, 1) \}$

$F^{-1} = \{ (-2, 1), (0, 2), (-3, 3), (1, 4) \}$

إثبت صحة المعادلات

1- $F(F^{-1}(x)) = x$

2- $F^{1}(F(x)) = x$

لجميع قيم x المنتميه إلى Y

الحـــل :

$F(1) = -2$

$F^{-1}(1) = 4$

$F(F^{1}(1) = F(4) = 1$ (المعادلة 1)

$F^{1}(F(1)) = F^{1}(-2) = 1$ (المعادله 2)

∴ المعادلتين صحيحتين عند $x = 1$ المنتمية إلى y

مثـــال 3 :

إذا كانت : $F = 2 - 3x$

إثبت أن F^{1} دالة

الحـــــل

نفرض أن x_1 ، x_2 فى مجال F

$$\therefore F(x_1) = 2 - 3x_1$$
$$F(x_2) = 2 - 3x_2$$

فإذا كان $F(x_1) = F(x_2)$

$$\therefore 2 - 3x_1 = 2 - 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

∴ الدالـة أحـاديـه ويكون لهـا مـعكوس هو F^{-1} يكون أيضـا دالة وفـقـا للقاعـدة رقـم 1.

إختبار الدالة من حيث كونها إحاديه أم غير أحاديه:

يمكن اختيار الدالة F من حيث كونها إحادية أم لا وذلك بعد رسمها بيانيا وبإستخدام خط مستقيم يوازى محور السينات، فإذا قطع هذا الخط الدالة فى أكثر من نقطة فهذا معناه أن المكون الثانى للدالة F (الاحداثى الثانى) هو نفسه – أى أن للدالة F أكثر من زوج واحد بنفس المكون – هذا معناه أن الدالة F ليست أحادية وأن F^{-1} غير موجودة.

مثـــال :

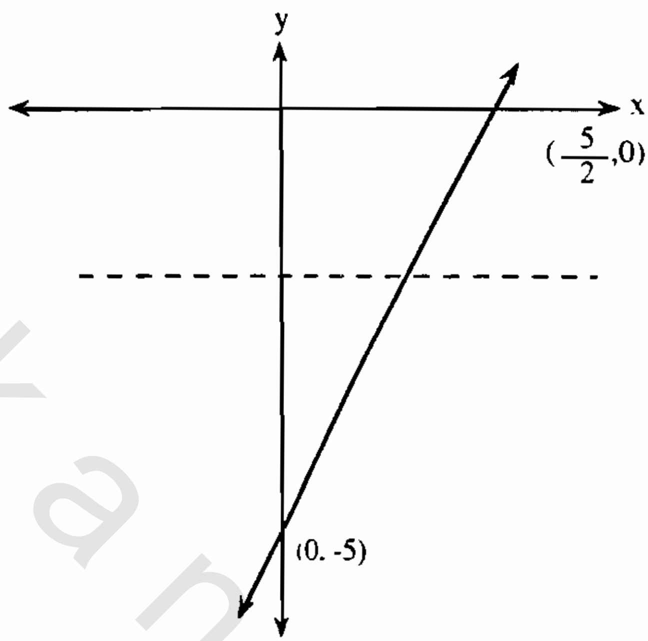
إثبت أن الدالة F المعرفة بالقاعدة:

$$F(x) = 25 - 5$$

أحادية بيانيا.

الحـــــل :

نرسم الدالة بيانيا . شكل 83



83

نلاحظ أن أى مستقيم يوازى محور السينات يقطع الداله فى نقطه واحدة وبالتالى فإن الدالة F داله أحاديه.

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

إذا كانت الدالة على الصورة:

$$y = F(x)$$

تسمى دالة دالة صريحة حيث ذكرت الدالة y صريحة بدلا له x.

مثال ذلك:

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$y = \tan x$$

$$y = a^x$$

$$y = \ln x$$

حيث أمكن وضع المتغير المتسقل فى طرف والمتغير التابع فى الطرف الآخر.

أما إذا كانت المعادلة على الصورة :

$$f(x, y) = 0$$

مثـــال ذلك :

$$x^2 - (y + 1)\,x + y^2 - y + 6 = 0$$

أى أن كلا من المتغير المتسقل x والمتغير التابع y ظهرا فى طرف واحد من المعادلة ولا يمكن فصلهما عن بعض حيث المتغير y واقع ضمنيا فى x ومثل هذه الدالة تسمى دالة ضمنية . مثال ذلك:

$$\frac{y\,a^x}{x + 1} = 0$$

$$y^2 - x\,y + x^2 = 0$$

وقد تكون الدالة على شكل صورة ضمنية ولكن يمكن كتابتها على صورة دالة صريحة مثال ذلك:

$$x y - x + y + 1 = 0 \ , \ y \neq -1$$

فيمكن كتابتها على الصورة .

$$\begin{aligned} x - 1 &= x y + y \\ &= y (x + 1) \\ \therefore y &= \frac{x - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

مثـــال :

إذا كانت دالة معرفة ضمنية بالمعادلة:

$$x + 4 = \sqrt{y^2 - 16}$$

اكتب المعادلة فى الصورة الآتية:

$$y = f(x)$$

الحـــل :

بتربيع طرفى المعادلة:

$$(x + 4)^2 = y^2 - 16$$

$$\therefore \ x^2 + 8x + 16 = y^2 - 16$$

$$\therefore \ y^2 = x^2 + 8x + 32$$

$$y = \sqrt{x^2 + 8x + 32}$$

الدالة الزوجية والدالة الفردية:

أ- الدالة الزوجية :

يقال للدالة الحقيقية بأنها دالة زوجية إذا كان :

$$F(x) = F(-x) \qquad , x \in D_F$$

بمعنى إنه إذا وضع x- فى معادلة الدالة بدلا من x وكانت قيمة الدالة لا تتغير سميت هذه الدالة بالدالة الزوجية.

مثـــال 1 :

إثبت أن الدالـــة :

$$F(x) = x^2$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة

الحــــل :

$$F(-x) = (-x)^2 = x^2$$

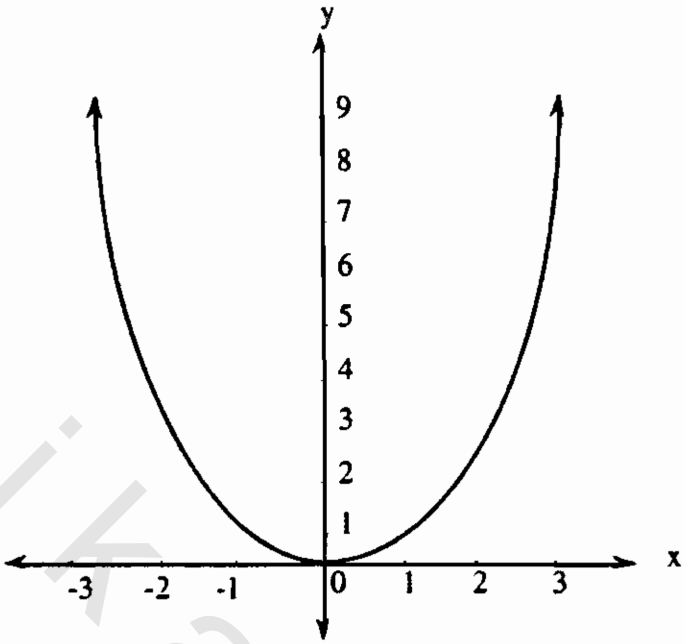
$$\therefore F(-x) = F(x)$$

وبالتالى تكون الدالة زوجية

ولرسم الدالة بيانيا يتم عمل الجدول الآتى:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

شكل 84 يوضحه بيانيا .



شكل 84

مثـــال 2 :

إثبت أن الدالة :

$$F(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة وادرس تماثل المنحنى حول المحور y

الحـــل :

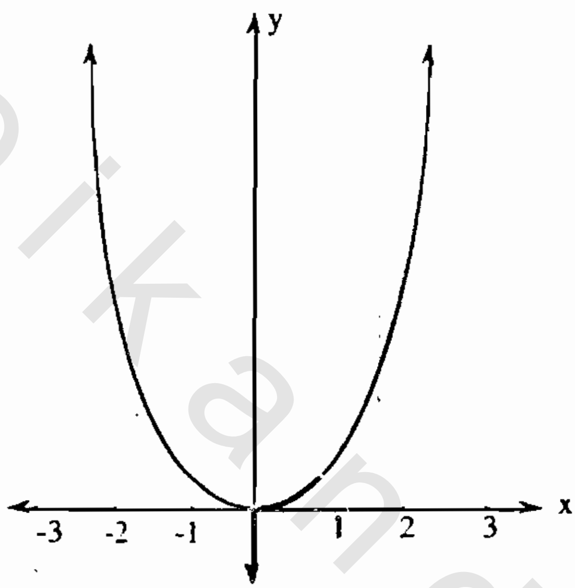
$$F(-x) = 3(-x) + 2(-x)^2 + 1$$
$$= 3x^4 + 2x^2 + 1$$
$$= F(x)$$

∴الدالة زوجيــــة

ولرسم بيانيا يتم عمل الجدول الآتى: -

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	6	57	243	6	57	243

وشكل 85 يوضحه بيانيا.



شكل 85

ومن الرسم نلاحظ أن :

منحنى متماثل حول المحور y أي أن المحور y يمكن إعتباره خط مرآه عاكس لأى من الجهتين.

مثـــال 3 :

إثبت أن :

$f(x) = |x| \qquad , x \in R$

دالة زوجية

الحـــــل :

$$F(-x) = |-x| = |x| = F(x)$$

∴ الدالة زوجية

ب- الدالة الفردية :

يقال للدالة الحقيقية $F(x)$ بأنها فردية إذا كان :-

$$F(-x) = -F(x) \quad , x \in F$$

مثال 4 :

إثبت أن :

$$F(x) = x^3$$

دالة فردية:

الحـــــل:

$$F(-x) = (-x^3) = -x^3 = -F(x)$$

∴ الدالة حسب التعريف دالة فردية

مثال 5 :

إثبت أن الدالة

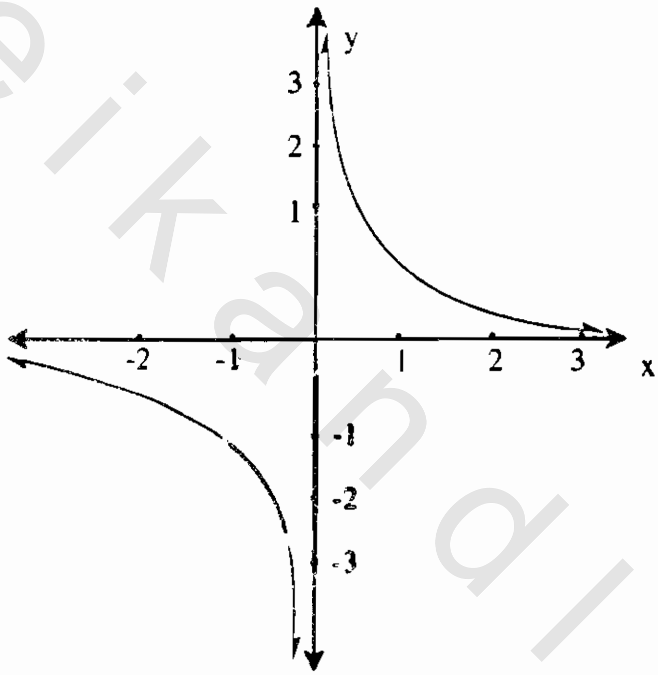
$$F(x) = \frac{1}{x}$$

دالة فردية ثم إرسم المنحنى البيانى لها وادرس تماثله حول نقطة الأصل.

الحل: يتم عمل الجدول الآتى:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
F(x)	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

يوضحه الرسم البيانى شكل 68



شكل 86

من الرسم نلاحظ أن منحنى الدالة F متماثل حول نقطة الأصل . أى أن كل من نصفى منحنى الدالة F هو صورة مقلوبة للنصف الآخر (الانعكاس فى نقطة الأصل).

ملاحظات هامه:

1 - من الممكن أن تتواجد دوال ليست زوجية ولا فردية.

2 - مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.

3 - مجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية.

4 - حاصل ضرب دالة زوجيه وأخرى فردية هو دالة فردية.

5 - حاصل ضرب دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.

6 - حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية.

تمارين (30)

إبحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية:

1- $F(x) = 5$

2- $F(x) = 3\,x - 2\,x^3$

3- $F(x) = 2x^2 + 3\,x - 5$

4- $F(x) = x^4 - 2\,x^2 + 5$

5- $F(x) = \dfrac{x^3 + 5}{2\,x + 3}$

6- $F(x) = \dfrac{2\,x^3}{x^2 + 1}$

7- $F(x) = x^5\,(2\,x^2 + 1)$

8- $F(x) = x^5 - 5^{-x}$

9- $F(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8\,x}$

10- $F(x) = \left(\dfrac{2\,x}{5} + \dfrac{5}{2\,x}\right)^2$

11- $F(x) = \dfrac{|x^3|}{x}\ ,\ x \neq 0$

12- $F(x) = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^3 + \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^3$

13- $F(x) = \frac{x^3}{\cos x}$

14- $F(x) = x^5 \sin^2 x$

15- $F(x) = \cot^2 x - \tan^2 x$

أوجد المدى وعين نوع كل من الدوال الآتية من حيث الفردية والزوجية:

1- $F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & , x > 0 \\ \frac{3}{2} & , x > 0 \end{cases}$

2- $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 3) & , x > 0 \\ \frac{1}{2}(x + 3) & , x < 0 \end{cases}$

3- $F(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x > 0 \\ x^3 - 1 & , x > 0 \end{cases}$

4- $F(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & , x < -1 \\ -(x - 1)^2 & , x > 1 \end{cases}$

5- $F(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 & , 0 > x \geq -3 \\ (x - 3)^2 & , -3 \geq x > 0 \end{cases}$

النهـــــايات . Limits

مثال تمهيدى

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 0}^{(1)} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

الحـــــل :

نلاحظ أن قيمة الدلة = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذه كمية غير معرفة لذلك لنجأ إلى طريقة الاقتراب من على يمين النقطة 0 = x وليكن من عند 1 = x ونستمر فى الاقتراب قربا كافيا من النقطة 0 = x ونوجد قيمة الدالة $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ فى كل حالة، وكذلك من علىأ سار النقطة 0 = x وليكن من عند 1- = x ونستمر فى» لاقتراب قربا كافيا من النقطة 0 = x.ويوضح ذلك الجدولين الآتيين:-

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.8417
0.90	0.8704
0.80	0.8967
0.70	0.9203
0.60	0.9411
0.50	0.9586
0.40	0.9736
0.30	0.9851
0.20	0.9934
0.10	0.99983
0.010	0.9999

x	$\frac{\sin x}{x}$
-1	0.8417
-0.90	0.8704
-0.880	0.8967
-0.70	0.9203
-0.60	0.9411
-0.50	0.9586
-0.40	0.9736
-0.30	0.9851
-0.20	0.9934
-0.10	0.99983
-0.01	0.9999

(1) القيمة النهائية للدالة.

نجد أن قيمة الدالة تقترب من الواحد الصحيح فى حالتى الاقتراب من يمين ويسار النقطة 0 = وهذا واضح فى نهايتى الجدولين السابقين.

فعندما تقترب قيمة الدالة من الواحد الصحيح من ناحية اليمين أى من على يمين 0 = x تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة + فوق 0 على الصورة 0^+ لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليمين.

وعندما تقترب قيمة الدالة أيضا من الواحد الصحيح من ناحية اليسار أى من على يسار النقطة 0 = تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة − فوق 0 على الصورة 0^- لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليسار.

وعندما تتساوى قيمة النهايتين أى أن:

قيمة النهاية من ناحية يمين النقطة = قيمة النهاية من ناحية يسار النقطة تكتب النهاية بدون إشارة لنقطة الاقتراب هكذا:-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

وفى هذه الحالة يكون:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

نظريات فى النهايات:

نقدم بعض النظريات الهامة للطالب فى هذه المرحلة بدون برهان لها مع أمثلة توضحية مختلفة تطبيقا على النظريات تساعد الطالب على الاستيعاب والفهم.

نظرية (1) :

إذا كان m , a , b جزء من الأعداد الحقيقية فإن:

$$\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$$

حالات خاصة:

I $\quad \lim_{x \to a} x = a \quad , \qquad m = a \ , \ b = 0$

II $\quad \lim_{x \to a} x = a \quad , \qquad m = a$

مثال 1 :

أوجد:

$$\lim_{x \to 2} 2x + 5$$

الحـــل:

$$\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 2(2) + 5$$

$$= 9$$

مثال 2 :

أوجد :

$$\lim_{x \to 2} x \quad , \quad \lim_{x \to 2} 5$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to 2} x = 2$$

$$\lim_{x \to 2} 5 = 2$$

نظريـــة 2 :

إذا كانت كل من النهايتين $\lim_{x \to a} G(x)$, $\lim_{x \to a} F(x)$

موجودة فإن :-

$$\text{I - } \lim_{x \to a} [F(x) \pm G(x)] = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right] \pm \left[\lim_{x \to a} G(x)\right]$$

$$\text{II - } \lim_{x \to a} K.\,F(x) = K \lim_{x \to a} F(x)$$

حيث K ثابت

$$\text{II - } \lim_{x \to a} F(x)\,.\,G(x) = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right]\left[\lim_{x \to a} G(x)\right]$$

$$\text{IV- } \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim_{x \to a} F(x)}{\lim_{x \to a} G(x)} \quad , \quad \lim_{x \to a} G(x) \neq 0$$

نظريـــة 3 :

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} G(x)$ موجودة , n عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{x \to a} [G(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} G(x)\right]^n$$

مثـــــال 3 :

أوجـــد :-

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x + 1)$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to 3} (x^2 + 2x + 1) = \left[\lim_{x \to 3} x\right]^2 + \left[2\lim_{x \to 3} x\right] + \left[\lim_{x \to 3} 1\right]$$

$$= [3]^2 + [2(3)] + [1]$$
$$= 9 + 6 + 1$$
$$= 16$$

مثـــــال 4 :

أوجـد: -

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 3x)(x + 1)^2}{(x^2 - 5)}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 3x)(x + 1)^2}{(x^2 - 5)} = \frac{\left[\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x)\right]\left[\lim_{x \to 1} (x+1)^2\right]}{\left[\lim_{x \to 1} (x^2 - 5)\right]}$$

$$= \frac{\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 3\left(\lim_{x\to 1} x\right)\right]\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right) + \left(\lim_{x\to 1} 1\right)\right]^2}{\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right) - \left(\lim_{x\to 1} 5\right)\right]}$$

$$= \frac{[1 + 3(1)]\,[1 + 1]}{[1 - 5]}$$

$$= \frac{[4]\,.\,[2]}{[-4]} = -2$$

نظرية 4 :

إذا كان a عددا حقيقيا ، r عددا نسبيا (قياسيا) بحيث أن a^r معرف كعدد حقيقى فإن:

$$\lim_{x\to a} x^r = a^r$$

مثـــال 5 :

أوجـــد :-

$$\lim_{x\to 3} x^{0.2} = 3^{0.2}$$

نظريـــة 5 :

إذا كان n , m عددان صحيحان موجبين فإن :-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m}(a)^{n-m}$$

مثـــال 6 :

أوجـــد:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \frac{4}{1}(2)^{4-1}$$

$$= 4\,(2)^3$$
$$= 32$$

نظرية 6 :

إذا كان a عدد حقيقي و r عدداً نسبيا وكانت G(x) دالة وأن $\lim\limits_{x\to a} G(x)$ موجودة وأن $[\lim\ G(x)]^2$ معرف كعدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x\to a} G^r(x) = \left[\lim_{x\to a} G(x)\right]^r$$

مثال 7 :

أوجد :

$$\lim_{y\to 1} \sqrt{5 - 3y - y^2}$$

الحل :

$$\lim_{y\to 1} \sqrt{5 - 3y - y^2} = \left[\lim_{y\to 1} 5 - 3 \lim_{y\to 1} y - \left(\lim_{y\to 1} y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [5 \quad - 3 \quad -1]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

أمثلة منوعة :

مثال 1 :

أوجـد :

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

الحــــل :

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x + 1)(3x - 2)}{(x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} (3x - 2)$$

$$= (3(-1) - 2$$

$$= -5$$

مثـــال 2 :

أوجــد :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}$$

الحــل :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{x^3 - x^3}{x - 5}$$

$$= \frac{3}{1} (5)^{3-1}$$

$$= 75$$

مثـــال 3 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x^2 - 3^2} = \frac{3}{2}(3)^{2-1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

مثـــال 4 :

أوجـــد:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

الحـــل :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1^5}{x^3 - 1^3} =$$

$$= \frac{5}{4}(-3)^{5-4}$$

$$= -\frac{15}{4}$$

مثـــال 6 :

أوجـــد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{x^2 + 6x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x + 6$$

$$= 6$$

حل آخـــــر :

يمكن تطبيق نظرية 5 وذلك بإضافة 3 + , 3- فى المقام كالآتى:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{x + 3 - 3}$$

أيضا $x \to 0$

بإضافة 3 + فى الطرفين تصبح كالآتى:

$x + 3 \to 3$

وبذلك توضع الدالة بنفس صيغة النظرية وتصبح كالآتى:

$$\lim_{x+3\to 3} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{(x+3) - 3} = \frac{2}{1}(3)^{2-1}$$

$$= 6$$

مثـــال 7 :

أوجــــد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

الحــــل :

بضرب الدالة فى مرافق البسط لتصبح:-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+3) - 3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

وعلى الطالب حل المثال بإستخدام نظرية 5 بنفس طريقة حل المثال السابق.

مثـــال 8 :

أوجــــد :

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

الحل:

بضرب الدالة فى مرافق البسط لتصبح :

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{5}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

مثـــال 9 :

أوجـــد :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x - 2}$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x - 2} = \lim_{x-2\to 0} \frac{\sin(x-2)}{x - 2}$$

$$=1$$

مثـــــال 10 :

أوجـــد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x}$$

$$= 3 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= 3\,(1)$$

مثـــال 11 :

أوجـــد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\lim_{y\to 0} \cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{(1)}$$

$$=1$$

تمارين (31)

1- $\lim\limits_{x\to -2} 7$

2- $\lim\limits_{x\to -2} 3x$

3- $\lim\limits_{x\to \infty} 7$

4- $\lim\limits_{y\to 2} 2y$

5- $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x^3 - 2x - 1}$

6- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

7- $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{(y-1)(y-2)}{y + 1}$

8- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

9- $\lim\limits_{z\to 4} \dfrac{z^2 - 3z - 4}{z - 4}$

10- $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1/x + 1}{x + 5}$

11- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$

12- $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{t^3 + 8}{t + 2}$

13- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

14- $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^3 - 3t + 2}$

15- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

16- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

17- $\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y + 3}{y^2 - 9}$

18 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+8)^2}$

19 - $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7}$

20 - $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \dfrac{(2x + 3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$

21 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

22 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^7 - 128}$

23- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

24 - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{7x}$

25 - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x}$

26 - $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}{x^2}$

27 - $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 3x + 4}}$

28 - $\lim\limits_{x\to 1} (3x + \frac{2}{3}) \sqrt{x + 8}$

29 - $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

30 - $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{7}}{x - 3}$

31 - $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$

32 - $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(3x - 2)^2 - 4}{5x}$

33 - $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x^3 + 64}$

34 - $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1/x - 1/4}{4 - x}$

35 - $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \dfrac{(2x + 3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$

36 - $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 5}}{x + 1}$

37 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2}}$

38 - $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{6 + x} - 3}$

39 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}$

40 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$

41 - $\lim\limits_{e \to 0} \dfrac{(3 + e)^5 - 243}{5e}$

42 - $\lim\limits_{e \to 0} \dfrac{(2+3e)^8 - 256}{4e}$

للانهايـــــة :

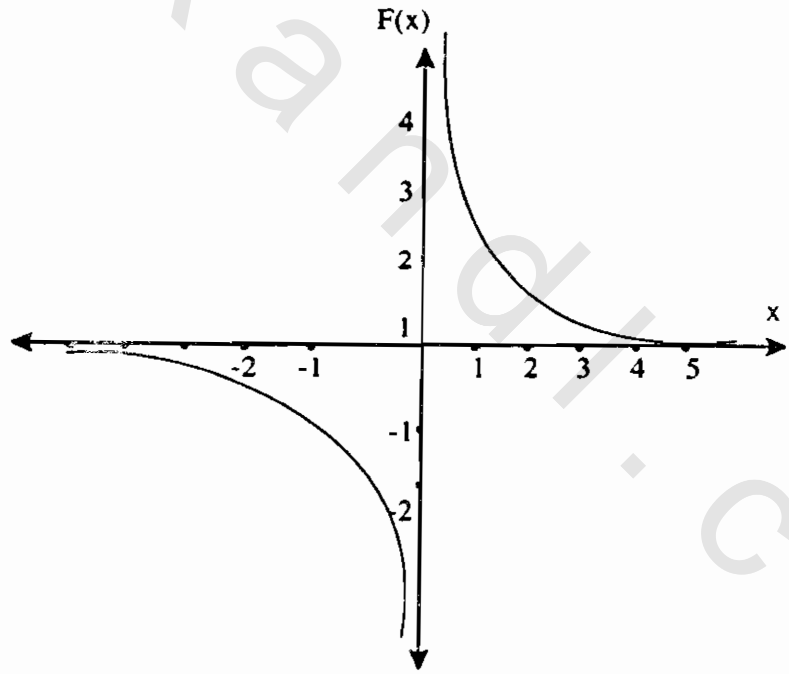
نعلم أن مجال الدالة $F(x) = \frac{1}{x}$

هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

ولعمل الرسم البيانى لها يتم عمل الجدول الآتى :-

x	1	22	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{61}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^6}$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	2	4	8	16	32	64	100	1000	10^6

واضح أن الدالة ← ∞ عندما $x \leftarrow 0$ ، كما أن الداله فردية (تستخدم نقطة الأصل فى رسمها فى الربع الثالث (شكل 87).



شكل 87

ويتضح من الرسم البيانى الآتى:-

(أ) تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر عندما تقترب x من اللانهاية الموجبه أو اللانهاية السالبة (∞ + أو ∞-)

(ب) تقترب $\frac{1}{x}$ من ∞ + عندما تقترب x من الصفر عبر القيم الموجبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليمين)

(جـ) تقترب $\frac{1}{x}$ من ∞- عندما تقترب x من الصفر عبر القيم السالبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليسار).

ملحوظــــــــة :

يستعمل أحيانا فى الرياضيات المتقدمة منظومة جديدة تتكون من الأعداد الحقيقية والعنصرين الاضافيين ∞ + , ∞- وتسمى هذه المنظومة منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة وسوف يستبعد فى هذا الكتاب إستعمال منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة كما نتجنب القسمة على الصفر للحفاظ على القوانين العادية للحساب والجبر.

تعريـــــــف:

إذا كانت الدالة F(x) معرفة للقيم الكبيرة لـ x فيقال أن F(x) تقترب من العدد الحقيقى L كنهاية لها عندما تقترب x من اللانهاية وكتب بهذه الصورة:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = L$$

علما بأن النظريات المستخدمة فى اللانهاية حول نهايات المجموع والفرق

والنسبة مماثلة للنظريات المقابلة للنهايات عندما $x \to a$.

نظريـــة 1 :

إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} G(x) = L_2$$

حيث L_1 , L_2 عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) \pm G(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) . G(x) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{L_1}{L_2} , \quad L_2 \neq 0$$

نظريـــة 2 :

إذا كان :-

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \to \infty$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) = G(x)) = \infty$$

نــظرية 3 :

إذا كان :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \to \infty$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) = G(x)) = 0$$

وسوف نقتصر فى دراستنا على الأمثلة التوضيحية الهامة فقط التى تهم الطالب فى هذه المرحلة.

مثال 1 :

أوجد قيمـــة :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

الحـــــل :

x	1	10	100	1000	10^4	10^5	10^6
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$

نلاحظ من الجدول أنه كلما إقتربت x من اللانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

يتم عمل جدول فيه $x \to -\infty$

x	-1	-10	-100	-1000	-10^4	-10^5	-10^6
$\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}

نلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت x من سالب مالانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من

الصفر أى أن :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مثال 2 :

أوجـد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$$

الحـــل :

$$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} \right)^n = 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$$

مثـــال 3:

أوجد قيم النهايات الآتية:-

(a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x + 5}{6x - 8}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{3x+5}{6x-8}}$

الحـــــل :

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8}$

بقسمة البسط والمقام على x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5\left(\frac{1}{x}\right)}{6x-8\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3+5 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} 6-8 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{3+5(0)}{6-8(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{المقدار} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt{x^2+4x}+x}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x\left(\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{x}\right)} + 1\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظـــــة :

تم الضرب فى المرافق كأسلوب جبرى للحل عندما تكون قيمة النهاية ∞ - ∞

مثـــــال 4 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$$

الحـــــل :

يتم ضرب المقدار فى المرافق.

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{x}\right)} + 1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظـــــة:

تم الضرب فى المرافق كأسلوب جبرى للحل عندما تكـون قيمة النهاية تساوى$\infty - \infty$

مثـــــال 5 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

الحـــــل:

بالتعويض المباشر تكون النتيجة $\infty - \infty$ وهى كمية غير معنية باستخدام تحليل فرق بين معكبين

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\therefore A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(A^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{A}\ \sqrt[3]{B} + B^{\frac{2}{3}})$$

مع التعويض عن :

$$A = x + 1$$

$$B = x$$

$$\therefore \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}\ \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 0$$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$

بالقسمة على x^2 لكل من البسط والمقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{4(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x^2})}{6 - 8(\frac{1}{x^3})}$$

$$= \frac{4 \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x}) - (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x})^2}{\lim\limits_{x\to\infty} 6 - 8 (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x})^3}$$

$$= \frac{4(0) - 0}{6 - 0}$$

$$= 0$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x + 5}{6x - 8}}$

بإدخال النهاية داخل الجذر التكعيبى وقسمة البسط والمقام على x

$$\text{المقدار} = \sqrt[3]{\frac{3 + 5 \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x})}{6 - 8 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}}$$

قاعدة عامـــــــــة :

في النهايات التي يقترب فيها المتغير من اللانهاية يتم قسمة البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير (أكبر أس للمتغير).

مثـــــال 6 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x)$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\sin x \geq -1$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin x$$ كمية غير محددة

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x) = \infty$$

مثـــــال 7 : أوجد قيمة :-

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$$

الحـــــل :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

تمارين (32)

أوجد النهايات الآتية :-

1- $\lim\limits_{x \to \infty} 7$

2- $\lim\limits_{x \to \infty} (-3)$

3- $\lim\limits_{x \to \infty} (-2h)$

4- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + n^2}{n}$

5- $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$

6- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)}{x^3}$

7- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

8- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$

9- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5 + 14}{17 + 7x + 4x^2}$

10- $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 5}{5x^3 + 4x - 8}$$

11- $$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + 2)(x - 1) x + 1)}{(1 - 2x)(1 + x)}$$

12- $$\lim_{x \to \infty} \frac{7(2)^x + 5(3)^x}{4(3)^x + 2^x}$$

13- $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}\left[1 + 4 + 7 + \dots + (3x - 2)\right]$$

14- $$\lim_{x \to \infty} \frac{5 + 9 + 13 + \dots + (4x - 78)}{1 + 3 + 5 + \dots + (4x - 3)}$$

15 إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & , \ x \leq 3 \\ 3x - 7 & , \ x > 3 \end{cases}$$

أوجـــــد :

(a) $\lim_{x \to 3^-} F(x)$

(b) $\lim_{x \to 3^+} F(x)$

(c) $\lim_{x \to 3} F(x)$

الدوال المستمرة :

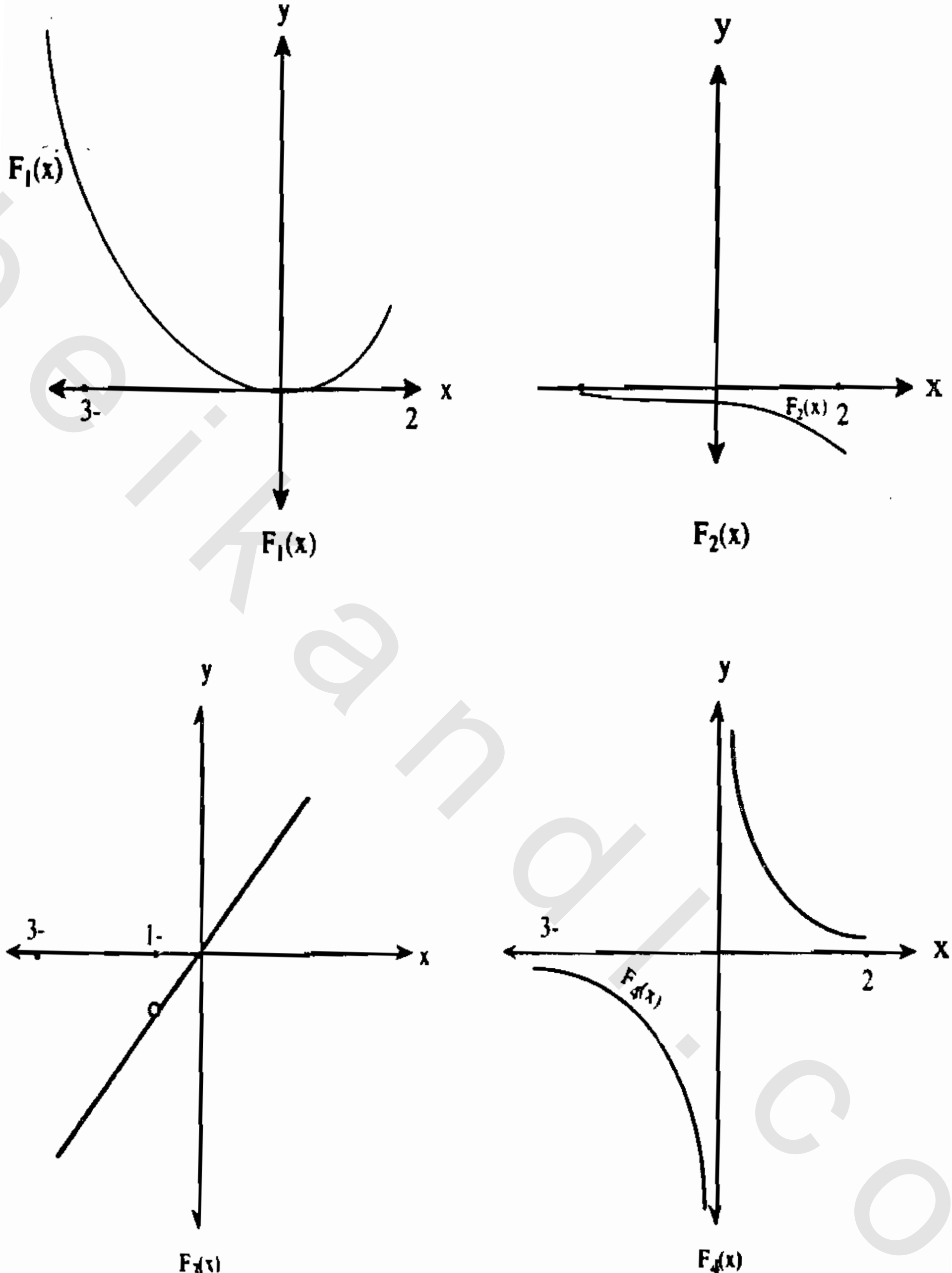
إن سلوك الاستمرار فى الدالة له صلة ببيانها ولذلك نعتبر الآتى للتوضيح والذى يوضحه شكل 88 .

$$F_1(x) = \left\{ (x,y) \ : y = x^2 , x \in [-3 , 2] \right\}$$

$$F_2(x) = \left\{ (x,y) \ : y = \frac{1}{x - 3} , x \in [-3 , 2] \right\}$$

$$F_3(x) = \left| (x,y) \ : y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x \in [-3 , 2 \\ -1 & , x = -1 \end{cases} \right|$$

$$F_4(x) = \left| (x,y) \ : y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \ x \in [-3 , 2 - \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \right|$$



شكل 88

من الملاحظ أن الدوال الأربعة معرفة على الفترة [2 , 3-] كما يمكن رسم منحنى الدالتين $F_1(x)$, $F_2(x)$ دون الحاجة لرفع القلم من الصفحة أى بحركة متصلة للقلم ولذلك تسمى هذه الدوال متصلة.

أما الدالة رقم (3) $F_3(x)$ تعبر عن خط مستقيم به، ما يسمى (ثغرة) عند $x = -1$ حيث قيمة الدالة عندها يساوى -1 . وبذلك لا يمكن أن يتحرك القلم حركة متصلة عند $x = -1$ فى بيان الدالة.

ولكن إذا عرفنا دالة R كالآتى:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & , \quad x \neq 1 \\ -2 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

لجميع قيم x فى الفترة [2 ,3-] تعبر عن دالة متصلة يمثلها خط مستقيم متصل بدون إنقطاع فى الفترة المذكورة.

أما الدالة رقم (4) $F_4(x)$ لا يمكن رسمها بحركة متصلة بالقلم على ورقة الرسم لوجود ما يسمى (قفزة أو وثبة) عنده $x = o$.

وعلى ذلك تكون $F_1(x)$, $F_2(x)$ مثالين للدوال المستمرة.

، $F_3(x)$, $F_4(x)$ يمثلا دوال غير مستمرة.

وبدراسة الدوال السابقة نلاحظ على الدوال الغير مستمرة ما يلي:-

عند النقطة $x = c$ التى فى نطاق الدالة F وتكون عندها الدالة F غير مستمرة إما أن تكون :-

I $\lim\limits_{x \to c} F(x)$ غير معرفة

أو

II غير معرفة $\lim_{x\to c} F(x)$

فمثلا $F_3(x)$ عند $x = -1$ نجد أن :-

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} x - 1 = -2$$

$, F_3(-1) = -1$

أي أن :

$$\lim_{x\to -1} F_3(x) \neq F_3(-1)$$

بمعنى أن قيمة النهاية لا تساوى قيمة الدالة عند $x = -1$ وكذلك $F_4(x)$ عند $x = 0$ نجد أن

$$\lim_{x\to 0^+} F_4(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

,

$$\lim_{x\to 0^-} F_4(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أي أن :

$$\lim_{x\to 0^-} F_4(x) = \neq \lim_{x\to 0^+} F_4(x)$$

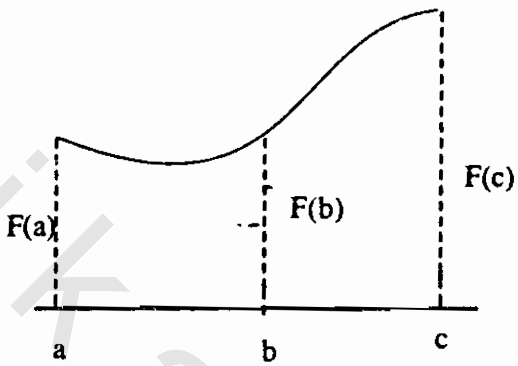
بمعنى أن قيمة النهاية غير معرفة عند $x = 0$.

أما بالنسبة للدوال المستمرة عند أي نقطة c في نطاقها أن :-

$$\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$$

وبوجه عام فإن استمرارية الدالة F(x) عند c داخل مجال (نطاق) F يعنى استمرارها من الجهتين.

أما إذا كانت c هى إحدى نهايتى النطاق فإن استمرار الدالة عندها يعنى استمرارها من جهة واحدة. شكل 89.



شكل 89

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c)$$

$$\lim_{x \to a^{+}} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \to a^{-}} F(x) = F(a)$$

أى أن الدالة مستمرة عند كل من a , b وجميع النقط الواقعة بينهما.

مثــــال 1 :

إبحث إستمرار الدوال أو عدمه عند النقط المبينة:

(a) $F(x) = x^3 + 5x + 2$ at x = ٤

(b) $F(x) = \sqrt{x + 1}$ at $x = 3$, $x = -1$

(c) $F(x) = \sqrt[3]{4 - x}$ at $x = 5$

(d) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} & \text{at } x \neq 3 \\ 4 & \text{at } x = 3 \end{cases}$

at $x = 3$

(e) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 3} & \text{at } x \neq 1 \\ 4 & \text{at } x = 1 \end{cases}$

at $x = 1$

الحـــــل :

(a) $F(1) = 1 + 5 + 2 = 8$

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} x^3 + 5x + 2 = 8$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} F(x) = F(1)$$

∴ الدالة $F(x)$ متصلة (مستمرة) عند $1 =$

(b) $F(x) = \sqrt{x + 1}$

D_F: $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x \in [-1, \infty)$

I- at $x = 3$:

$F(3) = \sqrt{3 + 1} = 2$

$$\lim_{x\to 3} F(x) = \lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$$

∴ الدالة F(x) (مستمرة) عند x = 3

II- at x -1 :

$$F(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$$

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0$$

∴ الدالة F(x) متصلة (مستمرة) عند ‎-1‎ = من جهة اليمين فقط وهى

غير معرفة من جهة اليسار.

(c) $F(x) = \sqrt[3]{4-x}$

$$F(5) = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 5} F(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt[3]{-1} = -1$$

$\lim_{x\to 3} F(x) = \neq F(3)$ وحيث أن

∴ الدالة غير مستمرة عند x = 3

(e) $$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(2x+7)(x-1)}{3(x-1)} = 3$$

$$F(1) = \frac{(2+7)(1)}{3} = 3$$

∴ الدالة مستمرة عند x = 1

مثال 2 :

أوجد قيمة k التى تجعل الدالة $F(x)$ المعرفة بالعلاقة :

$$F(x)\begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ k\,x & , x \geq 2 \end{cases}$$

مستمرة عند $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2^+} k\,x = 2\,k$$

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

ولكى تكون الدالة مستمرة عند $x = 2$ يكون :

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} F(x)$$

$$\therefore 4 = 2\,k$$

$$k = 2$$

مثـــال 3 :

أزل عدم الاستمرار إن أمكن للدالة المعرفة كالآتى:-

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,(x-1)\,(x+2)}{(x-1)\,(x+2)} & , x \neq 1 \; , x \neq 2 \\ 1 & x = 1 \\ -2 & x = -2 \end{cases}$$

الحـــل :

نختبر استمرار الداله عند $x = 1$

$F(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 1$$

وحيث أن نهاية الدالة تساوى قيمة الدالة عند $x = 1$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 1$

نختبر استمرار الدالة عند $x = -2$

$F(-2) = -2$

$$\lim_{x \to -2} F(x) = \lim_{x \to -2} x^2 = 4$$

أي أن الدالة غير مستمرة عند $-2 =$

ويمكن إعادة التعريف لكى تكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة فيجب أن

يكون :-

$$F(-2) = \lim_{x \to -1} F(x) = 4$$

بالتعريف الآتى:-

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} & , x \neq 1 , x \neq -2 \\ 1 & (x = 1 \text{ عند}) \\ 4 & (x = -2 \text{ عند}) \end{array}\right.$$

تمارين (33)

١- ابحث إتصال الدالة F عند النقطة المعطاه

a) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3} & \to \text{at } x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6 & \to \text{at } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

عند $x = \dfrac{3}{2}$

a) $F(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \to \text{at } x \leq 1 \\ 5x & \to \text{at } x > 1 \end{cases}$

عند $x = 1$

c) $F(x) = \begin{cases} x^2 & \to \text{at } x \leq 0 \\ x & \to \text{at } x > 1 \end{cases}$

عند $x = 0$

2 – أوجد قيمة h التى تجعل الداله F(x) مستمرة عند $x = 1$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \to \text{at } x \neq 1 \\ h & \to \text{at } x = 1 \end{cases}$$

3 - إذا كانت الداله F(x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 5}{|x - 5|} & \rightarrow \text{at } x \neq 5 \\ 3 & \rightarrow \text{at } = 5 \end{cases}$$

فأبحث استمرارية الداله F(x) عند النقطة x = 5

4- إذا كانت الداله (x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 1} & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 2k - 1 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التى تجعل F(x) متصلة عند x = 1

5- أوجد قيمة h التى تجعل F(x) دالة متصلة عند x = 1

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + h & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

6 - إذا كانت الداله F(x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{5x - 3\sin x}{2x} & \rightarrow \text{at } x \neq o \\ 3k - 2 & \rightarrow \text{at } x = o \end{cases}$$

ما هى قيمة k التى تجعل الداله $F(x)$ متصلة عند $x = o$

7 - إذا كانت الداله $F(x)$ معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} 2kx & \rightarrow \text{at } x \geq 3 \\ x^2 + 1 & \rightarrow \text{at } x < 3 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التى تجعل $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$ موجودة

8 - إدرس استمرار الدوال الآتيه خلال مجال كل منها :

$$\text{(a)} \quad F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \rightarrow x \neq -3 \\ 3 & \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

9 - أزل عدم الاتصال فى الدوال الآتية:-

$$\text{(a)} \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \rightarrow x \neq -1 \\ 2 & \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} & \rightarrow x \neq 1 , x \neq -1 \\ 1 & \rightarrow x = -1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

10 - أوجد قيمة h التى تجعل الداله F(x) معرفة :-

(a) $$F(x) = \begin{cases} h^2 + 1 & \rightarrow x \leq 1 \\ 2 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} h\,x & \rightarrow x \leq 1 \\ 6 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$