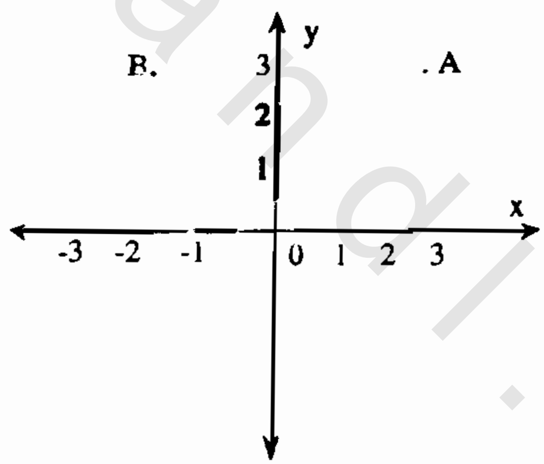
الباب الثانى

الهندسة التحليلية

نظم المحاور الكارتيزيه :

تتحدد المحاور الكارتيزيه كما بشكل (31) من خط رأسى وخط أفقى يقسمان المستوى (ورقة الرسم) إلى أربعة أرباع. وتسمى نقطة تقاطع الخطين بنقطة الأصل ويرمز لها بالرمز "0" ويسمى الخط الأفقى بالمحور x والخط الرأسى بالمحور Y. ويدرج المحورين بوحدات مناسبة فتكون الوحدات على يمين ويسار نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور x ، والوحدات أعلى وأسفل نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور Y.

وتتحدد أىّ نقطة فى هذا المستوى فى صورة أزواج من الأعداد الحقيقية وتكتب على الصورة (x , y) مثل A (2, 3) أو B (-2, 3) حيث يسمى العدد الأول بالإحداثى x والعدد الثانى بالإحداثى Y.



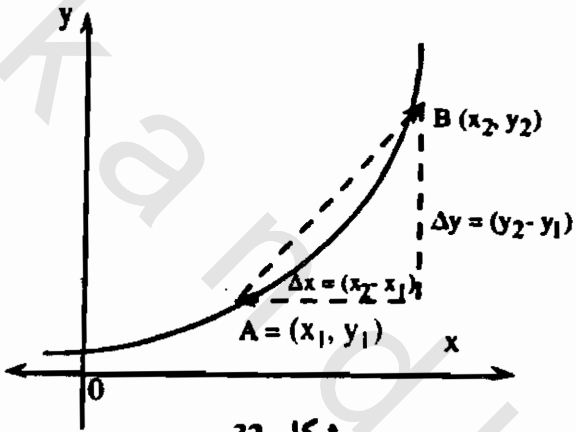
شكل 31

البعد بين نقطتين :

بأخذ محورين متعامدين بمثلا المحاور الكارتيزيه x - y ، وباستعمال وحدة قياسى مناسبة مدرجة عليهما يمكن تحديد الوضع الابتدائى والوضع النهائى لأى نقطة فى هذا المستوى (شكل 32).

فإذا كان الوضع الابتدائى لنقطة هو : $A\ (x_1, y_1)$

وكان الوضع النهائى لهذه النقطة هو : $B\ (x_2\ ,\ y_2)$



شكل 32

إن مقدار التغير فى اتجاه المحور x ويرمز له بـ Δx هو :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ومقدار التغير فى اتجاه المحور Y ويرمز له بـ Δy هو :

$$\Delta y = y_2 - Y_1$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورث يمكن إيجاد البعد بين النقطتين $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta(x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

مثال 1 :

إذا كانت النقطة $A\ (-1, 2)$, $B\ (2, -2)$ أوجد البعد بينهما

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - (-1) = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -2 - 2 = -4$$

∴ المسافه بين النقطتين والمعبر عنها بالطول $\overline{AB}$ هى:

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

مثـــال 2 :

إذا تحركت نقطة وضعها الابتدائى هو $A\ (-2, 3)$ وكأن التغير , $\Delta x = 5$

$\Delta y = -6$ فما هو موضعها الجديد ؟

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\therefore x_2 = \Delta x + x_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

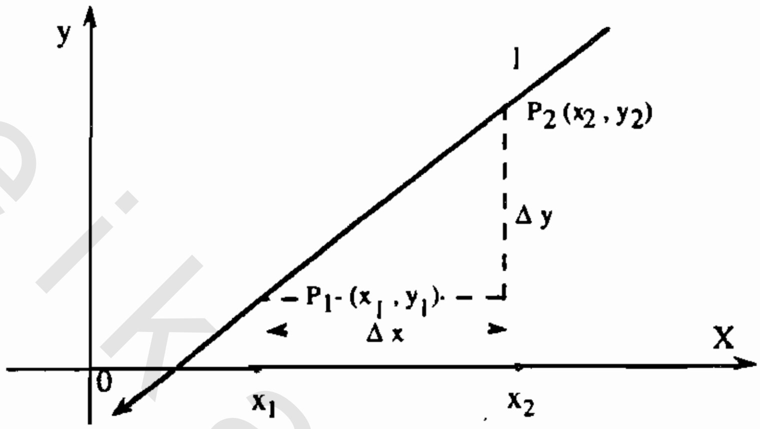
$$y_2 = \Delta y + y_1 = -3$$

∴الموضع الجديد للنقطة هو :

$B\ (3\ ,\ -\ 3)$

ميل الخط المستقيم :

النقطتين $P_1(x_1 , y_1)$ ، $P_2(x_2 , y_2)$ يمر بهما المستقيم l شكل 33



شكل 33

نجد من الشكل أن :-

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

ويعرف ميل الخط المستقيم والذى يرمز له بـ m كالآتى:

$$m = \frac{\text{التغير فى الاتجاه الرأسى}}{\text{التغير المقابل فى الاتجاه الأفقى}}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

مثـــال 3 :

إذا كانت $P_1(1,2)$, $P_2(3,8)$ نقطتين أوجد ميل المستقيم المار بهما.

الحل :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثـــــال 4 :

فى أى نقطة يقطع المستقيم 1 فى المثال 3 المحور x.

الحـــــل :

نفرض أن نقطة التقاطع هى $P_3\ (x_3\ ,\ 0)$

وبما أن $P_2\ (1,\ 2)$ تقع على المستقيم.

$$\therefore \Delta x = \frac{1}{3} \Delta y$$

$$= \frac{1}{3} (2 - 0) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 1 - x_3$$

$$\therefore x_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P_3 \left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$$

حالات ميل الخط المستقيم:

يعرف الميل أيضا بأنه ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الجزء الموجب للمحور x. أى أن :

$$m = \tan \phi$$

وعلى ذلك يوجد أربع حالات لميل الخط المستقيم ، شكل 34 :

1 - الحالة الأولى:

إذا كان المستقيم يميل فى قسمه العلوى نحو اليمين كما فى شكل (4 - a). حيث تزيد Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $0^\circ < \phi < 90^\circ$

ويكون $\tan \phi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ موجباً.

2- الحالة الثانية :

يكون المستقيم فى جزئه الأسفل ناحية اليمين كما فى شكل (b - 4) حيث تقل Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $90^\circ < \phi < 180^\circ$

ويكون $\tan \phi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ سالبا

3- الحالة الثالثة :

يكون المستقيم فيها أفقيا كما فى شكل (c - 4). حيث $\Delta y = 0$ مهما كانت قيمه Δx وبالتالى تكون $\phi = \theta^\circ$

حيث :

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

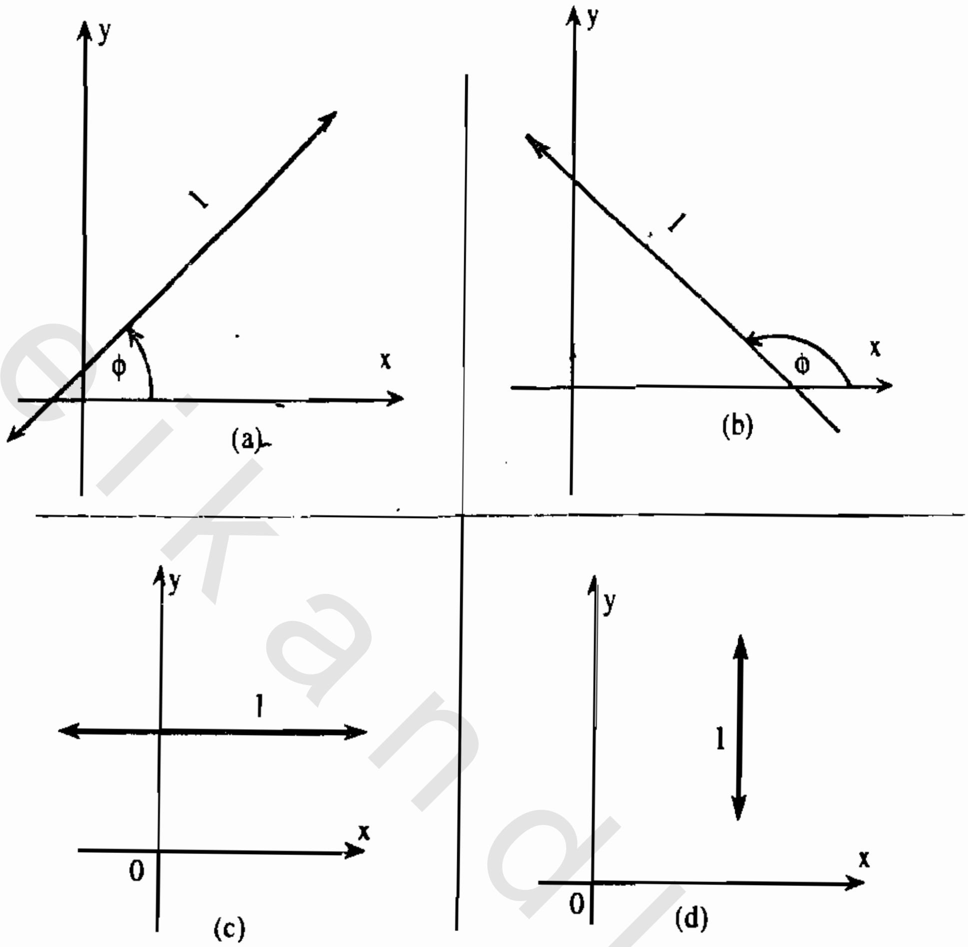
4- الحالة الرابعة :

يكون المستقيم فيها رأسيا حيث تكون $\Delta x = 0$ مهما كانت قيمة Δy

وبالتالى فإن (شكل d - 4) :-

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{كمية غير معرفه}$$

$$\therefore \quad \phi = 90^\circ$$



شكل 34

المستقيمان المتوازيان :

يتوازى المستقيمان إذا ساوى ميل كل منهما الآخر.

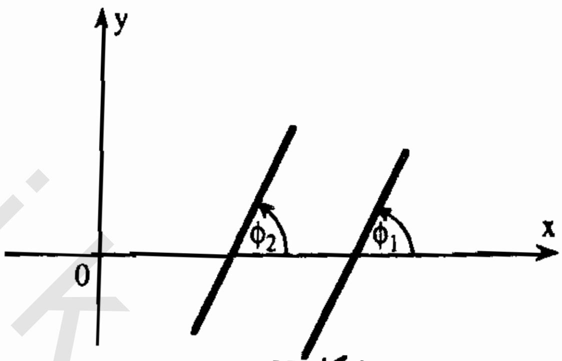
أى أن :

$$m_1 = m_2$$

$\tan \phi_1 = \tan \phi_2$

$\therefore \phi_1 = \phi_2$

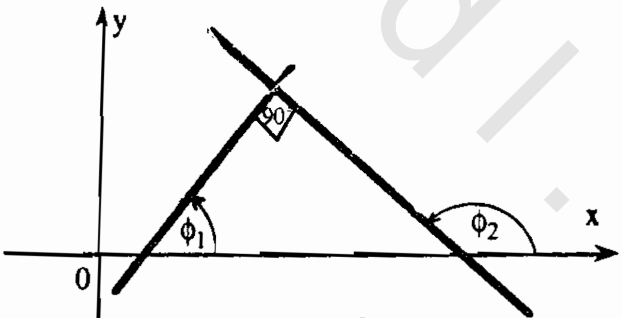
أى تتساوى زواياهما مع الجزء الموجب للمحور x كما فى شكل (35).



شكل 35

المستقيمان المتعامدان :

ويوضحها شكل (36)



شكل 36

حيث نرى من الشكل أن :-

$\phi_2 = 90^\circ + \phi_1$

$$\tan \phi_2 = \tan (90^\circ + \phi_1)$$

$$= - \operatorname{cat} \phi_1$$

$$\therefore \tan \phi_2 = - \frac{1}{\tan \phi_1}$$

$$\therefore m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

حيث يكون شرط التعامد هو :-

$$m_2 . m_1 = - 1 \qquad (3)$$

تمار يــــــــــن (14)

1- ضع النقاط الآتية على المحاور الكارتيزية ثم أوجد ميل المستقيم المار بهما - B, A فى كل حالة - وأيضا ميل العمودى عليه :-

A	5,0	0,0	0,0	0,3	2,-1	-1,2
B	0,1	0,5	5,0	2,-3	-2,1	-2,-1

2- ضع النقاط الآتيه على المحاور الكارتيزيه وبين الحالات التى يكون فيها الشكل ABCD متوازى أضلاع والحالات التى يكون فيها الشكل مربع أو مستطيل :-.

A	-1,0	-2,2	3,1	0,1
B	0,-1	1,3	2,2	1,2
C	0,-1	1,3	2,2	2,1
D	0,2	-1,-1	1,0	1,0

3 - لدينا النقاط (1- ,0) A ,(4, 0) B ,(3, 4) C بين أن ABC مثلث قائم الزاويه وأوجد مركز الدائرة المارة برؤوسه ونصف قطرها.

4- لتكن $P_1\ (x_1, y_1)$. و $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$ أوجد منتصف P_1P_2.

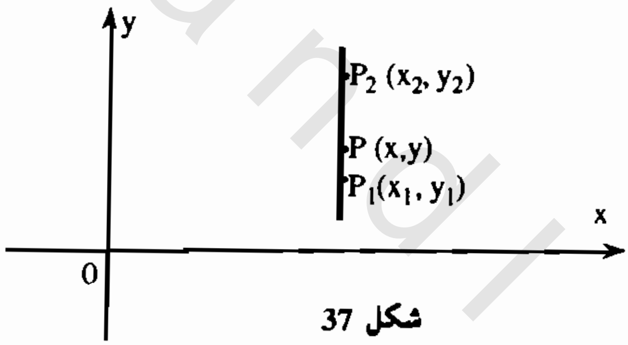
معادلات الخط المستقيم:

نفترض المستقيم I يمر بالنقطتين $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ والمطلوب ربط الاحداثى x بالاحداثى y فى النقطة $P\ (x, y)$ الواقعة على المستقيم. وعلى ذلك يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى :

$x_2 = x_1$ (شكل 37)

فى هذه الحالة يكون المستقيم l رأسياه ولجيمع نقاطه لا يتغير الأحداثى x (أى يكون ثابتا). وعلى هذا فإن $P\ (x, y)$ تقع على المستقيم إذا كان $x = x_1$، والأحداثى y يأخذ عدد لا نهائى من القيم.



شكل 37

الحالة الثانية :

$x_2 \neq x_1$ (شكل 38)

نعلم أن ميل المستقيم m هو :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وأن النقطة $P(x, y)$ تقع على المستقيم إذا انطبقت النقطة p على P_1 أو تساوى ميل pp_1 مع الميل P_1P_2 وفى هذه الحالة فإن:-

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (4)$$

وتسمى هذه المعادلة. معادلة الخط المستقيم بدلاله ميله ونقطه يمر بها $P_1(x_1, y_1)$ شكل a - 38 حيث m, x_1, y_1 ثوابت ، x, y متغيرين.

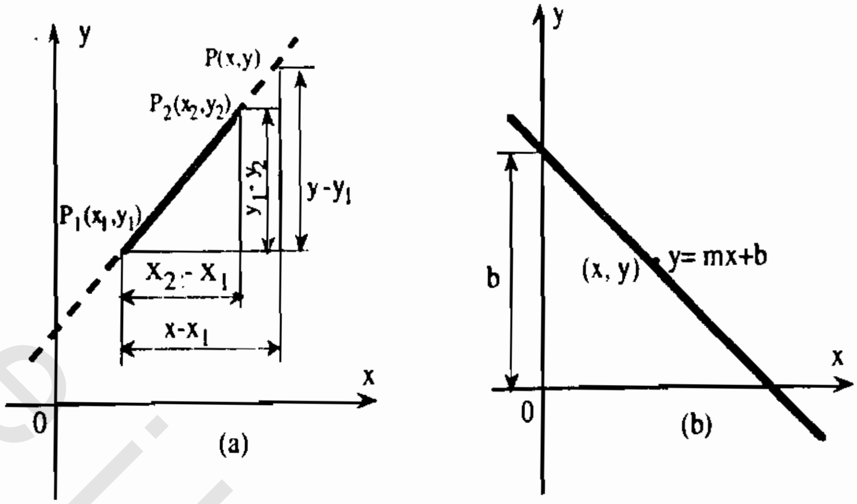
ومن الممكن كتابه المعادلة رقم (4) على الصورة :-

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

$$\therefore y = mx + b \qquad (5)$$

حيث $b = y_1 - mx_1$

عند وضع $x = 0$ تصبح قيمة $y = b$ وعلى ذلك تكون النقطه $(0, b)$ واقعة على المستقيم وتقطع المحور y عند b (طول الجزء المقطوع على المحور y يساوى b). ولذا تسمى هذه المعادلة بمعادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من المحور y (شكل b - 38).



شكل 38

مثال 1:

أوجد ميل المستقيم $y = 2x + 3$ وأيضا الجزء المقطوع من المحور y

الحـــــل :

بمقارنة معادلة المستقيم بالمعادلة رقم (5)

$\therefore m = 2$

$b = 3$ ،

$\therefore$ ميل المستقيم $= 2$

، الجزء المقطوع من المحور $y = 3$.

وبوجه عام يمكن وضع معادلة المستقيم على الصورة :

$$A x + By + C = 0 \qquad (6)$$

حيث A, B, C ثوابت .

ويكون أحد الثابتين A أو B على الأقل لا يساوى صفر فإذا كان :

1- $B = 0$

$\therefore Ax + c = 0$

$$\therefore \quad x = -\frac{C}{A} \qquad (7)$$

وتكون هذه المعادلة معادلة مستقيم رأسى.

2- $B \neq 0$

$\therefore By = -Ax - c$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (8)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة رقم (5) :-

$$\therefore m = \frac{-A}{B} \quad , \quad b = \frac{-C}{B}$$

وتعتبر المعادلة رقم (8) معادلة خطية من الدرجة الأولى.

طول العمود الساقط من النقطة $P_1 \ (x_1, \ y_1)$ على المستقيم $Ax + By + c = 0$

يرمز لطول هذا العمود بالرمز d ، يكون وفقا للصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

وسوف نكتفى بإستخدامها بدون إثبات لها.

مثال :

أوجد أبعاد النقط $A\ (-1, 0)$ ، $B(1,1)$, $C\ (-3, 5)$ من المستقيم $2x + 3y - 5 = 0$.

الحـــــل :

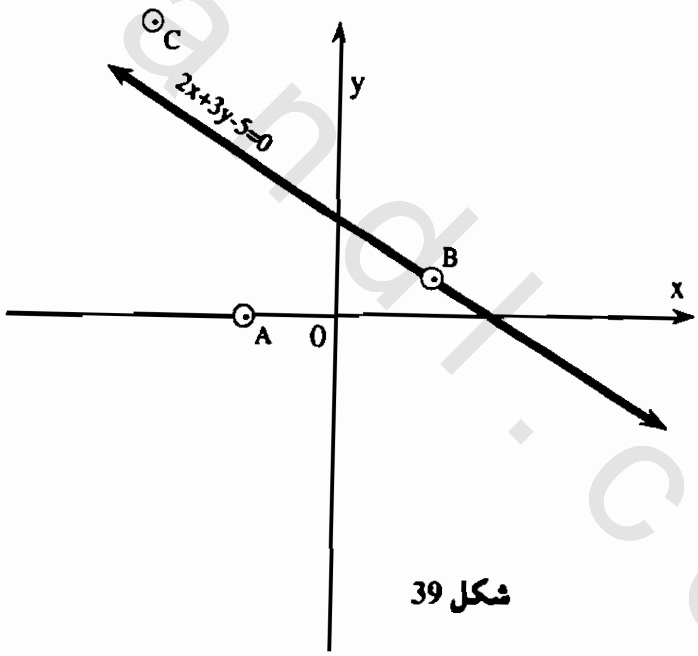
$$d_A = \frac{|2(-1) + 3\,(0) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$d_B = \frac{|2\,(1) + 3\,(1) - 5|}{\sqrt{13}} = 0$$

$$d_C = \frac{|2\,(-3) + 3\,(5) - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

فعنـد تعويض الاحداثيات فى $2x + 3y - 5$ وجدنا النتائج , 0 , 4 +

7 - وهذه النتائج تدلنا على أن النقطه A تحت L، عليه C, B فوقه (شكله 39).



شكل 39

تمارين (15)

1- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (1, 2) ويوازى المستقيم $x + 2y = 3$.

2- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (-2, 2) والعمودى على المستقيم $2x + y = 4$.

3- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (1, 4) وزاوية ميله تساوى 60°.

3- ما هى زاوية ميل المستقيم $2x + y = 4$.

5 - عين احداثى النقطة P (x, y) بحيث يكون ميل المستقيم l_1 المار بها وبنقطة الأصل مساويا2 + ويكون المستقيم L_2 المار بالنقطة A (-1, 0) وبالنقطة P (x, y) مساويا 1 +.

6- إثبت أن C (-2, 8), B (-2, 2), A (6, 2) هى رؤوس لمثلث قائم الزاوية ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس القائمة على القاعدة.

7- أوجد النقطة التى تقع على محور x بحيث يكون بعدها عن المستقيم $9x - 12y - 6 = 0$ مساويا 2.

8- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين $P_2(-3, 8)$, $P_1(2, -1)$

9- أوجد معادلة المستقيم الذى ميله 5 ويقطع جزءا من محور Y قدره -3

10 - إذا كانت معادلة المستقيم هى :

$$2x - 5y + 11 = 0$$

فأوجد الميل والجزء المقطوع من المحور Y.

11- أوجد إحداثيى نقطة تقاطع المستقيم الذى معادلته :

$2x + 3y = 3$

مع : a- المحور x .

b- المحور Y .

12- أثبت أن النقاط (2 ,6) B(-2, -2), A (8 ,2-) C هى رؤوس لمثلث متساوى الساقين ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة.

13- أوجد طول العمود النازل من النقطة (3 ,2) A على المستقيم:

$5x - 12y + 10 = 0$

14- أوجد طول العمود النازل من القطة (4- ,2-) A على المستقيم :

$12(x - 3) = y - 2$

15-أوجد طول العمود فى التمرين السابق بالقياس بيانيا.

16- أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$3x + 4y - 13 = 0 \quad , \quad 6x + 8y + 15 = 0$

17- أوجد ساحة المثلث الذى رؤوسه هى النقاط :

A (2, -3) , B (4, -1) , C (8, 5)

18- أوجد بعد منتصف المسافة بين النقطتين (2 ,3) B (5, 6) , A عن المستقيم:

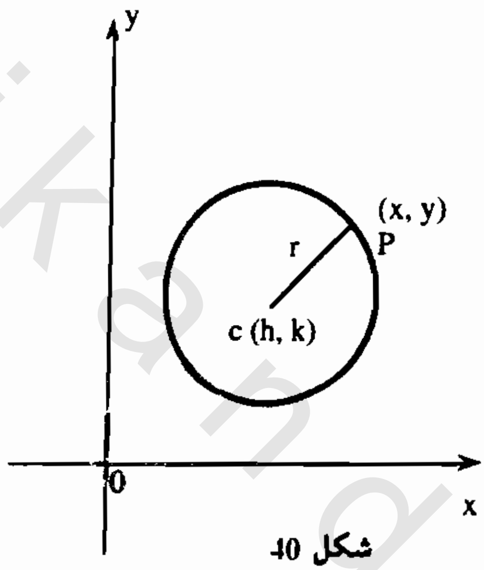
$7x - 24y + 5 - 0$

القطـــوع المخروطيــة

1 - الدائـــــرة The Circle

تعريـــــف:

هى المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة تسمى المركز ويسمى هذا البعد الثابت نصف قطر الدائرة (شكل 40).



شكل 40

معادلة الدائرة :

تمثل النقطة C (h, k) مركز الدائرة ، r نصف القطر والنقطة P (x, y) أى نقطة على محيط الدائرة.

$$\therefore CP = r$$

$$= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

المعـادلة رقم (1) تمـثل مـعـادلة دائرة بدلالة احداثى المـركـز $C\ (h,\ k)$ ونصف القطر r.

مثال 1:

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.

الحـــــل :

إحداثى المركز : $h = k = 0$

معادلة الدائرة هى $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

بالتعويض بإحداثى المركز فى معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2$$

مثــــال 2:

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطة الأصل ومركزها $c\ (2,1)$

الحـــــل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

بالتعويض بإحداثى المركز فى معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

وحيث أن الدائرة تمر بنقطة الأصل

$$x = y = 0\ \therefore$$

$$\therefore (0 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = r^2$$

$$4 + 1 = r^2$$

$$5 = r^2$$

∴ معادلة الدائرة هى :-

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

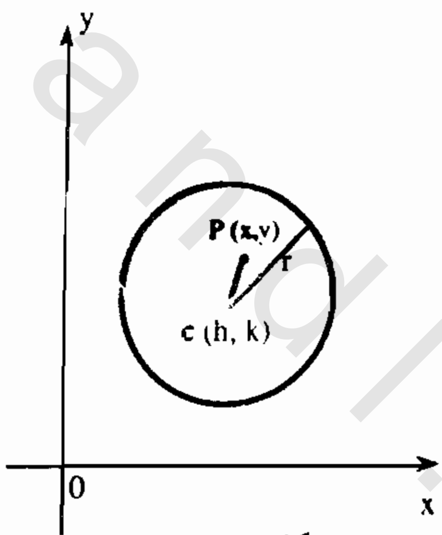
مثـــــال 3 :

ما هو المحل الهندسى للنقط $P\ (x\ ,\ y)$ التى تحقق احداثياتها المتباينة الآتية :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$$

الحـــــل :

تتحقق المتباينة عندما وفقط عندما تكون النقطة P داخل الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها $C\ (h,\ k)$ (شكل 41)



شكل 41

مثـــــال 4 :

ادرس تحليليا المعادلة الآتيه:

$$x^2 + y^2 + 4\ x - 6\ y = 12$$

الحـــــل :

يتم ترتيب كتابة المعادلة لتكون بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x \quad + y^2 - 6y = 12$$

تستكمل المربعات للإحداثيات y , x جهة اليسار للمعادلة وما يتم إضافته جهة اليسار يضاف جهة اليمين لتصبح المعادلة بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$

$$\therefore\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

تمثل هذه المعادلة معادلة دائرة مركزها $c\ (-2, 3)$ ونصف قطرها $r = 5$.

معادلة الدائرة فى الصورة العامة:

يمكن فك المعادلة رقم (1) لتصبح على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

وحيث أن $h,\ k,\ r$ ثوابت

إذا يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \qquad (3)$$

وهى تعبر عن معادلة الدائرة فى الصورة العامة حيث c_1 , c_2 , c_3 ثوابت يمكن إيجادها إذا علم أى من الشروط الآتيه:

1- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وتمر بها الدائرة.

2- ثلاث مستقيمات ليست متلاقية فى نقطة وليست متوازية وتمر الدائرة بنقط تقاطعهم.

3- تمس الدائرة مستقيمين وتمر بنقطة ليست على أى من المستقيمين.

ويلاحظ فى هذه المعادلة الآتى:

1- المعادلة من الدرجة الثانية فى x , y .

2- معامل $x\,y$ = صفر .

3- معامل x^2 = معامل y^2 .

مثال 5:

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط الثلاث ,(0 ,1) A ,(1 ,0) B
(2 ,2) D

الحـــل :

معادلة الدائرة هى : $x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$

بالتعويض بالنقطة (0 ,1) A فى معادلة الدائرة:

$$\therefore 1 + 0 + c_1 + 0 + c_3 = 0$$

$$1 + c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{I}$$

بالتعويض بالنقطة (1 ,0) B فى معادلة الدائرة:

$$0 + 1 + 0 + c + c_3 = 0$$

$$1 + c_2 + c = 0 \qquad \text{II}$$

بالتعويض بالنقطة (2 ,2) D فى معادلة الدائرة:

$$4 + 4 + 2\,c_1 + 2\,c_2 + c_3 = 0$$

$$8 + 2\,c_1 + 2\,c_2 + c_3 = 0 \qquad \text{III}$$

بطرح المعادلتين I , II

$$\therefore c_1 = c_2$$

نعوض عن قيمة c_2 فى المعادلة III

$$\therefore\ 8 + 4c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{IV}$$

بطرح المعادلتين I , IV

$$\therefore\ 7 + 3c_1 = 0$$

$$\therefore\ c_1 = -\frac{7}{3} = c_2$$

بالتعويض عن قيمة c_1 فى المعادلة IV

$$\therefore\ c_3 = -1 - c_1$$

$$= -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$$

∴ المعادلة المطلوبة هى :

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

وبالضرب X 3

$$\therefore\ 3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$$

مثال 6 :

أوجد إحداثيى المركز ونصف قطر الدائرة فى المثال السابق.

الحـــل :

$$c_1 = -2h \qquad \rightarrow \qquad \therefore\ h = \frac{c_1}{-2} = \frac{7}{6}$$

$$c_2 = -2k \qquad \rightarrow \qquad \therefore\ k = \frac{c_2}{-2} = \frac{7}{6}$$

$$c_3 = h^2 + k^2 - r^2$$

$$\frac{4}{3} = \frac{49}{36} + \frac{49}{36} - r^2$$

$$\therefore r^2 = \frac{49 + 49 - 48}{36}$$

$$= \frac{50}{36}$$

$$r = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

∴إحداثى المركز $c\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$

ونصف القطر $\frac{5}{6}\sqrt{2}$

مثـــال 7 :

أوجد إحداثى المركز ونصف قطر الدائرة التى معادلتها :-

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad , \quad A \neq 0$$

الحـــل :

بقسمة المعادلة على A مع وضعها على الصورة :

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = \frac{-F}{A}$$

بإكمال المربع بالنسبة لـ x ,y وما يضاف جهة اليسار يضاف جهة اليمين

فتصبح المعادلة على الصورة :-

$$x^2+\frac{D}{A}x+\left(\frac{D}{2A}\right)^2+y^2+\frac{E}{A}y+\left(\frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{-F}{A}+\left(\frac{D}{2A}\right)^2+\left(\frac{E}{2A}\right)^2$$

$$\therefore \left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$

بمقارنة المعادلة السابقة بمعادلة الدائرة رقم (1) يتضح الآتى :

$$h = \frac{-D}{2A} \quad , \quad k = \frac{-E}{2A}$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4\,AF}{4\,A^2}$$

∴ إحادثى المركز هو $C\left(\frac{-D}{2A}\ ,\ \frac{-E}{2A}\right)$ ، نصف القطر r هو :

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4\,AF}{4\,A^2}}$$

مثـــــال 8 :

إذا كـان المـسـتـقـيم الذى مـعـادلتـه $2\,x - y + 4 = 0$ يقطع مـحـورى الاحداثيات فى النقطتين a , b فأوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط a , b , نقطة الأصل.

الحـــل :

لإيجاد نقطتى تقاطع المستقيم $2\,x - y + 4 = 0$ مع محورى الاحداثيات ، يتم التعويض $y = 0$ فى معادلة المستقيم لإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x كالآتى:

$2\,(x) - 0 + 4 = 0$

$2\,x = -4 \qquad\qquad \rightarrow \quad x = -2$

∴ نقطة التقاطع هى $a\ (-2, 0)$ شكل42

ويتم التعويض عن $x = 0$ فى معادلة المستقيم لايجاد نقطة تقاطعه مع المحور y كالآتى :

$2\,(0) - y + 4 = 0 \qquad\qquad \rightarrow y = 4$

∴نقطة التقاطع هى $b\ (0\ ,\ 4)$ .... شكل 42

معادلة الدائرة هى $x^2 + y^2 + c_1\,x + c_2 y + c_3 = 0$

حيث أن الدائرة تمر بالنقطة (0, 0) فهى تحقق المعادلة :-

$\therefore (0) + (0) + (0) + (0) + c_3 = 0$

$\therefore c_3 = 0$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة b (0, 4) فهى تحقق المعادلة :-

$\therefore 0 + 16 + 0 + 4c_2 = 0$

$\therefore c_2 = -4$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة a (-2, 0) . فهى تحقق المعادلة :-

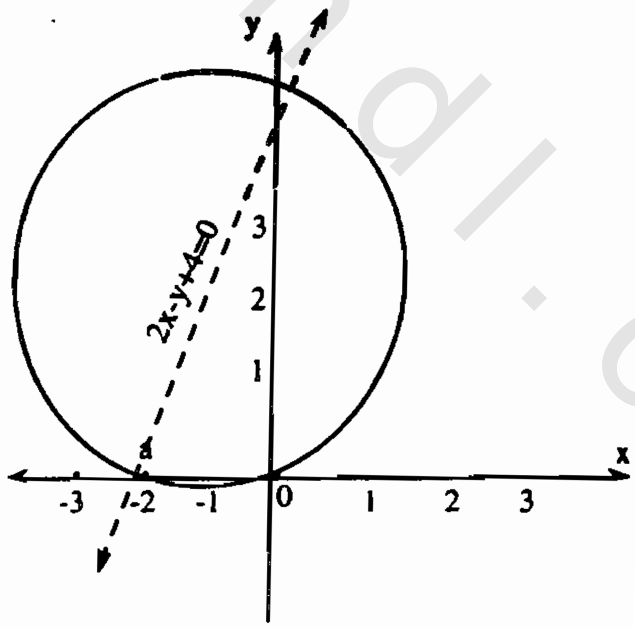
$\therefore 4 + 0 - 2\,c_1 - 4\,(0) = 0$

$\therefore 2\,c_1 = 4$

$c_1 = 2$

وبالتعويض عن قيم c_3 , c_2 , c_1 فى معادلة الدائرة فتصبح كالآتى:

$x^2 + y^2 + 2\,x - 4\,y = 0$



مثال 8 :

إثبت أن النقط $(2-\ ,\ 13-)$ f, a(3, 2), b(5- 2,), e (2, 3) تـكـون رؤوس شكل رباعى دائرى.

الحل :

نوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط a, b, e نعلم أن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

وحيث أن a (3, 2) تقع على محيط الدائرة فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 9 + 4 + 3 c_1 + 2 c_2 + c_3 = 0$$

$$+ 3c_1 + 2 c_2 + c_3 = - 13 \qquad \text{I}$$

وحيث أن b (5, -2) تقع على محيط الدائرة. فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 25 + 4 + 5 c_1 - 2c_2 + c_3 = - 0$$

$$\therefore \quad + 5 c_1 \quad - 2c_2 + c_3 = - 29 \qquad \text{II}$$

وحيث أن e (2, 3) تقع على محيط الدائرة فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 4 + 9 + 2 c_1 + 3 c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore \qquad + 2 c_1 + 3 c_2 + c_3 = -13 \qquad \text{III}$$

لإيجـاد معـادلة الدائرة التى تمر بالنقط a, b, e ، يتم حل المعـادلات III, I, II بإستخدام المحددات كالآتى:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 (-2 -3) \ -5 (2 - 3) + 2 (2+ 2)$$

$$= -2$$

$$\Delta C_1 = \begin{vmatrix} -13 & 2 & 1 \\ -29 & -2 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -13(-2-3) + 29(2-3) - 13(2+2)$$
$$= -16$$

$$\Delta C_2 = \begin{vmatrix} 3 & -13 & 1 \\ 5 & -29 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-29+13) - 5(-13+13) + 2(-13+29)$$
$$= -16$$

$$\Delta C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -13 \\ 5 & -2 & -29 \\ 2 & 3 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 3(26+87) - 5(-26+39) + 2(-58-26)$$
$$= 106$$

$$\therefore C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_3 = \frac{\Delta C_3}{\Delta} = \frac{106}{-2} = 53$$

نعوض عن C_1, C_2, C_3 فى معادلة الدائرة التى تكون كالآتي:-

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y - 53 = 0$$

نعــوض عـن النـقطـة الرابعــة وهى (2- , 13-) f فـى مــعــادلة الدائرة فــإذا حققتها فإن الدائرة تمر بها وإن لم تحققها فإن الدائرة لا تمر بها:

$\therefore 169 + 4 + 8\,(-13) + 8\,(-2) - 53$

$= 0$

$\therefore$ النقطة (2- ,13-) f تحقق أيضا معادلة الدائرة.

$\therefore$ f, e, b, a تقـــع على دائرة واحـــدة، وبالتـــالى تـكـون رؤوس شـــكل رباعى دائرى.

تماريـــــن (16)

1- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (h,\ k)$ ونصف قطرها r لكل من:-

a- $r = 2$, $c\ (0,\ 2)$

b- $r = \sqrt{6}$, $c\ (-2,\ -1)$

2- أوجد مركز ونصف قطر الدائرة لكل من المعادلات الآتيه:

a- $x^2 - y^2 - 2y = 3$

b- $x^2 + y^2 + 2\,x = 8$

c- $3x^2 + 3y^2 + 6\,x = 1$

d- $x^2 + y^2 + 2\,x - 4\,y + 5 = 0$

e- $x^2 + y^2 + 4\,x + 4\,y + 9 = 0$

f- $2\,x^2 + 2\,y^2 + x + y = 0$

3- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (2,\ 2)$ وتمر بالنقطة $A\ (4\ ,5)$

4- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (-1\ ,1)$ وتمس المستقيم:

$x + 2\,y = 4$

5- أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط $E\ (-4,\ 3)$, $A\ (2,3)$, $B\ (3,2)$.

6- أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطة الأصل وبالنقطة $A\ (0,\ 2)$ ويقع مركزها على المستقيم الذى معادلته $2\,x + 7\,y = 14$.

7- أوجـد مـعـادلـة الدائـرة التى تمـر بالنقـط $B\ (1, -4),\quad A\ (-1, -2),$ $E\ (-3, -2)$.

8 - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين $B\ (6, 8),\quad A\ (-1, 4)$, E ويقع مركزها على المستقيم المار بالنقطتين $E\ (1, 1),\ D\ (1, 2)$.

9 - أثبت أن النقط $E\ (1, -1),\ D(-2, 2),\ B\ (4, 2),\ A\ (1, 5)$ تكون رؤوس شكل رباعى دائرى.

10 - أوجد المحل الهندسى للنقطة $P\ (x, y)$ إذا كان مجموع مربعى بعديها عن النقطتين $B\ (1, 4)\ ,\ A\ (-5, 2)$ مساويا لـ 52 بين نوع هذ المنحنى.

11 - هل النقطة $A\ (0.1\ ,\ 3.1)$ تقع داخل الدائرة $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ أم خارجها أم عليها ولماذا ؟

12 - إذا كان بعد النقطة $P\ (x, y)$ عن النقطة $B\ (6\ ,\ 0)$ هو ضعف بعدها عن النقطة $A\ (0, 3)$ فأثبت أن المحل الهندسى لهذه النقطة هو عبارة عن دائرة، ثم أوجد مركز هذه الدائرة ونصف قطرها.

13 - أوجد معادلة الدائرة المحاطة بمثلث أضلاعه هى :

$4x + 3y = 24$

$3x - 4y = 18$

$4x - 3y + 32 = 0$

(إرشاد : بعد النقطة (h, k) عن المستقيم $Ax + By + C = 0$ هو:

$$\frac{|A h + B k + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

14 - لتكن P نقطة خارج دائرة معينة C وليكن PT مماسا لهذه الدائرة فى T فإذا قطع المستقيم PN الذى يمر بمركز C هذه الدائرة فى N, M فأثبت أن:

$$PM.\ PN = (PT)^2$$

15 - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطة الأصل وتقطع طولين موجبين من محورى الإحداثيات مقدارهما 6 , 4 على الترتيب.

16 - أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (3 , 2) c وتقطع من محور x جزءا طوله 8 وحدات .

17- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (3 ,2) c وتمس المحور x.

2 - القطع المكافئ The parabola

تعريـــــف:

القطع المكافئ هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو معلوم بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة فيه (البؤرة) يساوى بعدها عن مستقيم ثابت فى المستوى (الدليل).

والمستقيم المار بالبؤرة وعموديا على الدليل يسمى محور القطع كما تسمى نقطة تقاطع المحور مع القطع رأس القطع.

المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ:

لإيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ فى أبسط صورة نفرض أن البؤره S والدليل l.

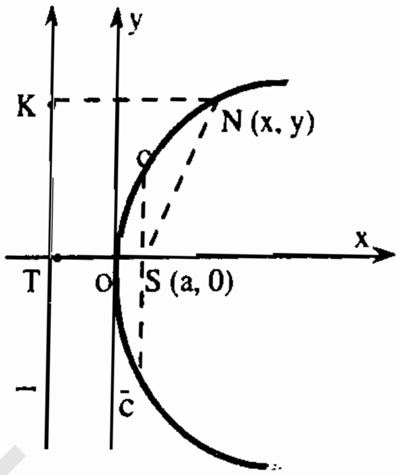
.ونعتبر المحور x هو العمودى من S على l الذى يقطع القطع فى النقطة 0. ومن النقطة 0 نرسم المحور Y.

نفرض أن بعد البؤرة S عن الدليل = 2a.

∴ من تعريف القطع يكون :

TO = SO

إحداثيى البؤرة S(a, 0) شكل 43.



شكل 43

معادلة الدليل هى :

$$x = -a$$
$$x + a = 0$$

فإذا كانت $N\ (x,\ y)$ أى نقطة على القطع المكافئ فإن :

$$NS = NK$$

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\therefore y^2 = 4\,a\,x \text{ ....} \qquad (1)$$

تسمى المعادلة (1) معادلة القطع المكافئ فى أبسط صورها.

ملاحظات :

1- المنحنى متماثل بالنسبة للمحور x.

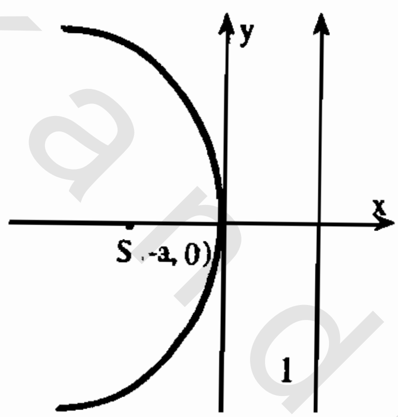
2-رأس القطع هى نقطة أصل المحورين (تقاطع المحورين).

3 – الوتر المار بالبؤرة عموديا على محور القطع يسمى الوتر البؤرى العمودى ويساوى 4 a.

4- لا وجود للمنحنى عندما تكون x سالبة.

5- بزيادة قيمة x تزداد قيمة y.

6- إذا كانت a سالبة فإن قيم x يجب أن تكون سالبة أى تكون فتحة القطع نحو الاتجاه السالب للمحور x شكل 44.

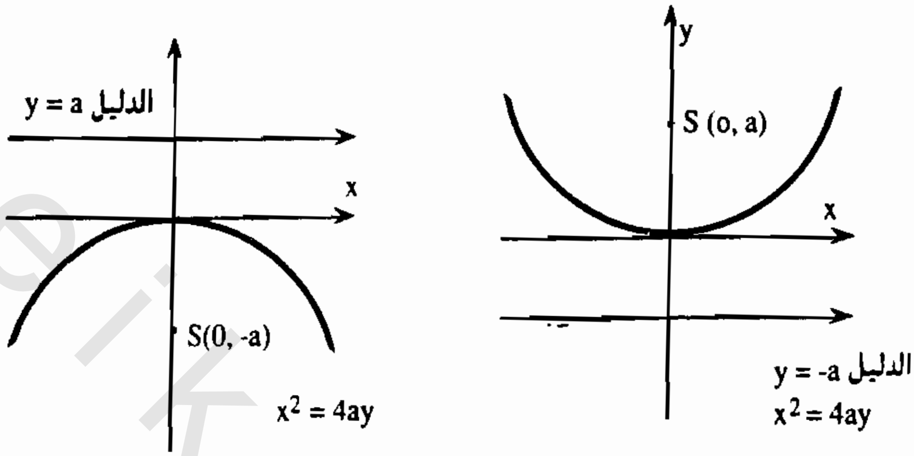


شكل 44

7 – معادلة القطع المكافئ الذى محوره رأسى هو :

$$x^2 = \pm a y$$

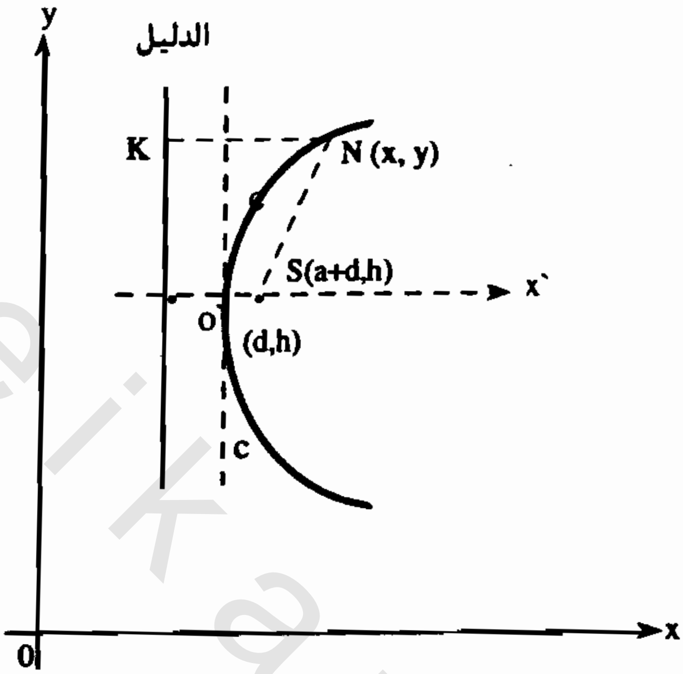
وذلك كون القطع مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل . شكل 45.



شكل 45

معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي المحور x :

إذا كانت رأس القطع هي النقطة P (d, h) فينتقل نقطة الأصل (0, 0) 0 إلى النقطة P (d, h) مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما الأصلي. شكل 46



شكل 46

تصبح معادلة القطع بالنسبة للمحورين `x , `y هى:

$$y'^2 = 4a\,x'$$

$$,\ \therefore\ x' = x - d$$

$$y' = y - h$$

$$\therefore\ (y - h)^2 = 4\,a\,(x - d)$$

والمعادلة الأخيرة هى معادلة القطع المكافئ الذى محوره يوازى المحور x

ورأسه هى النقطة (d, h) `0 ويلاحظ الآتى:-

1- رأس القطع هى النقطة (d,h) `0

2- إحداثيى البؤرة (d + a , h) s

3- معادلة محور القطع هى : x = h

4- معادلة الدليل هى : $x = d - a$

5- طول الوتر البؤرى العمودى = $4a$

مثال 1 :

إذا كان : $5y^2 = 12x$ أوجد ما يأتى:

أولا: إحداثيى البؤرة للقطع المكافئ:

ثانيا: معادلة الدليل

ثالثا: طول الوتر البؤرى العمودى

الحل :

$$5y^2 = 12x$$
$$y^2 = \frac{12}{5}x$$
$$\therefore 4a = \frac{12}{5}$$
$$\therefore a = \frac{3}{5}$$

∴ البؤرة هى النقطة $S\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

معادلة الدليل هى :

$$x = -\frac{3}{5}$$

طول الوتر البؤرى العمودى:

$$= \frac{12}{5}$$

مثال 2 :

فى القطع المكافئ: $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$

أوجد ما يأتى:

أولا: إحداثيى رأس القطع

ثانيا: إحداثيى البؤرة

ثالثا: طول الوتر البؤرى العمودى

رابعا: معادلتى كل من دليل القطع ومحوره.

الحل:

$$y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$$

بإكمال المربع فى y

$$\therefore\ y^2 - 6y + 9 = -8x - 8$$

$$\therefore\ (y-3)^2 = -8(x+1)$$

$\therefore$ إحداثيى رزس القطع ، $O'(-1, 3)$, $a = -2$

إحداثيى البؤرة هما $S(-3, 3)$

طول الوتر البؤرى العمودى $|4a| = 8$

معادلة الدليل هى : $x = 1$

معادلة المحور هى : $y = 3$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذى بؤرته $s\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ومعادلة دليله هى :

$y - \frac{4}{3} = 0$ ثم أوجد طول وتره البؤرى العمودى.

الحل:

نفرض $N(x, y)$ على القطع

∴من تعريف القطع يكون :

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\frac{4}{3})^2} = y - \frac{4}{3}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} = y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}$$

$$\therefore x^2 = -\frac{16}{3}y$$

وهى معادلة القطع

طول الوتر البؤرى العمودى = $|4a| = \frac{16}{3}$

مثال 4:

أوجد معادلة القطع الذى بؤرته $S(2, 3)$ ودليله المستقيم الذى معادلته :

$x - 4y + 3 = 0$

الحل :

نفرض $N(x, 1)$ على القطع

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \frac{x-4y+3}{\sqrt{1+16}}$$

$$\therefore 17(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 8xy + 6x + 16y^2 - 24y + 9$$

$$\therefore 16x^2 + y^2 - 74x - 78y + 8xy + 212 = 0$$

وهى معادلة القطع

مثال 5 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذى رأسه هو النقطة (3, 4) O' وبؤرته هى النقطه S (5, 4)

الحـــــل :

$\therefore a = 5 - 3 = 2$

∴ معادلة القطع هى :

$$(y - 4)^2 = 4\ (2)\ (x - 3)$$

$$\therefore y^2 - 8y - 8x + 40 = 0$$

وهى معادلة القطع.

تماريـــــن (17)

1- أوجد إحداثيي البؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة الدليل لكل قطع مكافئ مما يأتي:

a) $y^2 = 8x$

b) $x^2 = 8y$

c) $3y^2 = 4x$

2- أوجد معادلة كل قطع مكافئ إذا كان :

a) إحداثيي البؤره $S(3, 0)$ ومعادلة الدليل: $x + 3 = 0$

b) إحداثيي البؤرة $S(0, 6)$ ودليله هو المحور x

3- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ:

$y^2 + 3x = 4$

4- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ :

$3y^2 - x - 18y + 27 = 0$

5- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ:

$x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$

6 - أوجد إحداثيى كل من الرأس والبؤرة وكذلك معادلة الدليل للقطع المكافئ : $y^2 = 2x + 3$

7- أوجد إحداثيى كل من الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل وطول الوتر البؤرى العمودى لكل قطع مكافئ مما يأتى:

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

3- القطع الناقص The ellipse

تعريف : القطع الناقص هو المحل الهندسى للنقط $P(x, y)$ التى مجموع بعديها عن نقطتين معلومتين ثابت (شكل 47).

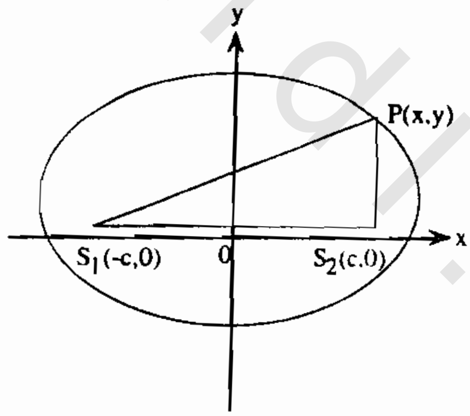
معادلة القطع الناقص:

إذا أخذنا النقتطين المعلومتين (البؤرتين) $S_1(-c, o)$, $S_2(c, o)$ وكان:

$$PS_1 + PS_2 = 2a$$

فإن إحداثيات النقطة P يجب أن تحقق المعادلة الآتيه :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

شكل 47

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2-4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a-\frac{c}{a}x$$

وبتربيع الطرفين

$$x^2-2cx+c^2+y^2 = a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2 = a^2-c^2$$

وبقسمة الطرفين على a^2-c^2

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad (1)$$

$$, \quad \therefore 2a = PS_1 + PS_2$$

$\therefore 2a > 2c$ (مجموع أى ضلعين أكبر من الضلع الثالث)

$$\therefore a^2-c^2 > 0$$

$$b^2 = a^2-c^2$$

$$b = \sqrt{a^2-c^2} \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور x :

$$\therefore y = 0$$
$$\therefore x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور y :

$$\therefore x = 0$$
$$y^2 = b^2$$
$$y = \pm b$$

وبإجراء التفاضل للمعادله (3)

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2 x}{a^2 y^2}$$

وعندما $\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore x = 0 \quad , \quad y = \pm b$$

وعندما $\frac{dx}{dy}=0$

$$\therefore y = 0 \quad , \quad x = \pm a$$

∴ المنحنى يقطع المحورين على التعامد.

لقد أثبتنا أنه إذا حققت النقطة P الشرط الهندسي

$$PS_1 + PS_2 = 2a$$

فإن إحداثياها (x , y) يحققا المعادلة (3) . وإذا حدث العكس أي إذا

حققت x , y المعادلة (3) عند $a > , > 0$ فإن :

$$\frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = (a^2 - c^2)\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$, \because PS_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\therefore\ PS_2 = \sqrt{x^2 + 2c\,x + c^2 + a^2 + (\frac{c}{a}x)^2 - c^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2\,c\,x + (\frac{c}{a}x)^2}$$

$$= \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \qquad ....4\text{-a}$$

وبالمثل

$$PS_2 = \sqrt{(a - c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \qquad ....4\text{-b}$$

حيث أن مجال x هو : $-a \leq x \leq a$

فإن قيمة $(\frac{c}{a}x)$ مجالها هو : $-c \leq \frac{c}{a}x \leq c$

وبنا ءا على ذلك فـإن كـلا من $a + \frac{c}{a}x$, $a - \frac{c}{a}x$ مـوجب وتقع

قيمتهما بين $a + c$, $a - c$

وبذلك ينتج عن القيم المطلقة فى $4 - a$, $4 - b$ أن :-

$$PS_1 = a + \frac{c}{a} x \quad , \quad PS_2 = a - \frac{c}{a} x$$

أي أن :

$$PS_1 + PS_2 = 2\,a$$

بغض النظر عن موضع النقطة $P\,(x\,,\,y)$ على المنحنى.

بما أن المقدار $b^2 = a^2 - c^2$ فى المعادلة (3) أقل من a^2 إذن فالمحور الكبير للقطع الناقص هو عبارة عن القطعة المستقيمة التى طولها $2\,a$ والواقعه بين النقطتين $(\pm\, a, 0)$، أما المحور الصغير فهو عبارة عن القطعة المستقيمة التى طولها $2\,b$ والواقعة بين النقطتين $(0\,,\,\pm\, b)$. وعلى ذلك يكون نصف المحور الكبير $= a$ ، نصف المحور الصغير $= b$.

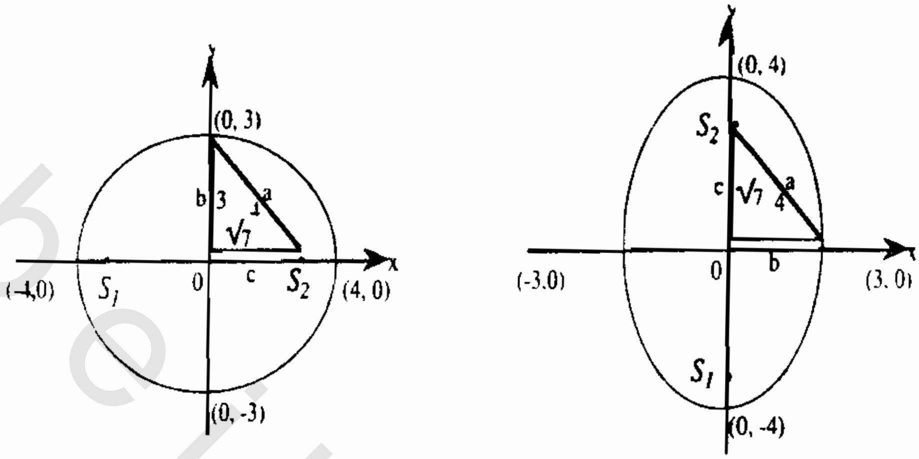
فمثلا إذا كان : $a = 4$, $b = 3$ فإن المعادلة (3) تصبح:-

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

وإذا تبادلا وضعا المحاور فإن :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وفى هذه الحالة يصبح المحور الكبير رأسيا. شكل 48.



أ) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. أفقيا.

ب) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. رأسيا.

شكل 48

لاحظ أن البؤرتين تقعا دائما على المحور الكبير وأن :

$a^2 = b^2 + c^2$

أى أن a وتر المثلث القائم وأن وضع البؤرتين فى المثال على بعد $\sqrt{7}$ من المركز.

المركز ليس عند نقطة الأصل :

يعرف مركز القطع الناقص بأنه نقطه تقاطع محورى تناظره فإذا كان المركز c (h, k) والمحوران يوازيان المحورين x , y فإنه يمكننا إقتراح إحداثيات جديدة.

$x` = x - h \qquad , \quad y` = y - k$

حيث c هى نقطة الأصل `0 للاحداثيات الجديدة فتكون المعادلة فى

الاحداثيات الجديدة هى :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

أو

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2}$$

تبعا لوضع المحور الأكبر ويوضح ذلك المثال التالى.

مثال : حل المعادلة

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8x - 8y + 4 = 0$$

الحـــــل :

نكمل المربعات

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

$$\therefore 9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\therefore x' = x + 2 \quad , \quad y' = y - 1$$

وبذلك نرى أن نقطة الأصل الجديدة $x' = 0$, $y' = 0$ هى نفسها النقطة:

$$x = -2 \quad , \quad y = 1$$

وتصبح المعادلة فى المحاور الجديدة

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

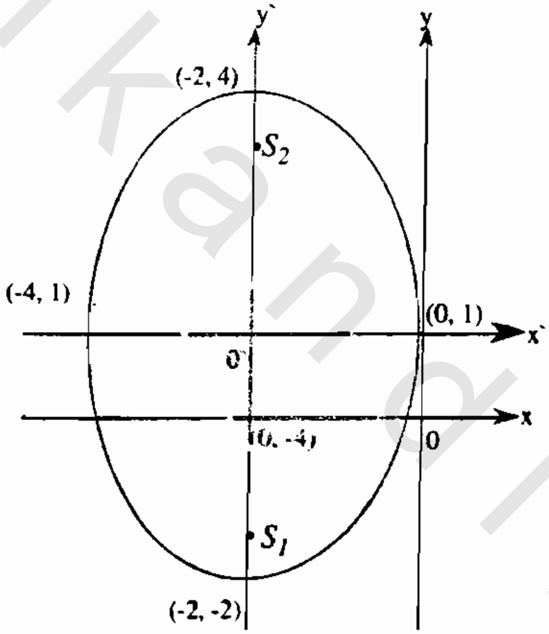
التى تمثل قطعا ناقصا يقطع المحور `y في (3 ± , 0) , `x فى (0 ,2±) لتحديد موضع البؤرتين نستعمل العلاقة:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

وبالتالى تقع البؤرتان على المحور `y عند $(0 , \pm\sqrt{5})$

أو عند $(-2, 1 \pm \sqrt{5})$ للإحداثيات الأصيلة. ويوضح ذلك شكل 49.

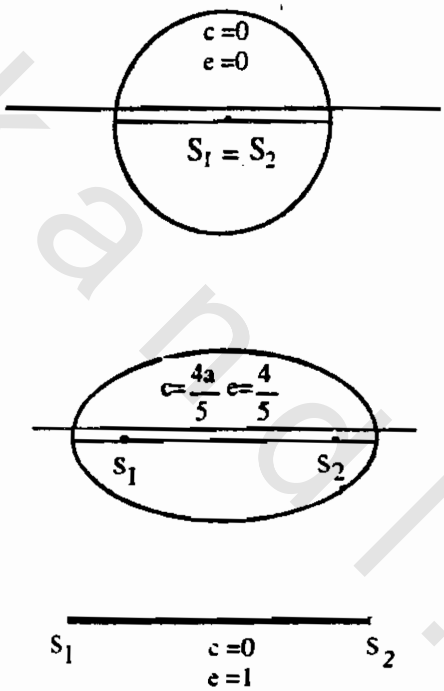


شكل 49

الاختلاف المركزى:

إذا ثبتنا a وغيرنا c فى المدى $0 \leq c \leq a$ فإن القطوع الناقصة الناتجة

تختلف فى أشكالها، فهى عبارة عن دائرة عندما $c = 0$ ثم يأخذ جانبها فى الاتساع كلما زادت c إلى أن تصل إلى الحالة النهائية عندما $c = a$ حيث يؤول «القطع الناقص» عندئذ إلى القطعة المستقيمة S_1 S_2 الواصلة بين البؤرتين كما فى الشكل (50). تسمى النسبة $e = \frac{c}{a}$ الاختلاف المركزى والتى تأخذ قيم من 0 إلى 1 وتدل على مدى بعد المنحنى عن الشكل الدائرى.



شكل 50

من المعروف أن للقطع المكافئ بؤرة واحدة ودليل واحد بينما لكل قطع ناقص بؤرتان ودليلان، ودليلا القطع الناقص هما مستقيمان عموديان على المحور

الكبير للقطع الناقص ويبتعدان عن مركزه مسافة $\pm \frac{a}{e}$.

بالنسبة للقطع المكافئ العلاقة:

$$PS = PD$$

لأى نقطة P عليه حيث S البؤرة، D هى أقرب نقطة لـ P على الدليل

وأيضا فى حالة القطع الناقص يمكن إثبات أن :

$$PS_1 = e.PD_1 \quad , \quad PS_2 = e\, PD_2$$

حيث e الاختلاف المركزى، P أى نقطة على القطع الناقص $S_2,\ S_1$

البؤرتان، D_2 , D_1 هما أقرب نقطتين على الدليلين $x = \pm \frac{a}{e}$.

تماريـــــن (18)

1- أوجـد مـعـادلة القطع الناقص الذى مـركـزه c وبؤرته S ونصف مـحـوره الكبير a وأوجد اختلافه المركزى فى كل من :-

(a)	$a = 4$	, $c\ (0, 0)$	, $S\ (0, 2)$
(b)	$a = 5$	, $c\ (0, 0)$	, $S\ (-3, 1)$
(c)	$a = 3$	, $c\ (0, 2)$	, $S\ (0, 0)$
(d)	$a = 4$	, $c\ (-3, 0)$	, $S\ (-3, -2)$
(e)	$a = \sqrt{10}$	, $c\ (2, 2)$	, $S\ (-1, 2)$

2- أوجد مـركـز القطع الناقص $25\,x^2 + 9\,y^2 - 100\,x + 54\,y - 44 = 0$ ثـم أوجد أيضا رأسيه وبؤرتيه.

3- رؤوس المحـور الكبير والمحـور الصـغير لقطع ناقص هى $(3, 4), (1, 1)$, $(-1, 4), (1, 7)$. أوجد معادلته وبؤرته.

4- أوجـد مـعـادلة القطع الناقص الذى يمر بنقطة الأصل وتقع بؤرتاه فى النقـطتـين $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

5- أوجد الاختلاف المركزى والدليلين للقطع الناقص $\dfrac{x^2}{7} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

6 - أوجد طول الوتر العمودى على المحور الكبير للقطع الناقص $b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2$ ويمر بإحدى البؤرتين. (يسمى هذا الوتر بالخط البؤرى العمودى

للقطع الناقص).

7 - أوجد معادلة القطع الناقص الذى اختلافه المركزى هو $\frac{2}{3}$ واحد دليله هو المستقيم $x = 9$ وبؤرته الموافقه لهذا الدليل هى $(4 , 0)$.

8 - أثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة $P_1(x_1 , y_1)$ الواقعة عليه هى :

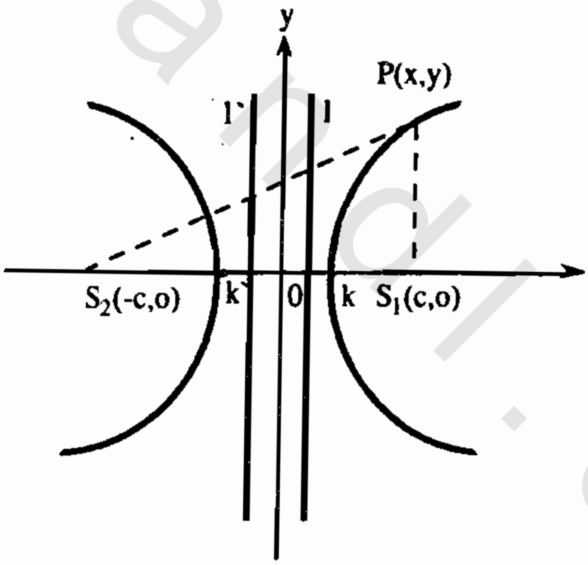
$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$$

4- القطع الزائد The hyperbola

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين فيه مقدارا ثابتا والنقطتان الثابتتان تسميان بالبؤرتين.

إيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع الزائد فى الصورة القياسية:

نفرض أن النقطتين الثابتتين هما : $S_1\ (c, 0)$, $S_2\ (-c, 0)$ وأن P (x, y) تتحرك فى مستوى S_1 , S_2 (شكل 51).



شكل 51

$\therefore PS_2 - PS_1 =$ = مقدار ثابت = 2a

$\therefore a < c$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بالتربيع والاختصار ينتج أن:

$$c x - a^2 = \sqrt{a (x-c)^2 + y^2}$$

بالتربيع مرة أخرى ينتج أن :

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$$

وبقسمة الطرفين على $a^2 (c^2 - a^2)$ ينتج أن :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\because c > a$$

$$\therefore c^2 - a^2 > 0$$

$$\because c^2 - a^2 = \text{ثابت} = b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذه هى معادلة القطع الزائد

ملاحظات :

1- المنحنى متماثل بالنسبة لكل من محورى الاحداثيات x , y

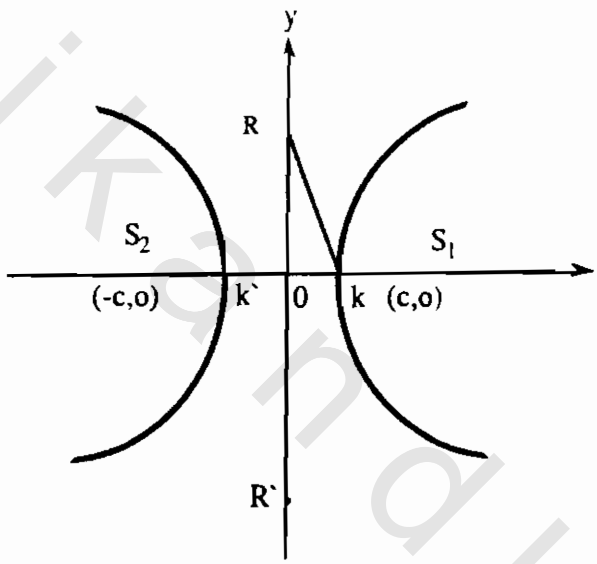
2 - مركز القطع هو نقطة الأصل $(0 , 0)$ 0 وهى نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين.

3 - المنحنى يقطع محور x فى النقطتين:

$k\ (a\ ,\ 0)\ ,\ k`\ (-a\ ,\ 0)$

ويسمى `k k المحور القاطع وطوله = 2 a

4 - OR = OR` = b يسـمى المحـور المرافق ويلاحظ أنه لا يقع على القطع (شكل 52).



شكل 52

5 - إحداثيا البؤرتين هما $S_1\ (c,\ 0)\ ,\ S_2\ (-c\ ,\ 0)$

6 - الاختلاف المركزى e :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

ويلاحظ أن : $e > 1$

7 - معادلتا الدليلين : `l , l هما :

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

8- إذا وقعت البؤرتان على محور y تكون معادلة القطع الزائد فى هذه الحالة هى :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تكون معادلتا الدليلين 1 , `1 هما :

$$y = \pm \frac{a}{e}$$

وتكون إحداثيات البؤرتين هما :

$S_1 (0 , c), S_2 (0 , -c)$

9 - طول الوتر البؤرى العمودى للقطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ يساوى

$$= \frac{2 b^2}{a}$$

10 - معادلة القطع الزائد الذى مركزه `0 (d , h) ومحوره القاطع يوازى المحور x هى:

$$\frac{(x - d)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

11 - معادلة القطع الزائد الذى مركزه `0 (d, h) ومحوره القطع يوازى المحور y هى :

$$\frac{(y - d)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

12 - التمثيل البارامتري للقطع الزائد:

يتم التعويض عن الاحداثيات x , y كالآتى:

$x = a \quad \sec\theta$
$y = b \quad \tan\theta$

13 - معادلة المماس : عند النقطة $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ هى :

$x x_1 / a^2 \ - \ y y_1 / b^2 = 1$

14 - القطع الزائد القائم: هو قطع زائد محوراه متساويان أي أن $a = b$ فتصبح معادلة القطع الزائد هى :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore\ x^2 - y^2 = a^2$$

ويلاحظ أن :

1 - طول محوره القاطع = طول محوره المرافق.

2 - اختلافه المركزى = $\sqrt{2}$.

مثال 1 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع يقع على محور الصادات ويمر بالنقطتين $P_1\ (4,6)$, $P_2\ (1,-3)$.

الحـــــل :

$\because$ المحور القاطع يقع على المحور Y

$\therefore$ معادلة القطع هى : $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

بالتعويض بالنقطتين P_1 , P_2 فى معادلة القطع:

$$\therefore \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\therefore 36\,b^2 - 16\,a_2 = a^2 - b^2 \qquad (1)$$

$$, \because \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\therefore 9\,b^2 - a^2 = a^2\,b^2 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore b^2 = 4 \quad , \quad a^2 = \frac{36}{5}$$

∴معادلة القطع هى :

$$\frac{5\,y^2}{46} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثـــال 2 :

اكتب معادلة القطع الزائد $9\,x^2 - 16\,y^2 = 144$: فى الصورة القياسية

ثم أوجد :

(1) احداثيى رأسيه. (2) معادلتى الدليلين.

(3) طولى محوريه القاطع والمرافق (4) الاختلاف المركزى

(5) طول وتره البؤرى العمودى (6) إحداثيى بؤرتيه.

الحـــل:

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore a = 4 \quad , \quad b = 3$$

$, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

رأس القطع هما : $k'(0, -4), \quad k(0, 4)$

البؤرتان هما : $S_2(0, -5), \quad S_1(0, -5)$

الاختلاف المركزى:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

طول المحور القاطع :

$$= 2a = 2(4) = 8$$

طول المحور المرافق:

$$= 2b = 2(3) = 6$$

معادلتا الدليلين هما :

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{5/4} = \pm \frac{16}{5}$$

طول الوتر البؤرى العمودى :

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى طول محوره المرافق = 6وطول وتره البؤرى العمودى =2 إذا كان محوراه منطبقين على محورى الأحداثيات.

الحـــل :

طول المحور المرافق = 6

$$\therefore 2b = 6$$

$$\therefore b = 3$$

طول الوتر البورى العمودى = 2

$$\therefore 2 = \frac{2b^2}{a}$$

$$a = \frac{2\,(9)}{2} = 9$$

∴ معادلة القطع الزائد هى :

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى إحداثيى بؤرتيه $s(0, \pm 3)$ وطول محوره المرافق = 5

الحــــــل :

البؤرتان تقعان على المحور y

$$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$c = 3 \qquad , 2\,b = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

∴ **معادلة القطع هى:**

$$\frac{4\,y^2}{11} - \frac{4\,x^2}{25} = 1$$

مثـــال 5 :

أوجـد مـعـادلة القطع الزائد الذى مركـزه نقطة الأصل ومـحـوره القـاطع على المحور x واختلافه المركزى $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ إذا علم أن طول وتره البؤرى العمودى = 6

الحـــل :

$$e = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$7a^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$3a^2 = 4b^2 \qquad (1)$$

$$\therefore 6 = \frac{2b^2}{a} = \frac{3a^2}{2a}$$

$$\therefore a^2 = 16$$

$$\therefore b^2 = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}(16) = 12$$

∴معادلة القطع الزائد هى:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$$

تماريـــــــن (19)

1 - أوجد إحداثيات كل من الرأسين والبؤرتين وكذلك الاختلاف المركزى وطول الوتر البؤرى العمودى لكل من القطوع الزائدة الآتية :-

1- $4x^2 - 25y^2 = 180$

2- $49y^2 - 16x^2 = 784$

3- $x^2 - y^2 = 25$

4- أوجـد معادلة القطـع الزائـد الذى طـول محـوره القاطـع = 8 وبؤرتيـه S_1 (5, 0), S_2 (-5, 0)

5- أوجـد معادلـة القطـع الزائـد الذى طـول محـوره المرافق = 24 وبؤرتيـه S_1 (0, 13), s_2 (0, -13)

6- أوجـد معادلة القطع الزائد الذى مركزه (0, 0) 0 واحدى بؤرتيه S_1 (8, 0) واحدى رأسيه k (6, 0)

7 - أوجد معادلة المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون بعدها عن النقطة A (0, 6) يساوى $\frac{3}{2}$ بعدها عن المستقيم $3y = 8$

8 - أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع على المحور y واختلافه المركزى $e = 2\sqrt{3}$ وطول وتره البؤرى العمودى يساوى 18

9- أوجد المركز وطولى المحورين فى القطع الزائد:

$$4 x^2 - 9 y^2 + 24 x + 36 y - 36 = 0$$

10 - أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين فى القطع الزائد:

$$9 x^2 - 16 y^2 - 36 x - 32 y - 124 =0$$

11 - أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ عند النقطة $P_1 (5, \frac{-16}{3})$

12 - أوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرته S_1 (1 , 1-) ودليله المستقيم $x + y = 2$ وإختلافه المركزى = $\sqrt{5}$.