الباب الأول

الجبر

المجموعــات

تعريف:

المجموعة هى تجمع من الأشيـاء أو العناصر المعروفة والمحددة تحديدا تاما.

أمثلة للتجمعات التى تمثل مجموعة فهي:

1- أعضاء هيئة التدريس الذين يدرسون بالمعهد حاليا.

2- المواد الدراسية التى تدرس بالمعهد.

3- أيام الأسبوع.

4- شهور السنة الميلادية

وغيرها.

أما التجمعات التى لا تمثل مجموعة فهي:

1- أعضاء هيئة التدريس بالمعهد فى العام القادم.

2- الصفات التى تحدد الأخلاق الحميدة.

وغيرها.

طرق كتابة المجموعات:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { }، وذلك بإحدى الطريقتين:

1- طريقة السرد أو الحصر (ألقائمة).

2- طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزي).

وقد أصطلح على إستخدام الأحرف الكبيرة للتعبير عن المجموعات.

مثـــال 1:

أكتب بطريقة السرد (ألقائمة) والصفة المميزة (الأسلوب الرمزى):

1- أيام الأسبوع.

2- الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

الحل:

طريقة السرد (القائمة):

1- سـ = { السبت والأحد والاثنين و........ ، الجمعة}

2- صـ = { م و ع ، هـ ، د }

طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزى):

١- سـ = {س : س يوم من أيام الأسبوع}

2- صـ = { ص : ص حرف من الحروف الأبجدية لكلمة معهد}

حيث سـ تعبر عن مجموعة أيام الأسبوع.

، صـ تعبر ن الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

: أو / بمعنى حيث أن.

ملاحظات هامة:

1 عنصر المجموعة لا يتكرر.

2- يمكن تغيير ترتيب عناصر المجموعة.

مثال 2:

عبر بطريقة السرد (القائمة) عن الأرقام المكونة للعدد 7.5.2.4.3 ,3 ,2

الحل:

سـ = { 7, 5, 2, 4,3 }

مثــال 3:

عبر بطريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزى) عن المجموعة:

س = { 1, 2, 3 , ... ,19 }

الحل :

س = { س : س عدد صحيح موجب أقل من 20 }

أنواع المجموعات:

1- المجموعة المحددة:

هى المجموعة التى عدد عناصرها محدد مثل أيام الأسبوع.... إلخ.

2- المجموعة الغير محددة:

هى المجموعة التى عدد عناصرها غير منتهية مثل:

(أ) مجموعة الأعداد الزوجية.

(ب) مجموعة الأعداد الفردية.

3- المجموعة الجزئية:

يقال أن المجموعة X جزء من المجموعة Y عندما تكون جميع عناصر المجموع X من ضمن عناصر المجموعة Y.

4- المجموعة الشاملة:

ويرمز لها عادة بالرمز μ وهى المجموعة التى لا تحتوى على عدد ما من المجموعات الجزئية.

5- المجموعة الخالية:

ويرمز لها عادة بالرمز ϕ وهى المجموعة التى لا تحتوى على أية عناصر

مثل:

(أ) مجموعة الطلاب التى تزيد أعمارهم عن مائة عام.

(ب) مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين 2 ,1.

(جـ) مجموعة الطلاب التى تزيد أطوالهم عن سبعة أمتار.

وغيرها.

المجموعات المتساوية:

تتساوى مجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو لهما نفس العناصر

كالآتى:

$X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{8. 6, 2, 4\}$

$X = Y$

مثال 4:

أوجد قيمة m إذا كانت $X = Y$ حيث :

$X = \{1, 3, 5, 7\}$

$Y = \{1, 3, 7, m\}$

الحل:

بمقارنة عناصر المجموعتين نستنتج أن :

$m = 5$

المجموعات المتكافئة:

تتكافأ المجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو مثل:

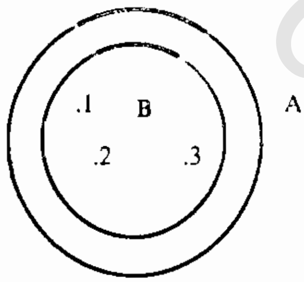
$X = \{ m, n, s\}$

$Y = \{ 2, 5, 3 \}$

$\therefore X \equiv Y$

تمثيل المجموعة :

تمثل المجموعة غالبا بأشكال هندسية تسمى أشكال ڤن حيث تمثل المنطقة داخل الشكل بعناصر المجموعة شكل (1) حيث المجموعة A تحتوى المجموعة B المجموعة B تشمل العناصر 1 ,2 ,3 بمعنى أن العنصر 1 ينتمى إلى B, وكذلك 3, 2.



شكل (١)

العلاقة بين عنصر ومجموعة:

تكون العلاقة بين عنصر ومجموعة إما إنتماء للمجموعة أو عدم إنتماء لها

ويرمز للإنتماء بالرمز $\in$ وعدم الانتماء بالرمز $\notin$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 5:

إذا كان

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y = \{ 2, 3, 5 \}$

فيقال أن العنصر 4 ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$4 \in X$

ويقال أن العنصر 5 لا ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$5 \notin X$

العلاقة بين مجموعة وأخرى:

تكون العلاقة بين أي مجموعة وأخرى إما أن تكون جزء منها أو ليست جزء منها، ويرمز للجزء من بالرمز $\subset$ وليست جزء من بالرمز $\not\subset$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 6:

إذا كان :

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$Y = \{2, 3, 5 \}$
$Z= \{ 1, 2 \}$

يقال أن المجموعة Z جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$Z \subset X$

ويقال أن المجموعة Y ليست جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$Y \not\subset X$

ويقال أيضا أن المجموعة X تحتوى المجموعة Z وأن المجموعة X لا تحتوى المجموعة Y وذلك فى حالة قراءة الرموز من الجنبة اليمنى.

العمليات التى تتم بين المجموعات:

ا- إتحاد مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من الاتحاد عناصرها هى مجموع عناصر المجموعتين بدون تكرار للعناصر المتكررة. ويرمز بعملية الاتحاد بالرمز U.

مثال 7:

إذا كان :

$X = \{ 1, 3, 5 \}$

$Y = \{ 5, 7, 9 \}$

أوجد XUY

الحل :

$XUY = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

قواعد خاصة بالاتحاد :

1- $X \subset (XUY)$

2- $Y \subseteq (XUY)$

3- $XUX = X$

4- $XU\phi = X$

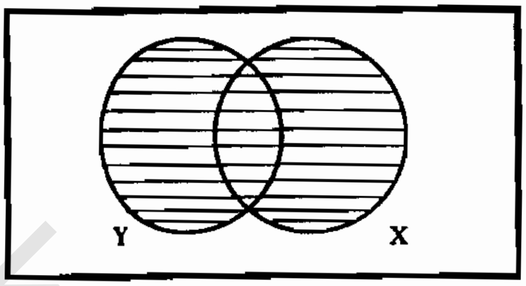
5- $X \subset Y$ إذا كان X جزء من Y أي أن

$\therefore XUY = Y$

6- XUY = YUX

7- XU (YUZ) = (XUY) UZ

ملحوظة: تظلل منطقة الاتحاد وتمثل كما بشكل 2.

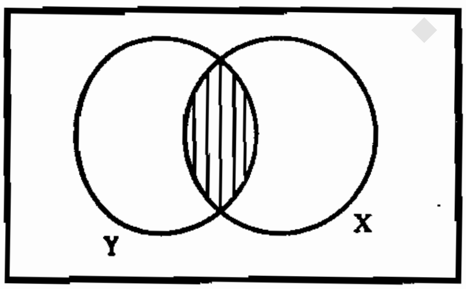


شكل (2)

XUY

II- تقاطع مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من التقاطع، عناصرها هى العناصر المشتركة فى المجموعتين. ويرمز لعملية التقاطع بالرمز ∩ ويمكن تمثيلها كما بشكل 3 حيث تظلل منطقة التقاطع.



شكل (3)

X∩Y

مثال 8 :

إذا كان :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{2, 3, 5, 10\}$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$X \cap Y = \{2, 3\}$

قواعد خاصة بالتقاطع:

1- $X \cap Y \subseteq X$

2- $X \cap Y \subseteq Y$

3- إذا كانت $X = Y$ فإن :

$X \cap Y = X$ أو $= Y$

4- إذا كانت $X \subseteq Y$ فإن :

$X \cap Y = X$

مثال 9 :

إذا كان :

$X = \{2, 6\}$

$Y = \{2, 4, 6\}$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$X \cap Y = \{2, 6\} = X$

5- إذا كان :

$X \cap Y = \phi$

فإن المجموعة X منفصلة عن المجموعة Y

6- $X \cap Y = Y \cap X$

مثال 10 :

إذا كان :

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y = \{ 2, 3, 5, 10 \}$

أوجد $X \cap Y$, $Y \cap X$

الحل :

$X \cap Y = \{2, 3\}$

$Y \cap X = \{2, 3\}$

$\therefore X \cap Y = Y \cap X$

7- $X \cap Y \sqsubset X \cup Y$

حيث نجد فى المثال السابق أن:

$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$

$\therefore X \cap Y \sqsubset X \cup Y$

8- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

فى هذه القاعدة توزع عملية التقاطع على الاتحاد

9- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

فى هذه القاعدة توزع عملية الاتحاد على التقاطع.

ملحوظة: يترك للطالب إثبات هذه القواعد حيث يمثل مجموعات Z, Y, X ويفرض لها عدة عناصر لإثبات المطلوب.

المجموعة المكملة :

إذا كانت المجموعة الشاملة هي μ وكانت X مجموعة جزئية من μ، فإن المجموعة المكملة لـ X ويرمز لها بالرمز X^c تعرف كالآتي:

$$X^c = \{ x : x \notin X, x \in \mu \}$$

مثال 11:

إذا كان :

$\mu = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
$X = \{1, 5, 9 \}$

أوجد المجموعة المكملة لـ X أو X^c.

الحل:

$X^c = \{ 1, 5, 9 \}$

قواعد خاصة للمجموعة المكملة :

إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة وكانت X مجموعة جزئية منها. فإننا نلاحظ القواعد الآتية:

1- $(X^c)^c = X$

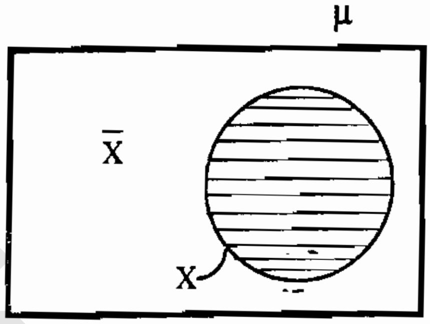
2- $X \cap X^c = \phi$

3- $\mu^c = \phi$

4- $X \cup X^c = \mu$

ملحوظة:

يعبر الرمز c (المتواجد فوق رمز المجموعة) عن المكملة وأحيانا يوضع بدله شرطه لتصبح $\overline{X}$ رمزاً للمجموعة المجملة لـ X، وتمثل كما بشكل (4)



شكل (4)

يبين الشكل :

المجموعة X

المجموعة المكمله $X^c = \overline{X}$

المجموعة الشاملة μ

فرق بين مجموعتين:

يعرف فرق بين مجموعتين B, A فى حالتين على النحو الآتى:

1- $A - B = \{a : a \in A , a \notin B\}$

الفرق فى هذه الحالة يكون جميع العناصر الموجودة فى المجموعة A وغير موجودة فى المجموعة B.

2- $B - A = \{ b : b \in B, b \notin A \}$

أما الفرق فى هذه الحالة فيكون جميع العناصر الموجودة فى المجموعة B

وغير موجودة فى المجموعة A.

مثال 12 :

إذا كان :

$A = \{ 1, 3, 5, 9 \}$

$B = \{ 2, 5, 7, 9 \}$

أوجد :

1- $A - B$
2- $B - A$

الحل :

$A - B = \{ 1, 3 \}$

$B - A = \{ 2, 7 \}$

قواعد خاصة بالفرق بين مجموعتين :

1- $A - B \neq B - A$
2- $A - B \cap B\text{-}A = \phi$

3- إذا كانت المجموعة A جزء من المجموعة B

$\therefore A - B = \phi$

مثال 13 :

إذا كانت μ هى المجموعة الشاملة، B, A مجموعات جزئية منها بحيث أن:-

$\mu = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots, 9, 10 \}$

$A = \{ 1, 3, 4, 5, 8 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, 8, 9 \}$

أوجد :

$A \cap B$, AUB , B^c, A^c

$(A \cap B)^c$, $(AUB)^c$, $A^c \cap B^c$, $A^c U B^c$

الحل:

$A^c = \{2, 6, 7, 9, 10\}$

$B^c \{1, 3, 5, 7, 10\}$

$AUB = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$A \cap B = \{4, 8\}$

$(AUB)^c = \{7, 10\}$

$A^c U B^c = \{2, 6, 7, 9, 10, 1, 3, 5\}$

$A^c \cap B^c \{7, 10\}$

$(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$

من هذا المثال نلاحظ الآتى:

1- $(AUB)^c = A^c \cap B^c$

2- $(A \cap B)^c = A^c U B^c$

وهو ما يعرف بقانونى مورجان.

ضرب مجموعتين:

أولا: إذا كانت :

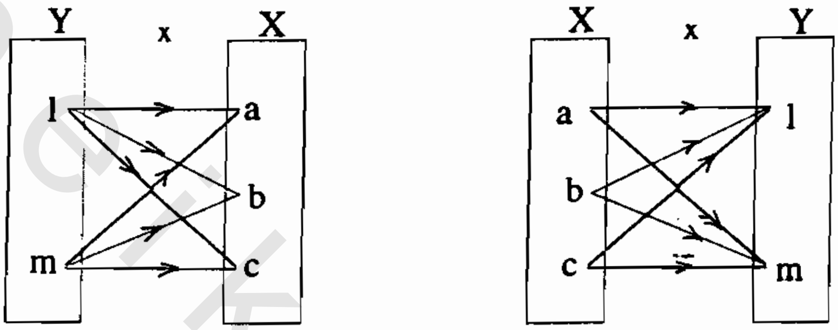
X = {a, b, c}

Y { l, m}

$\therefore$ X x Y = {(a,l), (a, m), (b, l), (b, m), (c, l), (c, m),}

, Y x X = {(l,a) (l,b), (l,c), (m, a), (m, b), (m, c)}

يعرف الضرب السابق بالضرب الكارتيزى ويمكن تمثيله بالاسهم بشكل 5.



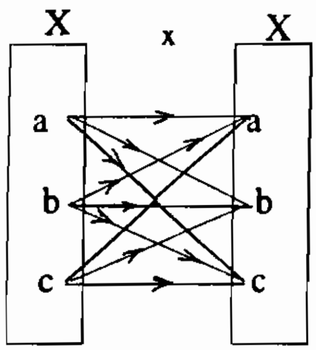
شكل (5)

ثانيا: إذا كانت :

X = { a, b, c } .

$\therefore$ X x X = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c,b), (c, c)}

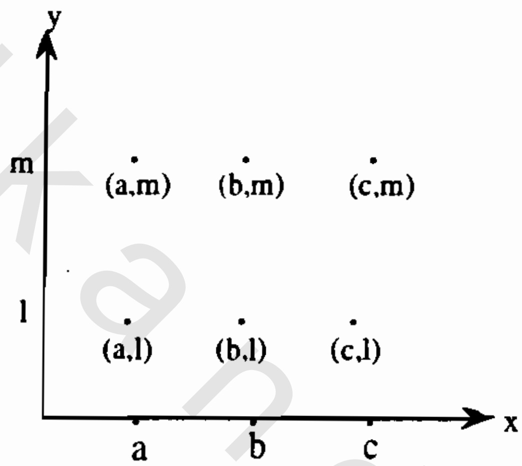
ويمكن تمثيل حاصل الضرب الكارتيزى بالاسهم كما بشكل 6



شكل (6)

تمثيل الضرب الكارتيزى بيانيا:

يمكن تمثيل الضرب الكارتيزى بيانيا حيث عناصر المجموعة X تمثل على المحور x وعناصر المجموعة Y تمثل على المحور y كما بالشكل 7



شكل 7 يبين حاصل الضرب X x Y

حيث :

$X = \{a, b, c\}$

$Y = \{l, m\}$

ملحوظة هامه :

حاصل الضرب يعتبر مجموعة من الازدواج المرتبة حيث :

$X \times Y \neq Y \times X$

مثال 14:

إذا كان :

$A = \{ 1, 3 \}$

$B = \{ x, y, z \}$

أوجد :

a- $A \times B$ b- $B \times A$

الحـــل :

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (3, x), (3, y), (3, z)\}$

$B \times A = \{(x, 1), (x, 3), (y, 1), (y, 3), (z, 1), (z, 3)\}$

تماريـــــن (1)

1- ما هى المجموعة الشاملة لكل مما يأتى:

a- A= {3, 7, 11, 19}

b- B= {فرنسا ، ألمانيا ، انجلترا، ايطاليا}

c- C= {سرت، بنى غازى ، طرابلس}

d- D= {السويس والقليوبية ، الاسكندرية، القاهرة}

2- إذا كانت µ هى مجموعة الأعداد الطبيعية فما هى المجموعة المكملة لنمجموعة Aحيث :

A = { 1, 3, 5, ... }

3- اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية A حيث:

A = { x : 5 مجموعة الأعداد التى تقبل القسمة على x }

بطريقة القائمة.

4 - بيّن أي من العلاقات الآتية صحيحة وأى منها خطأ:

a- $D \in A$

b- $1 \subset A$

c- $\{1\} \subset A$

d- $\{1\} \in A$

e- $5 \in A$

f- $2 \in A$

حيث:

A = {1, 3, 5, 7}
B = (3, 5}
C= {2}
D= {5, 7, 9}

5- إذا كانت :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{2, 3, 4, 5\}$

$D = \{3, 4\}$

ضع الرمز (المناسب $\in$, $\notin$, $\subset$, , $\not\subset$ فى كل مما يأتى:

a) $3 \ldots A$

b) $2 \ldots D$

c) $C \ldots D$

d) $C \ldots B$

e) $\phi \ldots A$

f) $A \cap B \ldots C$

6- إذا كانت μ هى المجموعة الشاملة حيث :

$\mu = \{ x : o < x < 10\}$

$P, K, F \subset \mu$

$P = \{ x : 1 < x < 4 \}$

$K = \{ 1, 3, 5 \}$

$F = \{ 2, 4, 6\}$

أوجد الآتى:

a) $P \cup K$

b) $P \cap k$

c) P^c

d) $P - K$

e) $K - P$

f) $P \cap (K \cup F)$

g) $(P \cup K) \cap F$

h) $(P \cup F) \cap (K \cup F)$

7- إذا كانت μ هى المجموعة الشاملة حيث :

$\mu = \{-10, -9, -8, \ldots, \ldots, 9, 10\}$

وكان $A \geq -4$, $B > -8$, $C \leq 8$ مجموعات جزئية من μ فأوجد:

A^c , $(A \cup B)^c$ ، $A \cap B$, $A \cap C$

8- إذا كانت μ تمثل المجموعة الشاملة حيث:

$\mu = \{x : -2 < x \leq 8\}$, A, B, C, $\sqsubset \mu$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{o\}$

أ- حدد عناصر المجموعة الشاملة μ

ب- أوجد كل من :

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - C$

d) $(A \cap C)^c$

9- إذا كانت :

$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$Y = \{4, 8, 12, 16\}$

$Z = \{12, 18, 14\}$

أوجد حاصل ضرب الآتي:

a) $X \times Y$

b) $X \times Z$

c) $Z \times Z$

d) $(X - Y) \times Z$

e) $(X \cap Y) \times Z$

10- إذا كانت :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

ارسم الشبكة البيانية $(X \times X)$ وأوجد عليها الآتى:

(a) L : مجموعة أزواج مرتبة مجموع عنصريها أقل من 6.

(b) M : مجموعة أزواج مرتبة والعنصر الأول أكبر من العنصر الثانى.

(c) $L \cap M$.

الأعداد الحقيقيـــة

من المجموعات الهامة فى الرياضيات ويرمز لها بالرمز R وتشمل :-

1- مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز Z وتشمل :

أ- العنصر المحايد:

وهما الصفر والواحد.

ب - الأعداد الطبيعية N :

وهى مجموعة الأعداد الناتجة من الاضافة المتكرره للعدد واحد.

$N = \{ 1, 2, 3, ... , ... \}$

جـ - الأعداد الصحيحة السالبة N- :

وتسمى مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة.

أىّ أن الأعداد الصحيحة Z يمكن كتابتها على الصورة:-

$$Z = \{-N\} \cup \{N\} \cup \{O\}$$
$$= O, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm ......$$

2- مجموعة الأعداد النسبية Q:

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة :

$$Q = \{x : x = \frac{a}{b} , a, b \in Z , b \neq O\}$$

مثال لذلك : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ ، ....

وبالتالى يمكن وضع العلاقة الآتية بين المجموعات:

$$R \supset Q \supset Z \supset N$$

3- مجموعة الأعداد الغير نسبيه I:

ومثال لذلك : $\sqrt{3} + \sqrt{5}, \Pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة I كالآتي:

$$I = \{y : y = \frac{c}{d} \quad , c \text{ or } d \notin Z, d \neq o \}$$

واتحاد مجموعة الأعداد النسبية Q مع الأعداد الغير نسبيه I يكون مجموعة الأعداد الحقيقية أىّ أن :

$$R = Q \cup I \quad , \quad Q \cap I = \phi$$

وميزة الأعداد الحقيقية إنه يمكن تمييزها على خط مستقيم (خط الأعداد) وإيضاح المجالات (الفترات) عليه.

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

من الأهمية معرفة خواص الأعداد الحقيقية نذكر منها الآتى:

بفرض أن z, y, x أعداد حقيقية فإن:

1- $x + z = y + z \rightleftharpoons x = y$ (خاصية الحذف للجمع)

2- $x.z = y.z, z \neq o \rightleftharpoons x = y$ (خاصية الحذف للضرب)

3- $x.y = o \rightleftharpoons$ $x=o$ أو $y = o$ (قاعدة عوامل الصفر)

إذا كان $b \in R, \ a \in R$ فإن :-

4- $a.o = o$

5- $(-1) a = -a$

6- $-(-a) = a$

7- $-(a+b) = (-a) + (-b)$

8- $(-a)\ b = a(-b) = -ab$

9- $(-a)\ (-b) = ab$

10- $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} \quad , b \neq o$

11- $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b} \quad , b \neq o$

وبفرض أن جميع مقامات هذه الكسور لا تساوى صفرا فإن :

12- $b\left(\dfrac{a}{b}\right) = a$

13- $\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$

14- $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}} = a$

15- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \rightleftharpoons ad = bc$

16- $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$

17- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

18- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

19 - $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

20- $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

المجال (الفترات) :

يمكن للمتغير x أن يأخذ قيمة من مجموعة أعداد معينة تسمى حيز xأو مجال x وهذا المجال ينقسم إلى قسمين:

1- مجال محدود   2- مجال غير محدود

1- المجال المحدود:

ينقسم بدوره إلى أربعة أقسام كالآتي:

أ- مجال مفتوح:

وفية يأخذ المتغير جميع الأعداد الحقيقية بين عددين ثابتين b,a حيث يعبر عنه بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : a < x < b\}$$

والرمز المختصر لهذا المجال هو :

$$(a, b)$$

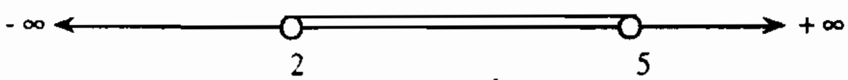
مثال 1 :

ضع المجموعة الآتية على خط الأعداد:

$$X = \{x : 2 < x < 5\}$$

الحل:

نضع دائرة مفتوحة على العدد 5 وأخرى على العدد على خط الأعداد كما بشكل 8.



شكل 8

أى أن المتغير x يأخذ جميع القيم بين العددين 2 , 5 ولا يشمل كلا

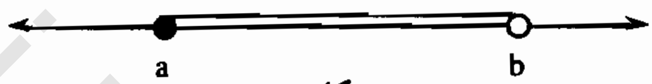
العددين ويعبر عن ذلك بالرمز : $(2, 5)$

ب- مجال نصف مفتوح:

يرمز له بالرمز $(\ a,b\ ]$ حيث يحتوى المجال جميع الأعداد ابتداء من a وحتى الأصغر من b وتكتب بشكل مجموعة أعداد كالآتى:

$$X = \{x : a \leq x < b\}$$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما هو واضح بشكل 9.



شكل 9

حيث:

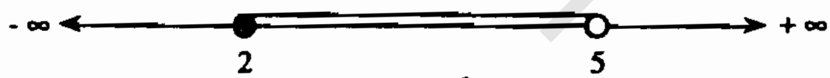
الدائرة المغلقة تعنى أن العدد ضمن المجال.

الدائرة المفتوحة تعنى أن العدد ليس ضمن المجال.

مثال 2:

عبر عن المجال $(2,5]$ على خط الأعداد وفي صورة مجموعة أعداد.

الحل: المجال على خط الأعداد كما بشكل 10.



شكل 10

المجال على صورة مجموعة :-

$$X = \{x : 2 \leq x < 5\}$$

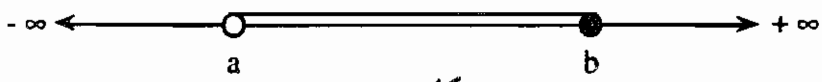
جـ - مجال نصف مفتوح:

ويرمز له بالرمز $[a,b)$ حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الأكبر من a

وحتى العدد b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : a < x \leq b\}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 11.



شكل 11

د- مجال مغلق:

يرمز له بالرمز [a , b] حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الحقيقية

من a إلى b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : a \leq x \leq b \}$$

مثـال 3:

عبر عن المجال [2, 5] على خط الأعداد.

الحل: كما هو واضح بشكل 12.

شكل 12

ملحوظـــــة:

يتم التفـريق بين المجال المفتوح (a, b) وإحداثيى النقطة التى إحداثيها الأول a والثانى b من خلال المقصود فى التعبير إذا كان مجال مفتوح أو نقطة.

2 - مجال غير محدود:

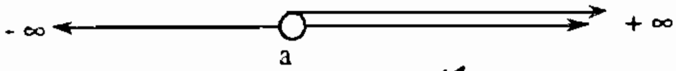
إذا كانت a نقطة معلومة فيكون حيز المتغير وفقا للآتي:

أ - (a, ∞):

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{x : \quad x > a\}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 13.



شكل 13

ب- $[a , \infty)$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كلآتى:

$$X = \{x : \quad x \geq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 14.

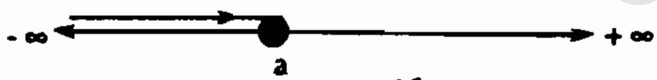
شكل 14

جـ - $(-\infty , a]$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{x : \quad x \leq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 15



شكل 15

د - $(-\infty , a)$.

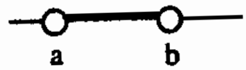
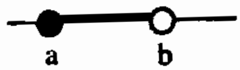
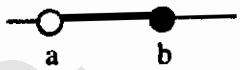
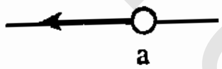
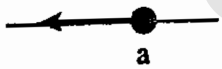
ويعبر عن ذلك بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{ x : \quad x < a \}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل : 16

شكل 16

يمكن تلخيص ما سبق فى الجدول الآتى بصورة مبسطة :

الفترة	تعبير عن الفترة بصورة مجموعة	لتمثيل الهندسى
(a , b)	$\{ x : a < x < b\}$	
$[, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b \}$	
$[a, b]$	$\{x: a \leq x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x : \quad x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x : \ x \geq a\}$	
$(-\infty, a)$	$\{x \ : \ x < a\}$	
$(-\infty , a]$	$\{x : x \leq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$	

تماريـــــــن (2)

1- مثل بيانيا كلا من المجموعات أو الفترات الآتيه:

(a) $\{x : 3 \le x < 6\}$

(b) $[-3 , 2]$

(c) $(4, 7)$

(d) $\{x : x < 2\}$

(e) $\{x : -4 \le x \le 6\}$

2- أكتب الفترات الآتية فى صورة تكوين مجموعة :

(a) $[-3 , 5)$ (b) $(3, 9)$

(c) $(-7, -3)$ (d) $(-1, 4)$

3- إذا كانت :

$a = [-3, 5]$

$b = [-1 , 2]$

مثل بيانيا b, a على خط الأعداد . ثم أوجد الآتى:

$a \cup b$, $a \cap b$, $a - b$

التحليـــــــل :

تعتبر الأعداد :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., ...

أعدادا أولية حيث لا يوجد تحليل لهذه الأعداد إلى عوامل حاصل ضرب سوى نفس هذه الأعداد والعدد 1 فمثلا :

$2 = 2 \times 1$

$3 = 3 \times 1$

$5 = 5 \times 1$

وهكذا........

أما الأعداد الأخرى فتسمى أعدادا مركبة حيث يمكن تحليلها إلى عوامل حاص ضرب أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية السابق ذكرها فمثلا:

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$= 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$= 2^2 \times 5$

وهكذا.......

أن يتم تحليل الأعداد المركبة إلى أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية.

وبنفس الطريقة تتناول تحليل كثيرات الحدود معاملاته أعداد صحيحة الى كثيرات حدود معاملاته أيضا أعداد صحيحة فمثلا:

1- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

2- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

ففى المثال الأول نجد أن العدد 2 لا يمكن تحليله إلى أعداد صحيحة،
وبالتالى نقول أن المقدار $x^2 - 2$ لا يمكن تحليله إلى مقادير أو عوامل أولية وبالتالى يعتبر هذا المقدار كثير حدود أولي. أما المثال الثانى فيمكن تحليل المقدار إلى عاملين $(x + 2)$ x $(x - 2)$ أوليين حيث لا يمكن تحليلهما ثانية.
وبالتالى يقال أن كثير الحدود $x^2 - 4$ أمكن تحليله إلى $(x - 2)$ ، $(x + 2)$ كثيرات حدود أولية، ولذلك يسمى المقدار $x^2 - 4$ كثير حدود مركب.

الصيغ الهامة المستخدمة بكثرة فى كثير من التحليلات :

اسم التحليل	التحليل إلى عوامل أولية	كثيرة حدود	
مربع كامل	$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$	1-
مربع كامل	$(x - y)^2$	$x^2 - 2xy + y^2$	2-
فرق بين مربعين	$(x-y\ (x + y)$	$x^2 - y^2$	3-
مجموع مكعبين	$(x+y)(x^2-xy+y^2)$	$x^3 + y^3$	4-
فرق بين مكعبين	$(x-y)(x^2+xy+y^2)$	$x^3 - y^3$	5-

تمارين (3)

1- حلل كثيرات الحدود :

a) $4\,a^2 - 2\,a^2\,b^2 + 25b^2$

b) $a^4 + 6\,a^2 + 9$

2- حلل كثيرات الحدود :

a) $8\,a^3 + 27\,b^3$

b) $a^3 - 64\,b^3$

c) $a^6 - b^6$

3- حلل كل كثير الحدود ولو أمكن:

a) $2\,xy + 4x$

b) $(x+y) + 2(x+y)$

c) $(x^2 - y^2) - (x + y)$

d) $x^3 - 125y^3$

e) $x^2 - 3x + 2$

f) $x^2 + 2x - 8$

g) $x^2 + 3\,x - 10$

h) $x^2 + 11\,x + 24$

l) $(x + y)^3 - 1$

m) $x^4 + 1$

4 – حلل الآتى :

$6x^2 - xy - 2y^2$

$2x^{2+7x+6}$

$x^2 - 6x + 8$

$x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$

5- أكتب الحد الأوسط فى كل مما يأتى:-

(a) $(a + 2b)(a + 5b)$

(b) $(x + 3)(x - 4)$

(c) $(a - 7)(a + 5)$

(d) $(x - 4)(x - 6)$

(e) $(2a + 3b)(a + 4b)$

(f) $(3x + 4y)(2x - y)$

(g) $(5x - 2)(3x + 1)$

(h) $(7a - 3b)(4a - 2b)$

6- أوجد ناتج المقادير الآتية:

(a) $(a + 7)(a + 3)$

(b) $(x + 5)(x - 3)$

(c) $(L - 8)(L + 1)$

(d) $(a - 6)(a - 5)$

(e) $(x^2 - 2y^2)(3x^2 - 4y^2)$

(f) $(ab - 2cd)(3ab - 4cd)$

(g) $(4Lm - h)(2Lm - 3h)$

(h) $(2x - 5y)(3y - Zx)$

7- أكتب الحد الناقص للمقادير الآتية:

(a) $(2x + 5)(3x - ...) = ... + ... - 10$

(b) $(3a - 2b)(... - 4b) = 15a^2 - ... + ...$

(c) $(4x + ...)(... - 5) = 8x^2 - ... - ...$

(d) $(... - 7)(5a + ...) = 10a^2 - 19a - ...$

8- ضع الآتى فى صورة مختصرة:

(a) $2(3x - 5)(2x + 1) - 3(4x + 1)(x - 7)$

(b) $2a^2 - (a + 4)(3a - 7) + 2(a - 4)(a - 1) - 36$

(c) $10a^2 - 2[3a^2 - (2a - 1)(a + 5) + 2(a + 2)(2a - 1) - 1]$

المعـــادلات

تعريـــــف :

المعادلة هى صيغة تعبر عن علاقة التساوى لمتغير (أو عدة متغيرات) وقد يسمى المتغير مجهولا وحل المعادلة معناه إيجاد قيمة المجهول.

أولا : المعادلات الخطية:

هى معادلات من الدرجة الأولى أى أكبر قوى للمتغير (المجهول) فيها يساوى واحد صحيح فهى إما أن تكون:-

I - معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد x

II - معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين x , y (معادلتين آنيتين).

III - ثلاث معادلات من الدرجة الأولى فى ثلاث مجاهيل x , y ,Z.

I- معادلات الدرجة الأولى فى مجهول واحد x:

نعتبر المعادلات الآتية:

$$(1)\ \frac{5x}{2} = 0$$

$$(2)\ x + 7 = 4$$

$$(3)\ 2x + 5 = o$$

$$(4)\ 2x = 8$$

$$(5)\ \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

وكلها معادلات تحتوى على مجهول واحد x ومن الدرجة الأولى لأنها مرفوعة للأس واحد وحل هذه المعادلات يكتب على هيئة مجموعات كالآتى:

(1) $\frac{5x}{2} = o$

يضرب طرفى المعادلة x $\frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$$
$$x = 0$$

مجموعة الحل لهذه المعادلة هى:

$$x = \{0\}$$

(2) $x + 7 = 4$

بجمع 7- للطرفين:

$$x - 7 + 7 = 4 - 7$$
$$x = -3$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى :-

$$x = \{-3\}$$

(3) $2x + 5 = 0$

بجمع 5- للطرفين

$$-5 + 2x + 5 = -5$$
$$2x = -5$$

ضرب الطرفين x $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(-5)$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى:

$$x = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

(4) $2x = 8$

بضرب الطرفين $x\ \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(8)$$

$$x = 4$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى :-

$x = \{4\}$

نلاحظ أن حل هذه المعادلات تم باستخدام خاصيتى الجمع والضرب بعدد لا يساوى صفرا. حيث تحولت المعادلة الخطية إلى معادلة مكافئة:

(5) $\frac{2}{x} = \frac{1}{x}$

بضرب طرفى المعادلة $X\ x^2$

$$x^2\left(\frac{2}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2x = x$$

$$2x - x = o$$

$$x = 0$$

وبالتعويض عن المعادلة الأصلية عن قيمة x

$$\therefore \frac{2}{0} = \frac{1}{0}$$

وهذه الكميات $\left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0}\right)$ كميات غير معرفة وبالتالى لا تتساوى فمن

المستحيل أن تتساوى الكميات الغير مُعرَّفة وبالتالى فإن $x = 0$ يعتبر حل مرفوض للمعادلة.

وعلى ذلك فإن المعادلتين:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x} \qquad , \quad x = 0$$

غير متكافئتين وبالتالى لا يوجد حل للمعادلة الأصلية. ويقال فى هذه الحالة أن مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ وتكتب :

$x = \phi$

ومثال آخر للمعادلتين الغير متكافئتين هو :

$$(6) \quad x^2 = 4$$

$$x = -2$$

تعتبرا معادلتين غير متكافئتين لأن مجموعة الحل للمعادلة الأولى هي:

$x = \{-2, 2\}$

، مجموعة الحل للمعادلة الثانية هي:

$x = \{-2\}$

وهما غير متساويتان وبالتالى نستطيع أن نصل إلى هذه القاعدة:-

المعادلات التى لها نفس مجموعة الحلول تسمى معادلات متكافئة والتى تختلف فيها مجموعة الحلول تسمى معادلات غير متكافئة.

أمثلة متنوعة :

مثال 7 :

حل المعادلة الآتية :

$$\frac{2x}{3} = 5 - \frac{x}{2}$$

الحـــل :

المضاعف المشترك البسيط هو 6

بضرب طرفى المعادلة X 6

$$\therefore 6\left(\frac{2x}{3}\right) = 6\left(5 - \frac{x}{2}\right)$$

$$4x = 30 - 3x$$

بجمع 3 x + للطرفين

$$3x + 4x = 30 - 3x + 3x$$

$$7x = 30$$

بضرب طرفى المعادله $X \ \frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7}(7x) = \frac{1}{7}(30)$$

$$x = \frac{30}{7}$$

∴ مجموعة الحل هي :

$$x = \left\{\frac{30}{7}\right\}$$

مثال 8 :

أوجد قيمة x فى المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4x} = \frac{1}{2}$$

الحل:

المضاعف المشترك البسيط للمقامات هو 12 x

∴ بضرب طرفى المعادله $X \; 12x$

$$\therefore 12x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\right) = 12x\left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$12 + 4x = 9 + 6x$$

$$-4 + 12 + 4x = -4x + 9 + 6x$$

$$12 = 9 + 2x$$

$$-9 + 12 = -9 + 9 + 2x$$

$$3 = 2x$$

بضرب طرفى المعادله $X \; \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(3) = \frac{1}{2}(2x)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

∴ مجموعة الحل هى :

$$x = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

مثال 9 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x+4} = \frac{8}{x^2-16}$$

الحل:

بضرب طرفى المعادلة X $(x^2 - 16)$

$$(x^2 - 16)\left[\frac{1}{x - 4} - \frac{5}{x + 4}\right] = (x^2 - 16)\,\frac{8}{x^2 - 16}$$

$$x + 4 - 5\,(x - 4) = 8$$

$$x + 4 - 5x + 20 = 8$$

$$-4\,x + 24 = 8$$

$$-4 = -16$$

$$\therefore\ x = \frac{-16}{-4} = 4$$

وبالتعويض عن قيمة 4 = x فى المعادلة الأصلية

$$\therefore \frac{1}{4 - 4} - \frac{5}{4 + 4} = \frac{8}{16 - 16}$$

$$\frac{1}{0} - \frac{5}{8} = \frac{8}{0}$$

وبما أن القسمه على صفر غير معرفة وبالتالى 4 = x حل مرفوض للمعادلة.

∴ مجموعة الحل للمعادلة هى:

$x = \phi$

تمارين (4)

I- أى زوج من المعادلات الآتية متكافئة:

1) $2x - 3 = 5$
$2x = 8$

2) $y = -2$
$y^2 = 4$

3) $\frac{2}{x} = \frac{7}{x}$
$2x = 7x$

4) $3x - 2 = 5$
$7x + \frac{2}{3} = 17$

II- أوجد مجموعة حلول المعادلات الآتية:

1- $4x + 3 = 11$

2- $3x - 2 = 7$

3- $2y - 5 = 7 - 3y$

4- $\frac{2}{x} - 3 = \frac{5}{x}$

5- $2(3x - 4) = 5(1 - 3x) + 8$

6- $\frac{1}{3} - 2x = -x + \frac{2}{3}$

7- $\frac{2 - 3x}{4} - \frac{1 - 3x}{6} = \frac{1}{12} + \frac{x - 2}{3}$

8- $\frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

9- $\frac{x}{x - 2} = -\frac{2}{3}$

10- $\frac{1}{3 - x} + \frac{7}{2x + 3} = 0$

II- المعادلتين الآنيتين:

هما معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين ويتم التعامل معهما فى آن

واحد لإيجاد قيمة كل مجهول على حده.

فكر الحل:

يتم توحيد معاملات المجهول الأول وباستخدام خواص المعادلات (الجمع والطرح) يمكن إيجاد قيمة المجهول الثانى والعكس صحيح.

مثال 1 :

حل المعادلتين الآتيتين: -

$4x + 5y = 3$ (1)

$x + y = 1$ (2)

الحل :

لايجاد قيمة x يتم ضرب المعادلة (2) x 5 وتبقى المعادله (1)كما هى :

$4x + 5y = 3$ (1)

$5x + 5y = 5$ (3)

بطرح المعادلتين (1) من (3)

$\therefore x + 0 = 2$ (4)

لايجاد قيمة y يتم ضرب المعادلة (2) x 4 وتبقى المعادلة (1) كما هى :

$4x + 5y = 3$ (1)

$4x + 4y = 4$ (5)

بطرح المعادلتين (5) من (1).

$\therefore y = -1$

$\therefore x = 2$

$y = -1$

والطريقة العامة التى تكتب بها المعادلات السابقة:-

$a_1 x + b_1 y = c_1$ (1)

$a_2 x + b_2 y = c_2$ (2)

بضرب المعادله $b_1 \times (2)$

، المعادلة $b_2 \times (1)$

$$\therefore a_1 b_2 x + b_2 b_1 = c_1 b_2$$
$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات y واحدة فى المعادلتين)

$$\therefore x (a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 - b_1$$

$$\therefore x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \qquad (6)$$

بضرب المعادلة $a_1 X (2)$

والمعادلة $a_2 X (1)$

$$a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = c_1 a_2 \qquad (7)$$

$$a_2 a_1 x + a_1 b_2 y = c_2 a_1 \qquad (8)$$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات x واحدة فى المعادلتين)

$$\therefore y (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$\therefore y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (9)$$

بشرط أن $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ فتكونا قيمتى x , y هما المعادلتين 6 , 9

فإذا وضعنا المعادلتين (1) ,(2) فى صورة مصفوفة :-

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

نجد أن محدد المصفوفة A Δ يساوى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\ b_2 - a_2\ b_1$$

فلايجاد قيمة Δx نقوم بإلغاء معاملى x (a_1 , a_2) ،نكتب بدلا لهما c_1 , c_2كالآتى:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1\ b_2 - b_1\ c_2$$

ولإيجاد قيمة Δy نقوم بإلغاء معاملى y (b_1 , b_2) ونكتب بدلا لهما c_1 , c_2 كالآتى:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1\ c_2 - c_1\ a_2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{c_1\ b_2 - b_1\ c_2}{a_1\ b_2 - b_1\ a_2}$$

$$, y = \frac{\Delta x}{y} = \frac{a_1\ c_2 - c_1\ a_2}{a_1\ b_2 - b_1\ a_2}$$

ولحل المثال السابق بواسطة المحددات نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\ (1) - 5\ (1) = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\ (1) - 5\ (1) = -2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\ (1) - 3\ (1) = 1$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = -1$$

II المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل x , y , z :

بنفس الطريقة السابقة يمكن حل المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل بمعلومية ثلاث معادلات مستقلة

$$a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z = c_1$$

$$a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z = c_2$$

$$a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z = c_3$$

وقد وجد أن مفكوك المحدد هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left[(a_{22}.\, a_{33}) - (a_{32}.a_{23})\right] - a_{21}\left[(a_{12}.a_{33} - a_{32}.a_{13})\right]$$

$$+ a_{31}\left[(a_{12}.\, a_{23}) - (a_{22}.a_{13})\right]$$

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر فى حل هذا النوع من المعادلات حتى رتبة n من المعادلات فى n من المجاهيل ونصها كالآتى:

إذا كان المحدد Δ لمعاملات النظام الخطى المكون من المعادلات بـ n من المتغيرات يختلف عن الصفر، فالنظام الخطى حل واحد فقط يمكن التعبير فيه عن قيمة كل مجهول لكسر مقامه هو المحدد Δ وبسطه محدد نحصل عليه من المحدد Δ باستبدال العمود المكون من معاملات ذلك المجهول بالأعداد:

$c_1 , c_2 , c_3 \qquad , c_n$

وسوف نستخدم فى دراستنا هنا ثلثا مجاهيل z , y , x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{12} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{23} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

والمحدد الثنائى لـ a_{11} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 11$

والمحدد الثنائى لـ a_{21} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 21$

والمحدد الثنائى لـ a_{31} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 31$

وفى الحالة العامه فإن المحدد Δij مرافق للعنصر aij وإشارته تكون:

سالبه إذا كان $i + j$ عدداً فرديا

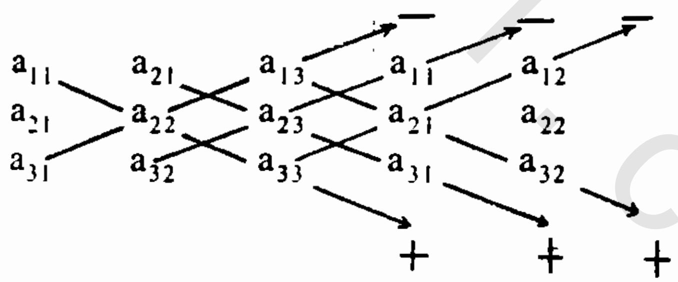
موجبه إذا كان $i + j$ عدداً موجبا

ويمكن فك المحدد السابق بالطريقة التاليه حيث الاسهم العليا تكون حاصل ضرب الثلاث عناصر مع عكس إشارتها والاسهم السفلى حاصل الضرب بنفس الاشارة بعد تكرار العمود الأول والعمود الثانى.

وتسمى هذه الطريقة بطريقة سارس لفك محدد المرتبه الثالثه وهو كما بشكل (17) يكون قيمة المحدد Δ هى:

$$\Delta = (a_{11} \,.\, a_{22} \,.\, a_{33}) + (a_{12} .\, a_{23} \,.\, a_{31}) + (a_{13} .\, a_{21} \,.\, a_{32})$$

$$- (a_{12} \,.\, a_{21} \,.\, a_{31}) - (a_{11} .\, a_{23} \,.\, a_{32}) - (a_{13} .\, a_{22} \,.\, a_{31})$$



شـــكل 17

مثال 1 :

استخدم قاعدة كريمر لحل المعادلات الآتية:

$$4x + 5y + z = 6$$
$$x + y + 2z = 7$$
$$2x - y + 3z = 14$$

الحــل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\left[(1(3) - (-1(2))\right] -1 \left[(5(3)-(-1)(1)\right]$$

$$+ 2\left[(5(2) - (1)(1))\right]$$

$$= 20 - 16 + 18 = 22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -7 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-5) \;\; -7(-16) + 2(-9)$$
$$= 44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} +2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(7) -1(-4) + 2(-5)$$
$$= -22$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 4\ (-21)\ -1\ (-76)\ +2\ (-29)$

$= 66$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

مثال 2:

أوجد حل المثال السابق بطريقة سارس لفك محدد الرتبة الثالثة:

الحل :

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$= -2 + 8 - 15 + 12 + 20 - 1 = 22$

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & 5 \\ 7 & 1 \\ 14 & -1 \end{array}$$

$= -14 + 12 - 105 + 18 + 140 - 1 = 44$

$$\Delta\ y = \left|\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{array}$$

$$= -14 - 112 - 18 + 84 + 24 + 14 = -22$$

$$\Delta\ z = \left|\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$= -12 + 28 - 70 + 56 + 70 - 6 = 66$$

$$x = \frac{\Delta\ x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta\ y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta\ z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

تمارين (5)

أوجد حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام قاعدة كريمر:

1-
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

2-
$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 4z &= -2 \end{aligned}$$

3-
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -5 \\ -2x + y + z &= 4 \\ 3x - 4z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

4-
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

5-
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

6-
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 1 \\ x + z &= -2 \\ x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

خواص المحددات :

الخاصية الأولى:

لا تتغير قيمة المحدد إذا تبادل الوضع بين الصفوف والأعمدة:

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A` = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبفك المصفوفة بالنسبة إلى العمود الأول وإيجاد قيمة محددها.

$$|A| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\ \Delta_{31} \quad (1)$$

وبإيجاد قيمة محدد المصفوفة `A

$$|A`| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\ \Delta_{31} \quad (2)$$

من (1) , (2) ينتج أن :-

$$A = A`$$

الخاصية الثانية:

إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة كل منها في حاصل ضرب عناصرها على الصفر، بالتالى يكون المحدد مساويا للصفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\,\Delta_{13}$$

$$= (a_{11}\,a_{22}\,a_{33}) - a_{11}\,a_{32}\,a_{23}) - (a_{12}\,a_{21}\,a_{33})$$

$$+ (a_{12}\,a_{31}\,a_{23}) + (a_{13}\,a_{21}\,a_{32}) - (a_{13}\,a_{31}\,a_{22})$$

وبالنظر للمفكوك نجد أن يتكون المجموع الجبرى لستة مقادير كل مقدار منها هو عبارة عن حاصل ضرب ثلاثة عناصر من المحدد.

نجد أن كل مقدار يتكون من عناصر مأخوذه من الصفوف الثلاثة والأعمدة الثلاثة التى يتكون منها المحدد. وبالتالى إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة تحتوى كل منها فى حاصل ضرب عناصرها على الصفر. ولذلك يكون المحدد مساويا للصفر.

Ex (1) $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(0) + 1\,(0) \quad +2\,(0) \quad =0$$

Ex (2) $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ x+y & -3x+15 & y+5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

فأوجد قيمة x , y

$\therefore \quad |A| = 0$

$\therefore \quad x + y = 0 \qquad (1)$

$, \quad y + 5 = 0 \qquad (2)$

$, \quad -3x + 15 = 0 \qquad (3)$

من (2) : $y = -5$

من (3) : $x = 5$

وهذا يحقق المعادلة (1) : -

$x + y = 0$

$5 + (-5) = 0$

الخاصية الثالثة:

تتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع صفان. وتتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع عمودان.

فإذا كان :

$$A_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

و

$$A_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_3 & M_2 \\ N_1 & N_3 & N_2 \\ R_1 & R_3 & R_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore A_1 = -A_2$

على الطالب إثبات هذه الخاصية عن طريق فك المحددين

الخاصية الرابعة :

إذا ضربت عناصر صف واحد فقط أو عناصر عمود واحد فقط من مصفوفة مربعة بعدد فإنه يجب ضرب محددها السابق فى هذا العدد.

فإذا كان :

$$A_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

,

$$A_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & KM_3 \\ N_1 & N_2 & KN_3 \\ R_1 & R_2 & KR_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A_2| = K\,|A_1|$$

الإثبات:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بالنسبة للعمود الأخير

$$\therefore |A_1| = a_{13}\Delta_{13} - a_{25}\,\Delta_{23} + a_{33}\,\Delta_{33}$$

وبضرب أى صف أو أى عمود k X

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = k\, a_{13}\, \Delta_{13} - k\, a_{23}\, \Delta_{23} + k\, a_{33}\, \Delta_{33}$$
$$= k\,(a_{13}\, \Delta_{13} - a_{23}\, \Delta_{23} + a_{33}\, \Delta_{33}) = k\,|A_1|$$

الخاصية الخامسة:

تكون قيمة المحدد مساوية للصفر إذا وجد فيه صفان متساويان أو عمودان متساويان.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويفرض أن عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثانى

$a_{11} = a_{21}$, $a_{12} = a_{22}$, $a_{13} = a_{23}$

ويفك المحدد ينتج المطلوب.

الخاصية السادسة:

إذا كانت فى المحدد النسبة بين العناصر المتناظرة فى أي صفين أو أي عمودين مقدارا ثابتا فإن قيمة هذا المحدد = صفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويفرض أن :-

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

فإن هذا المحدد = صفر

الاثبات :

$$a_{11} = k\,a_{21} \quad , \quad a_{12} = ka_{22} \quad , \quad a_{13} = ka_{23}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k\,(0)$$
$$= 0$$

الخاصية السابعة :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإذا كان:

$$a_{11} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$a_{12} = y_1 + y_2 + y_3$$

$$a_{13} = z_1 = z_2 + z_2$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الخاصية الثامنة:

إذا كان :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

واستخدمت التحويله:

$$i_2 = ki_1 + i_2$$

$$\therefore |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبالمثل :

$$j_2 = kJ_1 + J_2$$

حيث $i \equiv$ الصف ، $J \equiv$ العمود

أمثلــة متنوعة :

مثـــال 1 :

إذا كان :-

$$A = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & 9 & -27 \end{vmatrix} = 0$$

أوجد قيمة x

الحل :

∵ المحدد = 0

∴ الاحتمال الأول 0 = i_1 (جميع عناصر الصف الأول = 0)

$\therefore\ x = 0 \quad , \quad x^2 = 0 \quad , \quad x^3 = 0$

الاحتمال الثانى هو أن:-

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثانى

$\therefore\ x = 2 \quad , \quad x^2 = 4 \quad , \quad x = 8 \rightarrow x = 2$

الاحتمال الثالث هو أن:

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثالث

$\therefore\ x = -3 \quad , \quad x^2 = 9 \quad , \quad x^3 = -27 \quad \rightarrow x = -3$

∴ قيم x التى تجعل المحدد = 0 هى :

$x = \{ 0 , 2, -3 \}$

مثـــال :

أوجد قيمة محدد المصفوفة :

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

تمارين (6)

1- أوجد قيم المحددات الآتية:

a - $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ b- $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & 40 \\ -6 & 9 & 13 \end{vmatrix}$

c - $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -7 & -8 & 6 \\ 15 & 11 & 9 \end{vmatrix}$ d- $\begin{vmatrix} -8 & -12 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2- إثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$$

3- إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

4 - إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4a\ bc$$

5- إثبت أن معـادلـــة الخط المسـتقيم المـار بالنقطتين $Q\ (x_2\ ,\ y_2)$, $P(x_1\ ,\ y_1)$ هـــي:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6- استخدم المسألة السابقة لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقاط:

a) p (3, 4) , Q (-2, 7)

b) p (1, -5) , Q(3, -8

7- أوجد قيمة x التى تجعل المحدد = 0 فى كل من :

a) $\begin{vmatrix} x & x^2-1 & 2x \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ x & 4 & 3 \end{vmatrix}$

8- أوجد الشروط الواجب توافرها فى الثلاث نقاط:

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$

حتى تقع على خط مستقيم.

9- إستخدم نتيجة المسأله (8) لإثبات أن :

P (3, 5), Q (1, 1), R (-2, -5)

تقع على إستقامة واحدة

ثانيا: معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد:

يوجد ثلاث طرق على الترتيب نوجزها فيما يلي:-

I- طريقة التحليل إلى عوامل (التحليل إلى أقواس):

مثال 1 :

أوجد حل المعادلة الآتية :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

الحـــل :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

∴ حاصل ضرب قوسين = 0

$$\therefore (x + 1) = 0$$
$$x = -1$$
$$, \quad (x + 2) = 0$$
$$\therefore x = -2$$

مثال 2 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 2)(x - 5) = 0$$
$$\therefore x - 2 = 0$$
$$\therefore x = 2$$
$$, \quad x - 5 = 0$$
$$\therefore \quad = 5$$

II طريقة إكمال المربع:

فى حالة عدم إمكانية الحل بالطريقة السابقة يتم تحويل المعادلة إلى معادلة مكافئة على الصورة $(x+a)^2 = b$

حيث b , a ثوابت

مثال 3 :

أوجد حل المعادلة:

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة :

$$x^2 + 6x = -1$$

لإكمال المربع يتم إضافة الحد الأخير فى الطرف الأيسر وأيضا فى الطرف الأيمن لتبقى المعادلة كما هى.

الحد الأخير = مربع نصف معامل x = $\left(\frac{\text{معامل } x}{٢}\right)^2$

$$9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

∴ يضاف العدد 9 لكلا الطرفين بهذه الصورة:

$$x^2 + 6x + 9 = -1 + 9$$

$$(x+3)^2 = 8$$

$$\therefore x + 3 = \pm\sqrt{8}$$

$$\therefore x = -3 + \sqrt{8}$$

$$,\quad x = -3 - \sqrt{8}$$

ملحوظـــة :

جميع معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد لها حلين.

III- طريقة القانون العام :

إذا تعذر الحل بالطريقتين السابقتين يتم استخدام القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. حيث توضع المعادلة على الصورة الآتية:

$$ax^2 + b\,x + c = 0$$

a ، b ، c ثوابت ، $a \neq 0$

ويستخدم القانون الآتى لإيجاد جذرى x (قيمتى x):-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويرمز بالمقدر تحت الجذر $b^2 - 4ac$ بالرمز Δ هو مميز المعادلة وتتوقف نوعية جذور المعادلة على إشارة هذا المميز فإذا كان :

1) $\Delta > 0$

يكونا الجذران حقيقيان ومختلفان

2) $\Delta = 0$

يكون الجذران حقيقيان ومتساويان

3) $\Delta < 0$

يكون الجذران تخيلان

وبفرض أن جذور المعادله هما l , m (أى قيمتىx) فإن :

$$l + m = \frac{-b}{a}$$

$$lm = \frac{c}{a}$$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (l + m)x + lm = 0$$

مثال 4:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

الحل:

$$a = 2 \;,\; b = 5 \;,\; c=1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2\,(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\,(2)\,(1)}}{2\,(2)}$$

∴ مجموعة الحل هى :

$$\left\{ \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \;,\; \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$$

تمارين (7)

أوجد حل المعادلات الآتية:

1- $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} =$

2- $x^3 - x^2 - 12x = 0$

3- $x^2 + 1 = 8x$

4- $3x^2 - 5x + 1 = 0$

5- $1 - \frac{1}{9}x^2 = 0$

6- $4x^2 + 12x + 9 = 0$

7- $\frac{2x-1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x-2}$

8- $x^2 + 6x + 4 = 0$

9- $3x^2\ 2x + 5 = 2x + 3$

10- $\frac{2x-1}{x} + 1 = \frac{1}{x+2}$

11- $x(x+6)+11=-2(2x+5)$

12- $x^3+6x+5 = 0$

13- $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}=2$

14- $x^3-1 = 0$

15- $2x^2+3x+6 = 0$

16- $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$

أوجـد مـجـمـوعـة الحل لكل من المـعـادلات الآتيـه (مـجـمـوعـة الحل الحقيقية):-

1- $x^3-3x^2-6x-8=0$

2- $2x^3+5x^2-2x-5=0$

3- $x^3 = 1$

4- $x^3 = -1$

5- $x^3 = 8$

6 - $x^3 = 64$

الأســس :

أولا: الأســس الصحـيحـة:

إذا كانت x عدد حقيقى ، n , m عدد صحيح فإنه يمكن إستخدام التعريف الآتى:

$x^n = x.\ x.\ x.\ \dots\dots\dots\ x$

حيث مكررة لعدد n من المرات. وتسمى x أساس القوة، n تسمى الأسس.

فمثلا

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

كما يمكن وضع قوانين الأسس الآتية والتى يمكن إستنتاجها من التعريف السابق.

1- $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

2- $(x.\ y)^n = x^n \cdot y^n$

3- $(x^n)^m = x^{n.m}$

4- $$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & m > n \\ 1 & m = n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

5- $(\frac{y}{x})^n = \frac{y^n}{x^n} \quad , x \neq 0$

أمثلة عددية :

1- $3^2 \;.\; 3^3 \qquad = 3^5$

2- $(\sqrt{3})^5 \;.\; (\sqrt{3})^{-3} = (\sqrt{\ })^{5-3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

3- $((2).(7))^3 \qquad = (2)^3.(7)^3$

4- $(2^3)^2 \qquad = 2^{3x2} = 2^6$

فإذا اتم وضع m = 0 فى القوانين السابقة نجد أن القانون رقم (1) بعدالتعويض فيه يصبح :

$$x^n \;.\; x^0 = x^n$$

$$x^0 = \frac{x^2}{x^n} = 1 \quad , \quad x \neq 0$$

أما فى حالة إستخدام الأس السالب. فيكون بفرض أن m = -n فى القانون رقم (1) الذى يصبح :

$$x^n \;.\; x^{-n} = x^{n=n} = x^0 = 1$$

$$\therefore\; x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

وعلى ذلك يمكننا الآن تعميم القوانين السابقة ليكون الأس موجبا أو صفرا أو سالبا (فى القوانين الأسية الخمسة) إذا عرفنا أن:-

1- $x^0 = 1$

2 - $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

مع الوضع فى الاعتبار أن (0^0) كمية غير معرفة.

ويمكن أيضا استنتاج القواعد الآتيه:

I $\quad x^a . x^b . x^c = x^{a+b+c}$

II $\quad \frac{x^a . x^b . x^c}{x^L . x^m . x^n} = x^{a+b+c-L-m-n}$

III $\quad \left(\frac{a \times b \times c}{x \times L \times y}\right)^n = \frac{a^n . b^n . c^n}{x^n . L^n . y^n}$

أمثلة :

1- $\quad x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

$\therefore 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

2- $\frac{3^5 . 3^{-2} . 3^7}{3^9 . 3^{-6} . 3^{-4}} = 3^{5-2+7-9+6+4} = 3^3 = 27$

ثانيا : الأسس الكسرية:

إذا كانت x عددا حقيقيا موجبا:

1- وكانت n عدد صحيح > 1 فإن :

$L = (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

وتسمى L الجذر النونى للعدد x

2 - وكانت m, n أعداد صحيحة فإن:

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

أمثلة :

1- $\quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad , \quad 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

2- $(9)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

3- $(8)^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = (\sqrt[3]{8})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

ملحوظة :

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n.L]{x^{m.L}}$$

أى أن إذا ضرب كل من دليل الجذر والأس المرفوع فوق x فى نفس العدد

L في نفس العدد L لا يغير من قيمة العدد. فمثلا :-

$$\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[6]{5^8}$$

تمارين (8)

١- ضع الآتى فى أبسط صورة :

(a) $2a^{3} \,.\, a^{-5}$

(b) $a^{m+n} \,.\, a^{m-n}$

(c) $3a^{-3} \,.\, 2a^{-2}$

(d) $\dfrac{a^{2}\, b^{4}\, c^{3}}{a\, b^{2} c^{2}}$

(e) $\dfrac{a^{8} \,.\, a^{4}}{a^{3} \,.\, a^{5}}$

(f) $\dfrac{12a^{6} \,.\, 3a^{-3}}{4a^{-4} \,.\, 5a^{2}}$

(g) $(21)^{3} + (14)^{2}$

(h) $(32)^{\frac{2}{5}} \,.\, 8^{\frac{2}{3}}$

(k) $\dfrac{(2^{5}\ 3^{5}\ 8^{5})^{6} \,.\, (24)^{3}}{(48)^{28}}$

(l) $\dfrac{(25)^{x-3} \,.\, 3^{x+3}}{125^{x-4}\ 15^{6-4}\ 9^{x-1}}$

2 - إثبت أن :

(a) $\dfrac{4^{3x-1} \,.\, 9^{2x} \,.\, (0.5)^{3}}{6^{4x-2}\ \sqrt[3]{8^{2x-5}}} = 36$

(b) $\dfrac{8^{x-\frac{1}{3}} \,.\, 3^{x+3}}{16^{x-1} \,.\, 6^{5-x} \,.\, 9^{x-1}} = \dfrac{1}{4}$

المتباينـــــات

تعريـــــف :

لكل عددين حقيقين a , b نقول أن a أكبر من وتكتب $(a > b)$ إذا كـان وفقط إذا كان a - b موجبا ونقول أن a أصغر من b وتكتب $(a < b)$ إذا كـان وفقط إذا كان a - b سالبا.

ويراها الدارس على شكل علاقة بين متغير (أو أكثر) وثابت (أو عدة ثوابت) - كالمعادلة - مع تبديل علامة = الموجودة فى المعادلة بعلامة من علامات المتباينة.

علامات المتباينة:

>أكبر من	≥ أكبر من أو يساوى
< أصغر من	≤ أصغر من أو يساوى

فمثلا $5 < 9$ تقرأ 9 أكبر من 5.

الخواص الهامة للمتباينات:

1- لكل زوج من الأعداد الحقيقية a , b إحدى العلامات الآتية:-

(1) $a > b$ (2) $a = b$ (3) $a < b$

2 - إذا كان $a > b$ ، $b > c$ فإن $a > c$.

3 - إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$.

4- إذا كان $a > b$, $c > 0$ فإن $ac > bc$.

5- إذا كان $a > b$, $c < 0$ فإن $ac < bc$.

وسوف نثبت الخاصية رقم (4) وبنفس الطريقة يمكن إثبات بقية الخواص.

برهان الخاصية رقم (4):

نفرض أن a, b, c أعداد حقيقيه

وأن $a > b$, $c > 0$

$\therefore a - b > 0$

و $\therefore$ حاصل ضرب عددين موجبين $(a-b)$, c عددا موجبا.

$\therefore (a-b)\ c > 0$

$\therefore ac > bc$ حسب قانون التوزيع

المتباينة الخطية في مجهود واحد:

تعلمنا كيف نحل معادله خطيه في مجهول واحد وسوف نستخدم نفس الأسلوب في حل المتباينة الخطية والتي تبينها الدراسة الآتية:

نعرف أن $9 > 5$

فعند إضافة أي عدد موجب وليكن 2 لكلا الطرفين

$$2 + 9 \overset{?}{>} 2 + 5$$

$$11 > 7$$

أي العدد 11 أكبر من العدد 7.

حيث تعني العلامة $\overset{?}{>}$ هل وضع العلامة في هذه الحالة صحيح وعند إضافة

أى عدد سالب وليكن 2- لكلا الطرفين.

$$-2 + 9 \overset{?}{>} -2 + 5$$

$$7 > 3$$

والمتباينة فى هذه الحالة أيضا صحيحة وعلى ذلك يمكننا أن نستنتج أن :

إضافة أى عدد موجب أو سالب لا يغير إتجاه المتباينة.

مثال 1:

أوجد حل المتباينة:

$$x - 10 \geq 2$$

الحل :

بإضافة 10 + لكلا الطرفين.

$$x - 10 + 10 \geq 2 + 10$$

$$x \geq 12$$

مجموعة الحل هى:

$$\{x : x \geq 12\}$$

مثال 2:

أوجد حل المتباينة الآتية:

$$x + 6 > -8$$

الحل :

بإضافة 6- لكلا الطرفين

$$x + 6 - 6 > -8 - 6$$

$$x > -14$$

مجموعة الحل هى:-

$$\{x : x > -14\}$$

مثال 3

أوجد حل المتباينه الأتيه في صورة فتره ثم كتابه الحل في صورة مجموعة وتوضيح الحل على خط الأعداد

$x + 8 > 3$

الحل

بإضافة 8- لكلا الطرفين

$x + 8 - 8 > 3 - 8$

$x > -5$

الحل فى صورة فترة :-

$(-5 , \infty)$

مجموعة الحل هى:

$\{ x : \quad x > -5 \}$

تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 18

شكل 18

ولحل المتباينات من الدرجة الأولى يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

1- الحالة الأولى:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية موجبة :

فمثلا $14 > 6$

أ - إذا ضربنا كلا الطرفين $X\ 2 +$

$14 \times 2 > 6 \times 2$

$28 > 12$

تظل المتباينة فى نفس الاتجاه.

ب - إذا قسمنا كلا الطرفين ÷ 2 +

$14 \div 2 \overset{?}{>} 6 \div 2$

$7 > 3$

تظل المتباينة فى نفس الاتجاه.

2- الحالة الثانية:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية سالبة:

أ-إذا ضربن كلا الطرفين X 2-

$14 \text{ X } -2 \overset{?}{>} 6 \text{ X } -2$

$-28 < -12$

تم عكس إتجاه المتباينة حتى تكون المتباينه صحيحة.

ب- إذا قسمنا كلا الطرفين ÷ 2-

$14 \div -2 \overset{?}{>} 6 \div -2$

$-7 < -3$

تم عكس اتجاه المتباينة حتى تكون المتباينة صحيحة.

الاستنتاج:

نستنتج أن إذا ضربنا أو قسمنا طرفى (المتباينة فى أو على كمية موجبة فإن علامة المتباينة لا تتغير، ولكن إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية سالبة فإن علامة المتباينة تتغير إلى العكس.

مثال 4

حل المتباينه الأتيه

$4x > 20$

الحل:

بقسم طرفى المتباينة على 4 +

$x > 5$

مثال 5 :

حل المتباينة الآتية:

$-4x \geq 20$

الحل :

بقسم طرفى المتباينة على 4-

$x \leq -5$

مثال 6 :

حل المتباينة الآتية

$7x > -14$

الحل:

بقسم طرفى المتباينة على7

$x > -2$

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية:

$-2x \geq -3$

الحل

بقسمة طرفى المتباينة على 2

$$x \leq \frac{3}{2}$$

مثال 8 :

حل المتباينة الآتية:

$$\frac{x}{5} \geq -3$$

الحل :

بضرب طرفى المتباينة x 5

$$x > -15$$

مثال 9 :

حل المتباينة الآتية:-

$$\frac{2x-9}{3} > 5$$

الحل:

بضرب طرفى المتباينة X 3

$$2x - 9 > 15$$

بإضافة 9+ للطرفين

$$2x > 15 + 9$$

$$2x > 24$$

بالقسم ÷ 2

$$x > 12$$

مثال 10:

حل المتباينة الآتية:

$$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$$

الحل:

$$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$$

$$7x - x - 5 \leq x + 2$$

بإضافة $-3x$ لكلا الطرفين

$$6x - 5 - 3x \leq 3x + 2 - 3x$$

$$3x - 5 \leq 2$$

بإضافة $+5$ لكلا الطرفين

$$3x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{3}$$

المتباينة المتكونة من جزئين :

المثال الأتى يبين طريقة حل هذا النوع من المسائل:

مثـــال

حل المتباينة الآتية:

$$\{ x : (3x - 1) < 2 \} \cap \{x : 2(5-x) \leq 16\}$$

موضحا الحل:

(أ) على صورة مجموعة.

(ب) على صورة فترة

(جـ) على خط الأعداد.

الحل :

المثال يتضمن تقاطع مجموعتين كل مجموعة تمثلها متباينة ولذلك نوجد حل كل متباينة على حدة.

$3x - 1 < 2$

بإضافة 1 + للطرفين

$3x < 3$

$x < 1$

المتباينة الثانية:

$2(5 - x) \leq 16$

$5 - x \leq 8$

بإضافة 5- للطرفين:

$5 - x - 5 \leq 8 - 5$

$-x \leq 3$

$x \geq -3$

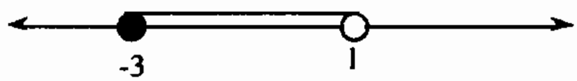
(أ) الحل على صورة مجموعة :

$\{ x : \ -3 \leq x < 1 \}$

(ب) الحل على صورة فترة:

$[-3 , 1)$

(جـ) تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 19



شكل 19

متباينات يكون المقام فيها متغير:

مثال : أوجد حل المتباينة الآتية:

$$\frac{3}{x - 5} \leq 2$$

الحل :

الحالة الأولى :

$x - 5 > 0$

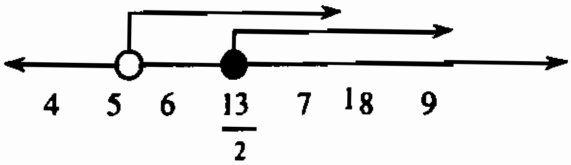
$\therefore x > 5$ .. (1) (لاحظ شكل 20

بضرب طرفى المتباينة فى $(x - 5)$ وفى هذه الحالة لا تتغير علامات المتباينة.

$3 \leq 2 (x - 5)$

$3 \leq 2 x - 10$

$\therefore x \geq \frac{13}{2}$ .... (2) (لاحظ شكل 20



شكل 20

لاحظ أن الشرط رقم (2) فى هذه الحالة يحقق الشرط رقم (1)

$\therefore\ x \geq \frac{13}{2}$ I

الحالة الثانية:

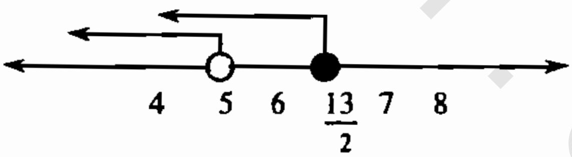
$x - 5 < 0$

$\therefore\ x > 5$ .. (3) (لاحظ شكل 21

بضرب المتباينة فى (x - 5) وفى هذه الحالة تنعكس علامة المتباينة

$\therefore\ 3 \geq 2x - 10$

$\therefore\ x \leq \frac{13}{2}$ .. (4) (لاحظ شكل 21



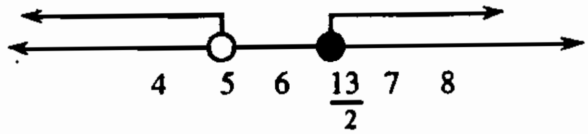
شكل 21

لاحظ أن الشرط رقم (3) يحقق الشرط رقم (4)

$\therefore\ x < 5$ II

∴ مجموعة الحل هى كلا الشرطين I ,II معا وتكتب:

(لاحظ شكل 22)..... $\{ x : x \ge \frac{13}{2} \cup x < 5 \}$



شكل 22

ملحوظـــــة :

يمكن حل نفس المثال بطريقة النقاط الحرجة فى متباينات الدرجة الثانية والتى سيأتى ذكرها فيما بعد.

المتباينات المتكونة من ثلاثة أجزاء:

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$7 > 2x + 1 > -3$

الحل:

يمكن حل المتباينة بتقسيمها إلى متباينتين هما :

$7 > 2x + 1 \quad , \quad 2x + 1 > -3$

وحيث إنه يتم على كل منهما نفس الإجراء. فيتم فى الاجراء الأول إضافة:

1- إلى كل منهما لتصبحا :

$6 > 2x \quad , \quad 2x > -4$

ويتم فى الاجراء الثانى القسمة على 2 لتكونا:

$3 > x \quad , \quad x > -2$

لذا يتم التعامل مع المتباينة كلها مرة واحدة بنفس الاجراءات وهي:

$7 > 2x + 1 > -3$

بإضافة 1− :

$6 > 2x > -4$

القسم على2 :

$3 > x > -2$

وتكون مجموعة الحل هى :

$\{ x : 3 > x > -2\}$

تماريـــــن (9)

أوجد حل المتباينات الآتية وكتابة الفترة فى كل منها والرسم على الأعداد :

1- $x - 10 \geq 2$

2- $x + 4 > 1$

3- $x - 6 \geq -3$

4- $x + 4 < -2$

5- $2x > 10$

6- $-2x \leq -3$

7- $4x + 2 \geq 2x + 6$

8- $6(x - 4) \geq 6$

9- $8x - 7 \geq -15$

10- $\dfrac{2 - 3x}{x - 3} \leq -2$

11- $5(x + 1) - x \leq 1 - 2x$

12- $9x - (2x + 3) \leq x + 8$

13- $\left\{x : \dfrac{x - 3}{2} < 2\right\} \cap \left\{x : 3(2-x) + 5 \leq 17\right\}$

14- إذا كان $A = \{x : -1 < x < 1\}$

$B = \{x : -3 \leq x \leq -1\}$

أوجد:

$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B$
$B - A, \quad A \cup B \cap \phi.$

15 – أوجد حل المتباينه :

$3 \le 4x - 7 < 9$

16 – أوجد حل المتباينه :

$6 \ge 2 - 4x \ge 10$

حل المتباينات الآتيه وارسمها بيانيا ثم اكتب الحل فى صورة مجموعة:

17- $\{x : \frac{x-8}{5} < 2 - x\} \cup \{x : \frac{x}{4} + 3 < 7\}$

18- $\{x : \frac{x-8}{4} \le -4\} \cap \{x : 6(3-x) < -18\}$

19- $\{x : \frac{2x-8}{4} < 3 - x\} \cup \{x : 6(3-x) < -18\}$

20- $\{x : 2x - 1 \le 2 - x\} \cup \{x : 3x + 4 \le 2x + 1\}$

21- $-5 \le \frac{2x-1}{3} < 3$

22- $0 \le 3(5 - x) - 9 < 6$

23- $-2 \le \frac{3x-2}{4} < 1$

24- $0 \le 4(-x - 3) - 8 \le 4$

متباينات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد :

يوضح حل هذا النوع من المتباينات الأمثلة الآتيه:-

مثال :

أوجد حل المتباينة الآتيه:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

الحل :

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

يمكن تحليلها إلى أقواس على الصورة التالية:

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

يوجد إحتمالين للحل :

1- إشارة كل من القوسين موجبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر.

1- إشارة كل من القوسين سالبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر الاحتمال الأول.

1- إشارة كل من القوسين موجبة :

وهذا معناه أن كل قوسين على حده أكبر من الصفر وبالتالى:

$x + 5 > 0$, $x - 2 > 0$

$\therefore\ x > -5$ $\qquad$ $\therefore\ x > 2$

ويمكن اعتبار أن $x > 2$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا للشرط الآخر $x > -5$ وهذا يتضح بعد التمثيل على خط لأعداد كما هو موضح بشكل 23.

وللتحقق من الحل:

نضع $x = 3$ فى المتباينة

$$\therefore\ (3)^2 + 3(3) - 10 \overset{?}{>} 0$$

$18 - 10 \overset{?}{>} 0$

$8 > 0$

شكل 23

$\therefore 2 < x$ يكون حلا للإحتمال الأول.

إشارة كل من القوسين سالبة:

وهذا معناه أن كل قوس على حده صفر من الصفر وبالتالى:-

$x + 5 > 0 \quad , \quad x - 2 < 0$

$x < -5 \quad \therefore x < 2$

ويمكن إعتبار أن $-5 > x$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا للشرط الآخر $2 > x$ كما هو موضع بشكل 24.

وللتحقق من الحل:

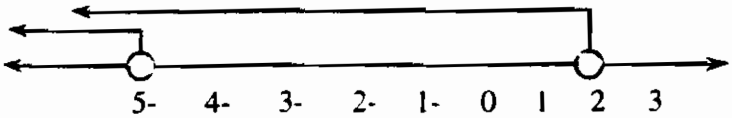
نضع $x = -6$ فى المتباينة

$\therefore (-6)^2 + 3)-6) -10 \overset{?}{>} 0$

$36 - 28 \overset{?}{>} 0$

$8 > 0$

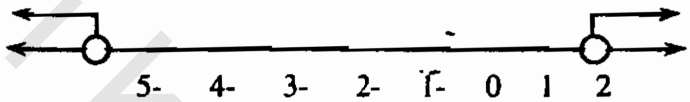
$\therefore -5 > x$ يكون حلا للاحتمال الثانى



شكل 24

وبالتالى تكون مجموعة الحل هى :

$X = \{ x : -5 > x > 2 \}$ .... (لاحظ شكل 25)



شكل 25

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$$2x^2 - 2x \le 24$$

الحـــل:

$$2x^2 - 2x - 24 \le 0$$

بقسمة المتباينة على 2

$$x^2 - x - 12 \le 0$$
$$(x + 3)(x - 4) \le 0$$

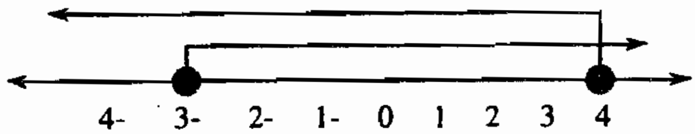
يوجد احتمالين للحل :

1 – اشارة أحد القوسين موجب والآخر سالب ليكون حاصل ضرب القوسين سالبا أى أقل من الصفر.

2 – عكس الحالة الأولى أى القوس الذى كان موجبا يكون سالبا والقوس الذى، ان سالبا يكون موجبا ليكون حاصل ضرب القوسين سالبا أى أقل من الصفر.

الاحتمال الأول. الذى يوضحه شكل 26:

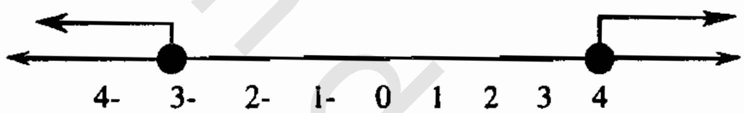
$x - 4 \le 0$	$x + 3 \ge 0$
$x \le 4$	$x \ge -3$



شكل 26

الاحتمال الثانى: الذى يوضحه شكل 27 :

$x - 4 \ge 0$	$x + 3 \le 0$
$x \ge 4$	$x \le -3$



شكل 27

نجد أن كل من الحلين مخالف للحل الآخر وبالتالى نلجأ للتحقق منهما.

للتحقق من حل الاحتمال الأول

نضع $x = 0$ فى المتباينه لأنها تحقق شرطى هذا الحتمال وهما $x \le 4$.

$$\therefore (0)^2 - (0) - 12 \overset{?}{\le} 0$$

$$-12 \le 0$$

∴ حل الاحتمال الأول يحقق المتباينة.

يمكن أيضا التحقق من حل الاحتمال الثانى.

نضع 5 = فى المتباينة

$$\therefore (5)^2 - 5 - 12 \overset{?}{\leq} 0$$

$$25 - 17 \overset{?}{\leq} 0$$

$$8 \geq 0$$

∴ لا تتحقق المتباينة عند 5 = وبالتالى حل الاحتمال الثانى مرفوض.

ملحوظة: يكتفى بالتحقق من صحة المتباينة بوضع $x = 5$ والتى بينت أن المتباينة لا تتحقق بهذا الحل ولا داعى للتحقق من الشرط الثانى لهذا الاحتمال أى بوضع $x = -4$ فى المتباينة لأن رفض حل الشرط الأول $(x \geq 4)$ يلغى حل الشرط الثانى $(x \leq -3)$ حتى ولو كان صحيحا، لأنه بالضرورة تحقق الشرطين.

استخدام النقاط الحرجة لحل متباينات الدرجة الثانية:

يمكننا حل مثال 1 باستخدام النقاط الحرجة كالآتى:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

لإيجاد النقاط الحرجة:

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$\therefore (x + 5) = 0$$

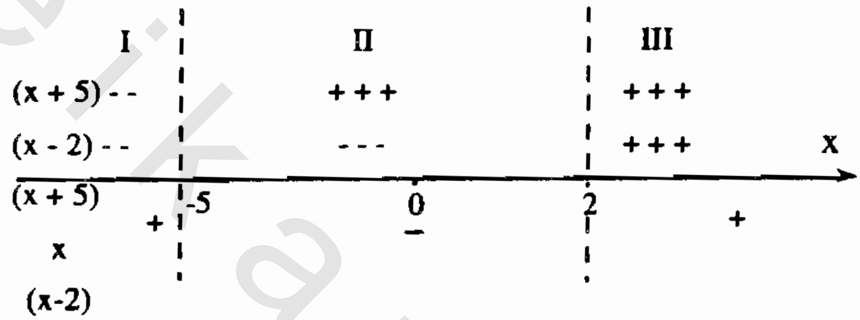
$$x = -5$$

أو

$$(x - 2) = 0$$

$x = 2$

نوقع النقطتين $x = -5$ ، $x = 2$ على خط الأعداد ليقسما مجموعة الأعداد الحقيقية إلى ثلاثة مناطق كما بالشكل 28 ونحدد اشارة كل قوس فى المناطق الثلاثة I, II, III.



شكل 28

فى المنطقة I:

ضع $x = -6$ ممثلة للمنطقة I نجد أن إشارة القوس $(x + 5)$ سالبة واشارة القوس $(x - 2)$ أيضا سالبة كما بالشكل

فى المنطقة II.

ضع $x = 0$ ممثلة للمنطقة II نجد أن إشارة القوس $(x + 5)$ موجبة وإشارة القوس $(x - 2)$ سالبه.

فى المنطقة III:

ضع $x = 3$ ممثلة لهذه المنطقة نجد أن اشارة القوس $(x + 5)$ موجبة

وإشارة القوس $(x - 2)$ سالبة.

نوجد حاصل ضرب اشارتي القوسين $(x - 2) \times (x + 5)$ أسفل خط الأعداد كما هو واضح بالشكل نجد أن :

المنطقة I، والمنطقة III حاصل ضرب اشارتي القوسين موجبا. أما المنطقة II فيكون حاصل ضرب إشارتي القوسين سالبا.

وعلى ذلك نجد أن الحل المطلوب لتحقيق المتباينة تحققه المنطقة I والمنطقة III حيث يكون حاصل ضرب اشارتي القوسين موجبا. ويكون الحل العام على الصوة التالية:

$$X = \{ x : x \leq 5 \} \cup \{ x : x \geq 2\}$$

وهو نفس الحل السابق بالطريقة الأولى.

مثال 2 :

أوجد حل المتباينه الآتيه :

$$\frac{3}{x - 5} \leq 2$$

الحل :

من الممكن أن يكون $x - 5 > 0$ كحالة أولى

وأيضا $x - 5 < 0$ كحالة ثانية (وهى كمية سالبة)

وبالتالى فإن : $(x - 5)^2 > 0$

$\therefore$ بضرب طرفى المتباينة $\times (x - 5)^2$ لا يغير من إتجاه المتباينة.

$$\therefore (x - 5)^2 \; \frac{3}{x - 5} \leq 2 \; (x - 5)^2$$

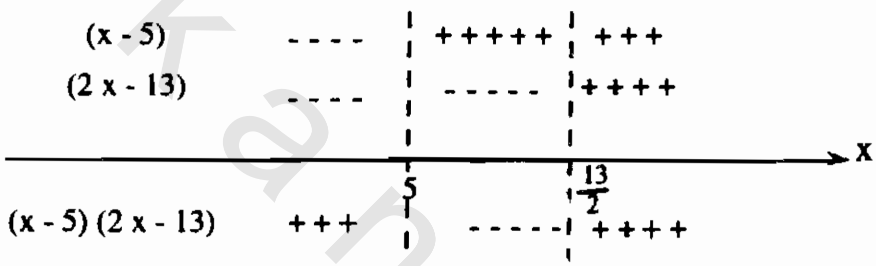
$$3x - 15 \le 2x^2 - 20x + 50$$

$$0 \le 2x^2 - 23x + 65$$

$$0 \le (2x - 13)(x - 5)$$

∴ النقاط الحرجة هي: $x = 5 \quad , \quad x = \frac{13}{2}$

بتوقيع النقاط الحرجة على خط الأعداد ينقسم إلى ثلاث مناطق شكل 29



شكل 29

∴ مجموعة الحل التي تحقق المتباينة هي:

$$X = \{\, x : x < 5 \ \cup x \ge \frac{13}{2} \}$$

تماريـــــــن (10)

أوجد حل المتباينات الآتية :

1- $\frac{x}{x-3} < 4$

2- $(x-4)(x+2) \leq 0$

3- $x^2 - 1 > 0$

4- $x^2 - 1 < 0$

5- $x^2 - 7x + 10 > 0$

6- $x^2 - 25 < 0$

7- $x^2 - 25 > 0$

8- $2x^2 + 11x - 21 \geq 0$

9- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

10- $x^2 - 9 \leq 0$

11- $x^2 - 9 \geq 0$

12- $\frac{\frac{1}{2}x - 3}{x+4} > 0$

13- $3x^2 - 2 < 0$

14- $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

15- $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

القيمة المطلقة :

لأى عدد حقيقى x قيمة مطلقة يرمز لها بالرمز $|x|$. والتى تعرف على النحو التالى:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فمثلا :

$$|-5| = 5, \quad |7 - 9| + |-2| = 2$$

$$\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} \;, \quad \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 1 :

إذا كانت $x = 2, \quad y = 3$ أوجد :

$$|x| \;, \quad |y| \;, \quad |x + y| \;, \quad |x| + |y|$$

الحـــل :

$$|x| = |2| = 2$$

$$|y| = |3| = 3$$

$$|x + y| = |2 + 3| = |5| = 5$$

$$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore |x + y| = |x| + |y|$$

مثال 2 :

إذا كانت $x = -2 \;, \quad y = -3$ أوجـــــد :

$$|x|, |y| \;, \quad |x + y| \;, \quad |x| + |y|$$

الحـــل:

$|x| = |-2| = 2$

$|y| = |-3| = 3$

$|x + y| = |-2 -3| = |-5| = 5$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| = |x| + |y|$

مثال 3:

إذا كانت $x = -2$, $y = 3$ **أوجد :-**

$|x|$, $|y|$, $|x + y|$, $|x| + |y|$

الحـــــل :

$|x| = |-2| = 2$

$|y| = |3| = 3$

$|x + y| + |-2 + 3| = |1| = 1$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| < |x| + |y|$

مثال 4 :

إذا كانت $x = 2$, $y = -3$ **أوجـــــد :**

$|x|$, $|y|$, $|x + y|$, $|x| + |y|$

الحـــــل:

$|x| = |2| = 2$

$|y| = |-3| = 3$

$|x + y| = |2 + (-3)| = |-1| = 1$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| < |x| + |y|$

الاستنتاج العام :

نستنتج من الأمثلة السابقة أن :

$|x + y| \leq |x| + |y|$

فإذا كان كل من x , y عدد حقيقيا فإنه يمكن استنتاج الخواص التالية:-

1- $|x| \geq 0 \quad , \quad -|x| \leq x \leq |x|$

2- $|x| = 0 \rightarrow x = 0$

3- $|x . y| = |x| . |y|$

4- $|x - y| = |y - x|$

5- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad y \neq 0$

وتستخدم القواعد الآتية فى حل المتباينات:

I $\quad |x| < A \rightarrow -A < x < A \rightarrow x \in (-A , A)$

II $\quad |x| \leq A \rightarrow -A < x \leq A \rightarrow x \in (-A, A]$

III $\quad |x| > A \rightarrow x > A$ أو $x < -A$

IV $\quad |x| A \rightarrow x \geq A$ أو $x \leq -I$

حيث A عدد حقيقى ، x تعبر عن فترة المتباينة وجميع الخواص والقواعد السابقة مشتقة من التعريف للقيمة المطلقة.

مثال 5 :

حل المعادلة الآتية :

$|2 - x| = 3$

الحـــــل :

$2 - x = \pm 3$

$2 - x = 3$

$\therefore x = -1$

$, 2 - x = -3$

$\therefore x = 5$

مجموعة الحل هى :

$\{-1, 5\}$

مثال 6 :

حل المعادلة الآتية :-

$|2x - 1| = |1 - x|$

الحـــــل :

$(|2x - 1|)^2 = (|1 - x|)^2$

$(2x - 1)^2 = (1 - x)^2$

$4x^2 - 4x + 1 = 1 - 2x + x^2$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

$\therefore x = 0 \quad \text{I}$

$, \quad (3x - 22) = 0$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3} \quad \text{II}$

∴ مجموعة الحل هى :

$x = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$

لاحظ أن تربيع القيمة المطلقة للطرفين فى المعادلة تلغى علامة المقياس.

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية :-

$$\left|\frac{2x+5}{7}\right| < 3$$

الحل :

$$-3 < \frac{2x+5}{7} < 3$$

$$-21 < 2x + 5 < 21$$

$$-26 < 2x < 16$$

$$-13 < x < 8$$

مثال 8 :

حل المتباينه الآتيه :-

$$|1 - x| > |2x - 1|$$

الحـــل :

بتربيع الطرفين :

$$\therefore (1-x)^2 > (2x-1)^2$$

$$1 - 2x + x^2 > 4x^2 - 4x + 1$$

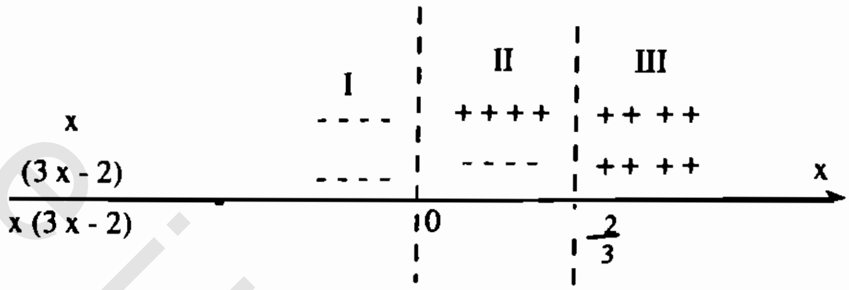
$$0 > 3x^2 - 2x$$

$$0 > x(3x - 2)$$

النقاط الحرجة هى:

$$x = 0 \quad , \quad x = \frac{2}{3}$$

بوضع قيم x الحرجة على خط الأعداد وإيجاد إشارتى x , (2 - x 3) فى الثلاث مناطق شكل 30.



شكل 30

$$\therefore \text{مجموعة الحل هى :} \quad x = \left\{0 \, , \, \frac{2}{3}\right\}$$

تمارين (11)

١- عبر عن كل مما يأتي:

(a) $|17|$

(b) $|-26|$

(c) $\left|-\frac{2}{3}\right|$

(d) $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|$

(e) $\left|\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|$

(f) $\left|\sqrt{2}-2\right|$

(g) $|\Pi-4|$

2 - عبر عن كل مجموعة مما يأى بشكل فترة أو مجموعة فترات :

(a) $\{x : |x-1| > 2\}$

(b) $\{x : |x-1| < 4\}$

(c) $\{x : |x-2| \geq 5\}$

3- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتيه :

(a) $|x-3| \leq 4$

(b) $|2x-5| < 1$

(c) $|3x-7| < 5$

(d) $\left|\frac{3-x}{5}\right| \geq 1$

(e) $|x+2| > 3$

(f) $|3x-1| \geq |5x+2|$

(g) $|3x-2| \geq 6$

(h) $\left|2x-\frac{1}{3}\right| \leq \frac{3}{2}$

4- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:

(a) $\frac{x}{x-1} \geq 0$

(b) $\frac{x}{x-2} \geq 2$

(c) $\frac{x+1}{2-x} \leq 3$

(d) $\frac{1}{x} \geq 4$

5- إذا كانت :

$I_1 = \{x : |x-1| \leq 5\}$

$I_2 = \{x : |2x+1| > 2\}$

أكتب كل من I_1 , I_2 على شكل فترات ثم أوجد :

$I_1 \cap I_2 \,.\, I_1 \cup I_2 \,,\, I_1 \,,\, - I_2$

6- أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتيه :

(a) $|6x - 2| = 7$

b- $|6x - 7| = |3 + 2x|$

(c) $|9x - 11| = x$

d - $\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6$

الكسور الجزئية

المتطابقة :

هى عبارة عن معادلة متساوية لجميع قيم المتغير. فمثلا:-

$$3x - 1 = A_1 (x - 1) + A_2 (x - 2)$$

تعبر عن متطابقة تحتوى على الثوابت A_2 , A_1

طرق تعيين الثوابت:

الطريقة الأولى:-

نعوض عن قيم للمتغير x بحيث تلغى أقواسا فتقل عدد الثوابت (عدد المجاهيل) ليصبح ثابتا واحدا عن كل تعويض يمكن إيجاد قيمته بسهوله. كالآتى:-

بوضع $x = 1$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(1) - 1 = A_1 (1 - 1) + A_2 (1 - 2)$$
$$2 = 0 - A_2$$
$$\therefore A_2 = -2$$

بوضع $x = 2$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(2) - 1 = A_1 (2-1) + A_2 (2 - 2)$$

$$5 = A1$$
$$\therefore A_1 = 5$$

الطريقة الثانية : -

بمساواة معاملات x فى الطرفين لجميع قوى x المختلفة :

$$3x - 1 = A_1 x - A_1 + A_2 x - 2A_2$$
$$= (A_1 + A_2)x - A_1 - 2A_2$$
$$\therefore 3 = A_1 + A_2 \qquad (1)$$
$$-1 = -A_1 - 2A_2 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore -A_2 = 2$$
$$\therefore A_2 = -2$$

بالتعويض عن قيمة A_2 فى المعادلة (1)

$$A_1 = 3 - A_2$$
$$= 3 - (-2) = 5$$

مثال 2 :

أوجد قيم الثوابت فى المتطابقة الآتية:

$$x^2 + 2x + 1 = A_1 (x + 1) + A_2 (x - 2)$$

الحل :

ضع $x = -1$ فى الطرفين :-

$$(-1)^2 + 2(-1) + 1 = A_1 (-1 + 1) + A_2 (-1 - 2)$$
$$0 = -3A_2$$
$$\therefore A_2 = 0$$

ضع $x = 2$ فى الطرفين :

$$(2)^2 + 2(2) + 1 = A_1 (2+1) + A_2 (2 - 2)$$
$$9 = 3A_1$$
$$\therefore A_1 = 3$$

مثال 3 :

أوجد قيم الثوابت فى المتطابقة :-

$$5x - 1 = A_1 (x - 1)(x - 2) + A_2 (x - 2)(x + 3) + A_3 (x - 1)(x + 3)$$

الحـــل :

ضع $x = 1$ فى الطرفين

$$5(1)-1 = A_1(1-1)(1-2) + A_2(1-2)(1+3) + A_3(1-1)(1+3)$$

$$5 - 1 = 0 + A_2(-1)(4) + 0$$

$$4 = -4A_2$$

$$\therefore A_2 = -1$$

ضع $x = 2$ فى الطرفين :-

$$5(2) - 1 = A_1 (2-1)(2-2) + A_2 (2-2)(2+3) + A_3(2-1)(2+3)$$

$$10 - 1 = 0 + 0 + A_3 (1)(5)$$

$$9 = 5A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{5}$$

ضع$x = -3$ فى الطرفين :-

$$5(-3)-1 = A_1 (-3-1)(-3-2) + A_2 (-3-2)(-3+3) + A_3 (2-1)(2+3)$$

$$-15 - 1 = A_1 (-4)(-5) + 0 + 0$$

$$-16 = A_1 (20)$$

$$A_1 = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5}$$

الكسور الجزئيـــــة :

تعرف الكسور الجزئية على إنها خارج قسمة كثيرتي الحدود. ويسمى الكسر بالكسر الحقيقي إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، ويسمى بالكسر الغير حقيقي عندما يكون درجة البسط أكبر من أو يساوي درجة المقام.

ويمكن كتابة الكسر الغير حقيقي على صورة حاصل جمع كثيرة الحدود بالاضافة الى كسر حقيقي. ومثال ذلك:

$$\frac{x^2+3x+5}{x+2} = (x+1) + \frac{3}{x+2}$$

كسر حقيقي + كثيرة الحدود = كسر غير حقيقي

ويمكن جمع اثنين أو أكثر من الكسور الحقيقية للحصول على كسر حقيقي واحد. بإيجاد المقام المشترك ثم يتم الجمع كالآتي:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x+2} = \frac{3x+2+2(x+2)}{(x+2)(3x+2)}$$

$$= \frac{5x+6}{(x+2)(3x+2)}$$

وموضوعنا الحالي هو عكس هذه العملية (عكس هذا الاجراء) أي تجزئة الكسر الحقيقي الى كسور حقيقة. ويتم ذلك كالآتي:

الحالة الأولى:

حالة جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى حقيقية ومختلفة:

نفرض أن الكسر = $F(x) / \phi(x)$

حيث المقام كثيرة الحدود من الدرجة n والتي يمكن تحليلها إلى n من العوامل الأولية الحقيقية من الدرجة الأولى على الصورة:

$$\phi(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

حيث يمكن كتابة الكسر على الصورة :-

$$\frac{F(x)}{\phi(x)} = \frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ (x-x_n)}$$

ويمكن وضعها على صورة مجموع كسور حقيقية :

$$\frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ (x-x_n)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

وبعد ذلك يتم توحيد المقام في الطرف الأيمن ومساواة البسط في الطرف الأيمن بالبسط في الطرف الأيسر. نحصل على:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & A_1 (x-x_2)(x - x_3) \ldots\ldots\ldots\ldots (x-x_n) \\ & + A_2 (x - x_1)(x - x_3) \ldots\ldots\ldots (x - x_n) \\ & + A_3 (\quad)(\quad)\quad(\quad) \\ & + A_n (x-x_1)\quad(x - x_2)\ldots\ldots\ldots (x - x_n) \end{aligned}$$

وبمساواة قوى x المختلفة في الطرفين نحصل على n من المعادلات والتي بحلها نحصل على الثوابت $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

ويمكن الحصول على هذه القيم بطريقة أخرى. وذلك بوضع $x = x_1$ في المتطابقة السابقة يتم الحصول على :

$$F(x_1) = A_1 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots (x_1 - x_n)$$

$$A_1 = \frac{F(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ \ldots\ (x_1 - x_n)}$$

وبالمثل بوضع $x = x_2$ يمكن تعيين : - A_2 :-

$$A_2 = \frac{F(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ \ldots\ (x_2 - x_n)}$$

وهكذا يمكن تعيين الثوابت (A) وسوف نوضح هذا في المثال الآتي.

مثال 1

حلل الكسر :

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحـــــل :

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(3x-2)} \qquad (1)$$

$$= \frac{A_1(3x-2) + A_2(x+2)}{(x+2)(3x-2)}$$

∴ بسط الطرف الأيمن = بسط الطرف الأيسر

$$\therefore 5x+2 = A_1(3x-2) + A_2(x+2)$$

ضع $x = -2$ فى الطرفين

$$5(-2)+2 = A_1(3(-2)-2)+0$$

$$-8 = -8A_1$$

$$A_1 = \frac{-8}{-8} = 1$$

ضع $x = \frac{2}{3}$ فى الطرفين

$$5\left(\frac{2}{3}\right)+2 = A_1\left(3\left(\frac{2}{3}\right)-2\right) + A_2\left(\frac{2}{3}+2\right)$$

$$\frac{10+6}{3} = 0 + A_2\left(\frac{2+6}{3}\right)$$

$$A_2 = \frac{16}{8} = 2$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(3x-2)}$$

مثـــال 2 :

حلل الكسر

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

الى كسور الجزئية :

الحل :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x-2)} \qquad (1)$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\therefore 2x+3 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين

$$2(-1)+3 = A_1(-1+1)(-1-2) + A_2(-1-1)(-1-2) + A_3(-1-1)(-1+1)$$

$$\therefore 1 = 0 + 6A_2 + 0$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

ضع $x = 1$

$$\therefore 2(1)+3 = A_1(1+1)(1-2) + 0 + 0$$

$$5 = -2A_1$$

$$A_1 = -\frac{5}{2}$$

ضع $x = 2$

$$2(2)+3 = A_1(2+1)(2-2) + A_2(2-1)(2-2) + A_3(2-1)(2+1)$$

$$7 = \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 3A_3$$

وبالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$$

حل آخر :

لايجاد قيمة : A_1 نعوض عن $x = 1$ فى الطرف الأيسر ما عدا المقدار $(x-1)$:

$$\therefore A_1 = \left[\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}\right]_{x=1}$$

$$= \left[\frac{2(1)+3}{(1+1)(1-2)}\right] = -\frac{5}{2}$$

لايجاد قيمة A_2 نعوض عن $x = -1$ فى الطرف الأيسر ما عدا المقدار $(x+1)$: -

$$A_2 = \left[\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=-1}$$

$$= \left[\frac{2(-1)+3}{(-1-1)(-1-2)} \right] = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$$

لايجـــاد قـيـمـة A_3 نعــوض عن $x = 2$ فى الطــرف الأيســر مــا عــدا المقدار $(x-2)$:-

$$A_3 = \left[\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]_{x=2}$$

$$= \left[\frac{2(2)+3}{(2-1)(2+1)} \right] = \frac{7}{(1)(3)} = \frac{7}{3}$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{-5}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$$

وعلى الطالب تطبيق هذه الطريقة على الأمثلة السابقة.

الحالة الثانية :

بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ولكنها متساوية :-

مثال ذلك كسر حقيقى على الصورة :-

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^3 (x-2)}$$

نضع العامل المكرر $y = x - 1$

نحول الكسر من داله فى x إلى دالة فى y كالآتى:-

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^3\,(x-2)}=\frac{(y+1)^2+y+1+2}{y^3\,(y-1)}$$

$$=\frac{y^2+2y+1+y+1+2}{y^3\,(y-1)}$$

$$=\frac{4+3\,y+y^2}{y^3\,(y-1)}$$

بقسمة البسط $(4+3\,y+y^2)$ على $(-1+y)$ ونستمر في عملية القسمة حتى نحصل على باقي يحتوى على y مرفوع لأس يساوى درجة العامل المكرر وهو 3 ليكون الكسر على هذه الصورة:-

$$\frac{4+3y+y^2}{y^3\,(y-1)}=\frac{1}{y^3}\left[-4-7y-8y^2+\frac{8y^3}{-1+y}\right]$$

$$=\frac{-4}{y^3}-\frac{7}{y^2}-\frac{8}{y}+\frac{8}{-1+y}$$

وبإرجاع قيم مرة ثانية نجد أن الكسر يساوى :

$$\frac{4+3y+y^2}{y^3\,(y-1)}=\frac{-4}{(x-1)^3}-\frac{7}{(x-1)^2}-\frac{8}{(x-1)}+\frac{8}{(x-2)}$$

أىّ أن العامل المكرر $(x-1)^3$ فى المقام يناظره ثلاثة كسور جزئية على الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}$$

وبوجه عام فإن لدينا القاعدة الآتية :-

كل عامل فى المقام على الصورة $(x - A)^r$ يقابله r من الكسـور الجزئيـة على الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x - A)^r} + \frac{A_2}{(x - A)^{r-1}} + \dots \quad + \frac{A_r}{(x - A)}$$

ويتضح هذا من المثال الآتى:

مثال :

حلل الكسر :-

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحل:

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} = \frac{2x + 1}{(x + 1)(x + 1)(x - 4)}$$

$$= \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 (x - 4)}$$

$$\therefore \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 (x - 4)} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-4} \qquad (1)$$

ضرب الطرفين X $(x + 1)^2 (x - 4)$

$$\therefore 2x + 1 = A_1 (x - 4) + A_2 (x + 1)(x - 4) + A_3 (x + 1)^2$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين :

$$2(-1)+1 = A_1(-1-4) + A_2(-1+1)(-1-4) + A_3(-1+1)^2$$

$$-1 = -5A_1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$$

$$A_1 = \frac{1}{5}$$

ضع $x = 4$ فى الطرفين :-

$$2(4)+1 = A_1(4-4) + A_2(4+1)(4-4) + A_3(4+1)^2$$

$$9 = \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 25A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{25}$$

ضع $x = 0$ مع التعويض عن قيم A_1 , A_3 :-

$$2(0)+1 = A_1(0-4) + A_2(0+1)(0-4) + A_3(0+1)^2$$

$$1 = -4A_1 \quad -4A_2 \quad +A_3$$

$$1 = -4\left(\frac{1}{5}\right) - 4A_2 + \frac{9}{25}$$

$$4A_2 = \frac{9-20}{25} = -\frac{11}{25}$$

$$\therefore A_2 = -0.11$$

بالتعويض عن قيم A_1 , A_2 , A_3 فى المعادلة (1) :-

$$\therefore \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{1}{5(x+1)^2} - \frac{0.11}{(x+1)} + \frac{9}{25(x-4)}$$

تمارين (12)

حلل كل من الكسور الآتية إلى كسور جزئية: -

1- $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

2 - $\dfrac{x}{x(x+2)}$

3- $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

4- $\dfrac{2x+1}{x^2+10x+21}$

5- $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2}$

6- $\dfrac{2x}{x^2-x-12}$

7- $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

8- $\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

9- $\dfrac{x-4}{x(x-2)}$

10 - $\dfrac{x-1}{x+1}$

11- $\dfrac{x+4}{x(x+2)}$

12 - $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

13- $\dfrac{2x+2}{x^2-x-12}$

14- $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

15- $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

16- $\dfrac{x-1}{(3x-5)(x+2)}$

17- $\dfrac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

18 - $\dfrac{3x^2+2x+5}{x^2-1}$

19- $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)(x+2)}$

20- $\dfrac{4x^2+5x+3}{(x+1)(x-2)}$

21- $\dfrac{x+3}{(x-1)^2(x+2)}$

22- $\dfrac{x^3+4x^4+3x}{x^2+3x+2}$

23- $\dfrac{2x+3}{(x+2)^2(x+1)}$

24 - $\dfrac{2x^3-3x^2-4x+10}{2x^2+x-6}$

الحالة الثالثة :

المقدار يحتوى على عوامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها إلى عوامل حقيقيـه.

فى هذه الحالـــة يمكن تحليل العامل إلى عـاملين تخيلين فـمثلا المقدار $(x - a)^2 + b^2$ يمكن تحليله إلى عاملين تخيلين على الصورة

$[x - a) + ib] [(x-a) -ib]$ حيث $i = \sqrt{-1}$

أى يمكن أن يناظره كسران جزئيان على الصورة:

$$\therefore \frac{A}{(x - a) + i b} + \frac{B}{(x - a) - ib} = \frac{cx + D}{(x - a)^2 + b^2}$$

أى أن كل عـامل من الدرجة الثـانية لا يمكن تحليله الى عوامل حقيقيـه من الدرجة الأولى فإننا نفرض له كسر بسطه من الدرجة الأولى ومقامه نفس المقام.

مثال :

حلل الكسر الآتى :

$$\frac{2}{(x - 1) (x^2 + x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئيه

الحـــــل :

$$\frac{2}{(x - 1) (x^2 + x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B x + C}{(x^2 + x - 4)}$$

$$\therefore 2 = A (x^2 + x - 4) + (B x + c) (x - 1)$$

بمساواه قوى x فى الطرفين نجد أن :

معامل x^2 يعطى $0 = A + B$

معامل x يعطى $0 = A + C - B$

معامل x^0 يعطى $2 = -4A - C$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على :-

$A = -1 \quad , B = 1 \quad , C = 2$

$$\therefore \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{(x+2)}{(x^2+x-4)} - \frac{1}{(x-1)}$$

تماريـــــن (13)

حلل كل من الكسور الآتيه إلى كسوره الجزئيه :

1- $$\frac{2x+2}{x^2-x-12}$$

2- $$\frac{x+3}{(x-1)^2\,(x+1)}$$

3- $$\frac{2+x}{1-x^3}$$

4- $$\frac{x^3-x+4}{(x-1)\,(x+1)\,(1+x^2)}$$

5- $$\frac{2x^3+x^2-x-3}{x\,(x-1)\,(2x+3)}$$

6- $$\frac{3+x^2}{(1-x)^2\,(1+x^2)}$$