الفصل السابع

الجسيم والدائرة (المحيط)

Particle On A Ring

بالنسبة لهذه الخاصية لكل دوال طاقة الوضع والتى درست مسبقاً إما أن تكون ثابتة فوق خط الفترة الفاصلة أو تأخذ تغير فقط مع الإحداث السينى وإما لنوع العزم والذى نعتبره العزم الخطى. والتقدير للعزم الزاوى الموجود على طول الخط مهم في الأنظمة الذرية والجزينية. وأن تلك القيمة هى إعتبار مسألة الجزىء الذى يتحرك حول محيط الدائرة.

ولنأخذ جسيم له كتله (m) بطاقة وضع ثابتة محدودة وليتحرك على محيط دائرة لنصف قطر (r). والقيمة المناسبة لطاقة الوضع التى تؤخذ يمكن إعتبارها صفر ولتلك المسألة إستبدال المحاور الديكارتية وهى z, y, x (الإحداثيات) بمحاور دائرية قطبية. والعلاقة بين هذين النوعين للمحاور قد يفسر فى الشكل (1). وربما يحدد وضع الجسيم بقيمة المحاور الديكارتية z, y, x cartesian coordinate. وفيما بعد، وضع الجسيم ربما يحدد بواسطة الطول (r) للخط المرسوم إلى الجسيم من الأصل معاً بالزاويتين φ,θ. والزاوية θ هى الزاوية بين المحور (z) والخط المستقيم، الرابط للجسيم بنقطة الأصل: وأن الزاوية φ هى الزاوية بين المحور (x) وخط الربط بخط الإسقاط للجسيم على السطح xy للأصل. وكما يمكن أن نرى من الشكل (1) أن:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

ومعامل لابلاس ∇^2 Laplacian operator فى جزنية الإحداثيات القطبية يمكن أن نراها كما يلى :-

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r dr} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{d\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{d\theta^2} \qquad -1$$

فى هذه المسألة التى تحت الإختبار، ربما نعتبر الدائرة واقعة على السطح (xy)، من حيث $\theta=\pi/2$ cos، $\theta=1$ sin. علاوة على ذلك مثلما المسألة تدخل الدائرة (r) لكونها ثابتة، مثلا θ ونصف القطر (r) ثابتة لهذه المسألة. العوامل فى معامل لابلاس مثل $\partial/\partial\theta$، $\partial/\partial r$ بصفر، ولهذا الثلاث تقاطع الأول فى المعادلة (1) سوف تختصر. بوضع $\theta=1$ sin فى الأجزاء المتبقية ولذلك يختزل معامل لابلاس إلى :-

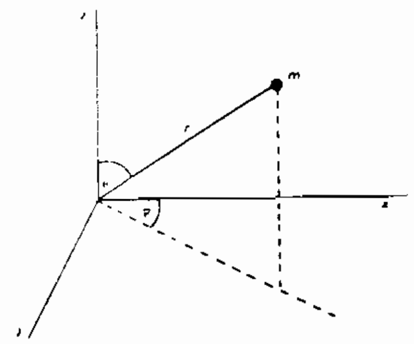

Fig. (1): Cartesian and spherical polar coordinates

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \qquad -2$$

متذكرين أن الثلاث محاور لمعادلة شرودنجر (المعادلة 71) فى الفصل الثانى تصبح:

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \qquad -3$$

ولإجراء تلك المسألة $V=0$ و ∇^2 يمكن إيجادها من المعادلة (2)، والشكل المناسب لمعادلة شرودنجر لجسيم على الحلقة لتصبح :-

$$\frac{1}{r^2}\ \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi = 0$$

أو

$$\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} + \frac{8\pi^2 mr^2}{h^2} E\psi = 0 \qquad -4$$

وبوضع

$$\frac{8\pi^2 mr^2}{h^2} E = M^2 \qquad -5$$

فإن المعادلة (4) ربما تكتب على الشكل :-

$$\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} + M^2\psi = 0 \qquad -6$$

مرة أخرى، لأن تكون طاقة الوضع للنظام ثابتة. المعادلة (6) عبارة عن الشكل البسيط لمعادلة شرودنجر المعطاه بالمعادلة (74) فى الفصل الثانى فإن لهذا الحل العام، وبالمثل مع المعادلة 75 فى الفصل الثانى وأيضاً المعادلة 76 سوف تعطى بواسطة :-

$$\psi = A \sin M\varphi + B \cos M\varphi \qquad -7$$

$$\psi = C\, e^{iM\varphi} + D\, e^{-iM\varphi} \qquad -8$$

ولقد أشرنا سابقاً فى الفصل الرابع أن التعبير المثلثى يعتبر الموجه القائمة والتى تنتج عن الموجات المرتحلة المتعاقبة معاً فى وقت واحد وفى الإتجاهات العكسية. فلو أن الموقع للجسيم مهم فى العزم الزاوى، فإن التعبير المثلثى فى تلك الحالة ليس مرضياً مثلما ذلك يوافق لحركة الجسيم حول الدائرة لكلا الإتجاهات فى وقت واحد. والحل الذى يعتبر أكثر إرضــاءاً هو فى جزئية الأس المعقد مثلما نوقش فى صدر الفصل الرابع، حيث أن كل من (C)، (D) عبارة عن حركة الجسيم فى أحد الإتجاهات.

ومرة ثانية نتحدث أن دالة إيجن يجب أن تكون وحيدة القيمة ولهذا فإن حاصل ضرب دالة الموجه فى المقابلة لها ($\psi\psi^*$) أيضاً تأخذ قيمة واحدة عند أى نقطة على الحلقة. كذلك، دالة إيجن لها أن تأخذ نفس القيمة متى φ ستزداد بالمقدار (2π) إلى ($\varphi+2\pi$). إضافة، يجب أن تكون دالة إيجن (ذاتية) مستمرة مثلما أيضاً لأول إشتقاق لها $d\psi/d\varphi$.

هذه المسألة ربما تدرس على إعتبار الحلقة كأنها خط مستقيم متخذ من $\varphi=0$ إلى $\varphi=2\pi$، وأن نتذكر أن هاتين النهايتين هما تلك النقطة على الحلقة. وفى المعادلة (7) وهى جا الزاوية وجتا الزاوية يمكن رسمهما منفصلتين ولو كل جزء يطابق للعوامل السابقة، إذاً المعادلة (7) ككل سوف تكون دالة إيجن (ذاتية) للنظام. هذه الأشكال المرسومة يمكن توضيحها فى شكل (2) لبعض قيم (M).

فبالنسبة للقيمة (M) التى تساوى ($\frac{1}{2}$) حيث يوجد فجوات فى الدالة جيب التام حيث لا تأخذ نفس القيم عند $\varphi=0$ ، $\varphi=2\pi$. نفس حالة دالة جيب الزاوية (جا) قيمة كل الدوال والتى تكون نفسها عند كل نقطتين، ولكن يوجد تغير مفاجىء فى المنحنى للرسم ولهذا هناك يوجد عدم إستمرارية أو فجوات فى الدالة $d\psi/d\varphi$. ومن هذه الإعتبارات، إذاً (M) لا تأخذ

القيمة ($\frac{1}{2}$) وأيضاً إنعكاس لحظى وسوف نرى أن أى قيمة كسرية أخرى سوف تبعد بواسطة الإعتبارات المذكورة سابقاً.

وبالنسبة للقسم M=2 أو M=1 كما هو فى الشكل (2) نجد أن جا الزاوية وجتا الزاوية قيمة واحدة ومستمرة وكذلك أنه لا يوجد فراغ فى المنحنيات للخط البيانى للرسم. مرة أخرى سوف نقدر أن قيم أخرى صحيحة للمقدار (M) مشتملة قيم صحيحة سالبة، وأيضاً ستفى لهذا الغرض.

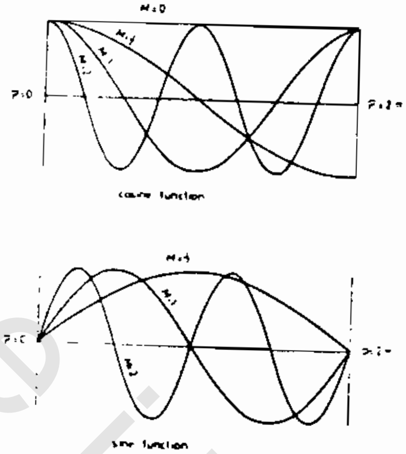

Fig. (2): Consideration of the allowed values of M.

ولو كانت M=0. فإن جا الزاوية فى المعادلة (7) بصفر ولكن بناءاً على ذلك فإن جتا الزاوية تصبح بالوحدة وأن الجزئية $B \cos M\varphi$ سوف تختزل إلى B. والدالة الموجية تأخذ قيمة ثابته للقيمة B. وسوف يعتبر هذا الحل مقبول.

ومن المناقشة السابقة، يجدر لنا أن نقول من المعادلة (7) والمعادلة (8) هما دالة إيجن (دالة ذاتية) للنظام بشرط أن :-

$$M = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \cdots$$

من الرؤية لتلك الحقيقة أن القيم للحد (M) تكون مقيدة مثل ما سبق، وأن طاقة النظام ستكون مكمه والعلاقة بين الطاقة (E) للنظام وعدد الكم M سوف تعين بواسطة المعادلة (5) ومن العلاقة :-

$$E = \frac{M^2 h^2}{8\pi^2 mr^2} \qquad -9$$

نلاحظ أن كلما (M) تأخذ قيمة صفر، فإن طاقة النظام أيضاً بصفر، ومن هنا لا يوجد نقطة صفرية لطاقة الدوران مثلما فى الحالة للطاقة الإهتزازية. علاوة على ذلك إذاً (E)

تعتمد على (M^2)، كل مستويات الطاقة الأخرى تكون إزدواجية غير متولدة، لأن الطاقة (E) تأخذ نفس القيمة للدالة (+M) أو (-M).

وقبل أن نهمل الحل المثلثى لمعادلة الموجه. فإنها سوف تستخدم لتعادلها مثل هذه الطريقة شريطة بعض المعلومات المستخدمة للتفسير المتصلة بمدارات ذرة الإيدروجين التى سوف تشرح فى آخر هذا الفصل.

وتكون الظروف للتعادل كما يلى :-

$$\int \psi\psi^{\circ}\, d\, r = 1$$

حيث التكامل فى المعادلة يشير لعملية التكامل على كل المدى حيث يوجد النظام. ففى حالة الجسيم على الحلقة، فالمتغير هى الزاوية φ حيث أنها تتغير من صفر وحتى 2π. وبتسوية المعادلة (7) يمكن التعبير عنها بهذه العلاقة :

$$\int_0^{2\pi} (A \sin M\varphi + B \cos M\varphi)^2\, d\varphi = 1 \qquad -10$$

من العلاقة المثلثية فى المرجع الثالث، يمكن الإستبدال يتم كالآتى : -

$$\mathrm{Sin}^2\, M\varphi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2M\,\varphi)$$

$$2\mathrm{Sin}\, M\varphi\, \cos M\varphi = \mathrm{Sin}\, 2\, M\varphi$$

$$\mathrm{Cos}^2\, M\varphi = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2M\,\varphi)$$

المعادلة (10) إذاً تصبح :-

$$\int_0^{2\pi} [\frac{1}{2} A^2 (1 - \cos 2M\varphi) + AB \sin 2M\varphi + \frac{1}{2} B^2 (1 + \cos 2M\varphi)]\, d\varphi = 1$$

or

$$\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 \cos 2M\varphi + AB \sin 2M\varphi + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} B^2 \cos 2M\varphi)\, d\varphi = 1 \qquad -11$$

بتكامل كل من جا وجتا الزاوية بين نهايتى صفر، 2π تعطى القيم صفر ولهذا فالمعادلة (11) تؤول إلى : -

$$A^2\pi + B^2\pi = 1 \qquad -12$$

والمعادلة (12) تعتبر وافية بواسطة العلاقة :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha$$

ولهذا فإن المعادلة (7) يمكن أن تنص على :-

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha \sin M\varphi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha \cos M\varphi$$

$$\text{or} \qquad \psi_S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(M\varphi + \alpha) \qquad -13$$

حيث الرمز (s) تعتبر ملحقة للدالة ψ وبذلك تشير إلى أن الحل فى جزئية دالة جيب الزاوية.

فيما بعد. المعادلة (12) تكون وافية بالعلاقة :

$$A = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha$$

ويمكن أن تأخذ الشكل للمعادلة (7)

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\alpha \sin M\varphi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\alpha \cos M\varphi$$

$$\text{or} \qquad \psi_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(M\varphi + \alpha) \qquad -14$$

حيث (c) تعتبر ملحقة للدالة ψ، وبذلك تشير إلى أن الحل فى جزئية الدالة جتا الزاوية (جيب التمام).

والدوال ψ_S, ψ_C فى المعادلة 13، 14، يكونان متعادلان. وعلاوة على ذلك، يعتبران متعامدان مثل : -

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(M_1\varphi + \alpha)\right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(M_2\varphi + \alpha)\right] d\varphi = 0$$

حيث M_1, M_2 قيم مختلفة لعدد الكم M.والدالتين ψ_S, ψ_C فى هذه الحالة متعامدان.

والحد (α) فحسب يغير الأصل حول الحلقة بنفس السلوك تماماً مثلما شرح سابقاً فى الفصل الثانى بالإرتباط بالمعادلة (23) الفصل الثانى. والزاوية α تأخذ أى قيمة ومازال منفذة لشروط المعادلة (12)، ولهذا يوجد عدد لا نهائى لمستقيمين متعامدين متقابلين للحل لمعادلة الموجه المعبر عنها بالمعادلة 13، المعادلة (14).

ولنا أن نلاحظ مسبقاً بالمرور لتكامل المعادلة (11)، ليست فعالة عندما M=0، لأن عملية التكامل الجزء المثلثاتى يؤدى للمعامل $(\frac{1}{2})$ حيث يكون لا نهائى لو أن M=0. ولتعديل أو معادلة الحل المثلثاتى لمعادلة دالة الموجه وخصوصاً فى القيمة الخاصة عندما تكون M=0، هذه القيمة أولاً يجب أن تدخل أو تندرج فى المعادلة (7) لتعطى :-

$$\psi = B$$

حيث يمكن بعد ذلك تعادلها بكتابة الآتى :-

$$\int_0^{2\pi} B^2 \, d\varphi = 0$$

وهذا العمل يؤدى إلى : -

$$2 B^2 \pi = 0$$

or

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ولهذا عندما M=0 فإن دالة الموجه تأخذ قيمة ثابتة تعطى بواسطة

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

الهدف الأساسى والمهم فى مسألة الجسيم على الدائرة (الحلقة) هى تعتبر العزم الزاوى للنظام. ولقد أشرنا إلى ذلك مسبقاً إلى أن الحل للأس المعقد لمعادلة الموجه سوف يستخدم بأكثر فى هذا لسياق الكلام مثل الأجزاء (C)، (D) فى المعادلة (8)، وكل واحد من تلك الدالات تقابل لإتجاه واحد فقط للحركة. ومن هذه النقطة لذلك المنظر يكون أفضل لتغيير هذا الإنتباه، للزمن الكائن، لقيم موجبة للدالة M. ثم فصل الجزئية وبكتابته على الشكل الآتى :-

$$\psi_+ = C e^{iM\varphi} \qquad -15$$

and

$$\psi_- = D e^{-iM\varphi} \qquad -16$$

حيث العلامات (الرمز السفلى) لتدل على التماثلية وعدم التماثلية فى الفصل الخامس.

وبالمساواة لمعادلة الموجه المعطاه فى المعادلة (15)، لربما تقرب وذلك بوضع

$$\int_0^{2\pi} \psi_+ \psi_+^{\circ} \, d\varphi = 1 \quad , \quad \int_0^{2\pi} (C\, e^{iM\varphi} \, . \, C^* \, e^{-iM\varphi}) \, d\varphi = 1$$

$$CC^* \int_0^{2\pi} d\varphi = 1 \quad , \quad CC^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

من حيث

وأيضاً لمساواة المعادلة (16) نرى أن :-

$$D = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}$$

ولهذا فإن أشكال التساوى للمعادلات (16, 15) هى :-

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \, e^{iM\varphi} \quad - 17 \quad , \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \, e^{-iM\varphi} \quad - 18$$

هذه الحلول الآن قد تكون تساوت ولكن فى النهاية متعامدة مثل الآتى :-

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \, e^{iM_1\varphi}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \, e^{-iM_1\varphi}\right) d\varphi = 0$$

لو تصورنا الأصل ربما يتغير على الحلقة بزاوية (α) عندما المعادلة (17) كمثال التى يمكن كتابتها كما يلى : -

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \, e^{iM(\varphi + \alpha)}$$

ولإجراء التبسيط فى سرد المناقشة، (α) يجب أن توضع بصفر والآن يجب أن نقدر أن لو (M) تأخذ قيمة (+1). هذا فرض فى المعادلة، ستصبح هذه المعادلة (7) متماثلة مع المعادلة (18) ومن حيث (M) تأخذ القيمة (-1). ومن هذا المنطلق لإيجاد العزم الزاوى إذاً، المعادلة (17) ، (18) يمكن إرتباطهما كما يلى : -

$$(\psi_{+}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\varphi} \qquad - 19$$

وعلى ذلك نجد أن (M) يمكن أن تأخذ إما قيمة موجبة أو سالبة تحت التقدير. والحلقة التى يتحرك عليها الجسيم المتمثل والواقع فى السطح (xy) ولهذا فإن الجسيم سوف يأخذ عزم زاوى حول المحور (z). فبإستخدام تعبير معادلات الموجه بواسطة المعادلة (19)، فالعزم الزاوى يجب أن يكون قيمة محددة مثل أى قيمة للحد (M) ليقابل فقط الحركة فى إتجاه واحد. إذاً من الواجب إمكانية إيجاد العزم الزاوى للجسيم بواسطة العمل على $\psi_{\pm}$ مع عامل العزم الزاوى.

وعامل العزم الزاوى حول المحور (z) قد يعطى بالإحداثيات القطبية بواسطة $(h/2\pi i)(d/d\varphi)$. بالعمل على الدالة $\psi_{\pm}$ فمع هذا العامل نجد أن :

$$\frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{d}{d\varphi} (\psi_{\pm}) = \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\varphi}\right)$$

$$= \frac{h}{2\pi i} iM \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\varphi}$$

$$= \frac{Mh}{2\pi} \psi_{\pm}$$

هذه العملية تنتج لدينا عدد حقيقى مضروب بواسطة دالة الموجه الأصلية، لهذا فإن العدد الحقيقى يعتبر العزم الزاوى للجسيم، ونرمز للعزم الزاوى حول المحور (z) بالرمز L_z إذاً : -

$$L_z = \frac{Mh}{2\pi}$$

نلاحظ أن العزم الزاوى حول المحور (z) مكم بالوحدة $(h/_{2\pi})$، حيث أنها أحد الفروض فى نظرية بوهر لذرة الأيدروجين.

والعزم الزاوى للجسيم يمكن أن يكون مثلما (M) تكون صفر وعلى ذلك تكون قيمة موجبة للحد (M) وسوف يؤدى قيمة موجبه للعزم الزاوى حيث يقابل لحركة حول الحلقة فى إتجاه واحد. والعكس سيؤدى إلى إتجاه عكس الآخر.

نقطة أخرى يمكن شرحها بواسطة مسألة الجسيم على الحلقة. دالة الموجه الموضحة بواسطة المعادلة (19) قد لا يمكن رسمها لتعطى رسم بيانى أو تخطيط مثلما هى تحتوى لجزء تخيلى. والدوال المثلثاتية والتى أعطيت بالمعادلات (13 ,14) لا تعانى من هذا العائق. وفى الحقيقة فإن دوال الموجه المثلثاتية تعتبر خط مركب لدوال أسية.

ولنعتبر المعادلة : -

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin M\varphi \qquad -20$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{iM\varphi} - e^{-iM\varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\varphi} - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM\varphi} \right)$$

أو

$$\psi_S = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\psi_+ - \psi_- \right) \qquad -21$$

مرة أخرى باعتبار المعادلة (14)

$$\psi_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos M\varphi \qquad -22$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{iM\varphi} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM\varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\varphi} + e^{-iM\varphi} \right)$$

أو

$$\psi_C = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\psi_+ + \psi_- \right) \qquad -23$$

هذه التركيبة الخطية تشرح الصفة العامة لدوال الموجه المنتهية degenerate، التى تعتبر لأى تركيبة خطية للأطراف للمجموعات المنتهية وأيضاً تكون مقبولة وتأخذ نفس الطاقة كدالة أساسية وفى المعادلات 21 , 23 السابقتين ψ_+ , ψ_- المعطيان لقيمة للحد (M) سوف تنتهى والتركيبات الخطية له تعطى ψ_S , ψ_C، والتى أيضاً معروفة قبل ذلك وتكون دالة موجه مقبولة والتى تأخذ نفس لطاقة مثل ψ_+ , ψ_- كل على حدة للحد (M).