

الفصل الرابع

حواجز الطاقة الوضعية

Potential Energy Barriers

في الفصل السابق : تكلمنا عن المنطقة التي تكون طاقة الوضع إما بصفر أو لا نهائى. وهذا يعنى بالنسبة للجسيم الموجود والمحدود في احد المحاور للصندوق في المنطقة ذات الطاقة الوضعية بصفر بين الحدود $x = a$ ، $x = 0$ لأن المنطقة خارج هذه الحدود، حيث طاقة الوضع إعتبرت بما لا نهاية. والجسيم على هذا الأساس محدد بحدود طاقة الوضع بما لا نهاية عالية. في هذا الفصل يعود الإهتمام إلى الموقع الذى يحدث عندما يكون إرتفاع الحد لطاقة الوضع متناه، ولكن قبل تلك المشكلة بعض الإعتبارات سنقدم للتوجيه لتضمن حلول معادلة الموجه لشرودنجر.

متضمنات توجيهية لدالة الموجه :

Directional Implications of Wave Functions:

لقد أعطى الحل لأحد المحاور لمعادلة شرودنجر في جزئية المعادلة للأس المعقد في المعادلة (76) في الفصل الثانی كما یلى :-

$$\psi = C e^{ikx} + D e^{-ikx} \quad -1$$

حيث

$$k^2 = 8\pi^2 m (E - V) / h^2$$

مثلاً $(E - V)$ تكون مساوية للطاقة الحركية، $\frac{1}{2} mv^2$

$$k^2 = 4\pi^2 m^2 v^2 / h^2$$

أو

$$k = 2\pi m v / h$$

لذا فالمعادلة (1) تكتب على هذه الصورة:

$$\psi = C \exp (2\pi i m v \cdot x/h) + D \exp [2\pi i m (-v) x/h]$$

حيث السالب في الأس في الجزئية الثابتة مرتبطة بسرعة الجسيم. وهذا يدل ضمناً على أن (C) - تطابق لجسيم يأخذ سرعة موجبه، وأن D تقابل لجسيم يأخذ سرعة سالبة

وكلاهما يتحرك في اتجاه عكس الآخر. كما أن جزئية (C) تدل على اتجاه في المحور السيني من اليسار لليمين، وكذلك D يعتبر للجسيم المتحرك من اليمين إلى اليسار. والشكل المثلثي فيما بعد لدالة الموجه الذي يعتبر الحل لمعادلة الموجه لشروندجر والتي أعطيت أولاً في الفصل الثاني للمعادلة (75)، وأتينا هنا سوف نعيد القول بأن الحل المثلثي هو :-

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx \quad -2$$

المقابل للمعادلة للموجه القائمة، والتي نحصل عليها بواسطة موجتين متتاليتين مرتحلتين في الاتجاه المعاكس وباستمرار.

وهكذا: بينما الجزئين في المعادلة (1) للدالة الأسية المعقدة، التي يمكن اعتبارها للإشارة إلى حركة الجسيم للإمام والخلف، ومعادلة الدالة المثلثية (2)، يجب اعتبارها لتقابل لحركة الجسيم في الاتجاه المعاكس باستمرار. إلى هذا الحد: فبينما الشقين للمعادلة (1)، دالة الأس المعقدة، ربما يمكن اعتبارها لتشير لحركة الجسيم للإمام والخلف، والدالة المثلثية، المعادلة (2)، يجب اعتبارها لتقابل لحركة الجسيم في الاتجاه المعاكس باستمرار وليس من الضروري لنقول، أنه ليس من الممكن أن نتصور هذا الوضع فيزيائياً، ولكن من الواجب أن نتذكر أن معادلة الموجه ما هي إلا فقط وصف لسلوك الجسيم في حساسية ميكانيكا الكم. ومن المعادلة (1) والمعادلة (2) يوجد وصفين مختلفين للمشكلة وتكون غالباً ما يحدث واحد فقط للوصف ويكون الأكثر ملائمة لسمة جديرة بالذكر للمشكلة عن غيرها. ومن الواضح جلياً الفائدة لإختيار أفضل إحدى الوصفين للفرض بالتفصيل. مثال لذلك: قطعة من الصوف يمكن أو توصف حالة شكلها وأن تقول أن شكلها ثابت صلب موضوع. وفيما بعد، يمكن وصفها بأنها مادة قابلة سريعة الإشتعال.

مسألة الإختيار لوصف المشكلة يمكن تفسيرها وذلك بالإشارة إلى عزم الجسيم في أحد محاور الصندوق. وقد أعطيت محاولة في الفصل الأخير لإيجاد عزم الجسيم وذلك بتطبيق معامل العزم لدالة الموجه.

$$\psi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad -3$$

والمقصود أو الإخفاق لهذه الطريقة ترىنا أن العزم ليست كمية قاطعة والحساب التالي أعطى العزم P. كما يلي:

$$P = \pm n h / 2a$$

بالنظر لتلك أن العزم عند أى لحظة يمكن أن يكون موجب أو سالب. وأنه ليس واضحاً وأن الحل المثلثى السابق المقابل لحركة الجسيم فى كلا الإتجاهين مستمر وتحت تلك الظروف فالعزم لا يمكن أن يكون ذا قيمة قاطعة.

ومن الممكن تحويل المعادلة (3) إلى أجزاء أسية معقدة. متذكراً أن (المرجع ١ أو

التذييلة).

$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

وبالتالى المعادلة (3) يمكن كتابتها :

$$\psi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \cdot \frac{1}{2i} (e^{in\pi x/a} - e^{-in\pi x/a}) \quad - 4$$

وفى هذا الشكل الشق الأول من القوس يمكن إعتباره للإشارة إلى حركة الجسيم فى الإتجاه الموجب أى من ناحية اليسار إلى اليمين، والشق الثانى أيضاً الإشارة إلى حركة الجسيم فى الإتجاه المعاكس من اليمين إلى اليسار ولو إعتبرنا أن الجسيم ليتحرك فقط فى إتجاه واحد، بمعنى من اليسار إلى اليمين، إذا يجب إيجاد العزم له وسوف يكون محدد بقيمة قاطعة. والدالة التى تبين حركة الجسيم فقط فى إتجاه واحد مثلاً من اليسار إلى اليمين سوف تكون هى :-

$$\psi_n = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \cdot \frac{1}{2i} e^{in\pi x/a}$$

ولنا أن نعتبر فقط الشق الأول من المعادلة (4). وبالعامل على تلك الدالة بمعامل عزم

مناسب كما يلى :-

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \cdot \frac{1}{2i} e^{in\pi x/a} \right] &= \frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \cdot \frac{in\pi}{a} e^{in\pi x/a} \\ &= \frac{nh}{2a} \psi_n \end{aligned}$$

هذه العملية تنتج لنا عدد حقيقى مضروب فى دالة موجة أصلية، ومن هنا فهذا العدد

الحقيقى يعتبر العزم للجسيم، والعزم كما هو واضح من المعادلة الآتية موجب

$$P = \frac{nh}{2a}$$

والحالة هنا كما أخذنا في الإعتبار لحركة الجسم من اليسار إلى اليمين، بمعنى السرعة موجبة.

ومن الواضح الآن، لو أن إتجاه حركة الجسم هي الأهم في المشكلة فيكون أفضل وصف مناسب للنظام سوف يعطى بواسطة دالة الموجه. المعبر عنها في الجزئية الأسية المعقدة.

Single Potential Barriers

حدود طاقة الوضع المنفرد

نفترض جسم ينتقل من منطقة يكون لها طاقة وضع بصفر إلى إتجاه منطقة يكون لها طاقة وضع نهائى. ولو أننا ننتبه أن حركة الجسم تعتبر محددة وفي محور واحد فقط وهو المحور السينى مثلاً، كما هو موضح فى الشكل (1)، فعند ما يصل الجسم إلى حدود أو يقترب من حد الوضع (طاقة الوضع) ذى الإرتفاع المرموز له بالرمز (V) وموقع الجسم عند $x=0$ من ناحية اليسار، أى بمعنى قيمة سالبة للمحور السينى (x). وعملياً لا تتغير طاقة الوضع بهذه الصورة المرسومة بحددة كما هو فى الشكل (1)، والذى يوضح حقيقة الوضع ببساطة.

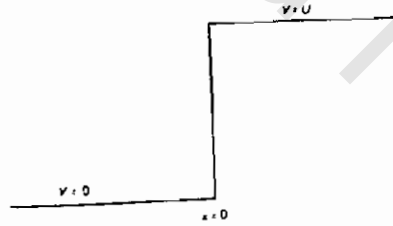


Fig. (1): Simple potential barrier of finite height

فعلى العموم يوجد منطقتين لتلك المسألة، واحدة تقابل قيمة سالبة للمحور (x)، حيث طاقة الوضع تعطى بواسطة $V=0$ ، والأخرى يقابلها قيمة موجبة للمحور (x)، وعندما يكون الوضع $V=U$ ويعرفا بالمنطقة (1) والمنطقة (2) على التوالى :-

وفي الفيزياء التقليدية، يقترب الجسم للحد من الناحية اليسرى، فإما يمر أعلى الحد وعلية لو أن طاقته كانت أعلى من إرتفاع الحد، أو ربما ينحرف أو ينعكس لو أن الطاقة أقل من الحد المسموح لإرتفاع الحائط. والنتائج لميكانيكا الكم لا يساعد في أساس الفيزياء التقليدية، ولكن المسألة تتعلق في إتجاه حركة الجسم، ومن الواضح أن شكل الأس المعقد لدالة الموجه يعتبر أكثر مناسبة لتلك المسألة المحددة.

ففي المنطقة (1) لو أن $v = 0$ فإن شكل معادلة شرودنجر تصبح :-

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E \psi_1 = 0$$

الرمز (1) يشير إلى دالة الموجه في المنطقة (1) ويكون الحل لدالة الموجه في جزئية الأس على النحو التالي :-

$$\psi_1 = C_1 e^{ik_1x} + D_1 e^{-ik_1x} \quad - 5$$

$$\text{حيث} \quad k_1 = 2\pi (2\pi E)^{1/2} / h \quad - 6$$

ويجب أن نتذكر أن الجزئية الأولى في المعادلة (5)، تشير إلى أن حركة الجسم تجاه الجدار من اليسار. بينما الشق الثاني أيضاً يشير إلى حركة الجسم من اليمين إلى اليسار في المنطقة (1). وهذا يعني أن الجسم ينعكس من عند الجدار. وقبل أي إجراء أكثر أو مزيد فإنا سوف نستخدم كل جزئية (جزء) منفصلة إعتبارية من تلك المعادلة. فباخذ الجزء الأول والذي يمثل حركة الجسم الأمامية ثم نكتب على النحو التالي :-

$$\psi_F = C_1 e^{ik_1x} \quad - 7$$

وعليه فإن احتمالية وجود الجسم في تلك المنطقة في المسافة (dx) تعطى بالعلاقة :-

$$\psi_F \psi_F^* dx$$

حيث ψ^0 المقابلة للدالة ψ ، ومن المعادلة (7)

$$\psi_F \psi_F^* dx = C_1 e^{ik_1x} \cdot C_1 e^{-ik_1x} dx = C_1 C_1^0 dx \quad - 8$$

حيث أيضاً (C_1^0) المقابلة للحد (C_1).

وبأخذ الشق الثانى للمعادلة (5)، دالة الموجه للجسيم سوف تكون للخلف ويمكن كتابتها كما يلى :-

$$\psi_b = D_1 e^{-ik_1x} \quad - 9$$

وأن احتمالية وجود حركة الجسيم للخلف فى المسافة المقيدة x له ويعطى بالعلاقة:

$$\psi_b \psi_b^{\circ} dx$$

ومن المعادلة (9) تكون الصيغة كما يلى :-

$$\psi_b \psi_b^{\circ} dx = D_1 e^{-ik_1x} \cdot D_1^{\circ} e^{ik_1x} dx = D_1 D_1^{\circ} dx \quad - 10$$

والإحتمالية النسبية للحركة من الخلف للأمام تكون بالطبع

$$\frac{\psi_b \psi_b^{\circ} dx}{\psi_f \psi_f^{\circ} dx} = \frac{D_1 D_1^{\circ}}{C_1 C_1^{\circ}} \quad - 11$$

ومن التحليل لتلك المسألة الحديثة إذا: لربما نفهم أن علاقة القيم للحدود (D_1 , C_1) مهمة جداً.

بالرجوع إلى المنطقة (2) حيث $v = u$ ، فإن معادلة شرودنجر تأخذ الشكل:

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U) \psi_2 = 0$$

والحل لتلك المعادلة كما يلى :-

$$\psi_2 = C_2 e^{ik_2x} + D_2 e^{-ik_2x} \quad - 12$$

$$\text{حيث} \quad K_2 = 2\pi [(2m (E-U))^{1/2} / h$$

مرة أخرى: تخص أهمية علاقة القيم لكل من C_2 ، D_2 ويمكن إيجاد أو الحصول على العلاقة بين الشقوق المتغيرة بين (D , C) وذلك على إعتبار التحديد المسلط على دوال الموجه لو أنها كانت دالة ذاتية للنظام. ولنا أن نقول أن أحد الشروط وهى أن دالة الموجه قيمة وحيدة مستمرة، وعليه عند النقطة ($x=0$)، (ψ) يجب أن تكون مساوية للدالة ψ_2 ، وإلا سوف يوجد احتماليين مختلفين لتعيين الجسم عند هذه النقطة. بوضع $\psi_1 = \psi_2$ والذى تعطى من المعادلة (5) والمعادلة (12).

$$C_1 e^{ik_1x} + D_1 e^{-ik_1x} = C_2 e^{ik_2x} + D_2 e^{-ik_2x}$$

باعتبار هذه العلاقة حيث $x=0$ نحصل على :

$$C_1 + D_1 = C_2 + D_2 \quad - 13$$

وضع آخر لتلك الدالة الذاتية، يجب أن يفى بالجزء الأول الإشتقاقى للدالة بحيث أن تكون مستمرة (أنظر المرجع 1). وهذا يعنى أنه عند أى نقطة، ميل دالة الموجه لا يتغير فجأة. وهذه الحالة يمكن أن تحدد عند $x = 0$.

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = \frac{d\Psi_2}{dx} \quad - 14$$

بتفاضل المعادلة (5) بالإستنباط للدالة (x) تعطى :-

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = ik_1 C_1 e^{ik_1 x} - ik_1 D_1 e^{-ik_1 x}$$

وبتفاضل المعادلة (12) نجد أن :-

$$\frac{d\Psi_2}{dx} = ik_2 C_2 e^{ik_2 x} - ik_2 D_2 e^{-ik_2 x}$$

وبالإستبدال فى المعادلة (14)

$$ik_1 (C_1 e^{ik_1 x} - D_1 e^{-ik_1 x}) = ik_2 (C_2 e^{ik_2 x} - D_2 e^{-ik_2 x})$$

بتطبيق الحالة $x=0$ ثم بالإختصار :-

$$K_1 (C_1 - D_1) = K_2 (C_2 - D_2) \quad - 15$$

ومن المعادلة (13) :

$$C_1 = C_2 + D_2 - D_1 \quad - 16$$

والقيمة للحد (D_1) يمكن إيجاده من المعادلة (15) كما يلى :-

$$D_1 = C_1 - \frac{k_2}{k_1} C_2 + \frac{k_2}{k_1} D_2 \quad - 17$$

بالإستبدال فى المعادلة (16)

$$C_1 = C_2 + D_2 - C_1 + \frac{k_2}{k_1} C_2 - \frac{k_2}{k_1} D_2$$

$$\text{أو} \quad 2C_1 = C_2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) + D_2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)$$

لذلك

$$C_1 = \frac{C_2}{2k_1} (k_1 + k_2) + \frac{D_2}{2k_1} (k_1 - k_2) \quad - 18$$

تعبير مماثل للدالة (D_1) يمكن إيجاده باستبدال معادلة 16 للدالة C_1 في المعادلة (17).

$$D_1 = C_2 + D_2 - D_1 - \frac{k_2}{k_1} C_2 + \frac{k_2}{k_1} D_2$$

$$\text{أو} \quad 2D_1 = C_2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) + D_2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

لذلك

$$C_1 = \frac{C_2}{2k_1} (k_1 - k_2) + \frac{D_2}{2k_1} (k_1 + k_2) \quad - 19$$

بأخذ برهنة هذه العلاقات: يوجد حالتين يمكن إعتبارهم طبقاً ما إذا كان مجموع الطاقة (E) للجسيم الذي يقترب من الجدار تكون أكبر من أو أقل من إرتفاع الجدار (U) . ولربما باستخدام تلك المسافة بين مكاتين لحالة دالة الموجه للمنطقة (1) والمنطقة (2)، ومرة أخرى لتلك العلاقة المتضمنة للقيم النسبية لكل من (E) و (U) والذان ربما يمكن فهمها جيداً.

$$\psi_1 = C_1 e^{ik_1x} - D_1 e^{-ik_1x} \quad - 5$$

$$k_1 = 2\pi (2m E)^{1/2} / h \quad - 20$$

$$\psi_2 = C_2 e^{ik_2x} + D_2 e^{-ik_2x} \quad - 12$$

$$k_2 = 2\pi [2m (E - U)]^{1/2} / h \quad - 21$$

إشارة للقيمة (V) فلربما نرى أن (k_1) دائماً ما تكون كمية حقيقية. في المنطقة (2) على أى حال متى تكون قيمة حقيقية لو إعتبرنا أن $E > U$ ، ولكن يمكن أن تكون لها قيمة تخيلية لو أن $E < U$.

فلنعبر أولاً: الحالة عندما $E > U$ ، تحت تلك الظروف k_2 حقيقية، ثم لا يوجد جسيم يقترب من القيمة الموجية للحد $D_2(x)$. تصبح بصفر، في تلك الحالة المعادلات 18,19 تختزل إلى :-

$$C_1 = \frac{C_2}{2k_1} (k_1 + k_2) \quad - 22$$

$$D_1 = \frac{C_2}{2k_1} (k_1 - k_2) \quad - 23$$

لذلك

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

بالإستبدال من المعادلة 20، والمعادلة 21 وبالتبسيط :-

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{E^{\frac{1}{2}} - (E-U)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} + (E-U)^{\frac{1}{2}}} \quad - 24$$

المعادلة (21) تعطى النسبة للجسيمات المنعكسة إلى الجسيمات الحادثة في المنطقة (1) مثلما C_1° / C_1 و D_1° / D_1 . والمعادلة (24) تزيينا أن C_1° / C_1 عبارة عن كمية حقيقية، عندما $E > U$ ومن هنا :-

$$\frac{D_1^\circ / D_1}{C_1^\circ / C_1} = \frac{D_1^\circ}{C_1^\circ} = \frac{2E - U - 2[E(E-U)]^{\frac{1}{2}}}{2E - U + 2[E(E-U)]^{\frac{1}{2}}} \quad - 25$$

بقسمة البسط والمقام للمعادلة (25) للطاقة E وبوضع $\alpha = U/E$ لتعطى :

$$\frac{D_1^\circ / D_1}{C_1^\circ / C_1} = \frac{2 - \alpha - 2(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}}{2 - \alpha + 2(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \quad - 26$$

بتمديد الحدين للمقدار $(1-\alpha)^{1/2}$ تعطى :-

$$(1-\alpha)^{1/2} = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^3}{48}$$

ولو أن $\alpha > \frac{1}{2}$ الحد الرابع وبالتالي الشقوق الأخرى يمكن إهمالها. وباستبدال الثلاث

أجزاء الأول للتمدد للمعادلة (26). لتعطى :-

$$\frac{D_1 D_1^\circ}{C_1 C_1^\circ} = \frac{\alpha^2/4}{4-2\alpha - \alpha^2/4} \quad - 27$$

ولو أن $\alpha > \frac{1}{2}$ إذا $\alpha^2/4$ سنهمل وبالإحتفاظ للحد $(4-2\alpha)$ فإن المعادلة 27 ربما

تكتب:

$$\frac{D_1 D_1^\circ}{C_1 C_1^\circ} = \frac{\alpha^2}{8(2-\alpha)} \quad - 28$$

إذا المعادلة (28) ترىنا أن بعض الجسيمات سوف ينعكس من الحد بشرط أن (α) ليست بصفر. ولو أن إرتفاع الحد محدود (α) لا يكون صفر بإستثناء الطاقة يكون للجسيمات الحادثة بحيث تكون لانتهائى وهذا يعنى أن الجسيمات للطاقة E سوف تقترب حد طاقة الوضع للإرتفاع (U) ، وأن بعض الجسيمات سوف تنعكس. ولو أن $E=2V$ ، إذا $\alpha=0.5$ وإستبدال هذه القيمة فى المعادلة (28).

$$\frac{D_1 D_1^\circ}{C_1 C_1^\circ} = 0.021$$

حيث نرى أن تحت هذه الظروف حوالى (2%) من الجسيمات الحادثة سوف يحدث لها إنعكاس.

ولنعبر أن الحالة بحيث طاقة الجسيمات الحادثة تعتبر أقل من هذا الإرتفاع ولهذا فإن $E < U$ وتحت تلك الظروف k_2 تكون بكمية تخيلية. ولو أن k_2 تخيلية إذا الحد (ik_2) سيصبح كمية حقيقية. وبوضع $ik_2 = k_2'$ حيث k_2' بكمية حقيقية، والمعادلة (12) يمكن كتابتها:

$$\psi_2 = C_2 e^{ik_2' x} + D_2 e^{-k_2' x}$$

وباعتبار كل جزئية، سوف ترى أن، مثلما نستبدل القيم الآتية :-

$$\begin{array}{l} x \longrightarrow \infty \\ \text{إذا} \quad C_2 e^{k_2' x} \longrightarrow \infty \\ \text{وكذلك} \quad D_2 e^{-k_2' x} \longrightarrow 0 \end{array}$$

واحد من تلك الظروف وهي أن الدالة الذاتية تعتبر أفقية وأنها محددة لأي مكان. ولو أن ψ_2 تتمثل لتلك الظروف. إذا C_2 تعتبر بصفر بمعنى آخر ψ_2 لا نهائية عندما (x) تكون لا نهائية وعندما $(E < U)$ فإن ψ_2 تكتب على الصورة الآتية :-

$$\psi_2 = D_2 e^{-ik_2 x} \quad - 30$$

ومع $C_2 = 0$ فالمعادلة (18) والمعادلة 19 تصبحان :-

$$C_1 = \frac{D_2}{2k_1} (k_1 - k_2)$$

أو
$$D_1 = \frac{D_2}{2k_1} (k_1 + k_2)$$

حيث
$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}$$

وبالاستبدال من المعادلتين 20 , 21 وبالتبسيط

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{E^{\frac{1}{2}} + (E - U)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} - (E - U)^{\frac{1}{2}}} \quad - 31$$

فمع $E < U$ ، $(E - U)^{1/2}$ تكون كمية خيالية ويمكن كتابتها $i(E - U)^{1/2}$ والمعادلة [31] تصبح :-

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{E^{\frac{1}{2}} + i(U - E)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} - i(U - E)^{\frac{1}{2}}}$$

والمعادلة (11) تعطى النسبة للجسيمات المنعكسة للجسيمات الحادثة في المنطقة

(1) مثلما $D_1 D_1^0 / C_1 C_1^0$. متذكراً أن المقابلة للكميات المعقدة سنحصل عليها باستبدال (i) بالمقدار (-i).

$$\frac{D_1 D_1^0}{C_1 C_1^0} = \frac{E^{\frac{1}{2}} + i(U - E)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} - i(U - E)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{E^{\frac{1}{2}} - i(U - E)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} + i(U - E)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

بالنظر إلى: عندما $E < U$ ، كل الجسيمات سوف تنعكس بواسطة الحد (الحائط).

هناك يكون، على أي حال. إعتبرات أخرى وبذلك لنا أن نشير إلى أن مع $C_2 = 0$ ، والمعادلة 18 تصبح :

$$C_1 = (k_1 - k_2)$$

أو

$$2k_1 C_1 = D_2 (k_1 - k_2)$$

بالإستبدال بالنسبة (k_1) ، (k_2) من المعادلة 20 والمعادلة 21 وللتيسير :-

$$2C_1 E = D_2 [E - (E - U)^{1/2}] \quad - 32$$

مرة أخرى بكتابة $(E - U)^{1/2}$ مثلما $i(U - E)^{1/2}$ والمعادلة 32 تصبح :

$$2C_1 E = D_2 [E - i(U - E)^{1/2}] \quad - 33$$

كما أن نسبة احتمالية إيجاد الجسيمات في المنطقة (2) بجانب حد الطاقة للوضع (الحائط)، إلى الجسيمات الحادثة الموجودة في المنطقة (1) ستمثل بالمعادلة أو بالنسبة $D_2 D_2^\circ / C_1 C_1^\circ$. ولأخذ بعض الفكر لهذه الكميات، المعادلة (33)، سيتضاعف على كلا الجانبين بتزاوجات مناسبة. وكما هو غير معلوم سواء C_1 ، D_2 حيث أنهما كميات خيالية أم لا. والكميات المتزاوجة لها وهي D_2°, C_1° على التوالي وسوف نتذكر، على أي حال، أن ذلك العدد المقابل يمكن إيجاده بإستبدال (i) مع (-i). ففي حالة العدد (2) والذي لا يحتوى على (i) وهو غير تخيلي الكمية، إذا يكون المقابل أيضاً عدد (2). بمعنى هو عدد صحيح وهكذا :-

$$2 (2^\circ) = 2^2 = 4$$

وبالمثل بالنسبة للطاقة $E^{1/2}$

$$(E^{1/2}) (E^{1/2})^\circ = (E^{1/2})^2 = E$$

الجزئية في القوس للمعادلة (33) هو الشكل (a - ib) والمقابل له لذلك الشكل هو

(a+ib). كما هو مبين في المرجع (1) أي أن :-

$$(a + ib) (a - ib) = a^2 + b^2$$

ولهذا فإن المعادلة (33) مضروبة بكميات مقابلة مناسبة ويمكن تكتب كما يلي :-

$$4C_1 C_1^\circ E = D_2 D_2^\circ [E + (U - E)]$$

$$D_2 D_2^\circ = 4 \frac{E}{U} C_1 C_1^\circ \quad - 34$$

والمعادلة 34. تبين لنا أنه عندما (E) نهائية، فإن $D_1 D_1^\circ$ لا تكون بصفر، باستثناء (U) لا تكون لانهائية. إذا عندما حد الوضع (الحائط) له ارتفاع نهائي، إذا توجد احتمالية لإيجاد الجسم داخل الحد.

وباختصار عندما يكون الوضع $E < U$ ، فإن دالة الموجه ψ_1 ، ψ_2 للمناطق 1, 2 على التوالي تعطى بالمعادلة (5, 30) مثلما :-

$$\psi_1 = C_1 e^{ik_1 x} - D_1^{-1} e^{-ik_1 x} \quad - 5$$

$$\psi_2 = D_2 e^{-ik_2 x} \quad - 30$$

كما هو مبين لهذا الفصل لقد لوحظ أن المعادلة (5)، الشق (C) يمكن إستنتاجه الذي يمثل الجزئيات المرتحلة من اليسار إلى اليمين، الشق D يمكن إرتحال الجسيمات من اليمين إلى اليسار. وفي المعادلة 5، (k_1) كمية حقيقية وتعطى بالعلاقة :-

$$k_2 = 2\pi (2m E)^{1/2} / h \quad - 20$$

إذا قوة شق الأس في المعادلة (5) الناشئة هي كميات تخيلية، مثلما k_1 تعتبر مضاعفة بالحد (i) لكلا قوتى الأسس. علاوة على ذلك، يمكن أن نرى في الفصل الثانی أن المعادلة ذات الشكل (5) يمكن أن تكون مثلية كما يلي :-

$$\psi_1 = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x \quad - 35$$

والمعادلة (35) تكون على هذا النحو دالة تذبذبية، ولهذا فالمعادلة (5)، أيضاً دالة تذبذبية.

ففي المعادلة (30) على كل حال، k_2 - عبارة عن كمية تخيلية، عندما $E < U$ ولذلك فإن الحد (ik) بذلك تعتبر كمية حقيقية حيث يمكن كتابتها كما يلي في المعادلة (30).

$$\psi_1 = D_2 e^{-k_2' x} \quad - 36$$

حيث (k_2') كمية حقيقية، المعادلة (36) ليست دالة تذبذبية، ولكن أحدها يتلاشى إلى الصفر مثلما (x) تؤول إلى لانهائية، في هذه الحالة ψ_2 لا يمكن أن تؤول للصفر لأنها دالة تذبذبية حيث تبين رحلة الجسم من اليمين إلى اليسار داخل الحدود، ولكن الأفضل إعتبارها كأنها حيز لأس لتلاشى الإمتصاص.

من اعتبار النتائج السابقة، وهو أن حيث الجسم ذي الطاقة E أقل من الإرتفاع U . لطاقة الجدار (وضع طاقة الجدار) ربما يمكن أن يخترق الجدار (الحائط). كما يبدو لو أن الحائط (الجدار) ليس سميكاً بما لا نهاية، ففي تلك الحالة الجسم يمكن أن تكون له هناك فرصة النفاذية للداخل ويظهر للعيان كجسيم حر على الجانب الآخر للجدار (الحائط). ولنعتبر حد الوضع لحدود السمك كما هو مبين في الشكل (2). ولنفترض جسيم يرتحل من قيم سالبة للموضع (x) إتجاه حد الجهد (الحائط) حدود الحائط. فإن دالة الموجه في المناطق الثلاث في الشكل (2) يمكن كتابتها كما يلي :-

$$\psi_1 = C_1 e^{ik_1x} + D_1 e^{-ik_1x} \quad - 37$$

$$\psi_2 = C_2 e^{ik_2x} + D_2 e^{-ik_2x} \quad - 38$$

$$\psi_3 = C_3 e^{ik_3x} + D_3 e^{-ik_3x} \quad - 39$$

$$\text{حيث } k_1 = 2\pi (2\pi E)^{1/2} / h \quad - 40$$

$$k_2 = 2\pi [2m (E - U_2)]^{1/2} / h \quad - 41$$

$$k_3 = 2\pi [2m (E - U_3)]^{1/2} / h \quad - 42$$

لو نعيد الإهتمام إلى الحالة حيث الطاقة الكلية (E) للجسيمات الحادثة تصبح في مكان ما بين (U_2) ، (U_3) وهذا يعنى أن $U_2 > E > U_3$ ، إذا حيث k_1 ، k_3 كميات حقيقية. إذا ψ_1 ، ψ_3 عبارة عن دوال تذبذبية من حيث الشق (C) التي تبين الجسيمات المتحركة من اليسار إلى اليمين، والشق (D) يبين حركة الجسيمات من اليمين إلى اليسار. فلو الجسيمات الحادثة على الحائط فقط من المنطقة (1)، والوضع في هذه الحالة حيث أن الجسيمات تقترب من اليسار (الشق C_1)، ومعظم الجسيمات سوف تنعكس للخلف إلى المنطقة (1) (الشق D)، ولكن بعض الجسيمات ربما تنفذ من الحائط وتستمر الحركة إلى اليمين في المنطقة (3) (الشق C_3). مثلما لا تقترب الجسيمات للحائط من اليمين في المنطقة (3)، إذا (D_3) يجب أن تكون مساوية للصفر.

والإحتمالية لإيجاد الجسيم في المنطقة (3) متعلقة بإحتمالية إيجاد الجسيم الحادث في المنطقة (1)، والذي سوف يعطى بواسطة $C_3 C_3^0 / C_1 C_1^0$ ، وهذه عبارة عن الإحتمالية النفاذية للحائط. ولكي نصل لبعض الفكر العامة للعوامل والتي تؤثر على هذه الإحتمالية

الصلة الموجودة بين (C_1) ، (C_3) . فهذا العمل مشابه لنفس الطريقة المستخدمة في مسألة جهد الحائط الوحيد وذلك باعتبار القيود والتي يجب إدخالها على (ψ_3, ψ_2, ψ_1) . ولو أن هذه الدالات عبارة عن دوال ذاتية (eigenfunctions). وهذه الظروف هي :-

$$\text{At } x = 0 \quad \psi_1 = \psi_2 \text{ and } \frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx}$$

$$\text{At } x = a \quad \psi_2 = \psi_3 \text{ and } \frac{d\psi_2}{dx} = \frac{d\psi_3}{dx}$$

بتطبيق هذه الظروف على المعادلات (36، 38، 39)، ونتذكر أن $D_3=0$ سنحصل

على :-

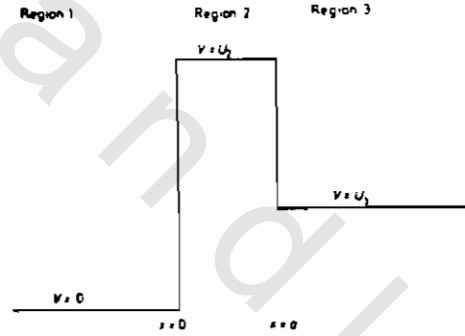


Fig. (2): Potential energy barrier of finite width

$$\text{For } \psi_1 = \psi_2 \text{ at } x = 0; C_1 + D_1 = C_2 + D_2 \quad - 43$$

$$\text{For } d\psi_1/dx = d\psi_2/dx \text{ at } x = 0; k_1 (C_1 - D_1) = K_2 (C_2 - D_2) \quad - 44$$

$$\text{For } \psi_2 = \psi_3 \text{ at } x = a, C_2 e^{ik_2 a} + D_2 e^{-ik_2 a} = C_3 e^{ik_2 a} \quad - 45$$

$$\text{For } \psi_2/dx = d\psi_3/dx \text{ at } x = a$$

$$k_2 (C_2 e^{ik_2 a} - D_2 e^{-ik_2 a}) = k_3 C_3 e^{ik_3 a} \quad - 46$$

وبواسطة نفس التقنية مثلما التي استخدمت في الفصل السابق D_2, C_2, D_1 والتي يمكن إزالتهم من المعادلات 43, 44, 45, 46 لنحصل على العلاقة بين (C_3, C_1) كما هو مبين (في المرجع 3).

$$C_1 = \frac{1}{2} C_3 e^{ik_3 x} \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{k_1} \right) \cosh(ik_2 a) - \left(\frac{k_3}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \sinh(ik_2 a) \right] \quad - 47$$

فعدما $U_3 > E > U_2$ ، k_2 سوف تصبح كمية تخيلية ولهذا (ik_2) سوف تكون كمية حقيقية، وبوضع :-

$$ik_2 = k_2'$$

وبالاستبدال في المعادلة (47) :-

$$C_1 = \frac{1}{2} C_3 e^{ik_3 x} \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{k_1} \right) \cosh(k_2' a) - \left(\frac{ik_3}{k_2'} + \frac{k_2'}{ik_1} \right) \sinh(k_2' a) \right]$$

or

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{1}{2} e^{ik_3 a} \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{k_1} \right) \cosh(k_2' a) - I \left(\frac{k_3}{k_2'} - \frac{k_2'}{k_1} \right) \sinh(k_2' a) \right] \quad - 48$$

الكمية المهمة الموجودة في سياق الكلام هي $C_1 C_1^\circ / C_3 C_3^\circ$ وهذه يمكن إيجادها وذلك بضرب المعادلة (48) بواسطة المقابلة (المناظرة) له. والشق الموجود في القوس في الحال يعود إلى الشق $(a-ib)$ ولنتذكر أن :-

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$$

والمقدار $C_1 C_1^\circ / C_3 C_3^\circ$ سوف يعين كما يلي :-

$$\frac{C_1 C_1^\circ}{C_3 C_3^\circ} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_1 + k_3}{k_1} \right)^2 \cosh^2(k_2' a) + \left(\frac{k_3}{k_2'} + \frac{k_2'}{k_1} \right)^2 \sinh^2(k_2' a) \right] \quad - 49$$

وإحتمالية نفاذ الجسيم خلال الحائط تكون بالطبع $C_3 C_3^\circ / C_1 C_1^\circ$ ، حيث تكون مقلوب للكمية المعطاه بالمعادلة (49). وإحتمالية الانتقال لا تكون بصفر باستثناء المقدار $C_3 C_3^\circ / C_1 C_1^\circ$ بصفر. وفيما بعد، باستثناء $C_1 C_1^\circ / C_3 C_3^\circ$ تكون لا نهائية. فهذه يمكن أن تكون حالة عندما $\cosh(k_2' a)$ و $\sinh(k_2' a)$ تكون ما لا نهاية. متذكراً أن :-

$$\text{Cosh } \alpha = \frac{1}{2} (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \quad - 50$$

$$\text{Sinh } \alpha = \frac{1}{2} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \quad - 51$$

هذا يمكن تقديره لو أن $C_1 C_1^{\circ} / C_3 C_3^{\circ}$ تكون فقط بما لا نهاية عندما $k_2 a$ تكون لا نهائية، حيث :-

$$k_2' = 2\pi [2m(U_2 - E)]^{1/2} / h$$

الظروف الإحتمالية بصفر للإنتقال خلال الحائط حيث يكون :-

$$2\pi a [2m(U_2 - E)]^{1/2} / h = \infty$$

وهذه الظروف يمكن فقد تحقيقها عندما إما $U_2 = \infty$ أو $a = \infty$. إذا، بإستثناء جهد الحائط يكون ما لا نهاية وسمكة عال بما لا نهاية، دائماً يوجد إحتمالية أن الجسم بطاقة أقل من إرتفاع الحائط الذى سوف يخترقه، وهذا التأثير يعرف بتأثير النفق :-

نحو تشكيل فكرة علاوة على ذلك لتلك الظاهرة وذلك بإستخدام الدالة الآتية وهى عندما $k_2 a \gg 1$. وتحت تلك الظروف، نحن نرى من المعادلات 50, 51 أن:

$$\text{Cosh}(k_2' a) \approx \text{sinh}(k_2' a) \approx \frac{1}{2} e^{k_2' a}$$

فى هذه الحالة من المعادلة (49) التى يمكن كتابتها كما يلى :-

$$\begin{aligned} \frac{C_1 C_1^{\circ}}{C_3 C_3^{\circ}} &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} e^{2k_2' a} + \left(\frac{k_3}{k_2'} - \frac{k_2'}{k_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2k_2' a} \right] \\ &= \frac{e^{k_1 a}}{16} \left[\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1} \right)^2 + \left(\frac{k_3}{k_2'} - \frac{k_2'}{k_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

والإحتمالية للإنتقال خلال الحائط $C_3 C_3^{\circ} / C_1 C_1^{\circ}$ ، يمكن إيجادها بواسطة

$$\frac{C_1 C_1^{\circ}}{C_3 C_3^{\circ}} = \left[\frac{16}{\left(1 + \frac{k_3}{k_1} \right)^2 + \left(\frac{k_3}{k_2'} - \frac{k_2'}{k_1} \right)^2} \right] e^{2k_2' a} \quad - 52$$

وأنه ربما نفهم من هذه المعادلة أن إحتمالية الإنتقال تقل بسرعة مع الإتساع فى زيادة الحائط ومعامل الأس $\exp^{-2k_2' a}$ ، فى بعض الأحيان يعرف بمعامل النفاذية.

وإحتمالية الإنتقال تزداد مع زيادة معامل الإنتقالية بمعنى $2k_2' a$ تقل، مثلما:

$$2k_2' a = 4\pi a [2m(U_2 - E)]^{1/2} / h$$

ولهذا كله يكون كل من (a, m) ، (U_2-E) صغير جداً، وتكون احتمالية الانتقال (النفاذية) عال جداً. وفي الحقيقة، يوجد فرصة ضئيلة جداً لنفاذية طاقة الحائط مسجلة على مقياس الرسم للذرة والجزء e ، خاصة ما عدا الذرات الصغيرة. كذلك أيضاً للإلكترونات.

وأما بالنسبة $U_2 > E > U_3$ ، حيث الجسم في المنطقة (1) الممثل بواسطة ψ_1 سيؤدي هذا إلى إضمحلال الأس للدالة ψ_2 في داخل الحائط إلى إنبثاق داله موجه ψ_2 حقيقية على الجانب الأيمن للحائط، الموقع يشبه في بعض العلاقات لمرور الضوء خلال وسط ماص حيث الأشعة المنبثقة تكون ذات كثافة أقل من الأشعة الحادثة.

يطبق تأثير النفق في حالات عديدة في الكيمياء الفيزيائية، وأفضل الأمثلة المعروفة والتي تكون في عملية تلامس المواد المشعة. اليورانيوم (238) حيث يتلاشى بإتبعات جسيمات الفا (α) بطاقته مقدارها 0.67PJ ، بمقدار (4.2Mev) . ولو أن جسيمات (α) تقترب من النواه فإنه يوجد تنافر ناتج من الشحنات الموجبه على النواه وجسيمات (α) والقوة لهذا التنافر تتبع قانون كولوم للتربيع العكسي. وكلما يقترب جسيم الفا من النواه فترتفع طاقة الجهد بناءً على التفاعل الداخلى الكولوم. وعند أقل مسافه ممكنة، على أى حال، تكون قوة التجاذب للرباط القوية (بروتون ونيوترون) مع بعضهم تتغلب على قوة التنافر وطاقة الوضع تتلاشى. ويرسم تغير طاقة الوضع حول النواه كما هو مرسوم في الشكل (3)، وربما نرى التقارب للوضع المثالى المبين في الشكل (2).

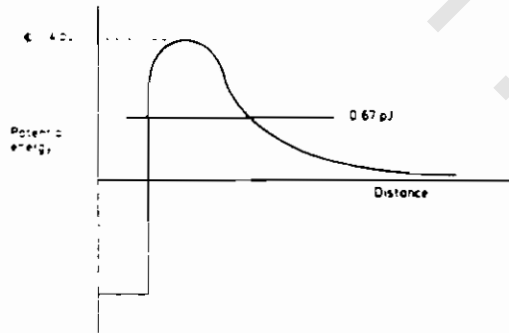


Fig. (3): Variation of potential energy of α -particles around a nucleus.

ويمكن إجراء تجارب بالنسبة لنواه يورانيوم 238 والتي تنفجر بطاقة قدرها $1.4PJ$ ($8.78Mev$) لجسيمات الفا، والتعبثر اللاحق لجسيمات (α) بناءً على قوة التنافر الموجودة فهذه الملاحظة تبين أن قاتون كولوم سيتبع على الأقل يصل بطاقة ($1.4PJ$)، الإرتفاع لطاقة الحائط، والتي عندها تمر جسيمات الفا لتتمكن للهرب من النواه على الأقل ($1.4PJ$)، ولكن طاقة جسيمات α انبعثت على هيئة إنسياب نشاط إشعاعي للنواه كانت فقط ($0.67PJ$). وهذه الجسيمات يمكن فقد أن تهرب بواسطة المرور خلال الحائط.

وتأثير النفق أيضاً يكون مسجل في التفاعلات الحركية عندما يوجد في بعض الأحيان أنفاق خلال جدار طاقة التنشيط.