الفصل الثاني
Chapter Tow

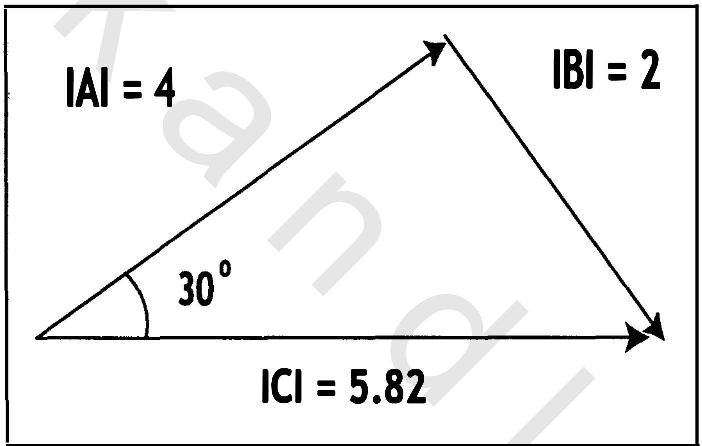
الكميات العددية والكميات الاتجاهية
Vectors and Scalars

مسألة (2.1) *Problem*

باستخدام قانون الجيب تمام أوجد محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$، المبينين بالشكل (2.1).

الحل ***Solution***

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\,Cos(\theta)$$
$$= (4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2)\,Cos(30)$$
$$= 33.86$$
$$|C| = 5.82$$



شكل (2.1)، المسألة (2.1)

مسألة (2.2) *Problem*

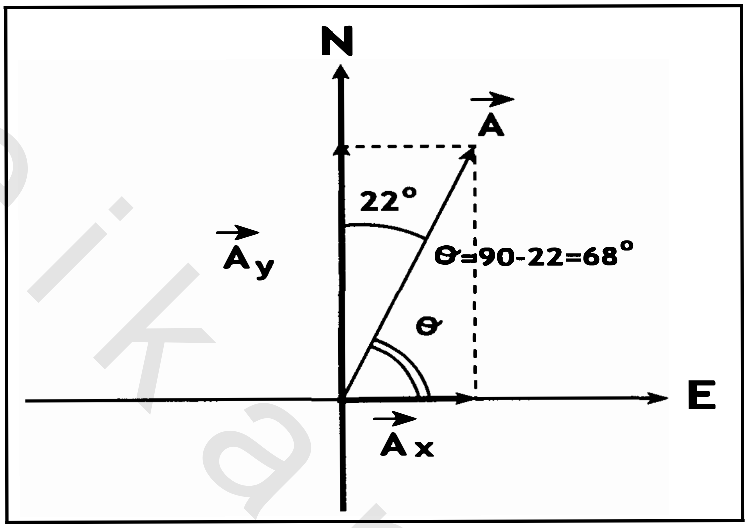
غادرت أرض المطار طائرة صغيرة في يوم ملبد بالغيوم، وبعد ذلك أعطت إشارة أنها على بعد (*215 km*) وباتجاه يصنع زاوية (22^o) مع الشمال الشرقي. كم تبعد الطائرة عن أرض المطار في الاتجاهين شرقاً وشمالاً ؟ انظر الشكل (2.2).

الحل *Solution*

المتجه يمثل بعد الطائرة عن نقطة الأصل (*0،0*)، أي أن : $A = 215\ km$

بعد الطائرة شرقاً :

$$A_x = A\ Cos(\theta)$$
$$= 215\ Cos(68) = 81\ km$$



شكل (2.2)، المسألة (2.2)

بعد الطائرة غرباً :

$$A_y = A\ Sin(\theta)$$
$$= 215\ Sin\ (68) = 199\ km$$

مسألة (2.3) *Problem*

تأمل المتجه الآتي :

$\vec{A} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ ثم مثله باستخدام المحاور الثلاثية المتعامدة.

الحل *Solution*

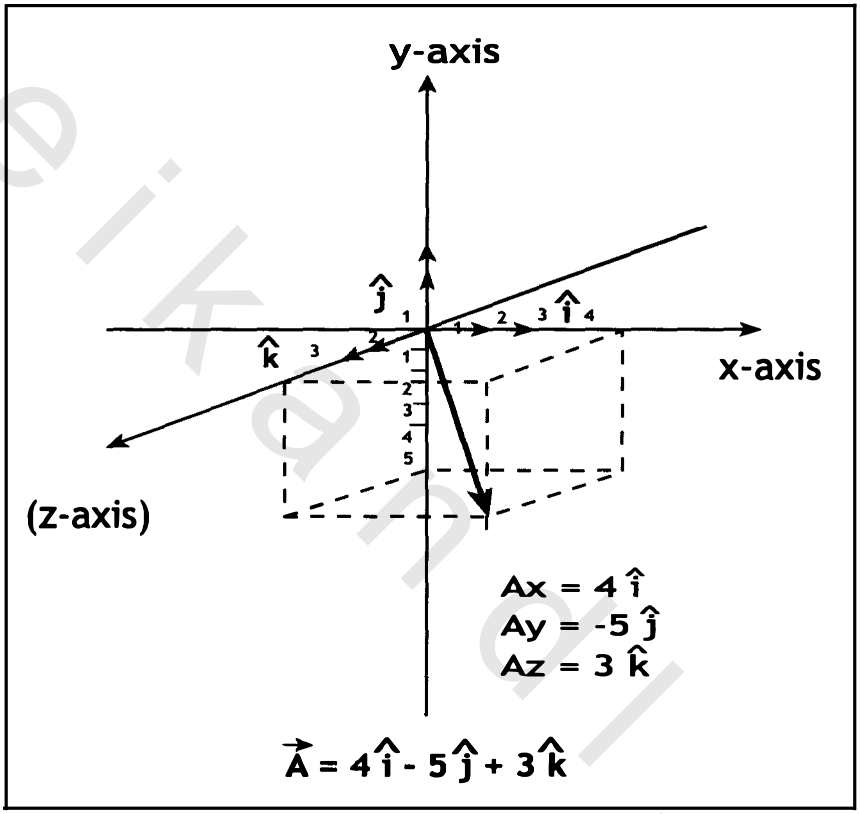
نجد أن المركبات الثلاثة الاتجاهية هي :

$$+4\hat{i}, -5\hat{j}, 3\hat{k}$$

كما نجد أن مركباتها العددية :

$+4,\ -5,\ +4$

ومن الممكن تمثيل ذلك على المحاور المتعامدة، انظر الشكل (2.3) :



شكل (2.3)، المسألة (2.3)

مسألة Problem (2.4)

أوجد المتجه الذي يمثل حاصل جمع المتجهات الآتية :

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

Solution **الحل**

$$R_x = 4 - 3 + 1 = 2$$

$$R_y = 6 + 3 - 4 = 5$$

$$R_z = 2 - 1 + 2 = 3$$

وهكذا نجد أن :

$$\vec{R} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

Problem (2.5) مسألة

أوجد قيمة الزاوية (Φ) بين المتجهين ($\vec{A}$ و $\vec{B}$) المعرفين على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

Solution **الحل**

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| Cos(\Phi)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 3.6$$

من ناحية أخرى :

$$\vec{A} \cdot B = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})(B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$

$$= (3\hat{i} - 4\hat{j})(-2\hat{i} + 3\hat{k})$$

$$= (3\hat{i}) \cdot (-2\hat{i}) + (3\hat{i}) \cdot (3\hat{k}) + (-4\hat{j}) \cdot (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \cdot (3\hat{k})$$

$$= (-6)(1) + (9)(0) + 8(0) - (12)(0) = -6$$

وهكذا وبالتعويض نجد أن :

$$Cos(\Phi) = \frac{-6}{18} = -0.333$$

$$\Phi = Cos^{-1}(-0.333) = 110^{\circ}$$

الزاوية بين المتجهين ($\vec{A}$ و $\vec{B}$) هي ($\Phi = 110^{\circ}$).

مسألة Problem (2.6)

لديك المتجهان المعرفان على النحو التالي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

أوجد المتجه الجديد.

الحل Solution

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$

$$= (3\hat{i} \times -2\hat{i}) + (3\hat{i} \times 3\hat{k}) + (4\hat{j} \times 2\hat{i}) - (4\hat{j} \times 3\hat{k})$$

$$= 0 + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12(\hat{i})$$

$$= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}$$

الملاحظات الهامة جداً في هذه المسألة هي الآتي :

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k}$$

ذلك أن : $\hat{i} \times \hat{i} = |1||1| Sin(0) = 0$

مسألة Problem (2.7)

إذا كانت كمية المتجه ($\vec{A}$) تساوي (7) وحدات قياسية، ويصنع زاوية مقدارها (250°) باتجاه عقارب الساعة بدءًا من الاتجاه الموجب للمحور السيني، أوجد المركبتين السينية والصادية للمتجه ($\vec{A}$).

الحل *Solution*

$$A_x = 7\ Cos\ 250^\circ = -2.394$$

$$A_y = 7\ Sin\ 250^\circ = -6.577$$

وبملاحظة أن المتجه يقع في الربع الثالث، أي أنه يصنع زاوية مقدارها (70°) تحت المحور (y) السالب، يمكننا أن نجد كلاً من A_x , A_y على النحو الآتي :

$$A_x = -7\ Cos\ 70^\circ = -2.394$$

$$A_y = -7\ Sin\ 70^\circ = -6.577$$

مسألة (2.8) *Problem*

إذا كانت المركبتان السينية والصادية للمتجه ($\vec{A}$) هما :

$$x = -25$$

$$y = 40$$

1 – أوجد كمية المتجه ($\vec{A}$) العددية.

2 – أوجد الزاوية بين المتجه ($\vec{A}$) والمحور السيني الموجب .

الحل *Solution*

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} = \sqrt{(-25)^2 + (40)^2} = 47.2\ \ units$$

وهي القيمة (الكمية) العددية للمتجه A.

$$tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{(40)}{(-25)} = -1.6$$

$$\theta = tan^{-1}(1.6) = -58^\circ$$

هذه هي القيمة الأولى، كما يمكن أن تكون

$$-58^\circ + 180^\circ = 122^\circ$$

$$tan(122^\circ) = -1.6$$

الزاوية الأولى : (-58°)

موجب $Cos(-58^\circ) = 0.523$

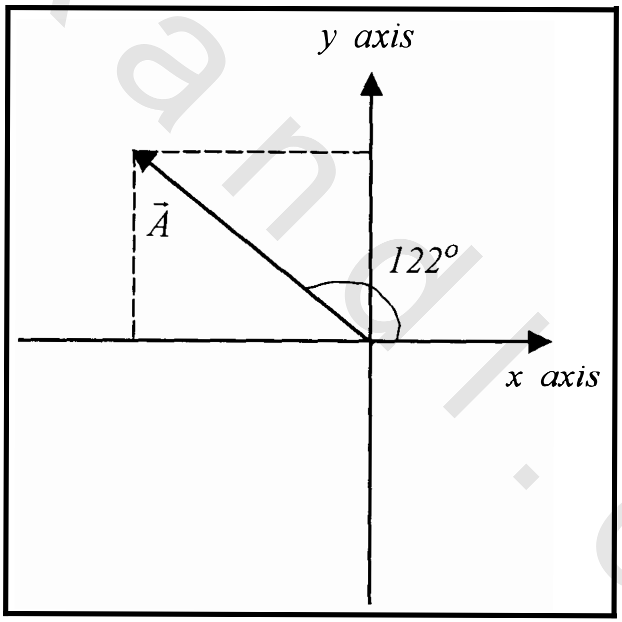
سالب $Sin(-58^\circ) = -0.848$

الزاوية الثانية : (122°)

سالب $Cos(122^\circ) = -0.523$

موجب $Sin(122^\circ) = 0.848$

وهي صحيحة للمتجه الذي بين أيدينا، لأن مركبتة السينية سالبة ومركبتة الصادية موجبة. فالزاوية إذاً (122°). انظر الشكل (2.4).

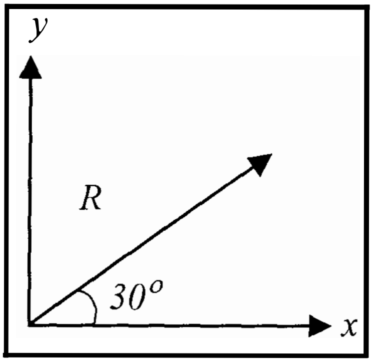


شكل (2.4)، المسألة (2.8)

مسألة (2.9) *Problem*

يبلغ طول متجه الإزاحة لجسم متحرك $(\vec{R})$ $(15.0\ \ m)$ ويصنع زاوية (30°) مع المحور السيني الموجب، أوجد مركبته السينية والصادية. انظر الشكل (2.5).

الحل Solution



شكل (2.5)، المسألة (2.9)

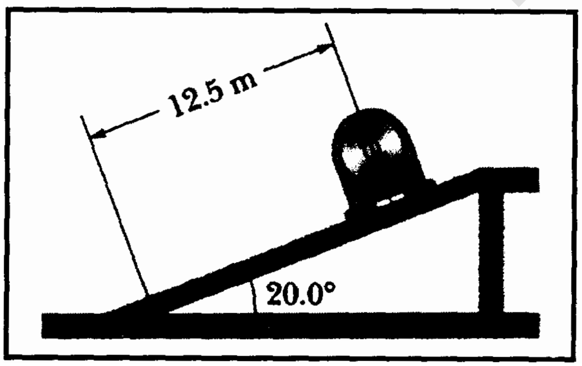
$$R_x = R\,Cos(30)$$
$$= (15\ m)(0.866) = 13\ m\ .$$
$$R_y = R\,Sin(30)$$
$$= (15\ m)(0.5) = 7.5\ m\ .$$

مسألة (2.10) Problem

قطعة معدنية ثقيلة على شكل آلة، دفعت على سطح مائل إلى الأعلى، حيث تبلغ زاوية الميل (20°)، انظر الشكل (2.6).

1 – احسب المسافة التي تم رفع القطعة خلالها إلى الأعلى.

2 – احسب المسافة التي تحركت خلالها القطعة أفقياً.



شكل (2.6)، المسألة (2.10)

Solution الحل

1– أقصى ارتفاع تصل الآلة إلى الأعلى فوق مستوى سطح الأرض هو :

$$h = (12.5\ m)\ Sin\ 20^{\circ} = 4.275\ m$$

2– المسافة التي تحركتها الآلة أفقياً هي :

$$D = (12.5\ m)\ Cos\ 20^{\circ} = 11.7m$$

مسألة (2.11) Problem

لديك متجها الإزاحة $(\vec{C})$ و $(\vec{D})$ لهما المركبات الآتية مقاسة بالمتر :

$$C_x = 7.4\ ,\ C_y = -3.8\ ,\ C_z = -6.1$$

$$D_x = 4.4\ ,\ D_y = 2.0\ \ ,\ D_z = 0$$

أوجد مركبات المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.

Solution الحل

المركبة الأولى للمتجه $(\vec{R})$ **هي :**

$$R_x = C_x + D_x$$
$$= 7.4 + 4.4 = 11.8$$

المركبة الثانية للمتجه $(\vec{R})$ هي :

$$R_y = C_y + D_y$$
$$= -3.8 -2 = -5.8$$

المركبة الثالثة للمتجه $(\vec{R})$ هي :

$$R_z = C_z + D_z$$
$$= -6.1 + 0 = -6.1$$

مسألة (2.12) *Problem*

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = \hat{4i} + \hat{3j}$$

$$\vec{B} = -1\hat{3i} + \hat{7j}$$

1 – أوجد حاصل جمع المتجهين باستخدام متجهات الوحدة $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$.

2 – أوجد مقدار واتجاه المحصلة $(\vec{R})$ التي تمثل $(\vec{A}+\vec{B})$.

الحل *Solution*

1– افرض أنَّ : $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

هذا يؤدي إلى :

$$Rx = Ax + Bx$$
$$= 4 + (13) = 9$$

$$R_y = A_y + B_y$$
$$= 3 + 7 = 10$$

إذاً :

$$R = -9\hat{i} + 10\hat{j}$$

2– مقدار المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل المحصلة هو :

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$
$$= \sqrt{(-9)^2 + (10)^2} = 13$$

الزاوية بين قيمة المحصلة (R) والمحور السيني الموجب هي :

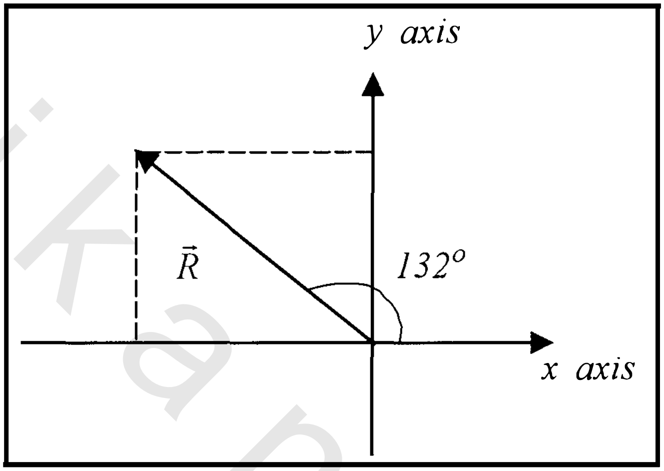
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-10}{9} = -1.1$$

$$\theta = tan^{-1}(-1.1) = -48^{\circ}$$

أو :

$$\theta = 132^{\circ}$$

وهكذا نجد أن الزاوية هي (132°) ذلك أن المركبة السينية للمحصلة سالبة (-9) والمركبة الصادية موجبة (10). انظر الشكل (2.7).



شكل (2.7)، المسألة (2.12).

مسألة (2.13) ***Problem***

لديك المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) معرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j}$$

أوجد المركبتان السينية والصادية، ثم احسب مقدار واتجاه كل من :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$$

Solution الحل

1− $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) + (5i - j)$

$$= 8\hat{i} + 3\hat{j}$$

إذاً المركبة السينية : $R_x = 8$

والمركبة الصادية : $R_y = 3$

أما مقدار $(A + B)$ فهو : $|A + B| = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} = 8.54$

وتكون زاوية متجه المحصلة مع المحور السيني الموجب فهي :

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 20.55^\circ$$

2− $\vec{R} = \vec{B} - \vec{A} = (5\hat{i} - \hat{j}) - (3\hat{i} + 4\hat{j})$

$$= 2i - 5\hat{j}$$

إذاً المركبة السينية : $R_x = 2$

والمركبة الصادية : $R_y = -5$

أما مقدار :

$$|A + B| = \sqrt{(A)^2 + (B)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = 5.38$$

$$\theta_2 = tan^{-1}\left(\frac{-5}{2}\right) = tan^{-1}(-2.5)$$

$$= -68.2^{\circ}$$

وهي الزاوية التي تصنعها المحصلة مع المحور السيني الموجب

مسألة (2.14) ***Problem***

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ معرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

أوجد : 1– $(\vec{A} + \vec{B})$

2– $(\vec{A} - \vec{B})$

3– عرف المتجه الجديد $(\vec{C})$، حيث إن : $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 0$

الحل ***Solution***

--1

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \ , \ R_x = A_x + B_x = 4 - 1 = 3$$

$$R_y = A_y + B_y = -3 + 1 = -2$$

$$R_z = A_z + B_z = 1 + 4 = 5$$

إذاً :

$$\vec{R} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

–2

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} \ , \ R_x = A_x - B_x = 4 + 1 = 5$$

$$R_y = A_y - B_y = -3 - 1 = -4$$

$$R_z = A_z - B_z = 1 - 4 = -3$$

إذاً :

$$\vec{R} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

-3 $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}=0 \Rightarrow \vec{C}=\vec{B}-\vec{A}$

$$=(-1-4)\hat{i}+(1+3)\hat{j}+(4-1)\hat{k}$$

$$=-5\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

مسألة (2.15) *Problem*

لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ حيث :

$$\vec{A}-\vec{B}=2\vec{C}$$

$$\vec{A}+\vec{B}=4\vec{C}$$

$$\vec{C}=3\hat{i}+4\hat{j}$$

عرف المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

الحل *Solution*

$$\vec{A}-\vec{B}=2\vec{C} \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{A}+\vec{B}=4\vec{C} \qquad \ldots (2)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) :

$$2\vec{A}=6\vec{C}$$

$$\vec{A}=3\vec{C} \qquad \ldots (3)$$

$$\vec{A}=3(3\hat{i}+4\hat{j})=9\hat{i}+12\hat{j}$$

من المعادلتين (1) و (3) نجد أنَّ :

$$3\vec{C}-\vec{B}=2\vec{C}$$

$$3\vec{C}-2\vec{C}=\vec{B}$$

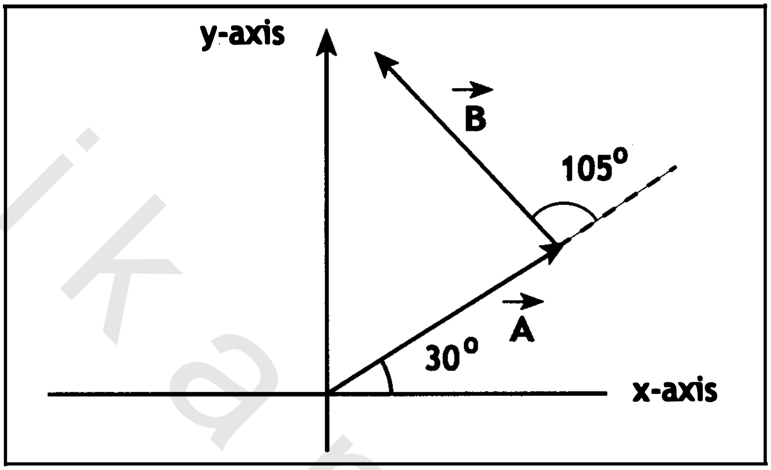
$$\vec{C}=\vec{B}$$

أي أنَّ :

$$\vec{B}=3\hat{i}+4\hat{j}$$

Problem (2.16) مسألة

المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ والموضحان في الشكل (2.8) لهما نفس الكمية (10.0) وحدات، ولهما الاتجاهان المبينان بالشكل الموضح،



شكل (2.8)، المسألة (2.16)

1 - أوجد المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.

2 – أوجد المركبتان السينية والصادية للمتجه $(\vec{R})$.

3 – أوجد مقدار الزاوية بين المتجه $(\vec{R})$ والمحور السيني الموجب.

Solution الحل

1– مركبات المتجه (A) السينية والصادية هي :

$$A_x = 10\ Cos\ 30^{\circ} = 8.67$$

$$A_y = 10\ Sin\ 30^{\circ} = 5.0$$

بينما المتجه (B) يصنع زاوية مقدارها 135°، إذاً مركباته هي :

$$B_x = 10\,Cos\,135^\circ = -7.07$$

$$B_y = 10\,Sin\,135^\circ = 7.07$$

أما مركبات المحصلة فهي :

$$R_x = A_x + B_x = 8.67 - 7.07 = 1.6$$

$$R_y = A_y + B_y = 5.0 + 7.07 = 12.1$$

$$R = \sqrt{R_z^{\,2} + R_y^{\,2}} = \sqrt{(1.6)^2 + (12.1)^2} = 12.2$$ -2

$$tan\,\theta = R_y / R_x = (12.1/1.6) = 7.56$$ -3

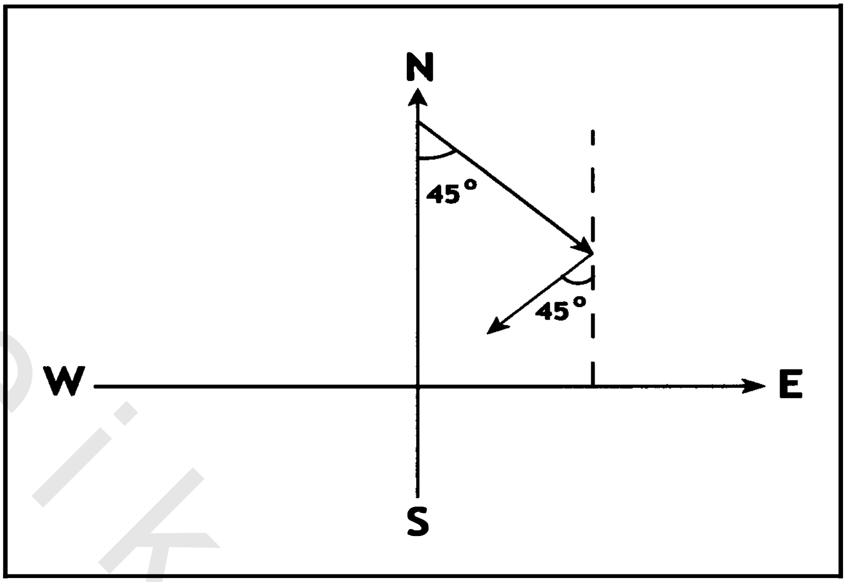
$$\theta = tan^{-1}(7.56) = 82.5^\circ$$

أو $180 + 82.5^\circ = 262.5^\circ$

والزاوية الأولى هي الزاوية الصحيحة؛ لأن كلا نسبتيها المثلية الجيب والجيب تمام موجبتان وهذا ما تؤكده المسألة.

مسألة (2.17) *Problem*

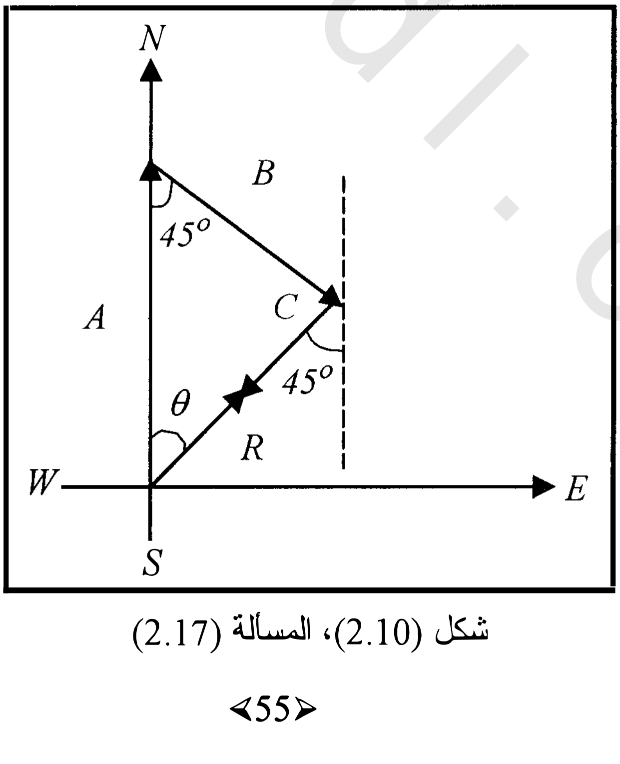
لاعب غولف احتاج إلى ثلاث محاولات لإدخال الكرة في الحفرة المخصصة لها. كانت المحاولة الأولى على مسافة ($12.0\ m$) شمالا، والمحاولة الثانية ($6.0\ m$) شمال شرق، والمحاولة الثالثة ($3.0\ m$) جنوب غرب، ما هي المسافة المطلوبة لإدخال الكرة في موضعها الصحيح بمحاولة واحدة ؟ انظر الشكل (2.9).



شكل (2.9)، المسألة (2.17)

الحل *Solution*

افرض أن الإزاحات الثلاثة لكرة الغولف هي : (A,B,C) على التوالي، وبالرجوع إلى الشكل (2.10) نستطيع أن نعبّر عن المتجهات الثلاثة على النحو الآتي :



شكل (2.10)، المسألة (2.17)

$$\vec{A} = A\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = (B\,Cos\,45^{\circ})i - (B\,Sin\,45^{\circ})\,\hat{j}$$

$$\vec{C} = -(C\,Sin\,45^{\circ})i - (C\,Cos\,45^{\circ})\,\hat{j}$$

$$A = 12\,ft\,,\ B = 6.0\,ft\,,\ C = 3.0\,ft$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$= A_j + (B\,Cos\,45^{\circ})i - (B\,Sin\,45^{\circ})\,\hat{j} - (C\,Sin\,45^{\circ})i - (C\,Cos\,45^{\circ})\,j$$

$$= \left(\frac{6.0\sqrt{2}}{2} - \frac{3.0\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i} + \left(12 - \frac{6.0\sqrt{2}}{2} - \frac{3.0\sqrt{2}}{2}\right)\hat{i}$$

$$= 2.12\,\hat{i} + 5.64\,\hat{j}$$

$$R = \sqrt{(2.12)^2 + (5.64)^2} = 6.0\ ft$$

$$tan\,\theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{2.12}{5.64} = 0.3758$$

$$\theta = tan^{-1}(0.3758) = 20.6^{\circ}$$ شرقاً

ملاحظة :

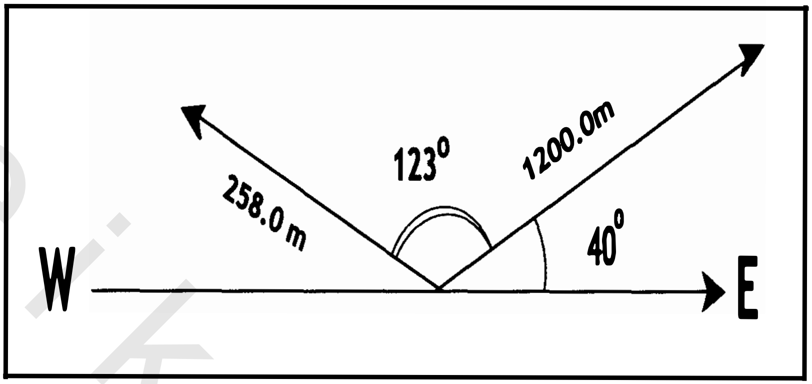
انظر الشكل كي تتأكد أن ظل الزاوية هو المركبة السينية مقسومة على المركبة الصادية على عكس ما تعودنا عليه بسبب وجود الزاوية إلى الشرق من جهة الشمال.

مسألة ***Problem* (2.18)**

رصدت محطة رادار طائرة قادمة من جهة الشرق مباشرة خلال موقعين، وذلك على النحو الآتي :

1 – على بعد ($1200.0\ m$) وبزاوية مقدارها (40°).

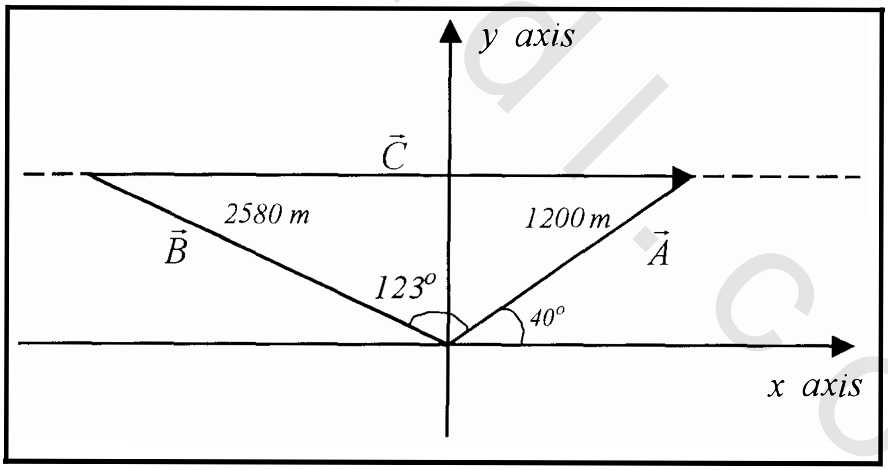
2 – استمر الرادار بالرصد وبعد زاوية قدرها (123°) من نقطة الرصد الأولى سجل بعداً قدره ($258.0\ m$)، انظر الشكل (2.11)، أوجد المسافة التي قطعتها الطائرة بين نقطتي الرصد.



شكل (2.11)، المسألة (2.18)

الحل Solution

انظر الشكل (2.12).



شكل (2.12)، المسألة (2.18)

أفرض أنَّ المتجه الأول : $\vec{A} = |1200\ m|$

المتجه الثاني : $\vec{B} = |2580\ m|$ ، المتجه الثالث : $\vec{C} = ?$

$$A_x = 1200\ Cos\ 40^\circ = 919.3\,\hat{i}$$

$$A_y = 1200\ Sin\ 40^\circ = 771.3\,\hat{j}$$

$$B_x = 2580\ Cos\ 163^\circ = -2467.3\,\hat{i}$$

$$B_y = 2580\ Sin\ 163^\circ = 754.3\,\hat{j}$$

انظر الشكل (2.12) مرةً أخرى تجد أنّ :

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (B_x - A_x)i - (B_y - A_y)\hat{j}$$

$$= (-3387\,i - 17\,\hat{j})m$$

$$|C| = \sqrt{(-3387)^2 + (-17)^2} = 3390\ m$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-17}{-3387}\right) = tan^{-1}(5 \times 10^{-3})$$

$$= 0.287^\circ$$

وهذا ما يشير قطعاً إلى أن الطائرة تسير على خط مستقيم.

مسألة (2.19) *Problem*

باستخدام قاعدة اليد اليمنى وعلى نظام محاور ثلاثي (xyz) متعامد، أثبت أن :

1- $\hat{i}\,.\,\hat{i} = \hat{j}\,.\,\hat{j} = \hat{k}\,.\,\hat{k} = 1$

2- $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \hat{j}\,.\,\hat{k} = \hat{k}\,.\,\hat{i} = 0$

3- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

4- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

Solution الحل

1- $\hat{i}.\hat{i} = |i||i| Cos\,\theta$
$= (1)(1)(1) = 1$

وبنفس الطريقة نجد أن : $\hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

2- $\hat{i}.\hat{j} = |i||j| Cos\,\theta$

الزاوية في هذه الحالة $(\theta = 90^{\circ})$

$Cos\,90^{\circ} = 0$

وهكذا نجد أنَّ : $\hat{i}.\hat{j} = (1)(1)(0) = 0$

وبنفس الطريقة نجد أنَّ : $\hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

3- $\hat{i} \times \hat{i} = |i||i| Sin\,\theta$
$= (1)(1)(0) = 0$

ذلك أن الزاوية بين متجه الوحدة $(\hat{i})$ وذاته تساوي الصفر وبنفس الطريقة نجد أنَّ:

$$\hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

4- $\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| Sin\,\theta = \hat{k}$

ذلك أن الزاوية بين متجهي الوحدة $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ تساوي (90°) **وهكذا** :

$$\left.\begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \end{aligned}\right\}$$

وكل من $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ عمودية على المستوي الذي يحتوي باقي متجهي الوحدة الآخرين.

مسألة (2.20) *Problem*

إذا كانت القيمة العددية للمتجه $(\vec{A})$ تساوي (10.0) وحدات، والقيمة العددية للمتجه $(\vec{B})$ تساوي (6.0) وحدات، بينهما زاوية مقدارها (60°)، أوجد :

1 – حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

2 – مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

الحل *Solution*

1– حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A})$ **و** $(\vec{B})$ هو :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos \Phi$$

$$|A| = 10$$

$$|B| = 6$$

$$\Phi = 60^{\circ}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (10)(6) \cos 60^{\circ} = 30.0$$

2– مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين هو عبارة عن :

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = |A||B| \sin \Phi$$

$$= (10)(6) = 51.96$$

و هي بطبيعة الحال تمثل مقدار المتجه العمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين $\vec{B}$, $\vec{A}$.

مسألة (2.21) *Problem*

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

استخدم كلاً من :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| Cos(\Phi)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وذلك لحساب الزاوية المحصورة بينهما.

الحل *Solution*

$$|A| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 5.2$$

$$|B| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = 3.74$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x . B_x + A_y . B_y + A_z . B_z$$
$$= 6 + 3 + 9 = 18$$

وهكذا نجد أنّ :

$$Cos\,\Phi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|} = \frac{18}{(5.2)(3.74)}$$
$$= 0.9255$$

$$\Phi = Cos^{-1}(0.9255) = 22.25^\circ$$

مسألة (2.22) *Problem*

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على النحو التالي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

أوجد كلاً من :

$$\vec{A} \times \vec{B} \;\; , \;\; \vec{A} \,.\, \vec{B} \;\; , \;\; (\vec{A} + \vec{B}) \,.\, \vec{B}$$

الحل *Solution*

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} + 5\hat{j}) \times (2\hat{i} + 4\hat{j})$$

استخدم الخاصية التوزيعية في الضرب الاتجاهي لمتجهين :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3)(2)\,\hat{i} \times \hat{i} + (3)(4)\,\hat{i} \times \hat{j} + (5)(2)\,\hat{j} \times \hat{i} + (5)(4)\,\hat{j} \times \hat{j}$$

معلوم لدينا أنَّ :

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

إذاً :

$$\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k} - 10\hat{k} = 2\hat{k}$$

$$\vec{A} \,.\, \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$= 6 + 20 = 26$$

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}$$

$$=5\hat{i}+9\hat{j}$$

$$(5\hat{i}+9\hat{j}).(2\hat{i}+4\hat{j})=(\vec{A}+\vec{B}).\vec{B}$$

$$10+36=46$$

مسألة **(2.23) *Problem***

لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ المعرفة على النحو الآتي :

$$\vec{A}=3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$$

$$\vec{B}=-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\vec{C}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

أوجد كلاً من :

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) \quad , \quad \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) \quad , \quad \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$$

الحل ***Solution***

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\cdot[(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})\times(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})]$$ –1

$$=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\cdot(-8\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})$$

$$=-21$$

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\cdot[(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})]$$ –2

$$=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$=-9$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\times[(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})] \quad -3$$

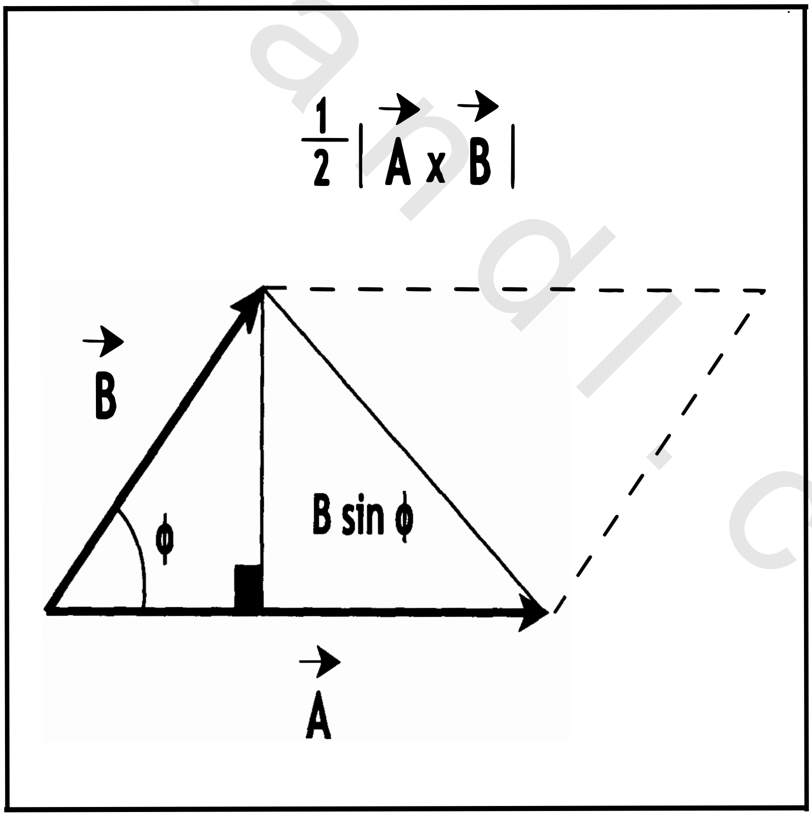
$$=(3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$=5\hat{i}-11\hat{j}-9\hat{k}$$

مسألة (2.24) *Problem*

أثبت أن مساحة المثلث الواقع بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ في الشكل (2.13) تساوي :

$$\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$



شكل (2.13)، المسألة (2.24)

الحل Solution

إن مساحة المثلث abc يمكن إيجادها من القانون المعروف

$$Area = \frac{1}{2} A h \qquad \ldots (1)$$

حيث إنّ (h) هو ارتفاع المثلث abc .

ومن المثلث القائم abc نجد أن :

$$Sin\,\Phi = \frac{h}{B}$$

أي أنّ :

$$h = Sin\,\Phi\, B \qquad \ldots (2)$$

بتعويض المعادلة رقم (2) في المعادلة رقم (1) نجد أنّ :

$$Area = \frac{1}{2} A\, B\, Sin\,\Phi$$

ولكن المقدار : $A\, B\, Sin\,\Phi$

هو عبارة عن $(\vec{A} \times \vec{B})$ إذاً :

$$Area = \frac{1}{2} |\, A \times B \,|$$