(٣) : المتتابعـــات

- مراجعة المتتابعات
- تعريف المتتابعة
- المتتابعة الحسابية
- الوسط الحسابي
- مجموع حدود متتابعة حسابية
- المتتابعة الهندسية
- الوسط الهندسي والعلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي
- مجموع حدود متتابعة هندسية
- مجموع حدود متتابعة هندسية لانهائية
- مسائل عامة على المتتابعات

obeikandl.com

المتتابعـــــات

تعريف:

المتتابعات الحقيقة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص$^+$ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

أي أن: المتتابعة هي: د: ص$^+$ ⟵ ح

أو د: {١ ، ٢ ، ٣ ، .....، ن } ⟵ ح

ملحوظة:

* إذا كان مجال المتتابعات هو المجموعة ص$^+$ فإن المتتابعة تسمى متتابعة لا نهائية.
* إذا كان مجال المتتابعة مجموعة جزئية من ص$^+$ سميت المتابعة متتابعة منتهية.
* المتتابعة التي لا يعطي مجالها تعتبر متتابعة لا نهائية.

بيان المتتابعة:

∴ المتتابعة دالة مجالها ص$^+$ (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها المقابل ح فإن بيان المتتابعة هي مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∋ ص$^+$ ، ص ∋ ح وعلى ذلك يمكن كتابة المتتابعة على الصور:

د = {(١ ، د(١) ، (٣ ، د(٢) ، (٣ ، د(٣) ، ..... (ر ، د(ر) ، .....}

ويمكن إهمال كتابة المساقط الأولى للأزواج المرتبة ويكتب بيان المتتابعة على الصورة

د = (د(١)، د(٢) ، د(٣)، ..... ، د(ر)،.....)

والقيم د(١)، د(٢)، د(٣)، .....، تسمى حدود المتتابعة.

ويرمز لـ د(١) بالرمز ح$_١$ ، د(٢) بالرمز ح$_٢$ ، د(٣) بالرمز ح$_٣$،....، ويرمز د(ر) بالرمز ح$_ر$ وبذلك نستطيع كتابة المتتابعة على الصورة:

(ح$_١$ ، ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، .....، ح$_ر$ ، .....)

ملحوظة:

ليس لكل متتابعة حد عام ح$_ر$ فمثلا..متتابعة الأعداد الأولية

(٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) ليس لها حد عام

أما متتابعة الأعداد الصحيحة المربعة فلها حد عام

ح$_ر$ = ن^٢ = (١ ، ٤ ، ٩ ، ... ر^٢ ، ...)

التمثيل البياني للمتتابعة:

حيث أن المتتابعة هي دالة مجالها ص$^+$ (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية وبيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س

obeikandl.com

د ص$^+$ ، ص د ح لذلك تمثل المتتابعة بنقط منفصلة في المستوى الديكارتي وجميعها تقع في المنطقة التي على يمين محور الصادات.

أطراد الدالة

تعريف١: المتتابعة المتزايدة:

يقال للمتتابعة (ح$_ن$) أنها متزايدة إذا وفقط إذا كان

ح$_{ن+١}$ > ح$_ن$ ∀ ن د ص$^+$

أي إذا كان ح$_{ن+١}$ - ح$_ن$ > صفر ∀ ن د ص$^+$

تعريف٢: المتتابعة المتناقصة:

يقال للمتتابعة (ح$_ن$) أنها متناقصة إذا وفقط إذا كان

ح$_{ن+١}$ < ح$_ن$ ∀ ن د ص$^+$

أي إذا كان ح$_{ن+١}$ - ح$_ن$ < صفر ∀ ن د ص$^+$

تعريف٣ المتتابعة الثابتة:

يقال للمتتابعة (ح$_ن$) أنها متتابعة ثابتة إذا وفقط إذا كان

ح$_{ن+١}$ = ح$_ن$ ∀ ن د ص$^+$

أي إذا كان ح$_{ن+١}$ - ح$_ن$ = صفر ∀ ن د ص$^+$

ملحوظة: الرمز (ح$_ن$) يرمز للمتتابعة أما الرمز ح$_ن$ يرمز للحد العام.

مثال: أكتب ثلاثة حدود من المتتابعة (ح$_ن$) = ٥ن - ٢

الحـــــــل

∵ ح$_ن$ = ٥ن - ٢

عند ن = ١ ⇦ ح$_١$ = ٥ × ١ - ٢ = ٣

ن = ٢ ⇦ ح$_٢$ = ٥ × ٢ - ٢ = ٨

ن = ٣ ⇦ ح$_٣$ = ٥ × ٣ - ٢ = ١٣

∴ (ح$_ن$) = (٣ ، ٨ ، ١٣ ، ....)

مثال: أكتب خمسة حدود من المتتابعة (ح$_ن$) = (٣ن + ٢$^{ن-١}$)

الحـــــــل

∵ (ح$_ن$) = (٣ن + ٢$^{ن-١}$)

عند ن = ٣ ⇦ ح$_٣$ = ح$_١$ = ٣ × ٣ + ٣$^{٣-١}$ = ٩ + ٤ = ١٣

ن = ٤ ⇦ ح$_٤$ = ح$_٢$ = ٣ × ٤ + ٢$^{٤-١}$ = ١٢ + ٨ = ٢٠

obeikandl.com

ن = ٥ ⇦ ح٥ = ح٥-١ + ٥ × ٣ = ح٤ + ١٥ = ١٦ + ١٥ = ٣١

ن = ٦ ⇦ ح٦ = ح٦-١ + ٦ × ٣ = ح٥ + ١٨ = ٣٢ + ١٨ = ٥٠

ن = ٧ ⇦ ح٧ = ح٧-١ + ٧ × ٣ = ح٦ + ٢١ = ٦٤ + ٢١ = ٨٥

∴ الحدود الخمسة هي: ١٣ ، ٢٠ ، ٣١ ، ٥٠ ، ٨٥

مثال: أكتب الحدود الخمسة الأولى ومثلها بيانيا:

$$(ح_ن) \text{ حيث } ح_ن = \begin{cases} \dfrac{ن + ٣}{ن - ٢} & \text{إذا كانت ن فردية} \\ \dfrac{ن - ٢}{ن + ٣} & \text{إذا كانت ن زوجية} \end{cases}$$

الحـــــــل

إذا كانت ن فردية: $ح_ن = \dfrac{ن + ٣}{ن - ٢}$

$$ح_١ = \frac{١ + ٣}{١ - ٢} = \frac{٤}{-١} = -٤$$

$$ح_٣ = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦ \quad ، \quad ح_٥ = \frac{٥ + ٣}{٥ - ٢} = \frac{٨}{٣} = ٢,٧$$

إذا كانت ن زوجية:- $ح_ن = \dfrac{ن - ٢}{ن + ٣}$

$$ح_٢ = \frac{٢ - ٢}{٢ + ٣} = \text{صفر} \quad ، \quad ح_٤ = \frac{٤ - ٢}{٤ + ٣} = \frac{٢}{٧} = ٥,٣$$

∴ الحدود الخمسة الأولى -٤ ، صفر ، ٦ ، $\dfrac{٢}{٧}$ ، $\dfrac{٨}{٣}$

مثال: ابحث اطراد كل من المتتابعات الآتية:

أ) $(ح_ن) = (٢ن - ٣)$ ب) $(ج_ن) = \left(\dfrac{ن^٢ - ١}{ن}\right)$ ج) $(ج_ن) = \left(\dfrac{ن + ٢}{ن + ١}\right)$

الحـــــــل

(أ) $ح_ن = ٢ن - ٣$ ⇦ (١)

obeikandl.com

$ح_{ن-١} = ٢(ن - ١) - ٣$

$= ٢ن - ١$ ⇐ (٢)

بالطرح $ح_{ن+١} - ح_ن = ٢$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_ن >$ صفر

$\therefore$ المتتابعة $(ح_ن)$ متزايدة

(ب) $\because ح_ن = \frac{ن^٢ - ١}{ن} = ن - \frac{١}{ن}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_ن = (ن + ١ - \frac{١}{ن+١}) - (ن - \frac{١}{ن})$

$= ١ - \frac{١}{ن+١} + \frac{١}{ن} = \frac{ن(ن+١) - ن + (ن+١)}{ن(ن+١)}$

$= \frac{ن^٢ + ن - ن + ن + ١}{ن(ن+١)} = \frac{ن^٢ + ن + ١}{ن(ن+١)}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$ $\therefore ح_{ن+١} > ح_ن$ $\therefore$ المتتابعة متزايدة

(ج) $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{ن+٣}{ن+٢} - \frac{ن+٢}{ن+١}$

$= \frac{(ن+٣)(ن+١) - (ن+٢)^٢}{(ن+٢)(ن+١)} = \frac{ن^٢ + ٤ن + ٣ - ن^٢ - ٤ن - ٤}{(ن+٢)(ن+١)}$

$= \frac{-١}{(ن+٢)(ن+١)}$ $\therefore ح_{ن+١} - ح_ن <$ صفر

$\therefore ح_{ن+١} < ح_ن$ $\therefore$ المتتابعة متناقصة

تمرين (٢٥)

(١) أكتب بيان الدالة في كل مما يأتي:

أ) د: $ص^+ \leftarrow ح$ حيث د(ن) = ٣ن - ٤ $\forall$ن ∈ $ص^+$

ب) د: $ص^+ \leftarrow ح$ حيث د(ن) = $٢^{-ن} - ٣$ $\forall$ن ∈ $ص^+$

ج) د: $\{١ ، ٢ ، ٣\} \leftarrow ح$ حيث د(ن) = $-\frac{ن}{ن+١}$ $\forall$ن ∈ $ص^+$

obeikandl.com

هـ) د: {١ ، ٢ ، ٣} ← ح حيث د(ن) = ٣ + $\frac{(-١)^{ن}}{ن}$ ∀ن ∈ ص$^{+}$

(٢) في كل من المتتابعات الآتية أكتب الخمسة حدود الأولى ومثلها بيانياً:

أ) (حن) حيث حـ = ٣ - ن ب) (حن) حيث حـ = $\frac{١}{ن + ١}$

ج) د: {١ ، ٢ ، ٣} ← ح هـ) (حن) حيث حـ = $\frac{(-١)^{ن}}{ن}$

(٣) في كل المتتابعات الآتية أكتب الحدود الخمسة الستة الأولى:

أ) (حن) حيث حـ = { ٢ إذا كانت ن فردية ; -١ إذا كانت ن زوجية }

ب) (حن) حيث حـ = { حيث حـ = $\frac{١}{٢}$ إذا كانت ن فردية ; ٢ن - ١ إذا كانت ن زوجية } حيث حـ = { $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} إذا كانت ن فردية ; ٢ن - ١ إذا كانت ن زوجية }

ج) (حن) حيث حـ = { ن + ١ حيث ن < ٣ ; $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} حيث ن ≥ ٣ }

هـ) (حن) حيث حـ = { ٣ حيث ن ≥ ٢ ; حن^{٢} - ١ حيث ن < ٢ }

(٤) في كل من المتتابعات الآتية أكتب الستة حدود الأولى منها:

أ) (حن) حيث ح١ = ١ ، ح٢ = ٢ ، حـ+١ = $\frac{١}{٢}$ (حـ + حـ-١) ∀ر ≤ ٢

ب) (حن) حيث ح١ = ٥ ، حـ+١ = حـ − ٢

ج) (حن) حيث ح١ = ٢ ، ح٢ = -١ ، حـ+١ = حـ - حـ^{٢}-١ ، ∀ ≤ ٢

هـ) (حن) حيث ح١ = ح٢ = ٣ ، ح٣ = -٢ ، حن+٢ = حن-١ + حن+١ ∀ ≤ ٢

obeikandl.com

(٥) ابحث كلاً من المتتابعات الآتية من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة:-

أ) $(ح_ن) = \left(\frac{ن + ٢}{ن}\right)$ ب) $(ح_ن) = (٣^{-ن^٢})$

ج) $(ح_ن) = (٣ \times ٢^{ن} - ٥)$ ه) $(ح_ن) = (٢ + \binom{٣}{٢})$

هـ) $(ح_ن) = \left(\frac{١}{ن^٢ + ١}\right)$ و) $(ح_ن) = (١١ - ٢ن)$

ز) $(ح_ن) = (٧)$

(٦) أكتب الحدود الستة الأولى في كل من المتتابعتين الآتيتين:

أ) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = -١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = ١$ ، $ح_{ن-١} = ح_{ن-٢} + ح_{ن-٣}$ $\forall ن \geq ٤$ ،

$ح_{ن^٢} = ح_{ن+٣}$ $\forall ن > ١$

ب) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = -٢$ ، $ح_{ن^٢} = ح_{ن-٢}$ $\forall ن > ١$

، $ح_{ن+١} = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢} + ح_{ن-٣}$ $\forall ن \geq ٢$

(٧) هل الأعداد -٤٢ ، -٣٠ ، ١٢ ضمن حدود المتتابعة $(ح_ن)$ حيث:

$ح_ن = ن^٢ - ١٣ن$ وما ترتيبها

(٨) أكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتابعة $(ح_ن)$

حيث $ح_ن =$

- ن حيث ن فردية
- $-\frac{ن}{٢}$ حيث ن زوجية ولا تقبل القسمة على ٤
- $-\frac{١}{٢}(ح_{ن-٢} + ح_{ن-١})$ حيث ن زوجية وتقبل القسمة على ٤

obeikandl.com

المتتابعات الحسابية

تعريف: المتتابعة الحسابية:

* تسمى المتتابعة (حـ ر) متتابعة حسابية إذا كان

حـ ر + ١ - حـ ر = مقدار ثابت لكل ر ∈ ص$^+$

* يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز ء

أي أن ء = حـ ر + ١ - حـ ر ∀ر ∈ ص$^+$

أي أن أساس المتتابعة الحسابية = أي حد فيها - الحد السابق له مباشرة

نظرية هامة

المتتابعة (حـ ر) تكون متتابعة حسابية إذا وفقط إذا كان حـ ر مقداراً من الدرجة في ن ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

البرهان: (لا يمتحن فيه الطالب)

الحد العام للمتتابعة الحسابية:

إذا رمزنا للحد الأول في المتتابعة الحسابية بالرمز أ وللأساس بالرمز ء فإن:

حـ ١ = أ ، حـ ٢ = حـ ١ + ء = أ + ء

، حـ ٣ = حـ ٢ + ء = أ + ٢ء

، حـ ٤ = حـ ٣ + ء = أ + ٣ء .... وهكذا

∴ حـ ر = أ + (ن - ١)ء حيث ن ∈ ص$^+$ وتسمى ن رتبة الحد

إذا كان عدد الحدود ن فإن الحد الأخير هو حـ ر ويرمز له بالرمز ل

∴ ل = أ + (ن - ١)ء

الصورة العام للمتتابعة الحسابية:

إذا كتبنا المتتابعة الحسابية التي حدها الأول أ وأساسها ء على الصورة

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .....)

فأنها تسمى الصورة العامة للمتتابعة الحسابية

مثال: أثبت أن المتتابعة: حـ ر = ٣ن + ٧ حسابية

الحـــــــل

حـ ١ = ٣ × ١ + ٧ = ١٠

، حـ ٢ = ٣ × ٢ + ٧ = ١٣ ، حـ ٣ = ٣ × ٣ + ٧ = ١٦

∴ حـ ٢ - حـ ١ = حـ ٣ - حـ ٢ = ٣ ∴ المتتابعة حسابية.

obeikandl.com

مثال:

في المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....)

١) أوجد ح١ ، ح١٥ ، حن

٢) هل يوجد في المتتابعة عدد قيمته ١٥٢ ولماذا؟

الحـــــــل

أولاً: أ = ٣ ، ء = ٦ - ٣ = ٣

ح١ = أ + ٩ء = ٣ + ٩ × ٣ = ٣٠

ح١٥ = أ + ١٤ء = ٣ + ١٤ × ٣ = ٤٥

حن = أ + (ن - ١)ء = ٣ + (ن - ١) × ٣

= ٣ + ٣ن - ٣ ← حن = ٣ن

ثانياً: نضع حن = ١٥٢

٣ن = ١٥٢ ← ن = $\frac{١٥٢}{٣}$ = ٥٠,٦ ∴ ن ∉ ص+

∴ العدد ١٥٢ لا يوجد في المتتابعة المعطاه.

مثال:

أوجد الحد التاسع من النهاية للمتتابعة الحسابية:

٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ١١٩

الحـــــــل

المتتابعة: ٣ ، ٧ ، ١١ ، .....، ١١٩ متزايدة وأساسها ٤

والمتتابعة: ١١٩ ، ..... ١١ ، ٧ ، ٣ متناقصة وأساسها -٤

∴ الحد المطلوب هو الحد التاسع من المتتابعة الأخيرة وهو:

ح٩ = أ + ٨ء = ١١٩ + ٨(-٤) = ٨٧

طرق إيجاد (أول حد سالب وآخر حد موجب) أو (آخر حد سالب) أو (أول حد موجب) أو (أول حد موجب) من متتابعة حسابية.

إذا كانت المتتابعة متزايدة	إذا كانت المتتابعة متناقصة
نضع حن = صفر ثم نوجد ن	نضع حن = صفر ثم نوجد ن
حن = أ + (ن - ١)ء	حن = أ + (ن - ١)ء
أ- إذا كانت ن عدد صحيح تكون رتبة آخر حد سالب هو (ن - ١) ورتبة أول حد موجب هو (ن + ١)	أ- إذا كانت ن عدد صحيح تكون رتبة آخر حد سالب هو (ن + ١) ورتبة أول حد موجب هو (ن - ١)

obeikandl.com

وإذا كانت ن = ك + م	وإذا كانت ن = ك + م
حيث ك عدد صحيح، م كسر بحيث صفر < م < ١ فيكون رتبة آخر حد سالب هو ك ورتبة أول حد موجب هو ك – ١	حيث ك عدد صحيح، م كسر بحيث صفر < م < ١ فيكون رتبة اخر حد موجب هو ك ورتبة أول حد سالب هو ك + ١

مثال:
أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة ١٢٨ ، ١١١ ، ٩٤ ، .....

الحـــــــل

نوع المتتابعة تناقصية ء = -١٧

∴ نضع ح$_ن$ = صفر

∴ ٠ = ١٢٨ + (ن - ١) × -١٧ ∴ ١٧(ن - ١) = -١٢٨

∴ ن - ١ = ٧,٥٢٩ ∴ ن = ٨,٥٢٩ - ٨ = ٠,٥٢٩

وهو في صورة ن = ك + م

∴ رتبة أول حد سالب هو ك + ١ وهو الحد التاسع

∴ ح$_٩$ = أ + ٨ء = ١٢٨ + ٨(-١٧) = -٨

مثال: أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب في المتتابعة: -٥٢ ، -٥٠ ، -٤٨ ، .....

الحـــــــل

أ = -٥٢ ، ء = (-٥٠) - (-٢٥) = ٢

نضع ح$_ن$ = ٠ ∴ ٠ = أ + (ن - ١) ء

-٥٢ + (ن - ١) × ٢ = ٠

-٥٣ + ٢ن - ٢ = ٠

∴ ن = $\frac{٥٤}{٢}$ = ٢٧

∵ المتتابعة تزايدية. ∴ رتبة آخر حد سالب = ن - ١

∴ رتبة آخر حد سالب = ٢٧ - ١ = ٢٦

∴ ح$_{٢٦}$ = أ + ٢٥ء

= -٥٢ + ٢٥ × ٢ = -٢

بعض الخواص الأساسية للمتتابعات العددية

١) إذا أضيفت كمية ثابتة م إلى كل حد من حدود المتتابعة العددية أو طرحت كمية ثابتة م من كل حد من حدود المتتابعة - كونت الكميات الناتجة متتابعة عددية أساسها هو نفس أساس المتتابعة الأصلية.

obeikandi.com

فمثلاً: إذا كان: أ ، أ + ء ، أ ٢ء ، ..... متتابعة عددية وإذا أضيفت م إلى كل حد (أ + أ) ، (أ + ء ، م) ، (أ + ٢ء + م)

∵ (أ + ء + م) - (أ + م) = ء ∴ هي متتابعة عددية.

، أ - م ، أ + ء - م ، أ + ٢ء - م ، .....

الأساس = (أ + ء - م) - (أ - م) = ء متتابعة عددية

٢) إذا ضربنا كل حد من حدود المتتابعة العددية في كمية ثابتة م أو قسم على كمية ثابتة م كونت الكميات الناتجة متتابعة عددية أساسها = أساس المتتابعة الأصلية مضروباً في م أو مقسوماً على م

فمثلاً: أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ..... متتابعة عددية.

بالضرب في م

أم ، م (أ + ء) ، م (أ + ٢ء) ، .....

الأساسي = م(أ + ء) - أم

= أم + م ء - أم = م × ء

$$\frac{\text{أ}}{\text{م}} ، \frac{\text{أ} + \text{ء}}{\text{م}} ، \frac{\text{أ} + ٢\text{ء}}{\text{م}} ، .....$$

$$\frac{\text{أ} + \text{ء}}{\text{م}} - \frac{\text{أ}}{\text{م}} = \frac{\text{أ}}{\text{م}} + \frac{\text{ء}}{\text{م}} - \frac{١}{\text{م}} = \frac{\text{ء}}{\text{م}} .$$

٣) إذا كانت ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ..... متتابعة عددية أساسها ء١ = ٣ ،

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، متتابعة عددية أساسها ء٢ = ٥

∴ (٣ + ٥) ، (٦ + ١٠) ، (٩ + ١٥) ، (١٢ + ٢٠) ، .....

٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٢ ، .....

الأساس الناتج = ١٦ - ٨ = ٨

٢٤ - ١٦ = ٨

الأساس = ٣ + ٥ = ٨ أي ← ء = ء١ + ء٢

، (٣ - ٥) ، (٦ - ١٠) ، (٩ - ٢٤) ، .....

-٢ ، -٤ ، -١٦ متتابعة عددية ء = ء١ - ء٢

مثال:

إذا كانت: ٨ ، أ ، ب ، .....هـ ، ٦٨ متتابعة عددية عدد حدودها ١٦

أوجد: أ ، ب ، هـ

obeikandl.com

الحـــــــــل

أ = ٨ ، ح١٥ = ٦٨ ، ء = ؟

∴ أ + ١٥ء = ٦٨

٨ + ١٥ء = ٦٨ ∴ ١٥ء = ٦٠ ∴ ء = $\frac{٦٠}{١٥}$ = ٤

∴ المتتابعة هي: ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، .....، ٦٤ ، ٦٨

∴ أ = ١٢ ، ب = ١٦ ، هـ = ٦٤

ملاحظة: طريقة أخرى لإيجاد الحد العام للمتتالية الحسابية.

أي متتابعة حسابية يكون حدها العام في صورة

ح ن = ء ن + ت حيث ن من الدرجة الأولى ، ء هو أساس المتوالية ، مقدار ثابت

مثال: أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية: ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، .....

الحـــــــــل

ء = ٥ - ٢ = ٣ ، الحد العام ح ن = ء ن + ب

ولإيجاد الثابت ب نضع ح ن = ٢ عندما ن = ١

أو ح ن = ٥ عندما ن = ٢ أو نضع ح ن = ٨ عندما ن = ٣ وهكذا .....

٢ = ٣(١) + ب ∴ ب = -١ الحد العام ح ن = ٣ن - ١

مثال: بين أي المتتابعات الآتية حسابية ثم أوجد الأساس (إذا كانت حسابية) التي حدها العام أ

) ح ن = $\frac{٣}{٥}$ ن + ١٧ (ب) ح ن = ٧ن^{٢} + ١ ج) ح ن = ٧٢ - ٨ن

الحـــــــــل

أ) ح ن = $\frac{٣}{٥}$ ن + ١٧ حسابية أساسها هو معامل ن = $\frac{٣}{٥}$

ب) ح ن = ٧ن^{٢} + ١ ليست حسابية لأن ن من الدرجة الثانية

ج) ح ن = ٧٢ - ٨ن حسابية وأساسها هو معامل ن = -٨

أمثلة على تكوين المتتابعة الحسابية:

لتكوين المتتابعة يتطلب ذلك: معرفة أ ، ء أي يتم تكوين معادلتين في أ ، ء

مثال:

كون المتتابعة الحسابية التي فيها: ح$_{٥}$ = ٩ ، ح$_{٢}$ = ٣

obeikandl.com

الحـــــــل

أ + ٤ء = ٩ × ١ ⇦ (١)

١ + ء = ٣ × ١- ⇦ (٢)

بالجمـــــــع

٣ء = ٦ ∴ ء = ٢

∵ أ + ء = ٣ ∴ أ + ٢ = ٣ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة: ١ ، ٣ ، ٥ ، ....

مثال:

م.ح يزيد حدها السابع عن حدها الثاني بمقدار ٣٥ ومجموع حدودها الأول والثالث والرابع ٤٤ فما هي المتتابعة؟

الحـــــــل

ح٧ - ح٢ = ٣٥ ، ح١ + ح٣ + ح٤ = ٤٤

(أ + ٦ء) - (أ + ء) = ٣٥ | أ + أ + ٢ء + أ + ٣ء = ٤٤

أ + ٦ء - أ - ء = ٣٥ | ٣أ + ٥ء = ٤٤

٥ء = ٣٥ | ومن ١) ∴ ٣أ + ٥ × ٧ = ٤٤

ء = ٣٥ | ٣أ = ٩ ∴ أ = ٣

مثال: م.ح حدودها موجبة فيها ح١ × ح٤ = ٤٥ ، ح٣ × ح١٠ - ح٤ × ح٧ = ٢٤ أوجد المتتابعة.

الحـــــــل

أ (أ + ٣ء) = ٤٥ ⇦ (١)

(أ + ٢ء) (أ + ٩ء) - (أ + ٣ء) (أ + ٦ء) = ٢٤ ⇦ (٢)

(أ٢ + ١١أ ء + ١٨ء٢) - (أ٢ + ٩أ ء + ١٨ء٢) = ٢٤

أ٢ + ١١أ ء + ١٨ء٢ - أ٢ - ٩أ ء - ١٨ ر٢ = ٢٤

٢أ ء = ٢٤

∴ أ ء = ١٢ ⇦ (٣)

من المعادلة (١): أ٢ + ٣أ ء = ٤٥ ⇦ (٤)

أ٢ + ٣ × ١٢ = ٤٥

أ٢ + ٣٦ = ٤٥ ∴ أ٢ = ٩

∴ أ = ± ٣ ، ∵ الحدود موجبة ∴ أ = ٣

obeikandl.com

∴ أ ء = ١٢ ← ٣ء = ١٢ ∴ ء = ٤

∴ المتتابعة: ٣ ، ٧ ، ١١ ، .....

مثال:

في أي متتابعة حسابية إذا كان: حـ = ن ، حـ = م

فأوجد كلا من الحد الأول والأساس ثم اثبت أن: حـ + حـ = صفر

الحـــــــل

أ + (م - ١)ء = ن ⇦ (١)

، أ + (ن - ١)ء = م ⇦ (٢)

بالطـــــــرح

(م - ن)ء = ن - م ∴ ء = $\frac{\text{ن - م}}{\text{-(ن - م)}}$ = -١

بالتعويض في (١)

∴ أ + (م - ١) × -١ = ن

∴ أ = م + ن - ١

∴ حـ + حـ = م + ن - ١ + (م + ن - ١) × -١ = صفر

تمارين (٢٦)

(١) بين أي المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها وأكتب حدودها الخمسة الأولى:

أ) (حـ) = (٢ن - ١) ب) (حـ) = $\frac{\text{[٢ - ن] [٣ + ن]}}{٥}$

ج) (حـ) = ($\frac{٣}{\text{ن}}$ - ٢) ء) (حـ) = ($\frac{\text{٣ن - ٢}}{٢}$)

(٢) أي المتتابعات الآتية حسابية وما هو حدها العام:

أ) (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، .....)

ب) (٣٧ ، ٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ، .....)

ج) (٠,٣ ، ٠,٣٣ ، ٠,٣٣٣ ، .....)

ء) (س ، س + أ٢ ، س + أ٥ ، .....)

obeikandi.com

(٣) أي حد في المتتابعة: -٩ ، -٥ ، -١ ، ..... يكون مساوياً ٨٧ هل يوجد حد في المتتابعة = ٣٣٣

[الجواب: ح٥٠ ، لا يوجد]

(٤) إذا كان: ٩س + ١١ص أحد حدود المتتابعة س - ص ، ٣س + ٢ص ، ٥س + ٥ص ، .... فما ترتيبه.

[الجواب: الخامس]

(٥) أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة: (٤١ ، ٣٧ ، ٣٣ ، ....)

[الجواب: ح١٠]

(٦) أوجد رتبة أول حد موجب ف المتتابعة: (-٦,٧ ، -٦,٤ ، -٦,١ ، ...)

[الجواب: ح٢٤]

(٧) أوجد أول حد في المتتابعة الحسابية: (٨ ، ١٧ ، ٢٦ ، ...) يكون أكبر من ٤٠٠

[الجواب: ٤٥]

(٨) إذا كان: ح$_{ن+١}$ في المتتابعة الحسابية: (١٣ ، $\frac{١}{٢}$ ١٣ ، ١٤ ، ....) يساوي ح$_{٢ن+٢}$

في المتتابعة الحسابية (٤٦ ، $\frac{١}{٢}$ ٤٤ ، ٤٣ ، ....) فما قيمة ن؟

[الجواب: ٣]

(٩) إذا كونت (أ ، ٥ + ب ، ٢ب + ٢ ، ١٧) متتابعة حسابية..أوجد كلاً من أ ، ب

[الجواب: ٨ ، ٦]

(١٠) [أ ، ب ، جـ ، ء] تكون متتابعة حسابية أساسها موجب فإذا كان أ ء = ٣١ $\frac{١}{٢}$ ، ب جـ = ٤٤ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ ، ء

[الجواب: - ١٠ $\frac{١}{٢}$ ، -٨ ، - ٥ $\frac{١}{٢}$ ، -٣ أو ٣ ، ٥ $\frac{١}{٢}$ ، ٨ ، ١٠ $\frac{١}{٢}$]

(١١) متتابعة حسابية فيها ح$_{١}$ = ٦ ، ح$_{ن}$ = ٣٣ ، ح$_{٢ن}$ = ٦٣ أوجد كل من ن ، ء وكذلك قيمة ح$_{٣ن-٣}$

[الجواب: ٥٤]

obeikandl.com

(١٢) س ، ب ، جـ ، ص أربعة حدود من متتابعة حسابية فإذا كان مجموع رتبتي الحديد ب ، جـ فاثبت أن: س + ص = ب + جـ

(١٣) متتابعة حسابية حدودها موجبة..فإذا كان حاصل ضرب الحد الأول في الحد الخامس يساوي ٥٧ وكان حاصل ضرب الحد الثاني في الحد السابع يزيد عن حاصل ضرب الحد الثالث في الحد الرابع بمقدار ٢٤ فأوجد الحد الأول والأساس.

[الجواب: ٣ ، ٤]

(١٤) في أي متتابعة حسابية إذا كان: حـ = ن ، حـ = م فأوجد كلا من الحد الأول والأساس..ثم اثبت أن حـ + حـ = صفر

(١٥) متتابعة حسابية حدها الأول ٣ فإذا كان حـ = ١٧ ، حـ = ٢٧ فما قيمة ن وما هي المتتابعة.

[الجواب ن = ٩ ، المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)]

openkandl.com

الوســـط الحسابـــي

* الوسط الحسابي للعددين أ ، ب هو $\frac{أ + ب}{٢}$

* إذا كانت أ ، ب، جـ في تتابع حسابي فإن : ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$

حالات خاصة:

يستحسن الفرض التالي في الحالات الآتية:

الأعداد الفردية	الأعداد الزوجية
١) ثلاثة أعداد في توالي عددي أ - ء ، أ ، أ + ء ٢) خمسة أعداد في توالي عددي (أ - ٢ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٢ء) الأساس = ء.	١) أربعة أعداد في توالي عددي (أ - ٣ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء) ٢) ستة أعداد في توالي عددي (أ - ٥ء) ، (أ - ٣ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء) ، (أ + ٥ء).

ملاحظة:

لإيجاد عدد م من المتوسطات الحسابية بين العددين أ ، ب فإن: ء = $\frac{ب - أ}{م + ١}$

مثال:

أوجد المتوسطات الحسابية الخمسة بين ٤ ، ٢٢

الحـــــل

أ = ٤ ب = ٢٢

∴ ء = $\frac{ب - أ}{م + ١}$ = $\frac{٢٢ - ٤}{٥ - ١}$ = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣

∴ الأوساط ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩.

مثال: إذا كانت أ ، ٧،.....، ب ، ٢٥ في توالي عددي

وكان ب = ٥أ + ٢ فأوجد المتتابعة ثم أوجد عدد حدودها.

الحـــــل

ء = ٧ - أ ، ء = ٢٥ - ب

∴ ٧ - أ = ٢٥ - ب

∴ ب - أ = ١٨ ⇦ (١)

ب - ٥أ = ٢ ⇦ (٢)

بالطـــرح

∴ الأوساط هي ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٣ ، ..... ، ٨٤

الوسط الأول — الوسط الأخير

مثال: إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٩ ، ٤٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأخرين إلى مجموع الوسطين الأولين هي ٣ : ١ فما هو عدد الأوساط؟

الحـــــــل

أول وسطين — أخر وسطين

٩ — (٤٥ – ٢ء) (٤٥ – ء) — ٤٥

٩ + ء + ٩ + ٢ء

$$\frac{\text{مجموع الوسطين الأخرين}}{\text{مجموع الوسطين الأولين}} = \frac{٣}{١}$$

$$\frac{٤٥ - ء + ٤٥ - ٢ء}{٩ + ء + ٩ + ٢ء} = \frac{٣}{١}$$

٥٤ + ٩ء = ٩٠ - ٣ء ⇦ ٩ء + ٣ء = ٩٠ - ٥٤

∴ ١٢ء = ٣٦ ∴ ء = ٣

∴ المتتابعة هي ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٤٥

أ = ٩ ، ء = ٣ ، ل = ٤٥ ، ن = ؟

ل = أ + (ن - ١) ء

٤٥ = ٩ + (ن - ١) × ٣

٣ن + ٦ = ٤٥ ⇦ ٣ن = ٣٩

ن = ١٣

∴ عدد الأوساط ن - ٢ = ١٣ - ٢ = ١١

ملاحظة: إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها فردي ن مثلاً فإن رتبة الحد

$$\text{الأوسط} = \frac{ن - ١}{٢}$$

∴ الحد الأوسط = $\frac{\text{ح}_ن + ١}{٢}$ وهو أيضاً وسط حسابي بين أ ، ل

∴ الوسط الحسابي = $\frac{أ + ل}{٢}$

أما إذا كان عدد الحدود (ن) زوجي فإنه يوجد حدين أو وسطين رتبتهما:

obeikandl.com

$\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١ ∴ الحدين الأوسطين $ح_{\frac{ن}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$

حيث $ح_{\frac{ن}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$ = أ + ل

مثال: متتابعة حسابية عدد حدودها ١٥ حداً ومجموع حدودها الثلاثة الوسطى ٥١ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة ١٢٣ أوجد حدودها الثلاثة الأولى.

الحـــــــل

∵ المتتابعة عدد حدودها فردي

رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{١٥ + ١}{٢}$ = ٨

∴ الحدود الثلاثة الوسطى هي ح٧ ، ح٨ ، ح٩

∴ أ + ٦ء + أ + ٧ء + أ + ٨ء = ٥١

٣أ + ٢١ء = ٥١ ⇦ (١)

، الحدود الثلاثة الأخيرة هي ح١٣ ، ح١٤ ، ح١٥

∴ أ + ١٢ء + أ + ١٣ء + أ + ١٤ء = ١٢٣

أ + ١٣ء = ٤١ ⇦ (٢)

بحل المعادلتين ١ ، ٢

أ + ٧ء = ١٧

أ + ١٣ء = ٤١

-٦ء = -٢٤ ∴ ء = ٤

بالتعويض في (١) ∴ أ + ٢٨ = ١٧ ∴ أ = ١٧ - ٢٨ = -١١

∵ الأعداد الثلاثة الأولى هي: -١١ ، -٧ ، -٣،.....

تمارين (٢٧)

١) إذا كان $أ^{٢}$ + ١، $٢أ^{٢}$ + ١ + ٣ هي الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة الحسابية: أوجد المتتابعة.

[الجواب (٥ ، ٩ ، ١٣ ،....) أو (٢ ، ٣ ، ٤،.....)]

٢) إذا كان الوسط الحسابي بين س ، ص هو ١٢، الوسط الحسابي بين ٥س ، ٣ص هو ٤٥ فأوجد قيمة كل من س ، ص.

[الجواب ٩ ، ١٥]

٣) إذا كان أ ، ب ، ٢جـ في تتابع حسابي وكان ٢ب ، ٣جـ ، ء في تتابع حسابي فأثبت أن ٣أ ، ٢ب ، ء في تتابع حسابي.

obeikandl.com

٤أ = ١٦ ⇦ أ = ٤

∴ ب = ١٨ + أ = ١٨ + ٤ = ٢٢

∴ المتتابعة هي: ٤ ، ٧ ،.....، ٢٢ ، ٢٥

حـ = أ + (ن - ١) ء

٢٥ = ٤ + (ن - ١) ٣ ∴ ٢٤ = ٣ن ∴ ن = ٨

∴ عدد الحدود المتتابعة = ٨

مثال:

إذا أخذنا الحدود التي رتبتها تقبل القسمة على ٥ من متتابعة حسابية فهل الحدود الناتجة تكون متتابعة حسابية.

الحـــــــل

ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، ح٤ ، ح٥ ، ح٦ ،.....ح١٠ ،.....

ح٥ = أ + ٤ء ح١٠ = أ + ٩ء

ح١٥ = أ + ١٤ء ح٢٠ = أ + ١٩ء

ح٢٥ = أ + ٢٤ء

الأساس = ح١٠ - ح٥ = أ + ٩ء - أ - ٤ء = ٥ء

ح٢٠ - ح١٥ = ح٢٥ - ح٢٠ = ٥ء

∴ متتابعة حسابية.

مثال:

عددان صحيحان موجبان الفرق بينهما ٢٠ والوسط الحسابي لهما ٩فما العددان؟

الحـــــــل

نفرض العددان هما أ ،ب

∴ أ - ب = ٢ ⇦ (١)

$\frac{أ + ب}{٢} = ٩$ ⇦ (٢)

∴ أ + ب = ١٨ ⇦ (٣)

٢أ = ٢٠ ∴ أ = ١٠ ، ب = ٨

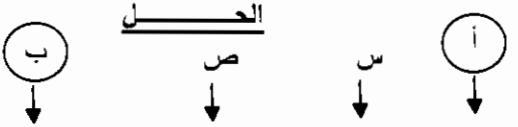
مثال:

إذا كان س ، ص وسطين حسابيين بين أ ، ب أثبت أن:

٩س ص = (٢أ + ب) (أ + ٢ب)

obeikandl.com

الحـــــــل



الحدود هي ⇦ أ أ + ء أ + ٢ء أ + ٣ء

∴ الطرف الأيمن:

٩س ص = ٩ (أ + ء) (أ + ٢ء)

الطرف الأيسر:

(٢أ + ب) (أ + ٢ب) = (٢أ + أ + ٣ء) (أ + ٢أ + ٦ء)

= (٣أ + ٣ء) (٣أ + ٦ء)

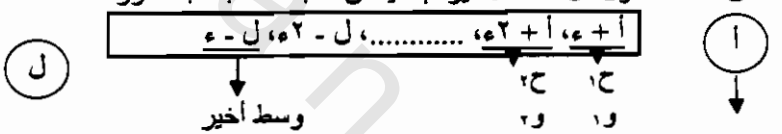
= ٣(أ + ء) × ٣(أ + ٢ء)

= ٩(أ + ء) (أ + ٢ء)

∴ الطرفان متساويان.

إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين

إذا كان أ الحد الأول، ل الحد الأخير فإنه يمكن كتابة المتتابعة بالصورة



* عدد الحـــدود = ٢ + عدد الأوساط
* لإيجاد ء نستخدم ل = أ + (ن - ١) ء

مثال: أدخل ٢٠ وسطاً حسابياً بين ٢٤ ، ٨٧

الحـــــــل

٢٠ وسطاً

الأوساط والعددين تكون متتابعة حسابية

عدد حدودها= ٢٠ + ٢ = ٢٢

∴ ح١ = ٢٤ ← أ = ٢٤

، ح٢٢ = ٨٧ ← أ + ٢١ء = ٨٧ بالطرح

∴ ٢٤ + ٢١ء = ٨٧ ⇦ ٢١ء = ٨٧ - ٢٤

∴ ء = $\frac{٦٣}{٢١}$ ⇦ ء = ٣

٤) أدخل ١٥ وسطاً حسابياً بين ٧٨ ، ٣٠ .

[الجواب ٧٥ ، ٧٢ ،.....،٣٣]

٥) أدخل ن وسطاً حسابياً بين ١ ، ن^{٢}.

[الجواب ن ، ٢ن-١ ، ٣ن-٢،....،ن^{٢} - ن+١]

٦) إذا كانت ص وسط حسابي بين س ، ع فاثبت أن $\frac{ص + ٢ع}{ص - س} ، \frac{ص + ٢س}{ع - ص} = ٤$

٧) إذا أدخلنا بين ١ ، ٣٧ عدة أوساط حسابية عددها ن وكانت النسبة بين الوسط الخامس والوسط الذي ترتيبه (ن - ٢) هي ٤ : ٧ فما قيمة ن؟

[الجواب ١١]

٨) إذا أدخل ن عن الأوساط الحسابية بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط قبل الأخير = فما قيمة ن وما هي الأوساط؟

[الجواب (١٤)، ٣ ، ٥ ، ٧ ،.....، ٢٩)]

٩) إذا كونت أ ،ب ،جـ متتابعة حسابية وكونت $\frac{١}{أ} ، \frac{١}{ب} ، \frac{١}{هـ}$ متتابعة حسابية أخرى

(حيث كل من أ ، ب ، هـ = صفر) فاثبت أن:

أولاً: جـ = ٢ب - أ ثانياً: هـ = $\frac{أ ب}{٢أ - ب}$

ثالثاً: $\frac{جـ}{هـ} = ٥ - ٢ (\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ})$

١٠) اثبت أنه إذا كانت الأعداد $\frac{٢}{ب + جـ} ، \frac{٢}{جـ + أ} ، \frac{٢}{أ + ب}$ تكون متتابعة حسابية فإن الأعداد أ^{٢} ، ب^{٢} ، جـ^{٢} تكون متتابعة حسابية.

obeikandl.com

مجموع ن من حدود متتابعة حسابية

* إيجاد مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها ن:

جـن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) +.....+ (ل - ٢ء) + (ل - ء) + (ل) ⇦ (١)

بكتابة الطرف الأيسر في (١) معكوساً

جـن = ل + (ل - ء) + (ل - ٢ء).....+ (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ ⇦ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ ٢ جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) +.....+ (أ + ل)

∴ ٢جـن = ن (أ + ل)

$$\therefore \text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل})$$

* إيجاد مجموع متتابعة حسابية حدها الأول (أ) وأساسها ء وعدد حدودها ن

∵ ل = أ + (ن-١)ء ⇦ (١)

، ∴ $\text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل})$ ⇦ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore \text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢}[\text{أ} + \text{أ} + (\text{ن}-١)\text{ء}]$$

$$\therefore \text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢}[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{ء}]$$

مثال:

أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٢ ومجموع مربعاتها ٣٣٦ أوجد هذه الأعداد.

الحـــــــل

بفرض الأعداد (أ - ٣ء) ، (أ-ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء)

∴ مجموعها (أ - ٣ء) + (أ -ء) + (أ +ء) + (أ + ٣ء) = ٣٢

∴ ٤أ = ٣٢ ∴أ = ٨ ⇦ (١)

، مجموع مربعاتها:

$(\text{أ} - ٣\text{ء})^٢ + (\text{أ} - \text{ء})^٢ + (\text{أ} + \text{ء})^٢ + (\text{أ} + ٣\text{ء})^٢ = ٣٣٦$

$\text{أ}^٢ - ٦\text{أء} + ٩\text{ء}^٢ + \text{أ}^٢ - ٢\text{أء} + \text{ء}^٢ + \text{أ}^٢ + ٢\text{أء} + \text{ء}^٢ + \text{أ}^٢ + ٦\text{أء} + ٩\text{ء}^٢ = ٣٣٦$

∴ $٤\text{أ}^٢ + ٢٠\ \text{ء}^٢ = ٣٣٦$

$٢\text{أ}^٢ + ١٠\ \text{ء}^٢ = ١٦٨$ ⇦ (٢)

نعوض عن أ = ٨ في (٢) ∴ $١٢٨ + ١٠\ \text{ء}^٢ = ١٦٨$

obeikandl.com

$\therefore$ ء^{٢} = ٤ $\therefore$ ء = $\pm$ ٢

$\therefore$ الأعداد (٨ -٦) ، (٨- ٢) ، (٨ + ٢) ، (٨ + ١)

ء = ٢ ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤

ء = -٢ ١٤ ١٠ ٦ ٢

ملاحظة:

في بعض التمارين يذكر التعبير التالي

أوجد أصغر عدد من الحدود ليكون المجموع سالب.

أو أكبر عدد من الحدود ليكون المجموع موجب.

مثال:

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتابعة ٨٩ ، ٨١ ، ٧٣،..... ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالباً.

الحـــــــل

الأساس = ٨١ - ٨٩ = -٨

بفرض أن عدد الحدود = ن

$\because$ جـ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن -١)ء]

صفر = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٨٩ + (ن -١) ×-٨]

= $\frac{ن}{٢}$ [١٨٦ - ٨ن]

$\therefore$ ٨ن = ١٨٦ $\therefore$ ن = ٣٣ $\frac{١}{٤}$ $\therefore$ أصغر عدد من الحدود = ٢٤ حداً

استنتاج: في أي متتابعة حسابية يكون: ح$_{ن}$ = جـ$_{ن}$ - جـ$_{ن-١}$

مثلاً: ح$_{٥}$ = جـ$_{٥}$ - جـ$_{٤}$ ، ح$_{٧}$ = جـ$_{٧}$ - جـ$_{٦}$

مثال:

إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة حسابية يتعين بالقانون

جـ$_{ن}$ = $\frac{٣}{٤}$ن(١٧ - ن) فأوجد:

أ) الحد التاسع من المتتابعة.

ب) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٣٩.

obeikandl.com

الحـــــــل

$$جـ_ن = \frac{٣}{٤} ن (١٧ - ن)$$

$$، ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$$

$$\therefore ح_٩ = جـ_٩ - جـ_٨$$

$$= \frac{٢٧}{٤} [١٧ - ٩] - \frac{٢٤}{٤} [١٧ - ٨] = صفر$$

$$= [\frac{٢٧}{٤} \times ٨] - [٦ \times ٩]$$

$$ح_٩ = ٥٤ - ٥٤ = صفر$$

مثال:

إذا كان الحدان الأول والثامن من متتابعة حسابية هما ٣,٥ ، ٨,٥ أوجد الحدود الستة التي تظهر بين هذين الحدين بحيث تكون الحدود الثمانية في توالي عددي.

الحـــــــل

$$ح_١(أ) = ٣\frac{١}{٢} \quad ، \quad ح_٨ = ٨\frac{١}{٢}$$

المطلوب $ح_٢ ، ح_٣ ، ح_٤ ، ح_٥ ، ح_٦ ، ح_٧$

لإيجاد أساس المتوالية الحسابية $ح_٨ = أ + ٧ء$

$$\therefore ٨ = ٣\frac{١}{٢} + ٧ء \qquad \therefore ٧ء = ٥ \qquad \therefore ء = \frac{٥}{٧}$$

$$\text{الحد الثاني } (ح_٢) = أ + ء = ٣\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٧} = \frac{٥٩}{١٤}$$

$$، ح_٣ = أ + ٢ء = ح_٢ + ء = \frac{٥٩}{١٤} + \frac{٥}{٧} = \frac{٦٩}{١٤}$$

وهكذا بقية الحدود

$$ح_٤ = \frac{٧٩}{١٤} \quad ، \quad ح_٥ = \frac{٨٩}{١٤} \quad ، \quad ح_٦ = \frac{٩٩}{١٤} \quad ، \quad ح_٧ = \frac{١٠٩}{١٤}$$

مثال:

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ٣٠٠ والتي تقبل القسمة على ٧

الحـــــــل

الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على ٧ هي: ٧ ، ١٤ ، ٢١ ،.....، ٢٩٤ والعدد ٢٤٩ هو آخر عدد يقبل القسمة على ٧ ويقل عن ٣٠٠

لأن $\frac{٣٠٠}{٧}$ = ٤٢,٨٥ بضرب الجزء الصحيح من العدد في ٧

فنحصل على ٤٢ × ٧ = ٢٩٤

∴ ح١ = ٧ ، ء = ٧ ، حن = ٢٩٤

∴ نوجد ن ∴ حن = أ + (ن - ١) ء

∴ ٢٩٤ = ٧ + (ن - ١) ٧ بالقسمة على ٧

∴ ٤٢ = ١ + (ن - ١) ∴ ن = ٤٢

∴ مجموع الأعداد جن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

= [٧ + ٢٩٤] = ٦٣٢١

مثال: إذا كان في متتابعة حسابية الحد الأول ح١ = ٣ ومجموع الحدود الثلاثة الأولى = مجموع الستة حدود الأولى اثبت أن: جن = $\frac{٣ن}{٨}$ (٩ - ن)

الحـــــــل

ح١ = ٣ ، جـ٣ = جـ٦

جـ٣ = $\frac{٣}{٢}$ [٦ + (٢ - ١) ء] = (٦ + ٢ء)

جـ٦ = $\frac{٦}{٢}$ [٦ + (٦ - ١)ء] = ٣ (٦ + ٥ء)

، جـ٣ = جـ٦

∴ ٣(٦ + ٥ء) = $\frac{٣}{٢}$ (٦ + ٢ء) بالضرب في ٢

١٢ + ١٠ء = ٦ + ٢ء ∴ ٨ ء = -٦

obeikandl.com

$$\therefore \ ء = \frac{-٣}{٢}$$

بالتعويض في جـ$_ن$ $= \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١)ء]

$$\therefore \ جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٦ + \frac{٣}{٤} (ن - ١)]$$

$$= \frac{ن}{٢} [٦ - \frac{٣}{٤}ن + \frac{٣}{٤}] = \frac{ن}{٢} [\frac{٢٧}{٤} - \frac{٣}{٤}ن]$$

$$= \frac{ن}{٢} \times \frac{٣}{٤} [٩ - ن] = \frac{٣ن}{٤} (٩ - ن)$$

مثال: إذا كان م ، هـ هما الحدين الثاني والرابع في متتابعة حسابية فأوجد حدها الأول والثالث ومجموع الحدود العشرة الأولى منه.

الحـــــــل

ح$_٢$ = م ، ح$_٤$ = هـ

∵ ح$_٤$ - ح$_٢$ = ٢ء

$$\therefore \ ء = \frac{١}{٢} (هـ - م)$$

الحد الأول: ح$_١$ = ح$_٢$ - ء = م - $\frac{١}{٢}$ (هـ - م)

$$= م - \frac{١}{٢} هـ + \frac{١}{٢} م = \frac{٣}{٢} م - \frac{١}{٢} هـ$$

$$\therefore \ ح_١ = \frac{١}{٢} (٣م - هـ)$$

الحد الثالث: ح$_٣$ = ح$_٢$ + ء

$$= ء + \frac{١}{٢} (هـ - م)$$

obeikandl.com

$$= م + \frac{1}{2} هـ - \frac{1}{2} م = \frac{1}{2} (م + هـ)$$

الحد العاشر: ح١٠ = ح١ + ٩ء

$$= \frac{1}{2} (٣م - هـ) + ٩ \times \frac{1}{2} (هـ - م)$$

$$= \frac{3}{2} م - \frac{1}{2} هـ + \frac{9}{2} هـ - \frac{9}{2} م$$

$$= ٤ هـ - ٣م$$

مجموع الحدود العشرة الأولى جـ١٠ = $\frac{10}{2}$ [أ + ل]

$$= ٥ [\frac{1}{2} (٣م - هـ) + (٤هـ - ٣م)]$$

$$= ٥ [\frac{9}{2} هـ - \frac{3}{2} م] = \frac{5}{2} [٩هـ - ٣م]$$

مثال:

كم حداً تؤخذ من المتتابعة ١٣ ، ١١ ، ٩ +.....لكي يكون المجموع ٤٥ م فسر وجود جوابين.

الحـــــــل

أ = ١٣ ، ء = -٢ ، جـن = ٤٥ والمطلوب ن

$$جـن = \frac{ن}{2} [٢أ + (ن - ١)ء]$$

$$٤٥ = \frac{ن}{2} [٢ \times ١٣ + (ن - ١)(-٢)]$$ بالضرب في ٢

٩٠ = ن [٢٦ - ٢ن +٢]

٩٠ = ٢٨ن - ٢ن^{٢} بالقسمة على ٢

ن^{٢} - ١٤ن + ٤٥ = ٠

(ن - ٩) (ن - ٥) = ٠

obeikandl.com

أما ن = ٩ أو ن = ٥

التفسير للجوابين:-

عندما ن = ٥ تكون الحدود

١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ومجموعهما ٤٥

وعندما ن = ٩ يكون الحدود

١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، -١ ، -٣ ومجموعهما ٤٥

مثال:

متتابعة حسابية حدها الثالث ٢٥ والخامس ١٧ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

الحـــــــل

أ = ٢٥ ح٥ = ١٧

∴ أ + ٢ء = ٢٥ ⇦ (١)

أ + ٤ء = ١٧ ⇦ (٢)

بالطـــــرح

-٢ء = ٨ ∴ ء = -٤

لإيجاد أ نعوض في (١)

∴ أ + ٢ (-٤) = ٢٥ ∴ أ = ٣٣

مجموع الحدود العشرة الأولى:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)ء]$$

$$= \frac{١٥}{٢} [٢\times٣٣ + (١٠ - ١) (-٤)] = ١٥٠$$

والمتتابعة هي: ٣٣ ، ٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ١٣ ، ٩ ، ٥ ، ١ ، -٣

وكما هو واضح الحد الثالث هو ٢٥ والخامس ١٧ ومجموع حدودها ١٥٠.

مثال:

بدأ رجل حياته العملية بمرتب سنوي قدره ٣٠٠٠ جنيه واستمر يحصل علاوة سنوية قدرها ٢٠٠ جنيه حتى صار راتبه السنوي ٦٠٠٠ جنيهاً ولم يتغير راتبه بعد ذلك إلى أن أمضى ٢٥ سنة في العمل. احسب مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً وإذا بدأ الرجل بالمرتب الأول نفسه وهو ٣٠٠٠ جنيه في السنة فما مقدار العلاوة التي تصرف له كل سنة طول مدة خدمته وهي ٢٤ سنة لكي يحصل على نفس مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً.

الحـــــــل

راتب الرجل ٣٠٠٠ ، (٣٠٠٠ + ٢٠٠) ، (٣٠٠٠ + ٤٠٠) + (.....، ٦٠٠٠

نوجد متى وصل راتبه إلى ٦٠٠٠ أي حـن = ٦٠٠٠

∴ ٦٠٠٠ = أ + (ن - ١) ء

obeikandi.com

$= ٣٠٠٠ + (ن - ١) \times ٢٠٠ = ٦٠٠٠$

$٢٠٠ن + ٢٨٠٠ = ٦٠٠٠$

$\therefore$ ن = ١٦

مجموع المبالغ التي حصل عليها = جـ١٦ = ٩×٦٠٠٠ + $\frac{١٦}{٢}$ [٢×-٣ + ١٥×٢٠٠] + ٩×٦٠٠٠

$= ٨[٦٠٠٠ + ٣٠٠٠] + ٩ \times ٦٠٠٠$

$= ٧٢٠٠٠ + ٥٤٠٠٠ = ١٢٦٠٠٠$ جنيه

نوجد العلاوة التي تستمر معه طوال حياته

نضع جـ٢٥ = ١٢٦٠٠٠

$= \frac{٢٥}{٢}$ [٢×٣٠٠٠ + ٢٤×ء] = ١٢٦٠٠

$= \frac{٢٥}{٢}$ [٦٠٠٠ + ٢٤ء] = ١٢٦٠٠٠

$= ٧٥٠٠٠ + ٣٠٠٠ء = ١٢٦٠٠٠$

$٣٠٠٠ء = ٥١٠٠٠$

$\therefore$ ء = $\frac{٥١٠٠٠}{٣٠٠٠}$ = ١٧٠ جنيه.

تمارين (٢٨)

١) أوجد مجموع ن حداً الأولى من المتتابعة (حـن) = (٩ن -٥)

[الجواب: $\frac{ن}{٢}$ (٩ن -١)]

٢) كم حداً تؤخذ من المتتابعة (٣٦ ، ٣٢ ، ٢٨ ،.....) ليكون مجموعها ١٧٦؟
فسر معنى وجود جوابين [الجواب: ٨ أو ١١]

٣) بأي حد من حدود المتتابعة (٩ ، ١١ ، ١٣ ،.....) نبدأ ليكون مجموع ١٥ حداً منها ٤٦٥؟
[الجواب الحد الخامس]

٤) متتابعة حسابية حدها الأول ٤ وأساسها ٣ وعدد حدودها ٢٠ حداً أوجد:
(أولاً) مجموع حدودها الفردية الرتبة. [الجواب: ٣١٠]

obeikandi.com

(ثانيا) مجموع حدودها الزوجية الرتبة. [الجواب: ٣٤٠]

٥) أوجد المتتابعة الحسابية التي مجموع العشرة حدود الأولى منها يساوي ١٠٠ ومجموع العشرة حدود التالية يساوي ٣٠٠. [الجواب: (١ ، ٣ ، ٥ ،....)]

٦) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٥ ، ٩ ، ١٣ ،.....) ليكون المجموع أكبر من ٥٠٠. [الجواب: ١٦حداً]

٧) في المتتابعة (٤ ، ٨ ، ١٢،.....ز) أوجد:

(أولاً) عدد الحدود اللازم أخذها بحيث يكون نسبة مجموع الثلث الأول منها إلى باقي الحدود كنسبة ٢ : ١٥ [الجواب: ٣٣ حداً]

(ثانياً) عدد الحدود اللازم أخذها بحيث ينقص مجموع الثلث الأول عن مجموع باقي الحدود بقدر ١٤٢٠ [الجواب: ٣٠ حداً]

٨) اثبت أن (حن) = [لو س ص$^{ن-١}$] متتابعة حسابية حيث س ، ص ∈ ح$^{+}$ وإذا كانت س = ٧٢٩٠ ، ص = ٣/١ فأوجد مجموع الثلاثة عشر حداً الأولى من هذه المتتابعة بدون استخدام الجداول. [الجواب: ١٣]

٩) خزان به ٣٢٥٥ جالوناً من الماء يتسرب منه أول يوم ٧ جالونات وفي اليوم الثاني ١٤ جالوناً وفي اليوم الثالث ٢١ جالوناً وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً [الجواب: ٣٠]

١٠) طريق مستقيم طوله ٢٩٧ متراً سارت دراجتان في الطريق حيث ابتدأتا الحركة في لحظة واحدة إحداهما من أول الطريق والأخرى من نهايته في اتجاهين متضادين فإذا كانت الدراجة الأولى تقطع ٢١ متراً في الثانية الأولى و١٩ متراً في الثانية الثانية و ١٧ متراً في الثانية الثالثة هكذا أما الدراجة الثانية فتقطع ٣٢ متراً في الثانية الأولى و٢٩ متراً في الثانية و٢٦ متراً في الثالثة وهكذا.....فما هو الزمن الذي بعده تتقابلان والمسافة التي تقطعها كل منهما.....

[الجواب: ٩ ثانية، ١١٧ ، ١٨٠ متراً]

تمارين عامة على المتتابعة الحسابية:

١) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهم ٢٧ ومجموع مربعاتها ٢٥١ فما هي الأعداد؟ [الجواب: ٧ ، ٩ ، ١١]

٢) مجموع أربعة أعداد مكونة لمتتابعة حسابية ٢٠ ونسبة حاصل ضرب العدد الأول في العدد الرابع إلى حاصل ضرب الثاني في الثالث = ٢ : ٣ فما هي الأعداد؟

[الجواب: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

٣) إذا كان جـ ر هو مجموع حدود عددها ن من متتابعة حسابية وكان جـ ١٥ = ١٥ ، جـ ٣٥ = ٣٥ فأوجد المتتابعة ثم اثبت أن: جـ ن+١ : جـ ن-١ = (ن + ٣) : (ن - ١)

[الجواب(٣ ، ٥ ، ٧ ،...)]

٤) متتابعة حسابية نسبة الحد الحادي عشر إلى الحد السادس فيها كنسبة ٣ : ١ فإذا كان مجموع العشرة الحدود الأولى ٤٠ فأوجد هذه المتتابعة وكم حداً يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٦٠؟

[الجواب: (-٥ ، -٣ ، -١ ،.....، ١٦ حداً]

٥) متتابعة حسابية أساسها ٢ ومجموع ن من حدودها الأولى ٣٢٠ ومجموع ٢ن من حدودها الأولى ١١٥٢ أوجد هذه المتتابعة؟ [الجواب(٥ ، ٧ ، ٩ ،.....)]

٦) اقترض تاجر مبلغاً من مصرف وتعهد بسداده على ٤٠ قسطاً شهرياً تكون متتابعة حسابية وبعد أن سدد القسط الخامس عشر وجد أن الباقي عليه للمصرف يساوي $\frac{٤٠}{٩}$ مما سدده وبعد أن سدد القسط الخامس والعشرين مباشرة وجد أن الباقي عليه للمصرف ٥٥٥٠ جنيهاً. أوجد الأقساط الثلاثة الأولى.

[الجواب: ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠]

٧) إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة حسابية يتعين بالقانون: جـ ر = $\frac{ن}{٤}$(٧٣ - ن)

فأوجد (أولاً) الحد التاسع من المتتابعة.

(ثانياً) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٣٩.

[الجواب: صفر ، ٤ أو ١٣]

٨) كم حداً تؤخذ من المتتابعة (١٢ ، ٩ ، ٦ ،.....) ابتداء من الحد الأول ليكون النسبة بين مجموع الثلث الأول من حدودها إلى مجموع باقي حدودها كنسبة -٢ : ١١.

[الجواب: ١٥]

٩) أوجد مجموع ن حداً من المتتابعة (حـ) = (لو٢×٣^ن)

[الجواب: لو(٢^ن × ٣^(ن(ن+١)/٢))]

١٠) في الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٢٠٠ ، ٤٠٠ أوجد:

(أولاً) مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٣. [الجواب: ٢٠١٠٠]

(ثانياً) مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٣. [الجواب: ٣٩٦٠٠]

١١) اثبت أنه في أي متتابعة حسابية يكون حـ = جـ - جـ، وأن الأساس هذه المتتابعة = جـ+٢ - ٢جـ+١ + جـ.

١٢) بدأ رجل عمله براتب سنوي ٤٨٠ جنيهاً وكان يأخذ علاوة سنوية قدرها ١٨ جنيهاً فكم يصبح راتب السنوي بعد ١٥ سنة وما مجموع ما يكون قد تقاضاه من مرتبات طوال هذه المدة؟ [الجواب: ٧٣٢ ، ٩٠٩٠ جنيهاً]

١٣) متتابعة حسابية فيها حـ+١ = ٢٢ ، حـ-١ = ١٠ ، حـ٢+١ = ٣٤ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع ٣ن حداً من حدودها. [الجواب: (٤ ، ٧ ، ١٠ ،.....) ، ٣٧٥]

١٤) اثبت أن: [١+٢+٣+.....+ن]^٢ - [١+٢+٣+.....+(ن-١)]^٢ = ن^٣

١٥) اثبت أن: ١-٢+٣-٤+.....إلى ٢ن حداً = -ن.

١٦) متتابعة حسابية مجموع الستة الحدود الأولى منها يساوي ١٥٩ ومجموع السبعة حدود التالية لها يساوي ٤٩ أوجد هذه المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من الحدود يمكن أخذه ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع سالباً.

[الجواب(٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ،.....) ، ٢٤ حداً]

١٧) متتابعتان حسابيتان تشتركان في الحد الأول فإذا كان الحد الخامس من المتتابعة الأولى يساوي الحد التاسع من المتتابعة الثانية.. فاثبت أن الحد السابع من المتتابعة الأولى يساوي الحد الثالث عشر من المتتابعة الثانية.

١٨) اثبت أن لو س ، لو س ص ، لو س ص^٢ ،.....متتابعة حسابية وإذا كانت س = ١٦٠ ، ص = ١/٢ فاثبت أن مجموع التسعة حدود الأولى من هذه المتتابعة يساوي ٩

بدون استخدام الجداول.

١٩) متتابعة حسابية حدها الخامس عشر يساوي ٦٤ وحدها التاسع وسط متناسب بين الحد الرابع والحد التاسع عشر.. أوجد هذه المتتابعة ثم أوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى منها. [الجواب: (٨ ، ١٢ ، ١٦ ،.....) ، ٥٤٠]

٢٠) متتابعة حسابية حدها الأول ١٣ والوسط الحسابي بين حديها الثاني والأخير يساوي -٧ ومجموع حدودها -٥٠ أوجد أساسها وعدد حدودها.

[الجواب: -٤ ، ١٠]

٢١) في المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....) اثبت أن ح٢+ح٣+ح٤+.....إلى ن حداً = ن٢.

٢٢) كون متتابعة حسابية بإدخال ١٦ وسطاً حسابياً بين -١٢ ، $١٣\frac{١}{٢}$ ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليصبح مجموعها ٦ أمثال حدها الرابع عشر واثبت أن الحدود الثلاثة الأخيرة من هذه الحدود لها نفس المجموع.

[الجواب(-١٢ ، $-\frac{١}{٢}$ ١٠ ، -٩ ، .....) ، ٢٠]

٢٣) إذا كانت س ، ص ، ع ثلاثة أوساط حسابية بين ب ، جـ فاثبت أن:
٣س - ص + ع = ٢ب + جـ

٢٤) اقتصد تاجر في سنة ما ٢٠٠ جنيه وأخذ يقتصد كل سنة ١٠٠ جنيه زيادة على ما يقتصده في السنة السابقة..فبعد كم سنة يصبح مجموع ما يقتصده ١٧٠٠٠ جنيه.
[الجواب: ١٧]

٢٥) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ ومجموع الحدود الثلاثة الوسطى ١٢٩ ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة = ٢٣٧ أوجد الحدود الثلاثة الأولى.[الجواب: ٣ ، ٧ ، ١١]

٢٦) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢٤ وإذا طرح من العدد الأوسط ٢ كونت مقلوباتها متتابعة حسابية أخرى فما هي هذه الأعداد..وإذا رتبت هذه الأعداد تنازلياً بحسب قيمتها مكونة المتتابعة حسابية فأوجد كم حداً من حدودها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها -١٢٠.
[الجواب: ٤ ، ٨ ، ١٢ أو ١٢ ، ٨ ، ٤ ، ١٢ حداً]

٢٧) إذا كان أحد حدود المتتابعة (١ ، ٣ ، ٥ ، .....) وسطاً متناسباً بين الحدين الثالث والعشرين والثالث والستين فيها فأوجد رتبة هذا الحد ثم أوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التي مجموعها مساويا $\frac{١}{٤}$ مجموع العشرين حداً الأولى في المتتابعة.

[الجواب: ح٣٨ ، ١٠]

٢٨) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حداً فإذا كان الحد الأوسط = ١٣ ومجموع الحدود التالية لهذا الحد = ١٢ مرة مجموع الحدود السابقة له فأوجد هذه المتتابعة.
[الجواب(-٧ ، -٥ ، -٣ ، .....)]

٢٩) بدأ رجل عمله بمرتب سنوي قدره ٤٠٠ جنيه واستمر يحصل على علاوة سنوية قدرها ٢٠ جنيهاً حتى صار راتبه السنوي ٦٤٠ جنيهاً ..ولم يتغير راتبه السنوي بعد ذلك إلى أن أمضى ١٦ سنة في العمل..احسب مجموع المبالغ التي حصل عليها..وإذا بدأ الرجل

بالمرتب نفسه وهو ٤٠٠ جنيه في السنة. فما مقدار العلاوة التي تصرف له كل سنة طوال مدة الـ١٦ سنة لكي يحصل على مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً.
[الجواب: ٨٦٨٠جنيهاً، ١٩ جنيهاً]

٣٠) متتابعة حسابية الوسط الحسابي بين حديها الثالث والرابع $٤\frac{١}{٢}$ ومجموع العشرين حداً الأولى منها = -٦١٠ أوجد كم حداً يؤخذ منها ابتداء من الحد الأول لكي يكون المجموع = -١٦٦٥. [الجواب: ٣٠]

٣١) اثبت أن مجموع ن من حدود المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ،...) تساوي ن^{٢} ثم بين أن ٨٢^{٢} - ١٧^{٢} هي مجموع عدد من الأعداد الفردية المتتالية.. أوجد هذه الأعداد.
[الجواب: ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٩ ،.....١٦٣]

٣٢) أوجد حن من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول = ١، $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ ن}} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}^{٢}}$

[الجواب: (٢ن - ١)]

٣٣) إذا كان حس : حص في متتابعة حسابية يساوي ص : س
فاثبت أن: حس+ص = صفراً.

٣٤) إذا كانت أضلاع مثلث تكون متتابعة حسابية أساسها ٤ وإذا كانت مساحة هذا المثلث = ٢٤ فأوجد أطوال أضلاع هذا المثلث.
[الجواب: ٤ $\sqrt{٦}$ - ٤ ، $\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٦}$ + ٤]

٣٥) إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة يتناسب مع ن^{٢} فاثبت أن الحد النوني فيها يتناسب مع (٢ن - ١) ثم اثبت أن المتتابعة حسابية وأن أساسها يساوي ضعف حدها الأول.

٣٦) إذا كان الحد الذي رتبته ن من متتابعة حسابية يساوي ك فاثبت أن مجموع ٢ن - ١ من حدود هذه المتتابعة يساوي ك(٢ن - ١).

٣٧) في المتتابعة الحسابية اثبت أن: الفرق بين أي حدين = الفرق بين رتبتي الحدين × الأساس ومن ذلك اثبت أنه إذا كونت أ ، ب ، جـ ، ء متتابعة حسابية فإن: أ - ء = ٣(ب - جـ).

٣٨) مجموع ن من الأعداد الصحيحة المتتالية يساوي ١٩٨ وأكبر هذه الأعداد يساوي أصغرها مرتين أوجد ن وأوجد أصغر هذه الأعداد. [الجواب: ١٢ ، ١١]

٣٩) متتابعة حسابية عدد حدودها زوجي..ومجموع الحدود الفردية الرتبة منها ٩٠ ومجموع الحدود الزوجية الرتبة منها ١٠٥...وحدها الأخير يزيد عن حدها الأول بقدر ٢٧ أوجد عدد الحدود. [الجواب: ١٠]

٤٠) أ ب جـ ء شكل رباعي زواياه على الترتيب تكون متتابعة حسابية حيث أ أصغر الزوايا، ء أكبر الزوايا فإذا كان جا أ + جا ء = $\sqrt{٣}$ فأوجد زوايا هذا الشكل.

[الجواب: ٦٠°، ٥٨٠، ٥١٠٠، ٥١٢٠]

٤١) إذا كان ط ، ق ، ك مجموع (ن+٢) ، (ن+١) ، ن حداً على الترتيب من متتابعة حسابية.. وكان س ، ص ، ع هي الحدود التي رتبتها (ن+٢) ، (ن+١) ، ن على الترتيب فاثبت أن: (أ) أساس المتتابعة = ط - ٢ق + ك

(ب) س - ٢ص + ع = ٠

٤٢) إذا كان الحد الذي رتبته $(ن+١)^{٢}$ في متتابعة حسابية يساوي صفراً فاثبت أن مجموع حدود عددها ن ابتداء من الحد الأول في هذه المتتابعة يساوي مجموع الحدود التالية التي عددها (ن+١) وأن كلاً منها = $-\frac{ن ء}{٢}(ن+١)(٢ن+١)$ حيث (ء) أساس المتتابعة .

٤٣) أوجد مجموع ن من الأعداد الفردية التي حدها الأول ٢أ +١ حيث أ عدد صحيح موجب ثم أوجد قيمة أ التي تجعل هذا المجموع مساوياً $ن^{٣}$.

[الجواب: ٢أن + $ن^{٢}$ ، أ = $\frac{ن^{٢} - ن}{٢}$]

٤٤) إذا كانت أرقام المنازل المتجاورة في جانب واحد من أحد الشوارع هي (١ ، ٢ ، ٣ ،.....،٤٩) أوجد رقم المنزل الذي يكون مجموع أرقام المنازل له

[الجواب: ٣٥]

٤٥) رسمت دوائر متحدة المركز بحيث يزيد نصف قطر كل منها ١سم عن نصف قطر الدائرة الأصغر منها مباشرة اثبت أن مساحات الحلقات الدائرية الناتجة تكون متتابعة حسابية وإذا كانت مساحة الحلقة الخامسة عشر = ثلاثة أمثال مساحة الحلقة الرابعة..أوجد نصف قطر الدائرة الأولى.

[الجواب: ٢سم]

٤٦) إذا كانت النسبة بين مجموع حدود عددها ن من متتابعتين حسابيتين كنسبة (٣ن - ٢) : (٢ن + ١) أوجد النسبة بين الحد التاسع في المتتابعة الأولى والحد التاسع في المتتابعة الثانية.

[الجواب: ٧ : ٥]

المتتابعات الهندسية

النوع الأول من المسائل:

مسائل على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها النونى

* تسمى المتتابعة (ح$_ن$) حيث ح$_ن$ ≠ صفر متتابعة هندسية إذا كان:

$$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \text{مقدار ثابت}$$

∴ المقدار الثابت = $\frac{\text{قيمة أي حد}}{\text{قيمة الحد السابق له مباشرة}}$ ويسمى هذا المقدار الثابت (أساس المتتابعة الهندسية) ويرمز له بالرمز " ر "

فمثلاً: ١) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ..... .

٢) ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ..... .

يلاحظ أن: $\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢$ ، $\frac{١٦}{٣٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ العدد ٢ ، $\frac{١}{٢}$ أساس للمتتابعة

طرق التعرف على المتتابعة (ح$_ن$) هندسية أم غير هندسية

١) إذا علم (ح$_ن$) بطريقة السرد:-

مثلاً: ٣ ، ٦ ، ١٢

$$\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = \frac{١}{٢}$$

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢}$ ∴ المتتابعة هندسية.

٢) إذا علمت (ح$_ن$) بمعلومية ن:

مثلاً: المتتابعة (ح$_ن$) = $(٢^{ن+١})$

$$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{أ\ ر^{ن+1-1}}{أ\ ر^{ن-1}} = \frac{أ\ ر^{ن}}{أ\ ر^{ن-1}} = ر = ٤ \text{ (ثابت)}$$

∴ المتتابعة هندسية أساسها ر = ٤

الصورة العام للمتتابعة الهندسية وحدها العام:

إذا كانت أ الحد الأول ، ر هو الأساس فإن:

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي:

(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، .....)

حيث: ح$_{١}$ = أ ، ح$_{٢}$ = أ ر ، ح$_{٣}$ = أ ر^{٢} ، ح$_{٤}$ = أ ر^{٣}

الحد العام هو: ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$ حيث ن ∈ ص$^{+}$

مثال:

في المتتابعة الهندسية ٢ ، ٤ ، ٨ ، .....

أوجد: ١) الحد السابع ٢) الحد العام ٣) ما هي رتبة الحد الذي قيمته ٥١٢

٤) أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ٧٨٥

الحـــــــل

أ = ٢ ، ر = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

١) ح$_{٧}$ = أ ر^{٦} = ٢ × (٢)^{٦} = ٢^{٧} = ١٢٨

٢) ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$ = ٢(٢)$^{ن-١}$ = ٢^{ن}

٣) نضع ح$_{ن}$ = ٥١٢ ∴ ٢^{ن} = ٥١٢

∴ لو ٢^{ن} = لو ٥١٢ ∴ ن لو ٢ = لو ٥١٢

∴ ن = $\frac{\text{لو ٥١٢}}{\text{لو ٢}}$ = ٩ ∴ ح$_{٩}$ = ٥١٢

٤) نضع ح$_{ن}$ > ٧٨٥ ∴ ٢^{ن} > ٧٨٥

لو ٢^{ن} > لو ٧٨٥ ∴ ن لو ٢ > لو ٧٨٥

∴ ن > $\frac{\text{لو ٧٨٥}}{\text{لو ٢}}$ ∴ ن > ٩.٦ ∴ ن = ١٠

obeikandl.com

النوع الثاني من المسائل:

تكوين المتتابعة عن طريق إيجاد أ ، ر

ملاحظات:

(١) تستخدم قوانين الأسس في الاختصار.

أ) في القسمة يتم طرح الأسس.

ب) في الضرب يتم جمع الأسس.

مثلا: $\frac{ر^{٨}}{ر^{٥}} = ر^{٣}$ ، $\frac{ر^{٣}}{ر^{٥}} = \frac{١}{ر^{٢}}$

(٢) التحليل بالعامل المشترك، الفرق بين مربعين، الفرق بين مكعبين، المقدار الثلاثي.

أ) $ر^{٢} - ١ = (ر - ١)(ر + ١)$

ب) $ر^{٣} - ١ = (ر - ١)(ر^{٢} + ر + ١)$

ج) $ر^{٣} + ١ = (ر + ١)(ر^{٢} - ر + ١)$

ه) $ر^{٢} - ٥ر + ٦ = (ر - ٣)(ر - ٢)$

هـ) $أ + أر = أ(١ + ر)$

و) $أر^{٢} + أر^{٣} = أر^{٢}(١ + ر)$

مثال:

أوجد المتتابعة الهندسية التي فيها $ح_{٣} = ٨$ ، $ح_{٨} = ٢٥٦$

الحـــــــل

$أر^{٢} = ٨$ .....(١)

$أر^{٧} = ٢٥٦$ .....(٢)

$\therefore \frac{أر^{٧}}{أر^{٢}} = \frac{٢٥٦}{٨}$ $\therefore ر^{٥} = ٣٢$ $\therefore ر = ٢$

$\because أر^{٢} = ٨$ $\therefore أ \times ٤ = ٨$ $\therefore أ = ٢$

$\therefore$ المتتابعة هي: ٢ ، ٤ ، ٨ ، ..... .

مثال: متتابعة هندسية فيها $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} = ١١٢$ ، $ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦} = ١٤$

أوجد المتتابعة.

الحـــــــل

$\because ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} = ١١٢$ $\therefore أ + أر + أر^{٢} = ١١٢$ .....(١)

، $ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦} = ١٤$ $\therefore أر^{٣} + أر^{٤} + أر^{٥} = ١٤$ .....(٢)

obeikandl.com

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ١١٢ .....(١)

أ ر^{٣} (١ + ر + ر^{٢}) = ١٤ .....(٢)

∴ $\frac{\text{أ}(١ + ر + ر^{٢})}{\text{أ ر}^{٣}(١ + ر + ر^{٢})} = \frac{١١٢}{١٤}$ ∴ $\frac{١}{ر^{٣}} = \frac{٨}{١}$

∴ ٨ ر^{٣} = ١ ⇦ ر^{٣} = $\frac{١}{٨}$ ⇦ ر = $\frac{١}{٢}$

∴ أ [١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$] = ١١٢

$\frac{٧}{٤}$ أ = ١١٢ ∴ أ = $\frac{١١٢ \times ٤}{٧}$ = ٦٤

∴ المتتابعة هي: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....

مثال:

أوجد المتتابعة الهندسية إذا كان:

ح$_{١}$ + ح$_{٤}$ = ١٨ ، ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ١٢

الحـــــل

∵ ح$_{١}$ + ح$_{٤}$ = ١٨

أ + أ ر^{٣} = ١٨

أ (١ + ر^{٣}) = ١٨ ⇦ (١)

بقسمة (١) على (٢)

ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ١٢

أ ر + أ ر^{٢} = ١٢

أ ر (١ + ر) = ١٢ ⇦ (٢)

$\frac{\text{أ}(١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})}{\text{أ ر}(١ + ر)} = \frac{١٨}{٢}$

∴ $\frac{١ - ر + ر^{٢}}{ر} = \frac{٣}{١٢}$

٢ - ٢ر + ٢ر^{٢} - ٣ر = ٠

٢ ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠

(٢ر - ١) (ر - ١) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ٢

obeikandl.com

$ر = \frac{١}{٢}$

$أ (١ + ر^{٣}) = ١٨$

$أ (١ + \frac{١}{٨}) = ١٨$

$أ \times \frac{٩}{٨} = ١٨$

$أ = \frac{١٨ \times ٨}{٩}$

$أ = ١٦$

∴ المتتابعة هي: ١٦ ، ٨ ، ٤ ،...

$ر = ٢$

$أ (١ + ر^{٣}) = ١٨$

$أ (١ + ٨) = ١٨$

$أ٩ = ١٨$

$أ = ٢$

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٤ ، ٨ ،...

مثال:

متتابعة هندسية حدودها موجبة وفيها $ح_{١} + ح_{٣} = ٢٠$ ، $ح_{٣} + ح_{٥} = ٥ ح^{٢}$

أوجد المتتابعة.

الحـــــل

$أ + أر^{٢} = ٢٠$.

$أ (١ + ر^{٢}) = ٢٠$ .....(١)

$أر^{٢} + أر^{٤} = ٦ (أر)^{٢}$

$أر^{٢} (١ + ر^{٢}) = ٣٥ أ^{٢} ر^{٢}$

$(١ + ر^{٢}) = ٣٥ أ$ ← (٢)

بالقسمة $\frac{أ (١ + ر^{٢})}{(١ + ر^{٢})} = \frac{٢٠}{٣٥ أ}$

∴ $٣٥ أ^{٢} = ٢٠$ ∴ $أ^{٢} = ٤$ ∴ $أ = \pm ٢$

∴ $أ = ٢$ لأن الحدود موجبة.

∴ $١ + ر^{٢} = ٣٥ أ$

$١ + ر^{٢} = ١٠$ ∴ $ر^{٢} = ٩$

∴ $ر = ٣$

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....

obeikandl.com

تمارين (٢٩)

(١) أكتب الأعداد الناقصة لكل من المتتابعة الهندسية الآتية:

أ) (٦ ، ٩ ، ..... ، ..... ، .....) ب) ..... ، ..... ، $\frac{٦٤}{٨١}$ ، $\frac{١٦}{٢٧}$ ، .....)

ج) (٥ ، ..... ، ..... ، -٤٠ ، .....)

(٢) أي حد في المتتابعة (٢٥ ، -١٥ ، ٩ ، .....) يساوي $\frac{٧٢٩}{٦٢٥}$ [الجواب ح٧]

(٣) في المتتابعة (حن) = (٦ (٢)$^{ن-١}$)
أثبت أنها هندسية وأوجد حدها الثامن [الجواب ٧٦٨]

(٤) إذا كان حر من المتتابعة (٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ....) ثلاثة أمثال حر
من المتتابعة (٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ....) فأوجد قيمة ن [الجواب ٥]

(٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع حديها الثاني والثالث $\frac{١}{٢}$ ٤ وحدها الثالث يزيد
عن حدها الخامس بمقدار $\frac{١}{٨}$ ١ أوجد هذه المتتابعة. [الجواب: ٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....]

(٦) ما ترتيب أول حد أكبر من ١٠٠٠٠ في المتتابعة (١ ، ٢ ، ٤ ...) [الجواب: ح١٥]

(٧) مجموع ٣ أعداد تكون متتابعة هندسية ٩٣ والعدد الثالث يزيد على مجموع العددين الأول والثاني بمقدار ٥٧ فما هي الأعداد مع العلم بأنها موجبة.
[الجواب: ٣ ، ١٥ ، ٤٥]

(٨) ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية فإذا كان مجموعها يساوي ١٣ ومجموع مربعاتها يساوي ٩١ فأوجد هذه الأعداد [الجواب ١ ، ٣ ، ٩]

(٩) متتابعة هندسية أساسها = ٢ فيها حر = ٢ ، ح٢ن+١ = ١٢٨
أوجد المتتابعة. [الجواب: $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، .....]

(١٠) أوجد الحد السابع من النهاية في المتتابعة
(٣ ، ٩ ، ٩ ٣ ، ....، ٢١٨٧) [الجواب: ٨١]

(١١) في متتابعة هندسية إذا كان: حر-٥ ، حر-٥ = ن
أثبت أن حه = م ($\frac{ن}{م}$)$^{\frac{س}{١٠}}$

النوع الثالث من المسائل:

مسائل على الوسط الهندسي بين كميتين والعلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي

* الوسط الهندسي هـ بين عددين أ ، ب هو = $\pm\sqrt{أ ب}$ حيث أ ، ب موجبين معاً أو سالبين معاً.

* الوسط الهندسي للكميات أ ، ب ، جـ = $\sqrt[٣]{أ ب جـ}$

* عدد الأوساط الهندسية أقل من عدد الحدود بمقدار ٢

* المتتابعة: $(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، \frac{ل}{ر^{٢}} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

الوسط الأول = $ح_{١} = أ ر$

والوسط الثاني = $ح_{٢} = أ ر^{٢}$

والوسط الأخير = $\frac{ل}{ر}$ ، الحد الذي قبل الأخير = $\frac{ل}{ر^{٢}}$

نظرية: الوسط الحسابي لعددين موجبين ومختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

البرهان

نفرض العددين أ ، ب ∴ الوسط الحسابي ع = $\frac{أ + ب}{٢}$

والوسط الهندسي هـ = $\pm\sqrt{أ ب}$

∴ ع - هـ = $\frac{أ + ب}{٢} \pm \sqrt{أ ب}$

$= \frac{أ + ب \pm ٢\sqrt{أ ب}}{٢} = \frac{(\sqrt{أ} \pm \sqrt{ب})^{٢}}{٢} >$ صفر

∴ ع > هـ

مثال:

إذا كان الوسط الهندسي لكميتين موجبتين = ٦ وضعف وسطهما العددي = ٢٠ فما العددان؟

obeikandl.com

الحـــــــل

نفرض العددين هما س ، ص

∴ س ص = ٦ ⇦ س ص = ٣٦ ..... (١)

، $\frac{(\text{س} + \text{ص})^{٢}}{٢}$ = ٢٠ ∴ س + ص = ٢٠ ⇦ (٢)

مـــن (٢) ∴ ص = (٢٠ - س)

نعوض في (١) ∴ س (٢٠ - س) = ٣٦

∴ ٢٠س - س^{٢} = ٣٦ ⇦ س^{٢} - ٢٠س + ٣٦ = ٥

∴ (س - ١٨) (س - ٢) = ٠

∴ س = ١٨ ، س = ٢

∴ عندما س = ١٨ ⇦ س = ٢

، عندما س = ٢ ⇦ ص = ١٨

مثال:

عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ١٠ ووسطهما الهندسي ٨ فما العددان؟

الحـــــــل

نفرض العددين هما أ ، ب (العددان موجبان)

∵ الوسط الحسابي لهما = ١٠

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$ = ١٠ ∴ أ + ب = ٢٠

∴ أ = ٢٠ - ب ⇦ (١)

، ∵ الوسط الهندسي لهما = ٨ ∴ أ ب = ٨ بتربيع الطرفين

∴ أ ب = ٦٤ ⇦ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ∴ (٢٠ - ب) × ب = ٦٤

∴ ب^{٢} - ٢٠ب + ٦٤ = ٠ ∴ (ب - ٤) (ب - ١٦) = ٠

∵ ب = ٤ أو ب = ١٦

من (١) من (١)

أ = ١٦ ∴ أ = ٤

∴ العددان هما ٤ ، ١٦

obeikandl.com

مثال:

إذا كانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين: مجموع الوسطين الأخيرين = ١ : ٨ ، فكم عدد الأوساط بين العددين ٩ ، ٥٧٦؟

الحـــــــل

نفرض أن أساس المتتابعة = ر ، أ = ٩

∴ الوسطين الأولين هما ٩ر ، ٩ر^{٢}

، الوسطين الأخرين هما $\frac{٥٧٦}{ر}$ ، $\frac{٥٧٦}{ر^{٢}}$

مجموع الوسطين الأولين ٩ ر + ٩ ر^{٢} = ٩ ر (١ + ر)

مجموع الوسطين الآخرين $\frac{٥٧٦}{ر} + \frac{٥٧٦}{ر^{٢}} = \frac{٥٧٦}{ر^{٢}}$ (١ + ر)

∴ $\frac{٩ ر \quad (١ + ر)}{\frac{٥٧٦}{ر^{٢}} \quad (١ + ر)} = \frac{١}{٨}$ ∴ $\frac{٩ر \times ر^{٢}}{٥٧٦} = \frac{١}{٨}$

$\frac{٩ر^{٣}}{٧٦^{٥}} = \frac{٥٧٦}{٨}$ ∴ ٧٣ ر^{٣} = ٥٧٦ ∴ ر^{٣} = ٨ ∴ ر = ٢

، عدد الأوساط ن ∴ عدد الحدود = ن + ٢

∴ ٥٧٦ هو الحد الأخير الذي رتبته هي ن + ٢

∴ ح$_{ن+٢}$ = ٥٧٦

∴ أ ر$^{ن+٢-١}$ = ٥٧٦

٩ (٢$^{ن+١}$) = ٥٧٦

∴ ٩ (٢$^{ن+١}$) = $\frac{٥٧٦}{٩}$ ⇦ ٢$^{ن+١}$ = ٦٤

∴ ٢$^{ن+١}$ = ٢ ∴ ن + ١ = ٦

∴ ن = ٦ - ١ = ٥

obeikandl.com

مثال:

إذا كان لو ص وسط حسابي بين لو س ، لو ع

فإثبت أن ص وسط هندسي بين س ، ع

الحـــــــل

$\therefore$ لو ص = $\frac{\text{لو س + لو ع}}{٢}$

$\therefore$ ٢لو ص^{٢} = لو س + لو ع

$\therefore$ لو ص^{٢} = لو س ص $\quad\quad$ $\therefore$ ص^{٢} = س ص

$\therefore$ ص = $\pm\sqrt{\text{س ص}}$

$\therefore$ ص وسط هندسي بين س ، ع

مثال:

إذا أضفنا إلى أربعة أعداد تكون متتابعة هندسية الأعداد ٤ ، ٢١ ، ٢٩ ، ١ على الترتيب نحصل على أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية. أوجد المتتابعة الهندسية.

الحـــــــل

نفرض أن الأعداد هي: أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣}

، الأعداد بعد الإضافة تكون متتابعة حسابية

(أ + ٤) ، (أ ر + ٢١) ، (أ ر^{٢} + ٢٩) ، (أ ر^{٣} + ١)

$\therefore$ المقدار (أ ر + ٢١) وسط حسابي

$\therefore$ ٢ (أ ر + ٢١) = (أ + ٤) + (أ ر^{٢} + ٢٩)

أ ر^{٢} - ٢أ ر + أ = ٩ $\quad\quad$ $\therefore$ أ (ر^{٢} - ٢ر + ١) = ٩

$\therefore$ أ (ر - ١)^{٢} = ٩ .....(١)

كذلك المقدار (أ ر^{٢} + ٢٩) وسط حسابي

$\therefore$ ٢ (أ ر^{٢} + ٢٩) = (أ ر + ٢١) + (أ ر^{٣} + ١)

أ ر^{٣} - ٢أ ر^{٢} + أ ر = ٣٦

$\therefore$ أ ر(ر^{٢} - ٢ر + ١) = ٣٦ $\quad\quad$ $\therefore$ أ ر(ر - ١)^{٢} = ٣٦ .....(٢)

بقسمة (٢) على (١)

$$\frac{\text{أ ر (ر - ١)}^{٢}}{\text{أ (ر - ١)}^{٢}} = \frac{٣٦}{٩}$$

obeikandl.com

∴ ر = ٤ بالتعويض عن ر في (١) ∴ أ = ١

∴ الأعداد هي (١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤)

النوع الرابع من المسائل:

ادخال عدة أوساط هندسية بين عددين

* إذا كان أ الحد الأول ، ل الحد الأخير

يمكن كتابة الأوساط بين أ ، ل

(أ) أ ر ، أ ر^{٢} ، ..... ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، $\frac{ل}{ر}$ (ل)

أوساط هندسية

الوسط الأول = أ ر = ح$_{٢}$

الوسط الثاني = أ ر^{٢} = ح$_{٣}$

الوسط الأخير $\frac{ل}{ر}$

ملاحظة: * عدد الحدود = ٢ + الأوساط

* لايجاد (ر) نستخدم ل = أ ر$^{ن-١}$

مثال: أدخل ستة أوساط هندسية بين ٢ ، ٢٥٦

الحـــــل

(٢) | أوساط هندسية | (٢٥٦)

أ = ٢ ، ل = ٢٥٦ ، ن = ٦ + ٢ = ٨

∴ ل = أ ر$^{ن-١}$

٢٥٦ = ٢ × (ر)$^{٨-١}$ ∴ ر^{٧} = ١٢٨

∴ ر^{٧} = (٢)^{٧} ∴ ر = ٢

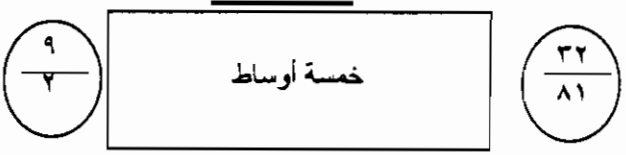
∴ الأوساط هي: ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....، ١٢٨

obeikandl.com

مثال:

أدخل ٥ أوساط هندسية بين $\frac{٣٢}{٨١}$ ، $\frac{٩}{٢}$

الحـــــــل



$$أ = \frac{٣٢}{٨١} \quad ، \quad ل = \frac{٩}{٢} \quad ، \quad ن = ٧$$

$$\therefore ل = أ ر^{ن-١} =$$

$$\therefore \frac{٩}{٢} = \frac{٣٢}{٨١} \times (ر)^{٦}$$

$$\therefore ر^{٦} = \frac{٩}{٢} \times \frac{٨١}{٦٤} = \frac{٧٢٩}{٦٤} \quad \therefore ر = \pm \frac{٣}{٢}$$

عند ر = $\frac{٣}{٢}$ عند ر = $\frac{-٣}{٢}$

الأوساط هي الأوساط هي:

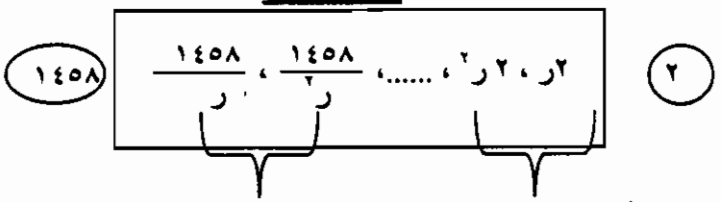
$\frac{١٦}{٢٧}$ ، $\frac{٨}{٩}$ ..... ، ٣ $-\frac{١٦}{٢٧}$ ، $\frac{-٨}{٩}$ ..... ، -٣

مثال:

إذا دخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخرين هي ١ : ٢٧ أوجد عدد الأوساط.

obeikandl.com

الحـــــــل



$$\frac{\text{٢ر} + \text{٢ر}^{٢}}{\frac{١٤٥٨}{ر} + \frac{١٤٥٨}{ر}} = \frac{١}{٢٧}$$

$$\therefore \frac{\text{٢ر}(١ + ر)}{\frac{١٤٥٨ر + ١٤٥٨}{ر}} = \frac{١}{٢٧}$$

$$\therefore \frac{\text{٢ر}^{٣}(١ + ر)}{١٤٥٨(١ + ر)} = \frac{١}{٢٧}$$

$$\therefore \frac{ر^{٣}}{٧٢٩} = \frac{١}{٢٧}$$

∴ ٢٧ر^{٣} = ٧٢٩ ⇐ ر^{٣} = ٢٧ ⇐ ر = ٣

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....، ١٤٥٨

∵ ل = أ ر$^{ن-١}$

١٤٥٨ = ٢ × (٣)$^{ن-١}$

∴ (٣)$^{ن-١}$ = ٧٢٩ ∴ (٣)$^{ن-١}$ = ٣^{٦}

∴ ن - ١ = ٦ ∴ ن = ٧

∴ عدد الأوساط = ٥

obeikandl.com

تمرين (٣٠)

(١) إذا كانت: أ + ١ ، أ + ٦ ، أ + ١٦ في تتابع هندسي فأوجد قيمة أ

[الجواب ٤]

(٢) إذا كانت: أ + ب ، ٢أ + ٥ب ، ٤أ + ١٩ب في تتابع هندسي

فأثبت أن: ٥أ - ٣ب ، ٥أ + ٤ب ، ٥أ + ١٨ب في تتابع هندسي

(٣) أدخل ٤ أوساط هندسية بين ٢٧ ، $\frac{١}{٩}$ [الجواب: ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$]

(٤) الوسط الهندسي بين عددين أكبر من أحدهما بمقدار ٨

وأصغر من الآخر بمقدار ٢٤ فما هما العددان؟ [الجواب: ٤ ، ٣٦]

(٥) إذا كان ثلاثة أمثال الوسط الحسابي بين عددين يساوي خمسة أمثال وسطهما الهندسي.

فأثبت أن أحد العددين تسعة أمثال الآخر.

(٦) إذا كان الفرق بين عددين ٤٨ ووسطهما الحسابي يزيد على وسطهما الهندسي بمقدار ١٨ فما هما العددان؟ [الجواب: ١ ، ٤٩]

(٧) إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع = -١٥٦ ومجموع الوسطين الثاني والثالث = ٣٦ فما هما العددان؟ الجواب: ٤٨٦ ، -٢]

(٨) إذا كانت ع هي الوسط الحسابي بين أ ، ب وكانت هـ الوسط الهندسي بينهما

فأثبت أن: $أ^٢ + ب^٢ = ٨ع^٢ - ٦هـ^٢$ ع

(٩) إذا كانت: أ ، ب كميتين موجبتين فأثبت أن:

أولاً: $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} > ٢$ ثانياً: $١ + أب > ٢ أب$

(١٠) إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، ء أربع كميات موجبة في تتابع هندسي فأثبت أن:

أولاً: (أ + جـ) (ب + ء) > ٤ب جـ ثانياً: ٢أ + ء > ٣ب

(١١) إذا كانت: ٣أ ، ٣ب - أ ، ٢ب ثلاث كميات موجبة في تتابع حسابي فأثبت أن: $أ^٢ + ٩ب^٢ > ١٢أب$

(١٢) إذا كانت س ، ص ، ع في تتابع حسابي وكان س ، ص - س ، ع - س في تتابع هندسي فأثبت أن: ٣ع = ٥ص = ١٥س

النوع الخامس من المسائل:

مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية

* إذا كانت المتتابعة الهندسية هي (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، .....)

١] مجموع المتتابعة الهندسية بمعلومية حدها الأول والأساس هو:

(أ) جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ عندما ر > ١

(ب) جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (١ - ر^{ن})}{ر - ١}$ عندما ر < ١

٢] مجموع المتتابعة الهندسية بمعلومية حدها الأول وحدها الأخير هو:

(أ) جـ$_{ن}$ = $\frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ عندما ر > ١

(ب) جـ$_{ن}$ = $\frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ عندما ر < ١

مثال:

أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية ٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ....

الحـــــــل

أ = ٧ ، ر = $\frac{١٤}{٧}$ = ٢ ، ن = ١٠

∴ جـ$_{ن}$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

∴ جـ$_{١٠}$ = $\frac{٧ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١}$ = ٧١٦١

مثال:

كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٢٠٤٦

obeikandl.com

الحـــــــل

أ = ٧ ، ر = ٢

∵ جـن = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $\frac{٢ (٢^{ن} - ١)}{٢ - ١}$ = ٢٠٤٦

∴ $٢^{ن}$ - ١ = ١٠٢٣ ∴ $٢^{ن}$ = ١٠٢٤ = $٢^{١٠}$ ∴ ن = ١٠

مثال:

م.هـ حدودها موجبة، ح٢ = ٦ ، ح٣ - ح١ = ٩ أوجد جـ١٢ الأولى.

الحـــــــل

ح٢ = ٦ ∴ أ ر = ٦ ⇦ (١)

ح٣ - ح١ = ٩ ∴ أ$ر^{٢}$ - أ = ٩ ⇦ أ (ر٢ - ١) = ٩ ⇦ (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{أ ر}{أ (ر^{٢} - ١)}$ = $\frac{٦}{٩}$ ∴ $\frac{ر}{ر^{٢} - ١}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ ٢$ر^{٢}$ - ٢ = ٣ر ∴ ٢$ر^{٢}$ - ٣ر + ٢ = ٠

(ر - ٢) (٢ر + ١) = ٠ ∴ ر = ٢ أو ر = - $\frac{١}{٢}$ مرفوض

لأن الحدود موجبة ∴ ر = ٢

نفرض في (١) ∴ أ = ٣

جـ١٢ الأولى = $\frac{أ (ر^{١٢} - ١)}{ر - ١}$ = $\frac{٣ ((٢)^{١٢} - ١)}{٢ - ١}$ = ١٢٢٨٥

مثال: م.هـ فيها ح٢ = ٥ ، $\frac{ح_{٧}}{ح_{٤}}$ = $\frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة

الحـــــــل

∵ ح٢ = ٥ ⇦ أ ر = ٥ ⇦ $ر^{٣}$ = $\frac{ح_{٧}}{ح_{٤}}$

obeikandl.com

$\frac{ح_٧}{ح_٤} = \frac{١}{٢٧}$ ، $\frac{أ ر^٦}{أ ر^٣} = \frac{١}{٢٧}$ ⇦ $\therefore ر^٣ = \frac{١}{٢٧}$

$\therefore ر = \frac{١}{٣}$ نعوض في (١) بقيمة ر

$\therefore \frac{١}{٣} أ = ٥$ $\therefore أ = ١٥$

$\therefore$ المتتابعة هي ١٥ ، ٥ ، $\frac{٥}{٣}$ ، .....

مثال:

اثبت أن الفرق بين مجموع الحدود العشرين الأولى في المتتابعة الهندسية ٧ ، ٢,١ ، ٠,٦٣ ، ..... والعدد (١٠) أقل من نصف قيمة الحد العشرين.

الحـــــــل

$ح_١ = ٧$ ، $ر = \frac{٢,١}{٧} = ٠,٣$

$جـ_{٢٠} = \frac{أ (١ - ر^{ن})}{١ - ر} = \frac{٧ (١ - (٠,٣)^{٢٠})}{١ - ٠,٣} = \frac{٧ [١ - (٠,٣)^{٢٠}]}{٠,٧}$

$جـ_{٢٠} = ١٠ - ١٥ (٠,٣)^{١٩}$

المطلوب أثبات أن $جـ_{٢٠} - ١٠ < \frac{١}{٢} ج_{٢٠}$

$١٠ - ١٥ (٠,٣)^{٢٠} < \frac{١}{٢} \times ٧ (٠,٣)^{١٩}$

$\therefore -١٠ \times ٠,٣ \times (٠,٣)^{١٩} < \frac{٧}{٢} (٠,٣)^{١٩}$ $\therefore -٣ < ٣,٥$

مثال:

متتابعة هندسية حدودها موجبة والنسبة بين مجموع التسعة حدود الأولى منها إلى مجموع الستة حدود الأولى يساوي ٧٣ : ٩ أوجد أساس المتتابعة وإذا كان الوسط الحسابي بين الحدين الثالث والخامس يزيد عن وسطهما الهندسي بمقدار ٤ أوجد المتتابعة

obeikandl.com

الحـــــــل

$$\frac{جـ_٥}{جـ_٦} = \frac{٧٣}{٩} \quad \Leftarrow \quad \frac{أ(ر^{٦} - ١)}{أ(ر^{٣} - ١)} = \frac{٧٣}{٩}$$

$$\frac{(ر^{٣} - ١)(ر^{٦} + ر^{٣} + ١)}{(ر - ١)(ر^{٣} + ١)} = \frac{٧٣}{٩}$$

$$\therefore ٩ر^{٦} - ٦٤ر^{٣} - ٦٤ = ٠ \qquad \therefore (ر^{٣} - ٨)(٩ر^{٣} + ٨) = ٠$$

$$ر^{٣} = ٨ \qquad \therefore ر = ٢$$

$$، \frac{(ح_{٣} + ح_{٥})}{٢} - ح_{٣} ح_{٥} = ٤$$

$$\frac{أ ر^{٢}}{٢}(ار^{٢} + ار^{٤}) - ار^{٢} \times ار^{٤} = ٤$$

$$\frac{أ ر^{٢}}{٢}(١ + ر^{٢}) - (أ ر^{٣}) = ٤ \quad \Leftarrow \quad (١)$$

بوضع ر = ٢ في (١)

$$\therefore ١٠أ - ٨أ = ٤ \quad \Leftarrow \quad أ = ٢$$

∴ المتتابعة الهندسية هي: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....)

مثال:

متتابعة هندسية مجموع ١٨ حداً الأولى منها يزيد على مجموع الحدود العشرة الأولى بمقدار س ومجموع الحدود السبعة الأولى مضافاً إليه يساوي مجموع عشر حداً الأولى...أوجد الأساس.

الحـــــــل

جـ١٨ - ج١٠ = س

$$\frac{أ(ر^{١٨} - ١)}{ر - ١} = \frac{أ(ر^{١٠} - ١)}{ر - ١} = س$$

$$\frac{أ}{(ر - ١)}(ر^{١٨} - ١ - ر^{١٠} + ١) = س$$

$$\frac{أ ر^{١٠}(س^{٨} - ١)}{(ر - ١)} = س \quad \Leftarrow \quad (١)$$

obeikandl.com

جـ٣ + ص = جـ١٥

جـ٣ - جـ١٥ = - ص

$$\frac{أ(ر^{١٥} - ١)}{ر - ١} = \frac{أ(ر^{٧} - ١)}{ر - ١} = ص$$

$$\frac{١}{ر - ١} (ر^{١٥} - ١ - ر^{٧} + ١) = ص$$

$$ص = \frac{أ ر^{٧} (ر^{٨} - ١)}{(ر - ١)} \quad \Leftarrow \quad (٢)$$

بقسمة (١) على (٢) $\frac{أ ر^{١٠} (ر^{٨} - ١)}{(ر - ١)} \times \frac{(ر - ١)}{أ ر^{٧} (ر^{٨} - ١)} = \frac{س}{ص}$

$$\therefore ر^{٣} = \frac{س}{ص}$$

$$\therefore ر = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$$

تمرين (٣١)

(١) أوجد مجموع المتتابعة الهندسية (س$^{ن-١}$ ، أ س$^{ن-٢}$ ، أ^{٢} س$^{ن-٣}$ ، ..إلى ن حداً)

الجواب [$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$]

(٢) إذا كانت جـ$_{ر}$ = ١ - ٤ + ١٦ - .....إلى ٢ن من الحدود

فأثبت أن ١ - ٥ جـ$_{ر}$ = ١٦٠هـ

(٣) متتابعة هندسية أساسها $\frac{٢}{٣}$ وحدها الأخير $\frac{١٦}{٩}$ ومجموعها $\frac{٢١١}{٩}$ أوجد المتتابعة.

[الجواب ٩ ، ٦ ، ٤ ، .....]

obeikandl.com

(٤) متتابعة حدها النوني = $\frac{٣}{٤}$ (٢)$^{ن+١}$ فما نوعه وما هو مجموع الخمسة حدود الأولى منها. وكم حداً يلزم أخذه منها إبتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٥٣٣

٥) أوجد أصغر عدد من حدود المتتابعة (١ ، ٣ ، ٣^{٢} ، .....) يلزم أخذه ليكون المجموع أكبر من ١٠٠٠٠ [الجواب ١٠]

٦) أوجد أكبر عدد من حدود المتتابعة (١٠٠ ، ٥٠ ، ٢٥ ، .....) يلزم أخذه ليكون المجموع أصغر من ١٩٨ [الجواب ٦]

٧) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ومجموع الحدود الأثنى عشر الأولى منها يساوي ٢٧٣ مرة قدر مجموع الأربعة الحدود الأولى منها.

فما أساس هذه المتتابعة؟ وإذا كان الحد الخامس من هذه المتتابعة يساوي ٢٠٠ فما هو الحد الأول.

٨) إذا كان مجموع ن حداً الأولى من من متتابعة هندسية يعطي بالقانون جـن = ٤(٣^{ن} - ١) فأوجد الأربعة حدود الأولى. وأوجد كذلك حدها السابع.

[الجواب: ٨ : ٢٤ ، ٧٢ ، ٢١٦ ، ح٧

٩) متتابعة هندسية حدها النوني = ٢($\frac{١}{٥}$)$^{ن-١}$ أوجد رتبة الحد الذي نبدأ به حتى يكون مجموع ٨ حدود متتالية كمها مساوياً ١٧٧٧١٢٠

[الجواب ح٤]

١٠) صهريج ماء سعته ٦٣٠٥ لتراً كان فراغاً ملئ على عدة أيام فإذا كان ما صب فيه في اليوم الأول ١٢٨ لتراً وكان ما صب فيه في كل يوم من الأيام التالية يساوي مرة قدر ما صب فيه ف اليوم السابق مبشرة فاحسب بعدكم يوم املأ

[الجواب: ٨]

النوع السادس من المسائل:

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية

- $مجـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\text{الحد الأول}}{١ - \text{الأساس}}$

بشرط $|ر| = < ١$

مثال: (ح$_ن$) متتابعة هندسية فيها $ح_{٤} = ١$ ، $ح_{٩} = \frac{١}{٢٤٣}$

أوجد المتتابعة، مجموع حدودها إلى ∞

الحـــــــل

$ح_{٤} = ١$ $\therefore أ ر^{٣} = ١$ ⇦ (١)

$ح_{٩} = \frac{١}{٢٤٣}$ $\therefore أ ر^{٣} = \frac{١}{٢٤٣}$ ⇦ (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\therefore \frac{١}{٢٤٣} = ١ \times \frac{٢٤٣}{١}$ $\therefore \frac{١}{ر^{٥}} = ٢٤٣$

$ر^{٥} = \frac{١}{٢٤٣}$ $\therefore ر^{٥} = (\frac{١}{٣})^{٥}$ $\therefore ر = \frac{١}{٣}$

نفرض في (١) $\therefore أ \times \frac{١}{٢٧} = ١$ $\therefore أ = ٢٧$

$\therefore$ المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .....)

$مجـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٢٧ \times ٣}{٢٠} = \frac{٨١}{٢}$

مثال:

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع حدودها ١٢ ومجموع مكعبات حدودها إلى ما لا نهاية يساوي $\frac{٦}{٧}$ ٢٤٦ أوجد المتتابعة.

obeikandl.com

الحـــــــل

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{\text{١ - ر}} = ١٢ \quad \Leftarrow \quad (١)$$

$$\text{أ}^{٣} + \text{أ}^{٣}\text{ر}^{٣} + \text{أ}^{٣}\text{ر}^{٦} + \ldots\ldots\ldots + \infty$$

$$\therefore \frac{\text{أ}^{٣}}{\text{١ - ر}^{٣}} = \frac{١٧٢٨}{٦} \quad \Leftarrow \quad (٢)$$

بتكعيب (١) ينتج $\frac{\text{أ}^{٣}}{\text{(١ - ر)}^{٣}} = ١٧٢٨$ $\Leftarrow$ (٣)

بقسمة (٣) على (٢) $\frac{\text{أ}^{٣} - \text{ر}^{٣}}{\text{(١ - ر)}^{٣}} = \frac{٧ \times ١٧٢٨}{١٧٢٨}$

$$\therefore \frac{\text{(١ - ر) (١ + ر + ر}^{٢})}{\text{(١ - ر)}^{٣}} = ٧$$

$$٧ - ١٤\text{ر} + ٧\text{ر}^{٢} = ١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢}$$

$$٢\text{ر}^{٢} - ٥\text{ر} + ٢ = ٠ \qquad \therefore (٢\text{ر} - ١)(\text{ر} - ٢) = ٠$$

$\text{ر} = \frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١) $\text{أ} = ٦$

$\therefore$ المتتابعة هي $(٦ ، ٣ ، \frac{٣}{٢})$

مثال:

م.هـ حدودها موجبة أي حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞. وإذا كان حدها الثاني يساوي ٢٧ أوجد المتتابعة.

الحـــــــل

نفرض المتتابعة أ ، أر ، $\text{أر}^{٢}$ ، .....

$$\therefore \text{أ} = ٢ \times \frac{\text{أر}}{\text{١ - ر}}$$

obeikandl.com

$\therefore$ ١ = $\frac{٢ر}{١ - ر}$ $\quad\quad$ $\therefore$ ٢ر = ١ - ر

٣ر = ١ $\quad\quad$ $\therefore$ ر = $\frac{١}{٣}$

$\because$ ح$_٢$ = ٢٧ $\quad\quad$ $\therefore$ أ ر = ٢٧ $\quad\quad$ $\therefore$ أ × $\frac{١}{٣}$ = ٢٧

$\therefore$ أ = ٨١

$\therefore$ المتتابعة هي ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....

مثال:

م.هـ فيها ح$_٢$ = ٥ ، $\frac{ح_٧}{ح_٤}$ = $\frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة ثم أثبت أنه يمكن جمع عدد لا نهائي من الحدود وما هو هذا المجموع.

الحـــــــل

$\because$ ح$_٢$ = ٥ $\quad\quad$ $\therefore$ أ ر = ٥ $\quad\quad$ ⇦ (١)

، $\because$ $\frac{ح_٧}{ح_٤}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\quad\quad$ $\therefore$ $\frac{أ ر^٦}{أ ر^٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\quad\quad$ $\therefore$ ر^٣ = $\frac{١}{٢٧}$

$\therefore$ ر = $\frac{١}{٣}$ $\quad\quad$ بالتعويض في (١)

$\therefore$ أ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\quad\quad$ $\therefore$ أ = ١٥

ثانياً: $\because$ ر < ١ $\quad\quad$ $\therefore$ يمكن جمع المتتابعة إلى ∞

$$\text{جـ}_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١}{\frac{١}{٣} - ١} = \frac{١٥}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢,٥$$

مثال:

أثبت أن (ح ن) حيث ح$_ن$ = ٥ح$_{ن-١}$ + ١ هي متتابعة هندسية وأنه يمكن جمع عدد غير منته من الحدود منها وإذا كان ح$_١$ = ٥٠ أوجد جـ$_\infty$

obeikandl.com

الحـــــــل

$ح_{ن} = ٥ح_{ن-١} + ١$ ∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{١}{٥}$ ∴ $(ح_{ن})$ هندسية

، ∴ $ر = \frac{١}{٥}$ ∴ $|ر| < ١$ ∴ يمكن الجمع إلى ∞

∴ $جـ_{∞} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥٠}{١ - \frac{١}{٥}} = ٥٠ \times \frac{١}{٥} = \frac{٢٥٠}{٤}$

مثال:

متتابعة هندسية النسبة بين مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها إلى مجموع المتتابعة إلى مالا نهاية = $\frac{٢٦}{٢٧}$ وحدها الرابع = ٩ أوجد المتتابعة - كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليكون الفرق بين مجموع هذه الحدود إلى مالا نهاية أقل ٠,٠٠١

الحـــــــل

مجموع الثلاثة حدود الأولى = $أ + أر + أر^{٢}$.

∴ $جـ_{٣} = أ(١ + ر + ر^{٢})$ ⇦ (١)

ومجموع المتتابعة إلى ما لانهاية $جـ_{∞} = \frac{أ}{١ - ر}$ ⇦ (٢)

بقسمة (١) على (٢) $\frac{جـ_{٣}}{جـ_{∞}} = \frac{أ(أ + ر + ر^{٢})(١ - ر)}{أ}$

∴ $\frac{٢٦}{٢٧} = ١ - ر^{٣}$ ∴ $ر^{٣} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $ر = \frac{١}{٣}$

، ∴ المتتابعة هي (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، .....)

obeikandl.com

$$\text{جـ}_{\infty} - \text{جـ} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ر}} - \frac{\text{أ} - \text{أ ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} = \frac{\text{أ} - \text{أ} + \text{أ ر}^{\text{ن}}}{(1-\text{ر})}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} < ٠,٠٠١ = ٠,٠٠١ > \frac{\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{ن}}}{١ - \frac{١}{٣}} \quad ٢٤٣$$

$$= \frac{٣^{٥} \times ٣^{\text{ن}} \times ٣}{٢} > \frac{١-}{٣^{\text{ن}-٦}} = ٠,٠٠١ > \frac{١}{٥٠٠}$$

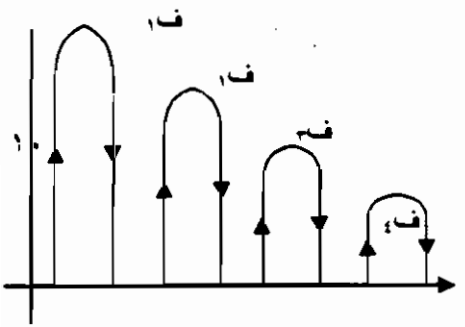
$$\therefore ٣^{\text{ن}-٦} > ٥٠٠ \quad \therefore \text{ن} - ٦ > ٥ \quad \therefore \text{ن} > ١١ \quad \therefore \text{ن} = ١٢$$

النوع السابع من المسائل:

المسائل اللفظية

مثال: كرة إذا سقطت من ارتفاع معين من سطح الأرض فإنها ترتد عند اصطدامها بالأرض إلى $\frac{٤}{٥}$ الارتفاع الذي سقطت منه فإذا سقطت هذه الكرة من ارتفاع ١٠ أقدام من سطح الأرض فأوجد مجموع المسافات التي تقطعها قبل أن تسكن.

الحـــــــل



$$\text{ف} = ١٢$$

$$\text{ف}_{١} = ١٠ \times \frac{٤}{٥} = ٨$$

$$\text{ف}_{٢} = ١٠ \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}$$

$$= ١٠ \times \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٣٢}{٥}$$

obeikandl.com

∴ ف = ف (الأصلية) + ٢ف١ + ٢ف٢ + ٢ف٣ + ... ∞

$$= ١٠ + ٢[١٠ \times \frac{٤}{٥} + ١٠ \times (\frac{٤}{٥})^{٢} + ١٠ (\frac{٤}{٥})^{٣} + ... \infty$$

$$= ١٠ + ٢ \times ١٠ \times \frac{٤}{٥} [١ + \frac{٤}{٥} + (\frac{٤}{٥})^{٢} + (\frac{٤}{٥})^{٣} + ... \infty$$

$$= ١٠ + ٢ \times ١٠ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{أ}{١ - ر}$$

$$= ١٠ + ١٦ \times \frac{أ}{١ - \frac{٤}{٥}} = ١٠ + ١٦ \times \frac{١}{\frac{١}{٥}}$$

$$= ١٠ + ١٦ \times ٥$$

$$= ١٠ + ٨٠ = ٩٠$$

مثال:

تعهد رجل أن يدفع أقساطاً سنوية وفقاً للنظام الآتي:

يدفع في السنة الأولى ١٥٠ جنيهاً، وفي كل سنة تالية يقل القسط بمقدار $\frac{١}{١٠}$ القسط السابق له مباشرة - أثبت أنه مهما طالت المدة فإن الرجل لن يدفع أكثر من ١٥٠٠ جنيه.

الحـــــــل

∵ متتابعة الأقساط هي: ١٥٠ ، ١٥٠ (٠,٩) ، ١٥٠ (٠,٩)^{٢} ، .....

$$\therefore \text{جـ}_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٥٠}{١ - ٠,٩} = ١٥٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال:

منجم للذهب ينتج في العام ٤٠٠٠ كجم ثم يتناقص الإنتاج بعد ذلك بنسبة ٢٠٪ من أنتاج السنة السابقة.

أوجد مجموع ما ينتجه المنجم في عشر سنوات وما هو أقصى أنتاج للمنجم.

الحـــــــل

∵ أ = ٤٠٠٠ ، ر = ٠,٨

obeikandi.com

∴ م.هـ هي : ٤٠٠٠ ، ٤٠٠٠ (٠,٨)^{١} ، ٤٠٠٠ (٠,٨)^{٢} + ...

∴ انتاج المنجم بعد عشر سنوات هو.

ح$_{١٠}$ = أ ر^{٩}

= ٤٠٠٠ × (٠,٨)^{٩} = ٥٣٧ كجم.

، جملة الأنتاج بعد ١٠ سنوات

$$\text{جـ}_{١٠} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}} = \frac{٤٠٠٠ (١ - (٠,٨)^{١٠})}{١ - ٠,٨} = ١٧٨٥٢$$

، أقصى أنتاج للمنجم يعني جـ$_{\infty}$

$$\therefore \text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = \frac{٤٠٠٠}{١ - ٠,٨} = \frac{٤٠٠٠٠}{٢} = ٢٠٠٠٠ \text{ كجم.}$$

النوع الثامن من المسائل:

الكسر العشري الدائري

٠,٣ = ٠,٣٣٣٣٠٠٠٠٠

= ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + ... إلى ∞

= مجموع متتابعة هندسية حيث أ = ٠,٣ ، ر = ٠,١

، ٠,٢٢ = ٠,٢٢٢٢٢٠٠٠٠٠

= ٠,٢ + ٠,٠٢ + ٠,٠٠٢ + ... إلى ∞

= ٠,٢ + مجموع متتابعة هندسية لا نهاية.

حيث أ = ٠,٠٢ ، ر = ٠,١

، ٠,١٢٤ = ٠,٠١٢٤١٢٤١٢٤٠٠٠٠

= ٠,١٢٤ + ٠,٠٠٠١٢٤ + ٠,٠٠٠٠٠١٢٤ + ... ∞

= مجموع متتابعة هندسية لا نهائية

حيث أ = ٠,١٢٤ ، ر = ٠,٠٠١

ومجموع المتتابعة هو صورة الكسر الاعتيادي المناظر للكسر العشري الدائري

مثال:

ضع كلا مما يأتي على صورة كسر إعتيادي (ضع كلا مما يأتي على صورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$)

٠,٣ ، ٠,٢٤ ، ٣,٤١٢

obeikandi.com

الحـــــــل

$$٠,٣ = ٠,٣٣٣٣ \qquad = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠٠} + \ldots$$

$$= \frac{٣}{١٠}\left[١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + \ldots\ldots + \infty\right]$$

$$= \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$٠,٢٤ = ٠,٢٤٢٤٢٤ \ldots$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠٠٠} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠}\left[١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + \ldots\ldots + \infty\right]$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٣٨}{٣٣}$$

$$٣,٤١٢ = ٣,٤١٢١٢١٢١٢ \ldots \qquad = ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} + \frac{١٢}{١٠٠٠٠٠} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠}\left[١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + \ldots\ldots + \infty\right]$$

$$= ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} \times \frac{أ}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩}$$

$$= ٣,٤ \times \frac{٤}{٣٣٠} = \frac{٤}{٣٣٠} \times \frac{٣٤}{١٠} = \frac{١٣٦}{٣٣٠٠}$$

obeikandl.com

تمرين (٣٢)

١) بين أي المتتابعات الآتية يمكن جمعها إلى ∞ من الحدود مع بيان السبب:

أ) (حن) = (٥×٣ $^{ن-١}$) ب) (حن) = (٢×٣ $^{-ن+١}$)

ج) (حن) = (٢٠ -٤ن) د) ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{١٦}$ ، $\frac{٩}{٣٢}$ ، .....)

٢) ضع كل من الكسور العشرية الدائرة الآتية في صورة كسر اعتيادي:

أ) ٠,٧٤ ب) ٠,١٢٦ جـ) ٠,٢٠٩

[الجواب: $\frac{٧٤}{٩٩}$ ، $\frac{١٤}{١١١}$ ، $\frac{٢٣}{١١٠}$]

٣) اثبت أن $\sqrt[٣]{٠,٠٣٧}$ = ٠,٣

٤) مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية يساوي ١٨ ومجموع مربعات حدودها يساوي ١٦٢ أوجد المتتابعة؟ [الجواب: ١٢ ، ٤ ، $\frac{٤}{٣}$ ، .....]

٥) إذا كانت س = أ + أر + أر^{٢} +.....∞

، ص = أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} + أ^{٢} ر^{٤} +.....∞

اثبت أن ر = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{ص}}{\text{س}^{٢} + \text{ص}}$

٦) إذا كانت ٢م + ١ ، م - ١، م - ٣ هي الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية فأوجد قيمة م وبين أن للمسألة حلين وأنه في أحدهما يمكن جمع المتتابعة إلى ما لا نهاية. ثم أوجد المجموع.

[الجواب: -١ ، -٢ ، -١٤ ، ٩ ، ٣ ، ١،حـ$_{\infty}$ = $\frac{١}{٢}$ ١٣]

٧) متتابعة غير منتهية حدها الثالث = ٢٤ وحدها السادس ٣ أوجد مجموعها وكم حداً تؤخذ منها لكي يكون مجموعها أقل من مجموعها إلى ما لا نهاية بأقل من ٠,٠١؟

[الجواب: ١٩٢ ، ن = ١٥]

obeikandl.com

٨) متتابعة هندسية يز منتهية كل حد من حدودها يساوي ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له، فإذا كان مجموع المتتابعة إلى ∞ ابتداء من الحد الأول = ٤ فما هي المتتابعة؟

[الجواب: $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٧}{١٦}$ ، $\frac{٧}{١٢٨}$ ،.....]

٩) مجموع الحدين الثاني والثالث من متتابعة هندسية يساوي ٦ وحاصل ضرب الحدين الأول والرابع يساوي ٨.

أوجد الحد الأول والأساس.

اثبت أن هناك حلين لهذه المسألة وأنه في أحد هذين الحلين يمكن جمع المتتابعة إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع.

[الجواب: أ = ٨ أ، ١ ، ر = $\frac{١}{٢}$ أ، ٢ ، جـ∞ =١٦]

١٠) أوجد المتتابعة الهندسية الغير منتهية التي حدها الثاني يزيد على أساسها بمقدار $\frac{٣}{٢}$

وحدها الأول ضعف مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الثالث.

[الجواب: (٤ ، ٢ ، ١،...)]

تمارين عامة على المتتابعة الهندسية

١) إذا علم أن س -٢ ، س -١ ، ٣س - ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فأوجد قيمة س ، ساس المتتابعة. [الجواب: س = ٣ أ، $\frac{٣}{٢}$ ، ر = ٢ أ، -١]

٢) متتابعة حدها النوني ٣ × ٢ $^{ن-٣}$ فما نوعها؟ وكم حدا ابتداء من الحد الأول يكون مجموعها ٧٦٧,٢٥. [الجواب: هندسية $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ،.....]

٣) أوجد أقل عدد من الحدود يمكن أخذه ابتداء من الحد الأول للمتتابعة التي حدها النوني = ٢(٣)$^{ن-١}$ ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠. [الجواب: ن = ٦]

٤) اذكر الشرط الواجب توافره حتى يمكن جمع المتتابعة الهندسية (١ ، س ،.....إلى ∞) وأوجد النسبة بين الحد العام حـ لهذه المتتابعة ومجموع الحدود التالية له

إلى ما لا نهاية من الحدود وإذا كانت هذه النسبة = $\frac{1}{2}$ فأوجد قيمة س وكذلك مجموع

الخمسة حدود الأولى. [الجواب: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{211}{81}$]

٥) متتابعة هندسية غير منتهية فيها الوسط الحسابي بين حديها الثاني والرابع هو ٥ ، حاصل ضرب حدها الأول في حدها الخامس يساوي ثلاثة أمثال حدها الثالث. أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى منها. وكذلك مجموعها إلى ما لا نهاية؟

[الجواب: $\frac{121}{3}$ ، $\frac{81}{2}$]

٦) متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية فإذا كان مجموع مكعبات حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية يساوي $\frac{27}{26}$.

فأوجد هذه المتتابعة. [الجواب: (١ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{8}$ ،.....)]

٧) تعاقد شخص مع إحدى الشركات على أن يعمل بها نظير مرتب سنوي قدره ٢٥٠ جنيها في السنة الأولى ويتزايد بقدر ٥ ٪ كل سنة عن مرتب السنة السابقة لها مباشرة وهناك موظف آخر يتقاضى نفس المرتب ولكن يزيد مرتبه سنويا بمقدار ١٥ جنيها أوجد الفرق بين مجموع ما يتقاضاه كل منهما بعد عشرين سنة.

[الجواب ٤٢٥ جنيها]

٨) عاملان بدأ كل منهما العمل بمرتب سنوي قدره ٣٠٠ جنيها وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٢٤ جنيها وكان الثاني يحصل على علاوة سنوية قدرها ٤٪ من مرتبه في السنة السابقة أوجد مرتب كل منهما في السنة العشرين من بدء العمل. وكم ينبغي أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى مرتبه مع مرتب زميل في تلك السنة.
[الجواب: ٧٥٦ جنيها ، ٦٣١,٢ جنيها ، ١٧,٤٣ جنيها]

٩) كرة إذا سقطت من ارتفاع معين من سطح الأرض فإنها ترتد عند تصادمها بالأرض إلى $\frac{3}{5}$ الارتفاع الذي سقطت منه فإذا سقطت هذه الكرة من ارتفاع خمسة أمتار عن سطح الأرض أوجد:

أولاً: المسافة التي ترتدها بعد الصدمة الرابعة.

ثانياً: مجموع المسافات التي قطعتها من لحظة سقوطها حتى تكاد تسكن.

[الجواب: $\frac{٨١}{١٢٥}$ ، ٢٠ متراً]

١٠) الأعداد ٢ ، ٤ ، ٩ ، ١ ، -١ / ٢ بعضها في تتابع عددي والبعض الآخر في تتابع هندسي . اكتب حدود كل من المتتابعتين في ترتيب تصاعدي ثم أوجد مجموع الاثنى عشر حداً الأولى من كل منهما.

[الجواب: (-١ ، ٤ ، ٩)، (١ / ٢ ، ٢ / ٢)، ٣١٨ ، ٦٣(١ + ٢ /)]

١١) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي $\frac{٧}{٤}$

حدها الثالث، الحد الخامس من نفس المتتابعة يساوي ٢٤ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها. [الجواب: ($\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ٦ ،.....،)]

١٢) إذا كانت الحدود التي رتبتها س ، ص ، ع من متتابعة هندسية تكون متتابعة هندسية فأثبت أن س ، ص ، ع تكون متتابعة حسابية.

١٣) إذا كانت أ ، ب ، جـ في تتابع هندسي وكانت ء هي الوسط الحسابي بين أ ، ب وكانت هـ هي الوسط الحسابي بين ب ، جـ فأثبت أن $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{هـ} = ٢$.

١٤) إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، ء) متتابعة هندسية فأثبت أن لو أ ، لو ب ، لو جـ ، لو ء تكون متتابعة حسابية. وإذا كان أ = ١١ ، ء = ١٣٧٥ فاستنتج من ذلك قيمة كل من ب ، جـ.

[الجواب: ٥٥ ، ٢٧٥]

١٥) مجموع الإثنى عشر حداً الأولى من متتابعة حسابية هو ٤٨ فإذا كان الحد الأول والحد الثاني والحد الخامس منها في تتابع هندسي فما هي هذه المتتابعة؟

[الجواب: ($\frac{١}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٥}{٣}$ ،.....)]

١٦) مجموع ٣ أعداد تكون متتابعة هندسية ٧٠ وإذا ضرب العدد الأول في ٤ والعدد الثاني في ٥ والعدد الثالث في ٤ كونت حواصل الضرب متتابعة حسابية فما هي هذه الأعداد؟

[الجواب: ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠]

orelkandil.com

١٧) إذا كان مجموع ١١ حداً من متتابعة حسابية = مربع حدها السادس وكانت حدودها الرابع والسابع والحادي عشر تكون متتابعة هندسية فما هي المتتابعة الحسابية؟ [الجواب ٦ ، ٧ ، ٨ ،.....]

١٨) إذا كان ٢أ ، ٣ب ، ٤جـ في تتابع حسابي وكان ٢أ ، ٣ب-٢أ ، ٤جـ - ٢أ في تتابع هندسي فأوجد نسبة $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ [الجواب: $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٥}{٢}$]

١٩) ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعها ٢١ وإذا أضيف إلى العدد الأول ٤ وأضيف إلى العدد الثاني ٥ وأضيف إلى العدد الثالث ٨ فإن الأعداد الناتجة تصبح في تتابع هندسي. أوجد هذه الأعداد؟

[الجواب: (١٤ ، ٧ ، ٠)، (٤ ، ٧ ، ١٠)]

٢٠) إذا كان لو ص وسط حسابي بين لوس، لوع اثبت أن ص وسط هندسي بين س ، ع.

٢١) اثبت أن أولاً: أ + هـ ب > $٢\sqrt{\text{هـ أ ب}}$.

ثانياً (أ + هـ ب) (أ + $\frac{\text{ب}}{\text{هـ}}$) > ٤ أ ب

حيث أ ، ب ، هـ أعداد موجبة مختلفة.

٢٢) إذا كانت ٦أ ، ٣ب ، ٢جـ ، ٢ء كميات موجبة في تتابع حسابي فاثبت أن:

أولاً: ٣ ب^{٢} > ٤ أ جـ

ثانياً: ٣ب^{٢} + ٢جـ^{٢} > ٤ أجـ + ٣بء

٢٣) إذا كانت ٤أ ، ب ، ٣جـ ، ٤ء كميات موجبة في تتابع هندسي فاثبت أن

١٢ ب جـ < (٤أ + ٣جـ) (ب + ٤ء).

٢٤) إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، ء موجبة وفي تتابع هندسي فاثبت أن:

أ + ء > ب + جـ

٢٥) متتابعتان هندسيتان الحد الأول في كل منهما يساوي ١ وأساس المتوالية الثانية يزيد على أساس المتتابعة الأولى بمقدار الواحد الصحيح. فإذا كان الحد الثالث في المتتابعة الثانية = ١٦ مرة نظيره في المتتابعة الأولى. فاثبت أن هناك حلين لهذه المسألة وأنه في أحد هذين الحلين يمكن جمع كل من المتتابعتين إلى ما لا نهاية وأن النسبة بين هذين المجموعين تساوي ١ : ٦.

obeikandl.com

٢٦) متتابعتان إحداهما هندسية والأخرى حسابية. فإذا كان الحد الأول من كل منهما = ٢ وكان الحد الثاني من المتتابعة الهندسية يساوي الحد الثالث من المتتابعة الحسابية وكان الحد الثالث من المتتابعة الهندسية يساوي الحد الثامن من المتتابعة فأوجد كلا من المتتابعتين.

[الجواب: (٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٥ ،.....) ، (٢ ، ٥ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١٢ ،.....)]

٢٧) متتابعتان هندسيتان الحد الأول في كل منهما ٨ ومجموع الحدود الثلاثة الأولى من كل منهما ١٤.

أوجد هاتين المتتابعتين ثم أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى من كل منهما.

[الجواب: (٨ ، -١٢ ، ١٨ ،....)،(٨ ، ٤ ، ....) ، $\frac{٤٦٣}{٨}$ ، $\frac{١٢٧}{٨}$]

٢٨) متتابعتان هندسيتان الأولى حدها الأول (أ) وأساسها (ر) والثانية حدها الأول (أ) وأساسها (ر - $\frac{١}{٣}$) فإذا علم أن مجموع المتتابعتين إلى ما لا نهاية من الحدود متساويتان وكان الحد الثالث من المتتابعة الثانية يزيد عن نظيره في المتتابعة الأولى بمقدار $\frac{١}{١٨}$ فأوجد كلا من المتتابعتين.

[الجواب: (١ ، $\frac{-٥}{٦}$ ، $\frac{٢٥}{٣٦}$ ،.....) ، (٣ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ،.....)]

٢٩) متتابعة هندسية حدودها الحقيقية والنسبة بين مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها إلى مجموعها إلى ما لا نهاية تساوي وحدها الرابع يساوي ٩ أوجد المتتابعة. كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول ليكون الفرق بين مجموع هذه الحدود ومجموع المتتابعة إلى ما لا نهاية أقل من ٠,٠٠١.

[الجواب: (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧،.....)، ن = ١٢ أو أكثر]

٣٠) مجموع متتابعة هندسية غير منتهية يساوي $١٣\frac{١}{١٢}$. وأي حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له بأجمعها أوجد المتتابعة وحقق أن الفرق بين مجموعها إلى ما لا نهاية ومجموع التسعة حدود الأولى منها أقل من $\frac{١}{١٠٠٠}$.

[الجواب: (٩ ، ٣ ، ١ ، .....)]

٣١) متتابعة هندسية عدد حدودها ن وحدها الأول أ وحدها الأخير ب أثبت أن حاصل ضرب حدود هذه المتتابعة يساوي $(أ\ ب)^{\frac{ن}{٢}}$

٣٢) إذا كانت س مجموع ن حداً متتالياً من المتتابعة هندسية، ص حاصل ضرب هذه الحدود، ع مقلوبات هذه الحدود. فأثبت أن $(\frac{س}{ع})^{ن} = ص^{٢}$.

٣٣) إذا كانت $\sqrt[٣]{س} = \sqrt[٥]{ص} = \sqrt[٧]{ع}$ أثبت أن س ، ص ، ع في تتابع هندسي.

٣٤) إذا كانت ن عدداً فردياً فأثبت أن حاصل ضرب ن من الحدود المتتالية في متتابعة هندسية يساوي $س^{ن}$ حيث س الحد الأوسط وإذا كان حاصل ضرب هذه الحدود = ٢٤٣ والحد الأوسط يساوي ٣ والحد الرابع في المتتابعة = ٩ فما مجموع هذه المتتابعة؟ [الجواب: $\frac{١٢١}{٣}$]

٣٥) س ، ص عددان موجبان. أدخل بينهما وسطان هندسيان موجبان كما أدخل بين س ، ص أيضاً وسطان حسابيان أخريان وكان مجموع الوسطين الهندسيين يساوي ١٨ ومجموع الوسطين الحسابيين يساوي ٢٧ أوجد قيمتي س، ص. [٣ ، ٢٤]

٣٦) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٩}{٢٥}$ ، .....) ليكون المجموع أصغر من مجموع حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية بأقل من ٠,٠٠٠١ [الجواب: ٢٠]

٣٧) إذا كانت س ، ص ، ع أعداد موجبة في تتابع حسابي وكانت أ هي الوسط الهندسي بين س ، ص وكانت ب هي الوسط الهندسي بين ص ، ع فأثبت أن $ص^{٢}$ أكبر من أب.

٣٨) إذا كانت س عددا أكبر من الواحد فأثبت أن س + $\frac{١}{س}$ > ٢.

٣٩) يتناقص إنتاج منجم فحم سنوياً بحيث يكون الإنتاج في سنة ما أقل ١٣٪ عن السنة السابقة لها مباشرة فإذا كان إنتاج الفحم في السنة الأولى ٤٠٠٠ كجم فأوجد مجموع ما ينتجه المنجم خلال العشرة سنين الأولى وأوجد الحد الأقصى لمجموع إنتاجه.
[الجواب: ٢٣١٢٩,٢٣ ، ٣٠٧٦٩,٢٣ كجم]

٤٠) إذا كانت أ ، ب ، جـ تكون متتابعة هندسية وكان ع ، هـ هما الوسطان الحسابي والهندسي بين أ ، ب على الترتيب وكان و ، ي هما الوسطان الحسابي والهندسي بين ب ، جـ على الترتيب. فاثبت أن ع : هـ = و : ي

٤١) أربعة أعداد مجموعها ٤٢ ومجموع العددين الأوسطين منها= ٢٠ فإذا كانت الثلاثة أعداد الأولى في تتابع حسابي وكانت الثلاثة أعداد الأخيرة في تتابع هندسي فما هي هذه الأعداد؟

[الجواب: ١٧,٥ ، ١٢,٥ ، ٧,٥ ، ٤,٥ أو ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦]

٤٢) حل المعادلة ١ + أ + أ^{٢} +.....+ أ^{ن} = (١+أ) (١+أ^{٢}) (١+أ^{٤}) (١+أ^{٨})

[الجواب: ١٥]

٤٣) متتابعة هندسية مكونة من ٤ن حداً والنسبة بين مجموع حدودها الزوجية الرتبة وبين مجموع حدودها الفردية الرتبة تساوي ٢ فإذا كان الوسط الحسابي بين حـ$_{ن}$ ، حـ$_{ن+١}$ = ٢٠

وكان جـ$_{٤ن}$ - جـ$_{٣ن}$ = ٣٢ (جـ$_{٣ن}$ - جـ$_{ن}$) أوجد المتتابعة.

[الجواب: ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ،.....)]

٤٤) متتابعتان هندسيتان حاصل ضرب أساسيهما يساوي الواحد الصحيح والحد الأول من المتتابعة الأولى تسعة أمثال الحد الأول من المتتابعة الثانية. فإذا كان مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الأولى = ٥٢ ومجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الثانية = ١٤٠٤ فأوجد كلاً من المتتابعتين ثم اثبت أن مجموع الحدود ابتداء من الحد السابع إلى ما لا نهاية في المتتابعة الأولى = $\frac{١}{١٤}$.

إجابة تمارين الكتاب

obeikandl.com

إجابة تمرين (١)

المجموعة الأولى :

(١) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٤س + ٣)$

الحل

بالتعويض المباشر $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٤س + ٣) = (٣)^{٢} - ٤ \times ٣ + ٣$

$= ٩ - ١٢ + ٣ =$ صفر

(٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س}{س^{٢} + ٤} = \frac{٣ \times ٢}{٣^{٢} + ٤} = \frac{١٦}{١٣}$

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ بالتعويض المباشر د(٣) $= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والاختصار $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)} = ٣+٣ = ٦$

(٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س^{٢} - س - ١٢}$ بالتعويض المباشر د(٤) $= \frac{٠}{٠}$

بتحليل المقام والاختصار $\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{(س-٤)(س + ٣)} = \lim_{س \to ٤} \frac{١}{س+٣} = \frac{١}{٤+٣} = \frac{١}{٧}$

(٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$ بالتعويض المباشر د(٣) $= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام والاختصار $= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٣)(س + ٣)} =$

$\frac{٣^{٢} + ٣ \times ٣ + ٩}{٣ + ٣} = \frac{٩+٩+٩}{٦} = \frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٢}$

(٦) $\lim_{س \to ٧} \frac{س^{٢} - ٤٩}{س^{٢} - ٩س + ١٤}$ بالتعويض المباشر د(٧) $= \frac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام والاختصار $\lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)(س + ٧)}{(س - ٧)(س - ٢)} = \frac{٧+٧}{٧-٢} = \frac{١٤}{٥}$

obeikandi.com

(٧) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٧س + ١٢} = \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س - ٤)} = \text{نها}_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{س - ٤} = \frac{٣+٣}{٤-٣} = -٦$

(٨) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ + ٢س - ٣} = \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س - ١)}{(س - ١)(س + ٣)} = \frac{١}{١+٣} = \frac{١}{٤}$

(٩) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} = \text{نها}_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{س - ١} = ١+١+١ = ٣$

(١٠) $\text{نها}_{س \to -٣} \frac{س^٣ + ٢٧}{س + ٣} = \text{نها}_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}{س + ٣} =$

$\text{نها}_{س \to -٣} \frac{س^٢ - ٣س + ٩}{١} = (-٣)^٢ - ٣ \times -٣ + ٩ = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

(١١) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^٣ + ٧س}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س(س^٢ + ٧)}{س} = ٠ + ٧ = ٧$

(١٢) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{٢س^٢ - س}{٢س^٢ + س}$ بقسمة البسط والمقام على أكبر أس وهو $س^٢ = ١$

(١٣) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{س^٢ + س + ١٠}{س^٣ + ٩}$ بالقسمة على $س^٣$

$= \frac{٠+٠+٠}{٠+١} = \frac{٠}{١} =$ صفر

(١٤) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{س^٣ + ٨}{١٢ س^٢ + ٩} = \frac{٠+١}{٠+٠} = \frac{١}{٠} = \infty$

(١٥) $\text{نها}_{ن \to \infty} \frac{ن^٢ + ٣ن + ١٠٠٠}{٢ن^٢ + ن + ٧}$ بالقسمة على $ن^٢ = \frac{٠+٠+١}{٠+٠+٢} = \frac{١}{٢}$

(١٦) $\text{نها}_{س \to \infty} \frac{س^٣ + ٩س}{٣س^٣ - ٧س + ٤} = \frac{٠+١}{٠+٠-٣} = \frac{١}{٣}$

obeikandl.com

(١٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س-٢}{٩س+٧}$ بالقسمة على س $= \frac{٣-٠}{٩-٠} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

(١٨) $\lim_{س \to \infty} \frac{٦س^{٢}+٢س+١}{٦س^{٢}-٣س+٧} = \frac{٦+٠+٠}{٦-٠+٠} = ١$

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}+س-٢}{٤س^{٣}-١}$ = صفر

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}+١} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢}{١+٠} = ٢$

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٤}+س^{٣}-س^{٢}-٥س+٤}{س^{٣}-س^{٢}-س+١}$ بالتعويض المباشر نجد أن د(١) = $\frac{٠}{٠}$

لاحظ أن كلا من البسط والمقام مقادير جبرية ذات رتب عالية فتكون عملية تحليلها معقدة نسبياً فنستخدم التحليل بالتقسيم .

البسط = $س^{٤} + س^{٣} - س^{٢} - ٥ س + ٤$

$= س^{٤} - س^{٢} + س^{٣} - ٥ س + (٤ + ١) - ١$

$= (س^{٤} - س^{٢}) + (س^{٣} - ١) - ٥س + ٥$

$= س^{٢} (س^{٢} - ١) + (س^{٣} - ١) - ٥ (س - ١)$

$= (س-١) [س^{٢} (س+١) +(س^{٢} +س+١) - ٥]$

$= (س-١) [س^{٣} +س^{٢} +س^{٢} +س +١-٥]$

$= (س-١) [س^{٣} +٢س^{٢} +س -٤]$ ∵ $-٤ = -١-٢-١$

$= (س-١) [س^{٣} +٢س^{٢} +س -١-٢-١]$

$= (س-١) [(س^{٣} -١)+ (٢س^{٢}-٢) +(س-١)]$

$= (س-١)^{٢} [س^{٢} +س +١ +٢ (س+١) +١]$

البسط = $(س-١)^{٢} [س^{٢} +٣س +٤]$

المقام = $س^{٣} - س^{٢} - ص - س + ١$

$= س^{٢} (س-١) - (س-١) = (س-١) [س^{٢} - ١]$

$= (س-١) (س-١) (س+١)$

$$\text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{س^{٤}+س^{٣}-س^{٢}-٥س+٤}{س^{٣}-س^{٢}-س+١} = \text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{(س-١)^{٢}(س^{٢}+٣س+٤)}{(س-١)^{٢}(س+١)}$$

$$= \frac{١^{٢}+١\times٣+٤}{١+١} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

(٢٢) $\text{نهـا}_{ن\to\infty} (\frac{٣}{٥})^{ن} = (\frac{٣}{٥})^{\infty} =$ صفر

(٢٤) $\text{نهـا}_{س\to\infty} \frac{أ س^{٤}+ب س^{٢}+جـ}{ء س^{٥}+هـ س^{٣}+و س}$ = بقسمة البسط والمقام على $س^{٥}$

$= \frac{٠}{٥} =$ صفر

(٢٥) $\text{نهـا}_{س\to٠} \frac{(٢-٣س)^{٢}-٤}{٣س}$ بالتعويض المباشر نجد أن د(٠) $= \frac{٠}{٠}$

$$\text{نهـا}_{س\to٠} = \frac{٤-١٢+٩س^{٢}-٤}{٣س} = \frac{١٢+٩\times٠}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$$

(٢٦) $\text{نهـا}_{ن\to\infty} \frac{٣^{ن}-٢\times٥^{ن}+٢\times٧^{ن}}{٢^{ن}+٨\times٣^{ن}+٥\times٧^{ن}}$ بقسمة البسط والمقام على $٧^{ن}$

$$= \frac{٢+٠\times٢-٠}{٥+٠\times٨+٠} = \frac{٢}{٥}$$

(٢٧) اوجد $ح_{ن}$ في المتسلسلة : $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٥} + \frac{٥}{٨} + \ldots$.ثم اثبت أن $\text{نهـا}_{ن\to\infty} ح_{ن} = \frac{٢}{٣}$

الحل

نلاحظ أن المتسلسلة ليست هندسية ولا حسابية فلا يمكن إيجاد حدها النوني مباشرة الا بعد إيجاد الحد النوني للبسط على حده والمقام على حدة .

البسط ١ ، ٣ ، ٥ ، ..... فهو متوالية حسابية أساسها ٢ وحدها الأول : أ$_{ن}$ = أ$_{١}$ + (ن – ١) ء

أما المقام ٢ ، ٥ ، ٨ ، ..... فهو متوالية حسابية حدها الأول ٢ وأساسها ٣

حدها العام أ$_{ن}$ = ٢ + (ن - ١)^{٣} = ٢ + ٣ ن – ٣ = ٣ ن - ١

obeikandl.com

الحد العام للمتسلسلة = $\frac{\text{الحد النوني للبسط}}{\text{الحد النوني للمقام}}$

$ح_ن = \frac{٢ن - ١}{٣ ن - ١}$

$نهـا_{ن \to \infty} ح_ن = نهـا_{ن \to \infty} \frac{٢ن - ١}{٣ ن - ١} = نهـا_{ن \to \infty} \frac{٢ - \frac{١}{ن}}{٣ - \frac{١}{ن}} = \frac{٢}{٣}$

(٢٨)اثبت أن مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية هو الواحد الصحيح :

$د(س) = \frac{٢ س}{١ + س^٢} + \frac{٢ س}{[١ + س^٢]^٢} + \frac{٢ س}{[١ + س^٢]^٣} + ...$

$د(٠) = \frac{٠}{١ + ٠} + \frac{٠}{(١ + ٠)^٢} + \frac{٠}{(١ + ٠)^٣} + ... = صفر$

د(٠) = صفر

نلاحظ أن الدالة هى متسلسلة هندسية حدها الأول $(\frac{٢ س}{١ + س^٢})$

وأساسها = $\frac{\frac{٢ س}{(١ + س^٢)^٢}}{\frac{٢ س}{١ + س^٢}} = \frac{١}{١ + س^٢} = ر$

المجموعة الثانية

(١) $نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س - ٢} = نهـا_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س - ٢} = \frac{٦}{١} (٢)^{٦-١} = ٦ \times (٢)^٥ = ١٩٢$

(٢) $نهـا_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{٢}{١} (١)^{٢-١} = ٢$

(٣) $\lim_{س \to \frac{1}{3}} \frac{٢٧س^{٣}-١}{٣س-١} = \lim_{٣س \to ١} \frac{(٣س)^{٣}-١^{٣}}{٣س-١} = \frac{٣}{١}(١)^{٣-١} = ٣$

(٤) $\lim_{س \to \frac{1}{5}} \frac{٦٢٥س^{٤}-١}{٥س-١} = \lim_{٥س \to ١} \frac{(٥س)^{٤}-١^{٤}}{٥س-١} = \frac{٤}{١}(١)^{٤-١} = ٤$

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+س)^{٢}-١}{س} = \lim_{١+س \to ١} \frac{(١+س)^{٢}-١^{٢}}{١+س-١} = \frac{٢}{١}(١)^{٢-١} = ١$

(٦) $\lim_{ص \to ٠} \frac{(ص+٨)^{\frac{1}{3}}-٢}{ص} = \lim_{ص+٨ \to ٨} \frac{(ص+٨)^{\frac{1}{3}}-٨^{\frac{1}{3}}}{(ص+٨)-٨} = \frac{\frac{1}{3}}{١}(٨)^{\frac{1}{3}-١} = \frac{١}{٣}(٨)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{١}{(٨)^{\frac{2}{3}}} = \frac{١}{\sqrt[3]{٨^{٢}}} = \frac{١}{٣\times٤} = \frac{١}{١٢}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{م}-ب^{م}}{س^{ن}-ب^{ن}} = \frac{م}{ب}(ب)^{م-ن}$

(٨) $\lim_{و \to ٠} \frac{(س+و)^{٤}-س^{٤}}{(س+و)-س} = \frac{٤}{١}(س)^{٤-١} = ٤س^{٣}$

(٩) من تعريف النهاية اثبت ان :

$\lim_{س \to ١} (٤س^{٣}+٣س^{٢}-٢٤س+٢٢) = ٤(١)^{٣}+٣(١)^{٢}-٢٤(١)+٢٢$

$= ٤+٣-٢٤+٢٢ = ٤$

اوجد $\lim_{و \to ٠} د(و)$ في كل من الحالات الآتية :

(١٠) $د(و) = \frac{\sqrt{٣+و}-\sqrt{و}}{و}$

$\therefore \lim_{و \to ٠} د(و) = \lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{٣+و}-\sqrt{و}}{و}$

obeikandl.com

ويمكن حل هذا المثال بأستخدام الضرب في مرافق الجذر في البسط

$$= \text{نهـــا}_{و \leftarrow .} \frac{\sqrt[3]{٣+و} - \sqrt[3]{و}}{و} \times \frac{\sqrt[3]{(٣+و)^{٢}} + \sqrt[3]{٣+و} + \sqrt[3]{و}}{\sqrt[3]{(٣+و)^{٢}} + \sqrt[3]{٣+و} + \sqrt[3]{و}}$$

$$= \text{نهـــا}_{و \leftarrow .} \frac{(٣+و)-(٣)}{و(\sqrt[3]{(٣+و)^{٢}} + \sqrt[3]{٣+و} + \sqrt[3]{٣})} = \text{نهـــا}_{و \leftarrow .} \frac{و}{و(\sqrt[3]{(٣+و)^{٢}} + \sqrt[3]{٣+و} + \sqrt[3]{٣})} = \frac{١}{\sqrt[3]{٣^{٢}} + \sqrt[3]{٣ \times ٠ + ٣} + \sqrt[3]{٣^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt[3]{٢^{٢}}}$$

ويكون الحل بأستخدام النظرية :

$$\text{نهـا}_{٣ \leftarrow و} = \frac{١}{٢}(٣)^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢}(٣)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt[3]{٢^{٢}}}$$

$$(١١) \quad \text{نهـا}_{٢ \leftarrow و} = \frac{(٢+و)^{٣}-٨}{و} = \text{نهـا}_{٢ \leftarrow و} \frac{(٢+و)^{٣}-٢^{٣}}{٢+و-٢} = \frac{٣}{١}(٢)^{٣-١} = ٣(٢)^{٢} = ١٢$$

$$(١٢) \quad \text{نهـا}_{٢ \leftarrow و} = \frac{(٢+و)^{٣}-٤}{و} = \text{نهـا}_{٢ \leftarrow و} \frac{(٢+و)^{٣}-٢^{٢}}{٢+و-٢} = \frac{٢}{١}(٢)^{٢-١} = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$(١٣) \quad \text{نهـا}_{و \leftarrow .} = \frac{(س+و)^{٢}-س^{٢}}{و} = \text{نهـا}_{و \leftarrow .} \frac{(س+و)^{٢}-س^{٢}}{(س+و)-س} = \frac{٢}{١}(س)^{٢-١} = ٢س$$

$$(١٤) \quad \text{نهـا}_{و \leftarrow .} = \frac{\frac{١}{س+و} + \frac{١}{س}}{و} = (-١) \text{نهـا}_{و \leftarrow .} \frac{\frac{١}{س+و} - \frac{١}{س}}{و}$$

$$= (-١) \text{نهـا}_{س+و \leftarrow س} \frac{(س+و)^{-١}-س^{-١}}{(س+و)-س} = (-١)\frac{-١}{١}(س)^{-٢} = \frac{١}{س^{٢}}$$

اوجد $\text{نهـا}_{و \leftarrow .} \frac{د(س+و)-د(س)}{و}$ في كل من الحالات آلاتية :

(١٥) د(س) = ٢س^{٢}

د(س+و) = ٢(س+و)^{٢}

obeikandl.com

$$\text{نهـا}_{\text{و}\to 0} \frac{(\text{س}+\text{و})^2-\text{س}^2}{\text{و}} = 2\text{س} \qquad \text{نهـا}_{\text{س}+\text{و}\to \text{س}} \frac{(\text{س}+\text{و})^2-\text{س}^2}{(\text{س}+\text{و})-\text{س}} = 2\times\frac{1}{2}(\text{س})^{2-1} = 2\text{س}$$

(١٦) د(س) = $\frac{1}{4}$ س^3

(١٧) د(س) = $\frac{1}{\text{س}}$

(١٨) د(س) = س^4

(١٩) د(س) = $\sqrt{\text{س}}$

(٢٠) د(س) = س^2 − ٣س

obeikandl.com

إجابة تمرين (٢)

المجموعة الاولى :-

(١) ١ – حتا ٢ س = ٢حا^{٢} س ∴ $\frac{١}{٣}$ نهـا $\frac{٢حا^{٢}س}{س^{٢}}$ = $\frac{٢}{٣}$ نهـا $\frac{حا^{٢}س}{س^{٢}}$
س←٠

$= \frac{٢}{٣} (١) = \frac{٢}{٣}$

(٢) بالقسمة على س = نهـا $\frac{٥س}{س} + \frac{حا٠س}{س}$ / $\frac{٧س}{س} - \frac{طا٠س}{س}$ = نهـا $\frac{٥ + \frac{حا٠س}{س}}{٧ - \frac{طا٠س}{س}}$
س←٠ س←٠

$= \frac{١+٥}{١-٧} = \frac{٦}{٦} = ١$

(٣) نهـا $\frac{١ - حتا ٢س}{س^{٢}}$ ، ١ - حتا ٢ س = ٢ حا^{٢} س
س←٠

= نهـا $\frac{٢ حا^{٢}س}{س^{٢}}$ = ٢ نهـا $\frac{حا^{٢}س}{س^{٢}}$ = ٢(١) = ٢
س←٠

(٤) نهـا $\frac{٥}{س^{٢} قتا^{٢}س}$ ، قتا س = $\frac{١}{حا س}$ = ٥ نهـا $\frac{حا^{٢}س}{س^{٢}}$ = ٥(١)=٥
س←٠

(٥) نهـا $\frac{حا\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}$ بوضع $\frac{ط}{٢}$ - س = ع
$\frac{ط}{٢}$ - س←٠

= نهـا $\frac{حا ع}{ع}$ = ١
ع←٠

(٦) نهـا $\frac{١ - \text{جتا أ}}{\text{أ}^{٢}}$ ، ١ ـ جتا أ = ٢ حا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = نهـا $\frac{٢ \text{ حا}^{٢} \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{أ}^{٢}}$
أ ← ٠

نضع ع = $\frac{\text{أ}}{٢}$ ، أ = ٢ ع ، أ^{٢} = ٤ع^{٢} وعندما أ ← ٠ فإن ع ← ٠

= نهـا $\frac{٢ \text{ حا}^{٢}\text{ع}}{٤\text{ع}^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ نهـا $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ع}}{\text{ع}^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ (١) = $\frac{١}{٢}$
ع ← ٠

<u>طريقة اخرى</u> بالضرب في مرافق ١ ـ جتا أ = نهـا $\frac{١ - \text{جتا أ}}{\text{أ}^{٢}}$ × $\frac{١ + \text{جتا أ}}{١ + \text{جتا أ}}$

ولكن ١ ـ جتا^{٢} أ = حا^{٢}أ = نهـا $\frac{\text{حا}^{٢}\text{أ}}{\text{أ}^{٢}}$ × نهـا $\frac{١}{١ + \text{جتا أ}}$
أ ← ٠ أ ← ٠

= ١ × $\frac{١}{١ + \text{جتاه}}$ = $\frac{١}{١+١}$ = $\frac{١}{٢}$

(٧) نهـا $\frac{\text{حا س} + \text{س}^{٢}}{\text{س}}$ = نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ + نهـا $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}}$ = نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$
س ← ٠ س ← ٠ س ← ٠ س ← ٠

+ نهـا س = ١ + ٠ = ١
س ← ٠

(٨) نهـا ٢ س × نهـا $\frac{\text{طا } ٣\text{ س}}{٣\text{س}}$ = قا٢ (٠) × ١ = $\frac{١}{\text{جتا } ٠}$ = ١

(٩) نهـا $\frac{\text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\text{س}}$ ، جتا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - س) = حا س
س ← ٠

= نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = ١
س ← ٠

(١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س}$ بالضرب والقسمة على س

$= \lim_{س \to ٠} [س \times \frac{حا^٢س}{س}] = \lim_{س \to ٠} س \times \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س^٢} = ٠ \times ١ = ٠$

(١١) نضع ع $= \frac{١}{٢}$ س س $= ٢$ ع ، $س^٢ = ٤ ع^٢$ وعندما س $\to ٠$

فإن ع $\to ٠$ ، $\lim_{ع \to ٠} \frac{حا^٢ع}{٤ع^٢} = \frac{١}{٤} \lim_{ع \to ٠} \frac{حا^٢ع}{ع^٢} = \frac{١}{٤} (١) = \frac{١}{٤}$

(١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{حتا ٢س - ٢ حتا س + ١}{س^٢}$ ، حتا٢س $= ١ - ٢حا^٢ س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - ٢حا^٢ س + ١ - ٢ حتا س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢ - ٢ حتا س - ٢ حا^٢س}{س^٢}$

$= ٢ \left[\lim_{س \to ٠} \frac{١ - حتا س}{س^٢} - \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س^٢} \right]$ ولكن ١ $-$ حتا س $= ٢ حا^٢ \frac{س}{٢}$

$= ٢ \left[\lim_{س \to ٠} \frac{٢ حا^٢ \frac{س}{٢}}{س^٢} - \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س^٢} \right]$ نضع $\frac{س}{٢} = ع$

$= ٢ \left[\lim_{ع \to ٠} \frac{٢ حا^٢ع}{س^٢} - \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س^٢} \right] = ٢ \left[\frac{١}{٢} \lim_{ع \to ٠} \frac{حا^٢ع}{س^٢} - \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢س}{س^٢} \right]$

$= ٢ (\frac{١}{٢} - ١) = ٢ (-\frac{١}{٢}) = -١$

(١٣) بقسمة البسط والمقام على $س^٢$،

المقدار = نها $\frac{1 + \frac{\text{حا}^3 س^0}{س^2}}{1 + \left(\frac{\text{حتا}^2 س}{س}\right)^0} = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

(١٤) بقسمة البسط والمقام على س

المقدار = $\frac{\text{نها}\ 2 \times \frac{\text{حا س}}{س} + 3 \frac{\text{طا س}}{س}}{5\ \text{حتا}\ 2\ س} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 1}{5 \times 1} = 1$

(١٥) بقسمة البسط والمقام على $س^3$

المقدار = $\frac{\text{نها}\ 2 + \frac{\text{حا}\ 2\ س^3}{س^3}}{س - (\frac{\text{طا}\ 2\ س}{س})^3} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

المجموعة الثانية

(١) $\frac{1}{2} = \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}}{س} \times \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}}\ \text{طا س} = \frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0$ (√)

(٢) $\frac{5}{6} \neq \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{طا}\ 2س}{2\ س} \times \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\ 3\ س}{3\ س} = \frac{5}{6}$ (X)

(٣) $5 = \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\ 3\ س}{س} = 15 \quad \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}\ 3\ س}{3\ س} = 15$ (√)

(٤) $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{1 - (1 - \text{حا}^2 س)}{س^2} = 2 \quad \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^2 س}{س^2} = 2$ (X)

(٥) $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} (\frac{1}{2} + \frac{\text{حا}\ 3\ س}{2\ س}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ (√)

(٦) المقدار = ٣ (X)

obeikandl.com

(٧) (X)

(٨) (X)

(٩) (√)

(١٠) (√)

obeikandl.com

اجابة تمرين (٣)

(١) (أ) ت (هـ) = د (٢ + هـ) – د(٢) = (٢ + هـ)^{٢} + ٢ + هـ – (٤+٢)

= هـ^{٢} + ٥ هـ

∴ ت(٠,٠١) = ٠,٠٥٠١

(ب) م(هـ)$_{س=٢}$ = $\frac{هـ^{٢} + ٥ هـ}{هـ}$ = هـ + ٥ ∴ م(٠,٠١) = ٥,٠١

(جـ) معدل التغير$_{س=٢}$ = نهـــــــا (م(هـ)) = ٥

هـ ⟵ ٠

(٢) ت(هـ) = (س$_{١}$+هـ)^{٢} – ٣(س$_{١}$+هـ) + ١ –(س$_{١}^{٢}$ – ٣ س$_{١}$+١)

=٢س$_{١}$هـ + هـ^{٢} – ٣هـ

∴ م(هـ) = $\frac{هـ(٢ س_{١}+هـ-٣)}{هـ}$ = ٢ س$_{١}$+هـ – ٣

(أ) م(٠,٣) = ٢×٥ + ٠,٣ – ٣ = ٧,٣

(ب) م(– ٠,٥) = ٢×٨ – ٠,٥ –٣ = ١٢,٥

(٣) نحسب د(١+هـ) – د(١) = ١ + هـ – ١

∴ دالة التغير للدالة د عند س$_{١}$ =١ هى = م(هـ) = $\frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ}$

= $\frac{\sqrt{١ + هـ} - ١}{هـ}$

(٤) (أ) س$_{١}$ = ٢ ، س$_{١}$ + هـ = ٣ ∴ هـ = ١

د(٣) = ٢×٣+٣=٩ ، د(٢) = ٢×٢+٣=٧

ت(١) = ٩ – ٧ = ٢ ∴ م(١) = ١/٢ = ٢

(ب) س$_{١}$ = ٤، س$_{١}$ + هـ = ٠,٥ ∴ هـ = ٠,٥

د(٤,٥) = (٤,٥)^{٢} = ٢٠,٢٥ ، د(٤) = (٤)^{٢} = ١٦

ت(٠,٥) = ٢٠,٢٥ – ١٦ = ٤,٢٥

obeikandl.com

$\therefore$ م(٠,٥) = $\frac{٤,٢٥}{٠,٥}$ = ٨,٥

(٥) ت(هـ) = د(٣+هـ) – د(٣)

= [أ (٣+هـ)^{٢} + ب(٣+هـ) +٤]–[٩ أ +٣ب +٤]

= ٦أهـ + أ هـ^{٢} + ب هـ

ت($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٩}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ أ + $\frac{١}{٢}$ ب $\qquad$ $\therefore$ $\frac{٧}{٤}$ = $\frac{١٢}{٤}$ أ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٤}$ ب

$\therefore$ ٧ = ١٣ أ + ٢ ب $\qquad$ ⟵ (١)

ولكن د(٣) = ٩ أ + ٣ ب + ٤

$\therefore$ ٤ = ٩ أ + ٣ ب + ٤ $\qquad$ $\therefore$ ٩ أ + ٣ ب = ٠

$\therefore$ ٣ أ + ب = ٠ $\qquad$ ⟵ (٢)

و بحل المعادلتين (١) ، (٢) $\therefore$ أ = ١ ، ب = – ٣

(٦) (أ) س$_{١}$ =١ ، هـ = ١,٣ – ١ = ٠,٣ > ٠

$\therefore$ د (س) = ٥ – ٢س

$\therefore$ م (٠,٣) = $\frac{(٥-٢\times١,٣)-(٥-٢\times١)}{٠,٣}$ = $\frac{-٠,٦}{٠,٣}$ = -٢

لان م (٠,٣) = د (١,٣) – د (١)

(ب) س$_{١}$ ، هـ = ٠,٦٤ – ١ = -٠,٣٦ < ١

$\therefore$ د(س) = $\sqrt{\text{س}}$

م (-٠,٣٦) = $\frac{د(٠,٦٤)-د(١)}{-٠,٣٦}$ = $\frac{\sqrt{٠,٦٤}-(٥-٢\times١)}{-٠,٣٦}$ = $\frac{٥٥}{٩}$

(٧) (أ) د(١) = ٢(١)^{٢} +٣=٥ $\qquad$ $\therefore$ هـ > ٠

$\therefore$ د(١+هـ) = ٦ – ٥(١+هـ) = ١ – ٥هـ

obeikandi.com

م(هـ) = $\frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ}$ = $\frac{-٥هـ - هـ^{٢}}{هـ}$ = $\frac{هـ(-٥ - هـ)}{هـ}$

هـ < ٠ ∴ د(١+هـ) = ٢(١+هـ)^{٢} +٣ = ٥+٤هـ+ هـ^{٢}

م(هـ) = $\frac{٤هـ+٢هـ^{٢}}{هـ}$ = ٤+٢هـ

(ب) د(٣) = ٣ − ٣ = ٠ هـ > ٠ ∴ د(٣+هـ) = ٣+هـ +٣= هـ

م(هـ) = $\frac{هـ - ٠}{هـ}$ = ١

هـ < ٠ ∴ د(٣+هـ) = ٦ − ٥ (٣+هـ) = − ٩ − ٥ هـ

م(هـ) = $\frac{- ٩ - ٥ هـ}{هـ}$

(٨) م(هـ) = $\frac{د(٠+هـ) - د(٠)}{هـ}$

$$= \begin{cases} \frac{هـ٢ +٢ - ٠}{هـ} & ، هـ < ٠ \\ \frac{هـ٢ +٢ - ٠}{هـ} & ، هـ > ٠ \end{cases}$$

$$\therefore م(هـ)_{س=٠} = \begin{cases} هـ٢ +٢ & ، هـ < ٠ \\ هـ + ٢ & ، هـ > ٠ \end{cases}$$

نهـــا م (هـ) = نهـــا م (هـ) = ٢

هـ ← ٠ هـ ← ٠

∴ معدل التغير = ٢

(٩) نفرض طول نصف القطر = نق ، مساحة سطح القرص = ح

obeikandi.com

∴ ح = د (نق) = ط نق^{٢}

م (هـ) = $\frac{\text{د}^{٥}(٧+\text{هـ})-\text{د}(٧)}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{ط}(٧+\text{هـ})^{٢}-٤٩\ \text{ط}}{\text{هـ}}$ = ط (١٤ + هـ)

نق=٧

∴ معدل تغير المساحة عند نق = ٧ = نهـــا ط (١٤ + هـ) = ١٤ ط

هـ ← ٠

= ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٤٤

(١٠) ق = ١٠٠٠ س^{٢}

الطاقة = (ق) = ١٠٠٠ (٢)^{٢} = ١٠٠٠ × ٤ = ٤٠٠٠ أرج

س=٢

الدفع = معدل تغير الطاقة بالنسبة الى التظاغط

= نهـــا $\frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ})-\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

هـ ← ٠

= نهـــا $\frac{١٠٠٠(\text{س}+\text{هـ})^{٢}-١٠٠٠\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

هـ ← ٠

= ١٠٠٠ نهـــا $\frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س هـ}-\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$

هـ ← ٠

= ١٠٠٠ نهـــا $\frac{\text{هـ}(٢\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ}}$ = ١٠٠٠ (٢س)

هـ ← ٠

∴ الدفع = ٢٠٠٠ س

∴ الدفع = ٢٠٠٠ × ٢ = ٤٠٠٠ ارج/ سم

obeikandl.com

إجابة تمرين (٤)

المجموعة الأولى :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية :

(١) د (س) = (س^{٣} – س) (س^{٢} + ٤)

د$'$ (س) = ٠ س^{٣} – س) (٢ س) + (س^{٢} + ٤) (٣ س^{٢} – ١)

(٢) د (س) = (س^{٢} + ٢ س + ٣) (٢ س^{٢} – ٥ س + ١)

د$'$ (س) = (س^{٢}+٢س +٣) (٤س- ٥) + (٢ س^{٢}– ٥ س+١) (٢ س + ٢)

(٣) د (س) = (٤ س^{٥} - ٦ س ^{٢}) (٣ س^{٢} - س^{٣})

د$'$ (س) =(٤س^{٥}-٦س^{٢})(٦س-٣س^{٢})+(٣س^{٢}-س^{٣})(٢٠س^{٤}-١٢س)

(٤) د (س) = (٢س-٢)(٤س-١)

د$'$ (س) =(٢س+١)(٣س-٢)(٤)+(٢س+١)(٤س-١)(٣)+(٣س-٢)(٤س-١)(٢)

(٥) د(س) = (٣ س -١) (٢س-٣)(٤س+١)

د$'$ (س)= (٣س-١)(٢س-٣)(٤)+(٣س-١)(٤س+١)×(٢) +(٢س-٣)(٤س+١)(٣)

(٦) د(س) = (٣س +٢)^{٣}

د$'$ (س) = ٣ (٣ س + ٢)$^{٣-١}$ × (٣)

د$'$ (س) = = ٩ (٣ س + ٢)^{٢}

(٧) د (س) = $\frac{٤}{س+١}$ بشرط أن س ≠ -١

د$'$(س) = $\frac{(س+١)(٠)-(٤)(١)}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$

(٨) د(س) = $\frac{٢ س}{س^{٢}+٣}$

د$'$(س) = $\frac{(س^{٢}+٣)^{٢}(-)٢س)(٢س)}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$ = $\frac{٢س^{٢}+٦-٤س^{٢}}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$ = $\frac{٦-٢س^{٢}}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$

(٩) د (س) = $\frac{\sqrt{س}}{١-س}$ بشرط ان س≠ ١

$$د'(س) = \frac{(\sqrt{س} - \frac{1}{2\sqrt{س}} \times (س-1)) - (-1)\sqrt{س}}{(س-1)^2} = \frac{\frac{س-1}{2\sqrt{س}} + \sqrt{س}}{(1-س)^2}$$

$$(١٠)\ د(س) = \frac{1-س+س^2}{1+س+س^2}$$

$$د'(س) = \frac{(1+س+س^2)(-1+2س) - (1-س+س^2)(1+2س)}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د'(س) = \frac{-1-س-س^2+2س+2س^2-1+س-س^2-2س+2س^2-2س^3}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د'(س) = \frac{-2+2س^2}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د(س) = \frac{2س^2-2}{(1+س+س^2)^2}$$

١١) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى الذي معادلته

ص= (٢س^٢ + ٣) (١- س^٣) عندما س = ١

الحل

عندما س = ١ تكون ص = (٢ (١) + ٣) (١-١) = ٠

النقطة هي (١ ، ٠)

$$\frac{ع ص}{ع س} = (٢س^٢ + ٣)(-٣س^٢) + (١ - س)(٤ س)$$

$$\left.\frac{ع ص}{ع س}\right|_{س=١} = (٢ + ٣)(-٣(١)^٢) + (١-١)(٤ \times ١)$$

$$= -١٥ + ٠$$

$$\frac{ع ص}{ع س}$$

$$= -١٥$$

معادلة المماس : ص -ص$_١$ = م (س - س$_١$)

obeikandl.com

ص - ٠ = -١٠ (س - ١)

ص = -١٠س + ١٠

معادلة المماس : ص + ١٠س - ١٠ = ٠

معادلة العمودي : ص - ٠ = $\frac{١}{١٠}$ (س - ١)

١٠ص = س-١

١٠ ص - س +١ = ٠

١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى الذي معادلته :

ص= $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٥}$ والتي يكون المماس عندها موازيا المحور السيني

الحل

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س^{٢}+٢س+٢)(١) - (س+١)(٢س+٢)}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س^{٢}+٢س+٥-٢س^{٢}-٢س-٢س-٢}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-س^{٢}-٢س+٣}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

يكون المماس // محور السيني عندما $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ أي البسط = صفر

-س^{٢} - ٢ س - ٣ = ٠

س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠

(س + ٣) (س - ١) = ٠

س = -٣ س = ١

وبالتعويض ص = $\frac{-١}{٤}$ ، ص = $\frac{١}{٤}$

النقطتان هما (-٣ ، $\frac{-١}{٤}$) ، (١ ، $\frac{١}{٤}$)

١٣) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته

obeikandl.com

ص = $\frac{٤س}{س^٢+٤}$ عند نقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١)

الحل

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{(س^٢+٤)(-٤)٤س)(٢س)}{(س^٢+٤)^٢}$

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٤س^٢+١٦-٨س^٢}{(س^٢+٤)^٢} = \frac{١٦-٤س^٢}{(س^٢+٤)^٢}$

$\left|\frac{ع ص}{ع س}\right|_{(٠،٠)} = \frac{٠-١٦}{(٠+٤)^٢} = \frac{١٦}{١٦} = ١$

$\left|\frac{ع ص}{ع س}\right|_{(٢،١)} = \frac{١٦-١٦}{٦٤} = \frac{٠}{٦٤} =$

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٥س}{س^٢+١}$ عندما س = ٢

الحل

عندما يكون س = ٢ تكون ص = $\frac{٢×٥}{٢^٢+١} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

النقطة هى (٢ ، ٢)

نوجد $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٥+٥س^٢-١٠س^٢}{(١+س^٢)^٢}$

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٥-٥س^٢}{(١+س^٢)^٢}$

$\left|\frac{ع ص}{ع س}\right|_{(٢،٢)} = \frac{-١٥}{٢٥} = \frac{-٣}{٥}$

معادلة المماس : ص - ٢ = $\frac{-٣}{٥}$ (س - ٢)

٥ ص - ١٠ = -٣ س + ٦

٥ ص + ٣ س - ١٦ = ٠

obeikandl.com

ميل العمود = $\frac{٥}{٣}$

معادلة العمودي : ص - ٢ = $\frac{٥}{٣}$ (س - ٢)

٣ص - ٦ = ٥س - ١٠

٣ص - ٥س + ٤ = ٠

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٢س+١}{٣-س}$ عندما س = ٥

الحل

نوجد الاحداثي السيني للنقطة بمعلومية إحداثيها الصادي

٥ = $\frac{٢ س +١}{٣-س}$

١٥ - ٥س = ٢س +١

١٤ = ٧ س س = ٢

النقطة هي (٢ ، ٢)

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{(٣ - س) (٢) - (٢ س + ١) (- ١)}{(٣ - س)^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ | $_{(٢،٢)}$ = $\frac{٥+٢}{١}$ = ٧

معادلة المماس : ص - ٥ = ٧ (س - ٢)

ص - ٧ س + ٩ = ٠

معادلة العمود : ص - ٥ = $\frac{-١}{٧}$ (س - ٢)

٧ ص - ٣٥ = - س + ٢

٧ص + س - ٣٧ = ٠

المجموعة الثانية

obeikandl.com

١ - أ - $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١١٢س - ١٠

ب - $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣س^{٢} + ٤س + ١

جـ - $\frac{ع ص}{ع س}$ = (س^{٢} - ٢س + ١) × ٦س^{٢} + (٢س^{٣} + ٥) (٢ س - ٢)

ء - $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣س^{٢} - ٤ س - ٥

هـ - $\frac{ع ص}{ع س}$ = (س^{٤} + ٢ س - ٣) (٦ س^{٥} - ٣٥ س^{٤} + ٢٤س^{٣} + ١٨ س) +

(س^{٦} - ٧ س^{٥} + ٨ س^{٣} + ٩ س^{٢} + ١) (٤س^{٣} + ٢)

و - $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٦س^{٥} - ٢٠س^{٤} - ٨س^{٣} + ٢٤س^{٢}

ل - $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٢س^{٢} - ٤}{س^{٢}}$

م - $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٣س^{٤} - ٤ - ٨س^{٣} ٦س^{٢}}{س^{٦}}$

ن - $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٢٣}{(٤س + ٣)^{٢}}$

ك - $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{-٤س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$

ي - $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

٢ - د$'$ (س) = $\frac{-٢أ}{(س - أ)^{٢}}$

د$'$(٢) = $\frac{-٢أ}{(٢ - أ)^{٢}}$ = -٢

∴ أ = ٤ - ٤أ + أ^{٢} أ^{٢} - ٥ أ + ٤ = ٠ (أ - ٤) (أ - ١) = ٠

∴ أ = ٤ أو أ = ١

obeikandl.com

٣- د (٠) = $\frac{جـ}{٢}$ = ٢ ∴ جـ = ٤ .....(١)

د/ (س) = $\frac{(س^{٢}+٣س+٢)(٢س+ب)-(س^{٢}+ب س+جـ)(٢س+٣)}{(س^{٢}+٣س+٢)^{٢}}$

د/ (٠) = $\frac{٢ب-٣جـ}{٤}$ = -٤ ٢ب -١٢ = -١٦

٢ ب = -٤ ب = -٢

٤- أ - معادلة المماس : ٢٤س -ص +١٢٠ = ٠

معادلة العمودي : س + ٢٤ص +٥ = ٠

ب- معادلة المماس : س - ص +٢ = ٠

معادلة العمودي : س + ص = ٠

جـ - معادلة المماس : ٥ س - ص - ٧ = ٠

معادلة العمودي : س + ٥ ص - ١٧ = ٠

المجموعة الثالثة

١- أ - ٧ (س + ٢)^{٦}

ب - ١٥ (٣س -١)^{٤}

جـ- ٤ (٢س + ٣) (س^{٢} = ٣ س - ٢)^{٣}

ء - ٣س^{٤} (٤ س + ٥) (س + ٣)^{٦}

هـ- (س^{٢}+ ٢ س - ٢)^{١٥} (٢س + ٥)^{١٢} [٢٦ (س^{٢} +٢س - ٣) + ٣٢ (٢ س + ٥) (س + ١)]

و- $\frac{-(س+٩)(س+١)^{٣}}{(س-١)^{٦}}$

م- $\frac{(س^{٢}+١)^{٥}(٣س-٨)^{٨}}{(س^{٢}+٥س-٤)^{٦}}$ ($\frac{١٠س}{س^{٢}+١}$ + $\frac{٢٤}{٣س-٧}$ - $\frac{٦(٢س+٥)}{س^{٢}+٥س-٤}$)

٢ أ - ٢٤(٢ س + ٥)^{١١}

obeikandi.com

ب - $\frac{1}{\sqrt{٢س + ٣}}$

جـ - $\frac{١٢١٥س^{٤}}{(٢س + ١)^{٦}}$ حيث س ≠ - $\frac{١}{٢}$

ء - $\frac{-٢٣س(س^{٢}+١)^{٧}}{(س^{٢}-١)^{٩}}$ حيث س ≠ ± ١

٣-أ - $\frac{-س^{٣}}{٤ص^{٣}}$

ب - $\frac{٤س - ٣ص + ١}{٣س - ٢ص - ٢}$

جـ - $\frac{(٣س^{٢}+٤ س ص - ص^{٢})-}{٢ س^{٢}-٢ س ص + ٦ ص^{٢}}$

ء - $\frac{(٥س^{٤} - ٦ س^{٢}ص^{٢} + ٣ ص^{٤})-}{-٤س^{٣}ص + ١٢س ص^{٣}-٥ ص^{٤}}$

هـ - $\frac{ب^{٢}س}{أ^{٢}ص}$

و - ١

م - $(\frac{ء ص}{ء س})_{(٢،١)}$ = ٣

المجموعة الرابعة

١) ص = $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})^{ن}$ ⟵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ن $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})^{ن-١}$ ×

$\frac{(س^{٢}-١)(×٢ س - (س^{٢}+١)(×٢ س}{(س^{٢}-١)^{٢}}$

= ن $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})^{ن}$ $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})$ × $\frac{-٤س}{(س^{٢}-١)^{٢}}$

obeikandl.com

$$\frac{ع ص}{ع س} = ن ص \frac{-٤س}{س^{٢}-١}$$

$$(١ - س^{١}) \frac{ع ص}{ع س} = ٤ ن س ص$$

٢) د$^{/}$ (س) = ٣ س^{٢} - ٦ س - ٢٤

= ٣س^{٢} - ٦ س - ٢٤ = ٠ ∴ ٣ (س^{٢} - ٢ س - ٨) = ٠

٣ (س - ٤) (س + ٢) = ٠ ∴ س = ٤ أو س = -٢

٣) أ - ص = (س -١)^{٢} (س + ١)

∴ ص$^{/}$ = (س - ١) (٣ س = ١)

ب- ص$^{/}$ = س × $\frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^{٢}}}$ + $\sqrt{١-س^{٢}}$ = $\frac{١-٢س^{٢}}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

٤) ص$^{/}$ = ٦ س^{٢} $\sqrt[٢]{٣س-٦}$ + $\frac{٣}{٢\sqrt[٣]{٣س-٦}}$ × ٢س^{٢}

∴ د$^{/}$ (٠) = ٦×٢٥ $\sqrt[٩]{}$ + $\frac{٣}{\sqrt[٩]{}}$ × ١٢٥ = ٥٧٥

٥) $\frac{ع ص}{ع س}$ = (٢ س) (س^{٣} + ٢ س) (س^{٤} + ٥س^{٢}) + (س^{٢}+١) (٣ س^{٢} + ٢)

(س^{٤} + ٥ س^{٢}) + (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٢ س) (٤ س ^{٣} + ١٠ س)

٦) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ن (س^{٢} - ١)$^{ن-١}$ × ٢ س

الطرف الأيمن = ٢ ن س ص + (١-س^{٢}) ٢ ن س (س^{٢} - ١)$^{ن-١}$

= ٢ ن س (س^{٢} - ١)^{٢} - ٢ ن س (س^{٢} -١)^{ن} = صفر

٧) ص = $\frac{٣-٢س}{٣+٢س}$

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{)-٢ ( ) ٣+٢س) - (٣ - ٢س) × ٢}{(٣ + ٢ س)^{٢}}$ = $\frac{-١٢}{) ٣+٢س (^{٢}}$

obeikandi.com

$\therefore \frac{-٤}{٣} = \frac{-١٢}{(٣+٢س)^{٢}}$ ومنها س = صفر أو - ٣

٨) ص = $(٣س)^{\frac{١}{٢}} + (٣س)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}} \times ٣ - \frac{١}{٢}(٣س)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣$ نأخذ عامل مشترك

$= \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}} [١ - (٣س)^{-١}] = \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}}(١ - \frac{١}{٣س})$

$= \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}}(\frac{٣س - ١}{٣س}) = \frac{٣س - ١}{٢س\sqrt{٣س}}$ بالضرب في $\sqrt{٣س}$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = \frac{(٣س - ١)\sqrt{٣س}}{٦س^{٢}}$

٩) ص = $(\frac{س^{٢}-٢}{س^{٢}+١})^{ن}$

obeikandl.com

إجابة تمرين (٥)

(١) ص$'$ = ٢ س + ٥ – (-حا س) = ٢ س + ٥ + حا س

(٢) ص$'$ = حتا (٥ س^{٢} + ٣س + ١) × (١٠س + س) = (١٠س + س) حتا (٥ س^{٢} + ٣ س + ١)

(٣) ص$'$ = - حا (٥ س + ٣) × ٥ = - ٥ حا (٥ س + ٣)

(٤) ص$'$ = ٥ [حتا(٣ س + ١)]^{٤} × (- حا (٣ س + ١) × ٣
= -١٥ حتا^{٤} (٣ س + ١) حا(٣س + ١)

(٥) $\frac{ع}{ع س}$ (طا ٢س)^{٦} = ٦ (طا٢س)^{٥} قا^{٢} ٢ س× ٢= ١٢ طا^{٥} ٢ س قا^{٢} ٢ س

(٦) $\frac{ع ص}{ع س}$ = حا (٣س + ١) (- حا٧ س) × ٧ + حتا ٧س×حتا(٣س+١) × ٣
= - ٧ حا (٣ س + ١) حا ٧ س + ٣ حتا ٧ س × حتا (٣ س + ١)

(٧) <u>الطريقة الأولى</u> : ص = حتا ٥ س حا ٣ س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = حتا ٥ س حتا ٣س × ٣ + حا ٣ س (-حا ٥ س) × ٥ = ٣ حتا ٥ س حتا ٣ س – ٥ حا ٣ س حا ٥ س

<u>الطريقة الثانية</u> : استخدام حتا أ حا ب = $\frac{١}{٢}$ [حا (أ + ب) – حا (أ – ب)]

ص = $\frac{١}{٢}$ [حا ٨ س – حا ٢ س]

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{٢}$ [٨ حتا ٨ س – ٢ حتا ٢ س] = ٤ حتا ٨ س – حتا ٢ س

وباستخدام القاعدتين : حتاأ حتاب = $\frac{١}{٢}$ [حتا (أ + ب) + حتا (أ – ب)]

حاأ حاب = $\frac{١}{٢}$ [حتا (أ – ب) – حتا (أ + ب)]

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٣}{٢}$ [حتا ٨ س + حتا ٢ س] - $\frac{٥}{٢}$ [حتا ٢ س – حتا ٨ س]

= $\frac{٣}{٢}$ حتا ٨ س + $\frac{٣}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{٥}{٢}$ حتا ٨ س

= $\frac{٨}{٢}$ حتا ٨ س - $\frac{٢}{٢}$ حتا ٢س = ٤ حتا ٨ س – حتا ٢ س

(٨) (أ) $\frac{ء}{ءس}$ (طا ٤٥) = $\frac{ء}{ءس}$ (١) = صفر

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ جا ٣ ك = ٠

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ (حا^{٢} ٥س + حتا^{٢} ٥ س) = $\frac{ء}{ءس}$ (١) = صفر

(٩) (أ) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\text{س٥حا٥ - س ٣حتا٣}}{\sqrt[١٠]{(\text{س٥حتا + س ٣حا})^{٩}}}$

(ب) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ [حتا $\sqrt[٧]{\text{س}^{٢} + ١}$]^{٤} × - حا $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}$ × $\frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt[٧]{(١ + \text{س}^{٢})^{٢}}}$

(١٠) $\frac{ء}{ءس}$ [-حتا^{٢} ($\frac{\text{س}}{٢}$)] = $\frac{ء}{ءس}$ [-حتا^{٢} س] = - (- حا س) = حا س

(١١) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣طا^{٢} (٢س – ٥) قا^{٢} (٢س – ٥) × ٢

= ٦طا^{٢} (٢س – ٥) قا^{٢} (٢س – ٥)

(١٢) ص = حتا س = حا ($\frac{ط}{٢}$ - س) ولكن تفاضل حا س = حتا س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = حتا($\frac{ط}{٢}$ - س) × (-١) =حاس

(١٣) $\frac{ء ص}{ء س}$ = حتا^{٢} × ٣س^{٢} = ٣س^{٢} حتاس^{٢}

ص$^{/}$ = ٣حتا^{٢} (٣-س) × [-حا (٣-س)] × (-١)

= $\frac{٣}{٢}$ حتا (٣-س) [٢حا (٣ –س) حتا (٣ – س)]

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٣}{٢}$ حا٢(٣-س) حتا (٣-س) وعند س = ٣٣

(١٤) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٣}{٢}$ حا ٢ (-٣٠) حتا (-٣٠) = $\frac{٣}{٢}$ (- حا ٦٠) × حتا ٣٠

= - $\frac{٣}{٢}$ × $\sqrt[٣]{\frac{٣}{٢}}$ × $\sqrt[٣]{\frac{٣}{٢}}$ = $\frac{-٩}{٨}$

(١٥) حا س + حتا ص = س + ص بالتفاضل الضمني

حتا س – حا ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ + $\frac{ء ص}{ء س}$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\text{حتا س - ١}}{\text{حا ص + ١}}$

obeikandl.com

(١٦) $س(-حاص)\frac{ع ص}{ع س} + حتاص = حتا(س + ص)(١ + \frac{ع ص}{ع س})$

$-[حتا(س + ص) - حتاص] = [س حاص + حتا(س + ص)]\frac{ع ص}{ع س}$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = \frac{حتاص - حتا(س+ص)}{س حاص + حتا(س + ص)}$

(١٧) $ص = حا^{٢}(س - ٦)^{٢}$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = ٣ حا^{٢}(س - ٦)^{٢} حتا(س - ٦)^{٢} \times ٢(س - ٦) \times ١$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = ٣(س - ٦) حا(س - ٦)^{٢}$ وعند $س = \frac{ط}{٥} = ٣٦$

$\therefore د/(\frac{ط}{٥})\ ٣(\frac{ط}{٦}) حا(٣٠)^{٢} حا ٢ \times (٣٠)^{٢} = \frac{ط}{٢}$ حا ٩٠٠حا٢×٩٠٠ = $\frac{ط}{٢}$

حا٥ط حا١٠ط = $\frac{ط}{٢} \times ٠ =$ صفر

(١٨) $ص = حا٩٠ + حتا\sqrt{س} = ١ + حتا\sqrt{س}$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = -حا\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = -حا\sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(١٩) $\frac{ع ص}{ع س} = حتاس - \frac{١}{٣} \times ٣ حا^{٢}س$ حتاس = حتاس [١ – $حا^{٢}س$]

= حتاس $حتا^{٢}س = حتا^{٣}س$

(٢٠) $س = ص ظا ٢س$

$١ = ص(٢قا^{٢}٢س) + ظا ٢ س (\frac{ع ص}{ع س})$

$\frac{ع ص}{ع س}$ ظا ٢ س + ٢ ص $قا^{٢}$ ٢ س = ١

إجابة تمرين (٦)

(١) ق (جـ) = ٥٩° ∴ $\frac{١٥٠}{\text{جا } ٤٨} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } ٧٣} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا } ٥٩}$

∴ ب' = ١٩٣سم ، جـ' = ١٧٣ سم ∴ محيط Δ = ٥١٦ سم

(٢) ق (< جـ) = ٣٠° ∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{جا } ١٠٥} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } ٤٥} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٣٠}$

∴ أ' = ٤٠ جا ١٠٥ = ٣٩سم ، ب' = ٢٨سم

(٣) ق (< ب) = ٤٠° ∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{جا } ٨٢} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } ٤٠} = \frac{٤٢,٤}{\text{جا } ٥٨} = ٢\text{نق}$

∴ ب' = ٣٢,١٤ سم

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٠,٥ × ٣٢,١٤ × ٢٤,٤ × جا ٨٢ = ٦٧٤,٨سم^{٢}

، ٢ نق = $\frac{٤٢,٤}{\text{جا } ٥٨}$ = ٥٠ ∴ نق = ٢٥سم

(٤) < (جـ) = ٦٣° ∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{جا } ٢١' ٦٢°} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } ٣٩' ٥٤°} = \frac{٩,٢٥}{\text{جا } ٦٣}$

∴ أ' = ٩,٢ سم ، ب' = ٨,٤٦ سم ∴ محيط Δ = ٢٦,٩١ سم

(٥) ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ١١٠} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٤٥} = \frac{١٢,٥}{\text{جا } ٢٥}$

∴ أ جـ = ٢٧,٨ ، ب جـ = ٢٠,٩ = أء = ٥٠,٢ سم^{٢}

∴ مساحة المتوازي = ٢Δ أ ب جـ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٥ × ٢٠,٩ × جا ١١٠

= ٢٤٥,٦ سم^{٢}

(٦) القطران يتقاطعان في م ∴ Δ أم ب فيه: < (م) = ٤٠′ ٥٩٨°

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{جا } ٥٨' ٥٤٤°} = \frac{\text{ب م}}{\text{جا } ٢٢' ٥٣٦°} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٤٠' ٥٩٨°}$

∴ أم = ١٤,٣ ، أ جـ = ٢٨,٦ ∴ ب م = ١١,٩ ∴ ب ء = ٢٣,٨

∴ مساحة المتوازي = ٤Δ أ م ب = ٤ × ٠,٥ × ١٤,٣ × ١١,٩ × جا ٤٠′

(٧) ∵ ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق(∠ب) = ٥٣° ٧′ 48″

∵ ظا جـ = $\frac{٨}{١٥}$ ∴ ق(∠ب) = ٢٠° ٤′ ٥٢٨″ ∴ ق(∠أ) = ٥٢° ٤٧′ ٥٩٨″

∴ $\frac{١٣,٥}{\text{جا ٤٧′ ٥٩٨″}} = \frac{\text{ب′}}{\text{جا ٧′ ٥٣°}} = \frac{\text{جـ′}}{\text{جا ٤′ ٥٢٨″}}$ ∴ ب′ = ١٠,٩ سم ، جـ′ = ٦,٤ سم

(٨) ق(∠ب) = ٥٧٣° ٢٧′

∴ $\frac{\text{أ′}}{\text{جا ١٥′ ٥٦٤″}} = \frac{\text{ب′}}{\text{جا ٢٧′ ٥٧٣°}} = \frac{١٢,٦}{\text{جا ١٨′ ٥٤٢°}} = \frac{\text{جـ′}}{}$

∴ أ′ = ١١,٨٤ ، جـ′ = ٨,٨٥ ∴ المحيط = أ′ + ب′ + جـ′ = ٣٣,٢٩

مساحة Δ = ٠,٥ × ١١,٨٤ × ١٢,٦ × جا ١٨′ ٥٤٢″ = ٥٠,٢ سم٢

، نق = $\frac{\text{ب′}}{٢\text{جا ب}} = \frac{١٢,٦}{٢ \times \text{جا ٢٧′ ٥٧٣°}}$ = ٦,٥٧ سم

(٩) ق(∠جـ) = ٥١٠° ∴ $\frac{\text{ب′}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ′}}{\text{جا جـ}}$ ∴ ب′ = ٣٩,٩ سم

نق = $\frac{٤}{\text{جا ١٠}}$ = ٢٣,٠٩ مساحة Δ = ٠,٥ × ٣٩,٩ × ٨ × جا ٥٠

= ١٢٢,٢ سم٢

(١٠) ق(∠جـ) = ٥٣° < ق(∠ب)

∴ $\frac{\text{أ′}}{\text{جا ٨٠}} = \frac{\text{ب′}}{\text{جا ٤٧}} = \frac{٧,٦}{\text{جا ٥٣°}}$

∴ أ′ = ٩,٤ سم ، ب′ = ٧ سم ∴ محيط Δ = ٢٤ سم

∴ $\frac{\text{جـ′}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧,٦}{\text{جا ٥٣°}}$ = ٢ نق

∴ نق = ٤,٨

obeikandl.com

إجابة تمرين (٧)

(١) أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} − ٢ ب' جـ' جتا أ (١١,٣)^{٢}+(١٥,٢)^{٢} -٢×١١,٣×١٥,٢× جتا ٧٠

∴ أ' = ١٥,٥ سم

(٢) أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع وهي جـ جتا أ = $\frac{(٥٠)^{٢}+(٦٠)^{٢}-(٨٠)^{٢}}{٢ \times ٥٠ \times ٦٠}$ = $\frac{١}{٢}$ -

(٣) ∴ المحيط = ٢٢ ∴ نصف المحيط = ١١

∴ أ ب + أ ء = ١١ ∴ نفرض أ ب = س ∴ أ ء = ١١ − س

Δ أ ب ء فيه:

(ب ء)^{٢} = (أ ب)^{٢} +(أ ء)^{٢} − ٢أ ب جتا أ دائري

٤٩ = س^{٢} +(١١- س)^{٢} − ٢× س× (١١- س) جتا ٦٠ ∴ س^{٢} − ١١ س + ٢٤ = ٠

∴ (س- ٣) (س − ٨) = ٠ ∴ س = ٣ ، س = ٨

∴ أ ب = ٣ سم أ، ٨ سم أ ء = ٨ سم أ ، ٣ سم

(٤) أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} − ٢ ب' جـ' جتا أ = (١٠)^{٢}+(٨)^{٢} - ٢ ×١٠× ٨ × $\frac{٢}{٥}$ = ١٠٠

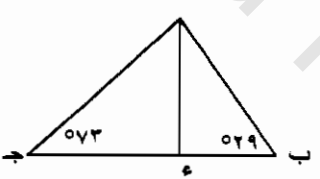
∴ أ' = ١٠ سم

(٥) Δ أ ب جـ فيه : ق(ب أ جـ) = ٧٨ ∴ $\frac{ب جـ}{جا ٧٨}$ = $\frac{أ ب}{جا ٧٣}$

∴ أ ب = $\frac{٢٠ جا ٧٣}{جا ٧٨}$ = ١٩,٥٥

في Δ أ ء ب

(أ ء)^{٢} = (ب ء)^{٢} + (أ ب)^{٢} - ٢× ب ء× أ ب جتا ٢٩ = (١٠)^{٢} + (١٩,٥٥)^{٢}-٢ ×١٠×١٩,٥٥ جتا ٢٩



أ ء = ١١,٨٤ سم

(٦) Δ أ ب جـ جتا ب = $\frac{١٢١-٢٥+٨١}{٢ \times ٧ \times ٢٥}$ = $\frac{١}{٦}$ -

Δ أ جـ ء جتا ء = $\frac{١٢١-٦٤+٨١}{٢ \times ٩ \times ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ ق(ب) ، ق(ء) متكاملتان ∴ الشكل دائري

obeikandl.com

(٧) Δ أ ب جـ قائم لأن : $\overline{أب}^2 + \overline{جـأ}^2 = \overline{ب جـ}^2 = ٦٢٥$

∴ ق (< أ) = ٩٠° ∴ أ ء متوسط من رأس القائمة

∴ أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٢٥ = ١٢\frac{١}{٢}$ جتا جـ = $\frac{٤٩ + ٦٢٥ - ٥٧٦}{٢ \times ٧ \times ٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$

∴ < (جـ) = ٤٤′ ٥٧٣° Δ أ جـ ء : $\overline{ء}^2 = \overline{أجـ}^2 + \overline{جـء}^2 - ٢ \times أجـ \times جـء$ جتا جـ

= ٤٩ + (١٢,٥)^2 - ٢ × ٧ × ١٢,٥ = ١٥٦,٢٥ ∴ أ ء = ١٢,٥ سم

(٨) $\frac{جا أ}{٣} = \frac{جا ب}{٤} = \frac{جا جـ}{٦}$ ـــ (١)

، $\frac{أ'}{جا أ} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{جـ'}{جا جـ}$ ـــ (٢) بضرب (١) × (٢)

$\frac{أ'}{٣} = \frac{ب'}{٤} = \frac{جـ'}{٦} = ك$ ∴ أ′ = ٣ ك ، ب′ = ٤ك ، جـ′ = ٦ك

جتا ب = $\frac{٣٦ك^2 + ٩ك^2 - ١٦ك^2}{٢ \times ٦ك \times ٣ك} = \frac{٢٩}{٣٦}$ ∴ ق(< ب) = ٢٠′ ٥٣٦°

جتا جـ = $\frac{٩ك^2 + ١٦ك^2 - ٣٦ك^2}{٢ \times ٣٦ك \times ٤ك} = \frac{-١١}{٢٤}$ ∴ ق(< جـ) = ١٦′ ٥١١٧°

(٩) Δ أ م ب : (أ ب)^2 = (ا م)^2 + (م ب)^2 − ٢ ا م × م ب جتا ا م ب

= ٦٤ + ١٠٠ - ٢ × ٨ × ١٠ جتا ٥٠ = ٦١,١٥٤ ∴ أ ب = ٧,٨ سم

Δ أ م ء : ٦٤ + ١٠٠ - ٢ × ٨ × ١٠ جتا ١٣٠ = ٢٦٦,٨ ∴ أ ء = ١٦ سم

(١٠) أ′ : ب′ : جـ′ = ٣ : ٥ : ٧ ∴ أ′ = ٣ ك ، ب′ = ٥ ك ، جـ′ = ٧ ك

∴ أكبر زاوية هي جـ

∴ جتا جـ = $\frac{٩ك^2 + ٢٥ك^2 - ٤٩ك^2}{٢ \times ٣ك \times ٥ك} = -\frac{١}{٢}$ ∴ ق(< جـ) = ١٢٠°

obeikandi.com

إجابة تمرين (٨)

(١) جـ' = أ'٢ + ب'٢ - ٢أ'ب' جتا جـ ، (٣٢)٢ + (٤٠)٢ - ٢ × ٣٢ × ٤٠ جتا ٢٨' ٥١١٢

∴ جـ' = ٦٠,٠٢ سم ، $\frac{أ'}{جا أ} = \frac{ب'}{جا ب} = \frac{جـ'}{جا جـ}$

∴ جا ب = $\frac{٤ \times جتا\ ٢٨'\ ٥١١٢}{٦٠,٠٢}$ ∴ ق (< ب) = ١' ٥٣٨° ∴ ق (< أ) = ٣١' ٥٢٩°

(٢) جـ' = أ'٢ + ب'٢ - ٢أ'ب' جتا جـ = ٢٥٠٠ + ٦٤٠٠ - ٢ × ٥٠ × ٨٠ × جتا ٧٢

∴ جـ' = ٨٠,١٧ سم ، $\frac{٥٠}{جا أ} = \frac{٨٠,١٧}{جا\ ٧٢}$ ∴ ق (< أ) = ٢٣' ٥٣٦°

(٣) (٣٧)٢ + (٥٦)٢ - ٢ × ٢٧ × ٢٦ جتا ١٦' ٥٤٣° = ١٤٨,٥ ∴ جـ' = ٣٨,٦ سم

$\frac{٣٧}{جا أ} = \frac{٣٨,٦}{جا\ ٥٣٦'٢٣}$ ∴ ق (< أ) = ٧' ٥٤٨°

(٤) ق (< جـ) = ٥٣' ٥١٤°

$\frac{١٨,٥٩}{جا\ ٢'\ ٥٧} = \frac{ب'}{جا\ ٥'\ ٥١٠٨} = \frac{جـ'}{جا\ ٥٣'\ ٥١٤}$ ∴ ب' = ٢١,٤٧ سم ، جـ' = ٥,٨

(٥) جتا أ = $\frac{(٢٦)^٢ - (١٤)^٢ + (١٨)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٤}$ ∴ ق (< أ) = ٢' ٥١٠٨°

جتا ب = $\frac{(١٨)^٢ - (٢٦)^٢ + (١٤)^٢}{٢ \times ١٤ \times ٢٦}$

∴ ق (< ب) = 15' ١٠' ٥٤١° ∴ ق (< جـ) = ١٤' ٤٧' ٥٦٠°

(٦) جتا س = $\frac{٢٥ + ٤٩ - ٩}{٢ \times ٥ \times ٧} = \frac{١٣}{١٤}$ ∴ ق (< س) = ٤٧' ٥٢١°

جتا ص = $\frac{٤٩ - ٩ + ٢٥}{٢ \times ٧ \times ٣}$ ∴ ق (< ص) = ١٣' ٥٣٨°

جتا ع = $\frac{٩ + ٢٥ - ٤٩}{٢ \times ٣ \times ٥}$ ∴ ق (< ع) = ٥١٢٠°

obeikandl.com

(٧) جـ′ ٢ = أ′ ٢ + ب′ ٢ − ٢ أ′ ب′ جتا = ١٢٩٦ + ٧٢٩ − ٢ × ٣٦ × ٢٧ × جتا ٢٨° ′

∴ جـ′ = ٣٠,٨ سم $\frac{\text{ب′}}{\text{جا ٥° ′ ٥١٠٨}} = \frac{١٨,٥٩}{\text{جا ٢° ′ ٥٧}} = \frac{\text{جـ′}}{\text{جـ ٥٣° ′ ٥١٤}}$

∴ ق (< أ) = ٥٧° ′ ٥٤٦ ، ق (< ب) = ٥٩° ′ ٥٧٦

(٨) مساحة سطح Δ = $\frac{١}{٢}$ س′ص′ جا ع = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ص′ جا ٦٠ = $٥\sqrt{٣}$

∴ ب′ = ١٢ سم جتا ع = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{′ص} + ٢\text{′}}{٢\text{′ع}}$ ∴ جتا ٦٠ = $\frac{٢٥ + ١٤٤ - \text{ع}^{٢}\text{′}}{٢ \times ٥ \times ١٢}$

∴ ع′ ٢ = ١٠٩ ، ع ٢ = ١٠,٤٤ سم $\frac{٥}{\text{جا س}} = \frac{١٢}{\text{جا ص}} = \frac{١٠,٤٤}{\text{جا ٦٠}}$

ومنها ق (< أ) = ٣٠° ′ ٥٢٤ ∴ ق (< ب) = ٣١° ′ ٥٨٤

(٩) جتا أ = $\frac{(٢٩)^{٢} + (١٧)^{٢} - (٢٠)^{٢}}{٢ \times ٢٩ \times ١٧}$

ق (< ب) = ١٤° ′ ٥٤٢ ق (< جـ) = ١٨٠ −

(٥١° ′ ٥٢٤ + ١٤° ′ ٥٤٣) = ٥٥° ′ ٥١٠٢

(١٠) د (س) = ٥٧٠

∴ $\frac{١٠}{\text{جا ٧٠}} = \frac{\text{ص′}}{\text{جا ٦٢}} = \frac{\text{ع′}}{\text{جا ٤٨}}$ ∴ جـ′ = ٧,٩ سم

obeikandl.com

إجابة تمرين (٩)

(١) Δ أجـ: ق(∠جـ أ ء) = ٣٧′ ٥٨° .

$\frac{\text{أجـ}}{\text{جا ١٢′ ٥٢٧°}} = \frac{١٦}{\text{جا ٣٧′ ٥٨°}}$ ∴ أجـ = ٤٨,٨١

Δ أ ب جـ : $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٤٩′ ٥٣°}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جا ٩٠}}$ ∴ أ ب = ٢٨,٥٦

(٢) Δ أ ء جـ : ق (∠ ء أ جـ) = ١٥′ ٥٢٥° $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ١٥′ ٥٤٢°}} = \frac{٢٣٥}{\text{جا ١٥′ ٥٢٥°}}$ ∴ أ ء = ٣٧٠,٤

Δ أ ب ء : $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا ٣٠′ ٥١٧°}}$ ∴ ع = ٣٤٢

(٣) Δ أ ب جـ : $\frac{٧٠}{\text{جا ٤٥°}} = \frac{\text{أ}'}{\text{جا ٤٥°}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا ٩٠°}}$ ∴ أ′ = ٧٠ متر

Δ أ ء جـ : ب′ = ٩٩ ∴ $\frac{٩٩}{\text{جا ٢٠°}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جا ٢٥°}}$ ∴ ء جـ = ١٢٢ متر

(٤) Δ أ ء جـ : $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ٣٥′ ٥١٢°}} = \frac{٧٥}{\text{جا ٥٣′ ٥٤°}}$ ∴ أ ء = ١٩١,٩ متر

Δ أ ب ء : $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٢٨′ ٥١٧°}} = \frac{١٩١,٩}{\text{جا ٩٠°}}$ ∴ أ ب = ٣٥,٩ (ارتفاع البرج)

(٥) Δ أ ب ء : ق (∠ أ) = ٣٤′ ٥٣٥° ق (∠ أ ب ء) = ١٤′ ٥١١°

∴ $\frac{٨,٢٥}{\text{جا ١٤′ ٥١١°}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٣٤′ ٥٣٥°}}$ ∴ ب ء = ٢٤,٦٣

Δ ب جـ ء قائم ∴ ء جـ = ب ء جا ١٢′ ٥٤٣° = ١٧ متر (ارتفاع البرج)

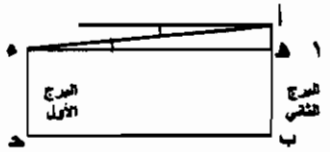
(٦) Δ أ ب ء : ق (∠ أ) = ٣٦′ ٥٢٤° ق (∠ ب ء أ) = ٢٤′ ٥٢٧°

$\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٣٦′ ٥٢٤°}} = \frac{٢٠}{\text{جا ٢٤′ ٥٢٧°}}$ ∴ ب ء = ١٨,٠٩

Δ ب جـ ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\text{ع}}{\text{جا ٣٨}}$ ∴ ع = ١٨,٠٩ × جا ٣٨ = ١١,٤ متر

(٧) Δ أ هـ ء : هـ ء = ب جـ = ٦٠° ق (∠ أ هـ ء) = ٣٠° ، ∴ ق (∠ هـ أ ء) = ٦٠°

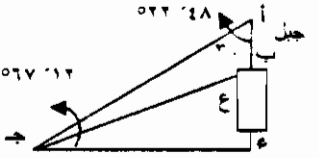
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا ٣٠}} = \frac{٦٠}{\text{جا ٦٠}}$ ∴ أ هـ = ٣٤,٦ ب هـ = ١٥٠ − ٣٤,٦ = ١١٥,٤



∴ ب هـ = ء جـ ∴ ارتفاع البرج الأول = ١١٥,٤ هـ

obeikandi.com

(٨) Δ أ ب جـ: $\frac{ب جـ}{جا ٤٨ ٥٢٢} = \frac{٣٠}{جا ١٢ ٥٣٢}$ ∴ ب جـ = ١,٨١٦



Δ ب ء جـ : ع = ب جـ جا ٣٥
= ١,٨١٦ × جا ٣٥ = ١٢,٥

(٩) < أ جـ ب = ٥٥٧

Δ أ ب جـ : $\frac{ب'}{جا ٥٧} = \frac{١٥٠٠}{جا ٥٧}$ ∴ ب' = ١٧٢٧,٦ Δ أ جـ ء قائم

∴ جـ ء = أ جـ جا أ = ١٧٢٧,٦ × جا ٤٨ = ١٢٨٤ متر

(١٠) البرج جـ ء ، المئذنة أ ب ق(< جـ أ هـ) = ٢٧ ٥٣٢ ق(< جـ ب ء) = ٥٢ ٥٥٧

ق(< أ جـ ب) = ٥٢ ٥٥٧ - ٢٧ ٥٣٢ ∴ < أ جـ ب = ٢٥ ٥٢٥

ق(< ب أ جـ) = ٩٠ + ٢٧ ٥٣٢ = ٢٧ ٥١٢٢ Δ أ ب جـ $\frac{٣٧}{جا ٢٥ ٥٢٥} = \frac{ب جـ}{جا ٢٥ ٥١٢٢}$

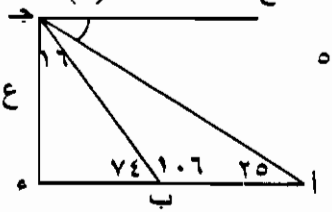
ب جـ = ٧٢,٧٤ ∴ Δ ب جـ ء قائم

∴ ارتفاع البرج جـ ء جا ٥٢ ٥٥٧ = ٧٢,٧٤ × جا ٥٢ ٥٥٧

(١١) أ ب = ١٠٠٠ متر في Δ أ ب جـ: < أ ب جـ = ١٠٦ ، < أ جـ ب = ٤٩

∴ $\frac{١٠٠٠}{جا ٤٩} = \frac{أ جـ}{جا ١٠٦}$ ∴ أ جـ = $\frac{١٠٠٠ \times جا ١٠٦}{جا ٤٩}$ — (١)

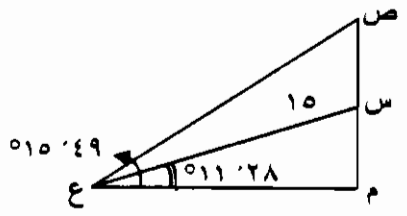
Δ أ ء جـ قائم جا ٢٥ = $\frac{ع}{أ جـ}$ ∴ ع = أ جـ جا ٢٥ (٢)



∴ ع = $\frac{١٠٠٠ \times جا ١٠٦}{جا ٤٩} \times جا ٢٥ = ٥٣٨,٣$

وهي ارتفاع الصخرة

(١٢) Δ س ص ع :



$\frac{س ع}{جا ٤١ ٥٧٤} = \frac{١٥}{جا ٥١ ٥٣}$

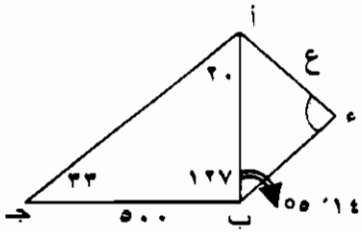
∴ س ع = $\frac{١٥ جا ٤١ ٧٤}{جا ٥١ ٣}$

Δ س م ع: $\frac{م ع}{س ع}$ = جتا ٢٨ ٥١١

(١٣) Δ أ ب جـ : < ب أ جـ = ٢٠ $\frac{٥٠٠}{جا ٢٠} = \frac{أ ب}{جا ٣٣}$ أ ب = $\frac{٥٠٠ \times جا ٣٣}{جا ٢٠}$

Δ أ ب ء : ع = أ ب جا ١٤ ٥٥

obeikandl.com



$= \frac{٥٠٠ \times \text{جا } ٣٣}{\text{جا } ٢٠} \times \text{جا } ١٤' ٥٥° = ٧٢,٦١$

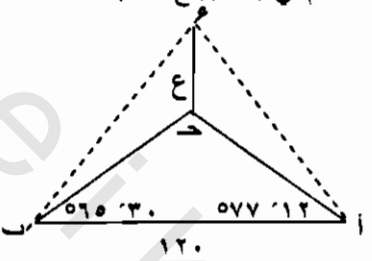
∴ ارتفاع التل = ٧٣ متر

(١٤) Δ أ ب جـ: < أ جـ ب = ١٨′ ٥٣٧°

$\frac{١٢٠}{\text{جا } ١٨' ٥٣٧°} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٣٠' ٥٦٥°}$

$\text{أ جـ} = \frac{١٢٠ \times \text{جا } ٣٠' ٥٦٥°}{\text{جا } ١٨' ٥٣٧°}$

Δ أ جـ ء قائم في جـ ∴ ع = أ جـ ظا ٣٨′ ٥١٢°



∴ ع = $\frac{١٢٠ \times \text{جا } ٣٠' ٥٦٥°}{\text{جا } ١٨' ٥٣٧°} \times$ ظا ٣٨′ ٥١٢°

∴ ع = ٤٠,٣٨ = ٤٠ قدم

(١٥) Δ أ ب ء:

ق (< ب أ ء) = ٩٠ − ٣٥ = ٥٥°

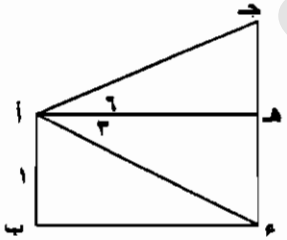
∴ ظا ٥٥° = $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}}$ ∴ ب ء = ١٥ ظا ٥٥°

∴ أ هـ = ١٥ ظا ٥٥° ـــــ (١) Δ جـ هـ أ: ظا ٦٧° = $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ أ}}$

∴ جـ هـ = جـ أ ظا ٦٧° بالتعويض في (١)

جـ هـ = ١٥ ظا ٥٥ ظا ٦٧

∴ جـ هـ = ٥٠,٤٦



∴ ارتفاع البرج (جـ ء) = جـ هـ + هـ ء = جـ هـ + أ ب

∴ ارتفاع البرج (جـ ء) = ٥٠,٤٦ + ١٥ = ٦٥,٤٦

(١٦) Δ أ ب جـ: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ١٤٢} = \frac{٢٠٠}{\text{جا } ٤٨}$

∴ أ جـ = $\frac{٢٠٠ \text{ جا } ١٤٢}{\text{جا } ٤٨}$ Δ أ ء جـ: $\frac{\text{ء جـ}}{\text{أ جـ}} = \text{جا } ٤٢$

∴ ء جـ = أ جـ جا ٤٢ ع = $\frac{٢٠٠ \text{ جا } ١٤٢}{\text{ج } ٤٨}$ جا ٤٢ = ٢٩٨,٨ متر

(١٧) Δ أ جـ ب: $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٦٠} = \frac{٦٠}{\text{جا } ١٠٥}$ ∴ = $\frac{٦٠ \times \text{جا } ٦٠}{\text{جا } ١٠٥} = ٥٣,٨$ متر

(١٨) < أ ب جـ = ١٨٠ − [٣٦ + ٤١ + ٤٢ ٣٢] = ٤٢′ ٥١٠°

∴ < جـ ب ء = ١٨′ ٥٧٤° جـ ء = ٥١٠ جا ١٨′ ٥٧٤° = ٥٠٠

ب ء = ٥١٠ جتا ١٨′ ٥٧٤° = ١٣٨ ∴ ظا أ = $\frac{\text{جـ ء}}{\text{أ ء}} = \frac{٥٠٠}{١٣٨ + ٣٨٥} = ٠,٩٥٦٠$

∴ ق (< أ) = ٤٢′ ٤٣° ∴ ق (< هـ جـ أ) = ق (< جـ أ ء)

= ٤٢ ٤٣ − ٤٢ ٣٢ = ٥١١°

إجابة تمرين (١٠)

∵ قا أ = $\frac{١٧}{٨}$ ∴ جتا أ = $\frac{٨}{١٧}$ ∵ قتا ب = $\frac{٥}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ المطلوب ج (أ + ب) = $\frac{٧٧}{٨٥}$ ∴ جا(أ + ب) = جتا أ جتا ب + جتا أ جا ب

= $\frac{٤٥}{٨٥} + \frac{٣٢}{٨٥} = \frac{٧٧}{٨٥}$

---

٢) جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب = $\frac{١}{\sqrt{١٠}} \times \frac{٣}{\sqrt{١٠}} - \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

= $\frac{١}{٥٠} - \frac{٦}{٥٠} = \frac{-٥}{٥٠} = \frac{-٥}{٢\sqrt{٢٥}} = -\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ∵ Δ ا ب جـ أ + ب + جـ = ١٨٠

∴ ء جـ = ١٨٠ - (أ + ب) ∴ جتا جـ = جتا ١٨٠ - (أ + ب)]

= جتا (أ + ب) = - × $\frac{-١}{٢\sqrt{٢}}$ ∴ جتا جـ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ∴ ق(جـ) = ٤٥°

٣) ظا(أ + ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} + \frac{-٥}{١٢}}{١ - \frac{٤}{٣} \times \frac{-٥}{١٢}} = \frac{٦٣}{١٦}$ ظا (أ - ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} - \frac{١}{١١}}{١ + \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{١١}} = \frac{٣٣}{٥٦}$

---

٤) نثبت أ + ب = ٤٥ أو ظا (أ + ب) = ظا ٤٥

∴ ظا (أ + ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} + \frac{-٥}{١٢}}{١ - \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{١٠}}$ = ١ ⇦ (١)

∵ ظا ٤٥ = ١ ∴ ظا (أ + ب) = ظا ٤٥ ∴ أ + ب = ٤٥

---

٥) نثبت أن: أ + ب = ٤٥ - جـ أو ظا (أ + ب) = ظا (٤٥ - جـ) ∴ الأيمن = ظا (أ + ب)

= $\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥}}$ = $\frac{٧}{٩}$ ⇦ (١)

∴ الأيسر = ظا (٤٥ - جـ) $= \frac{\frac{١}{٨} - ١}{١ + \frac{١}{٥} \times ١} = \frac{٧}{٩}$

∴ الطرفين متساويان

٦) ٥ جا أ = -٣ ∴ جا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ∴ جتا ب = $\frac{٧}{٢٥}$ (الربع الرابع)

قتا (أ - ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ - ب)}}$ ∴ جا (أ - ب) = $\frac{-٣}{٥} \times \frac{٧}{٢٥} - (\frac{-٤}{٥}) \times$

$(\frac{-٢٤}{٢٥}) = \frac{-٢١}{١٢٥} - \frac{٩٦}{١٢٥} = \frac{-١١٧}{١٢٥}$ ∴ قتا (أ - ب) = $\frac{-١٢٥}{١١٧}$

---

٧) ∴ أ : ب : جـ = جا أ : جا ب : جا جـ

جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا ب $\frac{١٢}{١٣}$ ∴ جا (أ + ب) = جا جـ

$= -\frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{١٣} + \frac{١٥}{٦٥} = \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٤٨}{٦٥} = \frac{٦٣}{٦٠}$

∴ جا جـ = $\frac{٦٣}{٦٥}$ ∴ أ : ب : جـ = $\frac{٣}{٥}$: $\frac{١٢}{١٣}$: $\frac{٦٣}{٦٥}$

بالضرب في ٦٥ = ٣٩ : ٦٠ : ٦٣ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

---

٨) الأيمن = جا(٣٠ - ٧) + جتا(٦٠ - ٧)

= جا٣٠ جتا٧ - جتا٣٠ جا٧ + جتا٦٠ جتا٧ + جا٦٠ جا٧

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٧ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا٧ + $\frac{١}{٢}$ جتا٧ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا٧ = جتا٧ = الأيسر

---

٩) ظا ٧٥ = ظا (٤٥ + ٣٠) $= \frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٣٠}}{١ - \text{ظا ٤٥ ظا ٣٠}}$ ظا٧٥ = $\frac{١ + \text{ظا ٣٠}}{١ - \text{ظا ٣٠}}$

∴ ظا٧٥ - ظا٣٠ ظا٧٥ = ١ + ظا٣٠ ∴ ظا٧٥ - ظا٣٠ ظا٧٥ = ١

١٠) ظا $\frac{٧ط}{١٢}$ = $\frac{١ + ٣}{١ \times ٣ - ١}$ = ١٠٥ ظا١٠٥ = ظا(٦٠ + ٤٥)

= $\frac{\text{ظا ٦٠ + ظا ٤٥}}{١ - \text{ظا٦٠ ظا٤٥}}$ = $\frac{١ + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}}$

بالضرب في المرافق

$\frac{١ + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢} = -(٢ + \sqrt{٣})$

١١) ظا١٥ = ظا(٤٥ - ٣٠) = $\frac{١ - \frac{١}{٣}}{١ + ١ \times \frac{١}{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

ظا $\frac{٧ط}{١٢}$ = ظا (٦٠ + ٤٥) = $\frac{١ + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}}$

---

١٢) ظا٥٥ = ظا (٤٥ + ١٠) = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ١٠}}{١ - \text{ظا٤٥ ظا١٠}}$ = $\frac{١ + \text{ظا ١٠}}{١ - \text{ظا ١٠}}$ = الأيسر

١٣) جتا ٨٢ = جا ٨ (زويتان متتاليتين) المقدار = جا٣٧ جتا٨ + جتا٣٨ جا٨

= جا (٣٧ + ٨) = جا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

١٤) المقدار = جتا١٠٥ جتا١٥ + جا١٠٥ جا١٥ (جتا٧٥ = جا١٥)

= جتا (١٠٥ - ١٥) = جتا٩٠ = صفر

---

١٥) المقدار = ظتا (٤٠ - ١٧٥) = ظتا (-١٣٥) = - ظتا١٣٥ = - (-١) = ١

١٦) المقدار = جتا(—— + ——) = جتا—— = جتا—— =جتا٩٠ = صفر

١٧) المقدار = ظتا (١٥ - ١٥٠) = (-١٣٥) = - ظتا١٣٥ = -(-١)=١

١٨) المقدار = جا٣٤ جا٧٩ + جتا٣٤ جتا٧٩ = جتا(٧٩ - ٣٤) = جتا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

١٩) المقدار = $\frac{\text{جتا}(٤٢ - ١٣)}{\text{جا}(٢٥ + ٣٥)} = \frac{\text{جتا}٣٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{١} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢٠) صورة البسط جتا(أ - ب) ، صورة المقام جا(أ + ب)

∴ المقدار = $\frac{\text{جتا}(٤٣ - ١٣)}{\text{جا}(٣٠ + ٢٢)} = \frac{\text{جتا}٣٠}{\text{جا}٤٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{١} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١) الأيمن = ظا(٤٥ + أ) = $\frac{\text{ظا}٤٥ + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}٤٥ \text{ ظا أ}} = \frac{١ + \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{١ - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}$

$= \frac{\frac{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ}}} = \frac{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}$

---

٢٢) ∵ أ + ب + جـ = ١٨٠ ∴ أ + ب = ١٨٠ - جـ ظا(أ + ب) = - ظا جـ

∴ $\frac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}} = -\text{ظا جـ}$ ∴ ظا أ + ظا ب = - ظا جـ

∴ ظا أ + ظا ب = - ظا جـ + ظا أ ظا ب ظا جـ

∴ ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

---

٢٣) $\frac{\text{جا}(س + ص)}{\text{جا}(س - ص)} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{١}$ ∴ $\frac{\text{جا}(س + ص)}{\text{جا}(س - ص)} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{\text{جا س جتا ص} + \text{جتا س جا ص}}{\text{جا س جتا ص} - \text{جتا س جا ص}} = \frac{٣}{٢}$

٣ جا س جتا ص - ٣ جتا س جا ص = ٢ جا س جتا ص + ٢ جتا ص جا ص

∴ جا س جتا ص = ٥ جتا س جا س ∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{٥ \text{ جا ص}}{\text{جتا ص}}$

∴ ظا س = ٥ ظا ص

٢٤) الأيمن = (جا أ جتا ب + جتا أ جا ب) (جا أ جتا ب - جتا أ جا ب)

= جا^{٢} جتا^{٢}ب - جتا^{٢}ب . جتا^{٢}أ جا^{٢}ب (فرق بين مربعين)

= جا^{٢} أ(١ - جا^{٢}ب) - جا^{٢}ب(١ - جا^{٢}أ) = جا^{٢}أ - جا^{٢}أجا^{٢}ب - جا^{٢}ب - جا^{٢}ب + جا^{٢}أ جا^{٢}ب = جا^{٢}أ - جا^{٢}ب = الأيسر

٢٥) ∠أ + ∠ب + ∠جـ = ٩٠ ∴ ∠أ + ∠ب = ٩٠ - ∠جـ

ظا (أ + ب) = ظا(٩٠ - جـ) ∴ ظا(أ + ب) = ظتا جـ

∴ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}} = \frac{\text{١}}{\text{ظا جـ}}$ ∴ ظا أ ظا جـ + ظا ب ظا جـ = ١ - ظا أ ظا ب

∴ ظا أ ظا ب + ظا أ ظا جـ + ظا ب ظا جـ = ١

obeikandl.com

إجابة تمرين (١١)

١) جتا ٣جـ = جتا (٢ جـ + جـ) = جتا ٢جـ . جتا جـ - جا ٢جـ جا جـ
= ٢جتا٣ جـ - ٢جـ جـ (١ - جتا٢جـ) = ٤ جتا٣ جـ - ٣ جتا جـ

٢) الأيمن = $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}س}{١ - ١ \times \text{ظا}^{٢}س} - \frac{٢\text{ظا}س}{١ - \text{ظا}^{٢}س} = \frac{(١ + \text{ظا}س)^{٢} - ٢\text{ظا}س}{١ - \text{ظا}^{٢}س} = \frac{١ + \text{ظا}^{٢}س}{١ - \text{ظا}^{٢}س}$

$= \frac{١ + \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س}}{١ - \frac{\text{جا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س}} = \frac{\text{جتا}^{٢}س + \text{جا}^{٢}س}{\text{جتا}^{٢}س - \text{جا}^{٢}س} = \frac{١}{\text{جتا}٢س} = \text{قا}٢س$

٣) ١ - (١ - ٢جا^{٢} ٢س)^{٢} = ٢ (٢ جا س جتا س)^{٢}

٤) الأيمن: = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}ب} \div (٢ - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}ب}) = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}ب} \times \frac{\text{جا}^{٢}ب}{٢\text{جتا}^{٢}ب - ١} = \frac{١}{\text{جتا}٢ب}$

---

٥) $\frac{١ + ٢\text{جتا}هـ}{١ + \text{جتا}هـ + ٢\text{جتا}^{٢}هـ - ١} = \frac{١}{\text{جتا}هـ} = \text{قا}هـ$

٦) بتربيع الطرفين (جتا هـ - جا هـ)^{٢} = $\frac{١}{٤}$ ∴ جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ - ٢جاهـ جتاهـ = $\frac{١}{٤}$

∴ ١ - جا٢هـ = $\frac{١}{٤}$ ∴ جا٢هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، جتا٤هـ = ١ - ٢جا^{٢} ٢هـ

$= ١ - ٢ \times \frac{٩}{١٦} = -\frac{١}{٨}$

---

٧) $\frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\frac{هـ}{٢})}{١ + (٢\ \text{جتا}\frac{هـ}{٢} - ١)} = \text{ظا}^{٢}\frac{هـ}{٢}$

obeikandi.com

٨) الأيمن = $(١ + ٢ \text{ جتا}^{٢} \frac{\text{جـ}}{٢} - ١) \times \frac{\text{جا} \frac{\text{جـ}}{٢}}{\text{جتا} \frac{\text{جـ}}{٢}} = \text{جا جـ}$

٩) جتا٢س = جتا س ∴ ٢س = ٣٦٠ - س ∴ ٣س = ٥٣٦٠° ∴ س = ١٢٠

١٠) جتا^{٢}أ جتا^{٢}ب - جا^{٢}أ جا^{٢}ب = جتا^{٢}أ (١ - جا^{٢}ب) - (١ - جتا^{٢}أ) جا^{٢}ب
= جتا^{٢}أ - جتا^{٢}أ جا^{٢}ب - جا^{٢}ب + جتا^{٢}أ جا^{٢}ب = الطرف الأيسر.

---

١١) الأيمن = $\frac{\text{ظا}٤٥ + \text{ظا س}}{١ - \text{ظا}٤٥ \text{ ظاس}} = \frac{١ + \text{ظاس}}{١ - \text{ظاس}}$

١٢) $\frac{١}{\text{جا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \frac{١ + ٢ \text{جتا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢} - ١}{٢ \text{جا} \frac{\text{س}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{س}}{٢}} = \text{ظتا} \frac{\text{س}}{٢}$

---

١٣) الأيسر = $\frac{٢ \text{جاهـ} - ٢ \text{جاهـ جتاهـ}}{٢ \text{جاهـ} + ٢ \text{جاهـ جتاهـ}}$

$= \frac{٢ \text{ جاهـ} (١ - ١ + \text{جا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢})}{٢ \text{ جاهـ} (١ + ٢ \text{ جتا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢} - ١)} = \text{ظا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢}$

---

١٤) الأيمن = $\frac{١ + \text{جتا أ} + ٢ \text{جتا}^{٢} \text{أ} - ١}{١ + ٢ \text{جتا}^{٢} \text{هـ}} = \text{جتا أ}$

---

١٥) جا ٤أ - ٢جا ٢أ = ٢جا٢أ جتا ٢أ - ٤ جا أ جتا أ = ٤ جا أ جتا أ (جتا٢أ - ١)
= ٤جا أ جتا أ (١ - ٢ جا^{٢}أ - ١) = ٨جا^{٣}أ جتا أ

---

١٦) ٢جتا^{٢}أ - ٤ جتا أ + ٣ = ٢(جتا أ - ١)^{٢} = ٢(١ - ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ - ١)^{٢}

$= ٨جا^{٤} \frac{أ}{٢}$

١٧) $٢جاهـ جتاهـ \times \frac{جتا هـ}{جا هـ} - جا٢هـ \times \frac{جتا٢هـ}{جا٢هـ}$

$= ٢جتا^{٢}هـ - (٢ جتا^{٢}هـ - ١) = ١$

١٨) $\frac{جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ}{جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ} = \frac{(جتاهـ - جاهـ)(جتاهـ - جاهـ)}{(جتاهـ + جاهـ)^{٢}}$

$\frac{جتاهـ - جاهـ}{جتا هـ + جا هـ}$ بالقسمة على جتا هـ بسطاً ومقاماً $= \frac{١ - ظاهـ}{١ + ظاهـ}$

---

١٩) $\frac{١ - جتا٢أ}{١ + (٢جتا^{٢}أ - ١)} = \frac{١ - (١ - ٢جا^{٢}أ)}{١ + (٢جتا^{٢}أ - ١)} = \frac{جا^{٢}أ}{جتا^{٢}أ} = ظا^{٢}أ$

٢٠) الأيمن

$= ١ + ١ - ٢ جا^{٢}هـ + ٢جا^{٢}هـ = ٢ =$ الأيسر.

---

٢١) $\frac{٢جا س جتا س}{جتا س} + \frac{١ - ٢ جا^{٢}س}{جا س} = ٢جا س + \frac{١}{جا س} - ٢جا س = قتا س$

٢٢) جا جـ جتا جـ $(جتا^{٢}جـ - جا^{٢}هـ) = \frac{١}{٤}$ $\therefore \frac{١}{٢} \times جا٢جـ \times جتا٢جـ = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}$ جا٤جـ $= \frac{١}{٤}$

٢٣) حاول بنفسك .

---

٢٤) $\frac{١ + جتاجـ + ٢جتا^{٢}جـ - ١}{جا جـ + ٢جا جـ جتا جـ} = \frac{جتاجـ (١ + ٢جتا جـ)}{جاجـ (١ + ٢ جتا جـ)} = ظتا جـ$

٢٥) الطرف الأيمن = ١ - ٢جا^{٢}($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٥س}{٢}$) = جتا^{٢} ($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٥س}{٢}$)

= جتا ($\frac{ط}{٤}$ - ٥س) = جا٥س = الطرف الأيسر

---

٢٦) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جاأ جتاب + جتاأ جاب + جاأ جتاب - جتاأ جاب}}{\text{جتاأ جتاب - جاأ جاب + جتاأ جتاأ + جاأ جاب}}$

= $\frac{٢\text{جا أ جتا ب}}{٢\text{ جتا أ جتا ب}}$ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ = ظا أ = الأيسر.

٢٧) الطرف الأيمن: $\frac{\text{جا٣جـ جتا جـ - جتا٣جـ جا جـ}}{\text{جا جـ - جتا جـ}}$

= $\frac{\text{جا(٣جـ - جـ)}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = $\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = $\frac{٢\text{جا جـ جتا جـ}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = ٢ = الأيسر

٢٨) الطرف الأيمن = جتا^{٢} ٢جـ + ٤جتا^{٢}جـ = (٢جتا^{٢} جـ - ١)^{٢} + ٤جتا^{٢}جـ

= ٤جتا^{٤}جـ - جا^{٤}جـ + ١ + ٤جتا^{٢}جـ= ٤جتا^{٤}جـ + ١ = الأيسر

---

٢٩) جتا^{٤}جـ - جا^{٤}جـ = (جتا^{٢} + جا^{٢}جـ) (جتا^{٢}جـ - جا^{٢}جـ) = ١ × جتا٢جـ = جتا٢جـ

٣٠) الطرف الأيمن: $\frac{\text{(جتا هـ + جا هـ)}^{٢}\text{(جا هـ - جتاهـ)}^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ - جا}^{٢}\text{هـ}}$

= $\frac{٢\text{جتا هـ} \times ٢\text{جا هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$ = $\frac{٢\text{جا٢هـ}}{\text{جتا٢هـ}}$ = ٢ظا٢هـ

obeikandl.com

اجابة تمارين (١٢)

(١)

١- المجال = [٢ ؛ ٥] ، المدى = [٧ ، ٧]

٢- المجال = [- ٢ ، ∞ [، المدى=] ٠ ، ∞ [

٣- المجال = [-٣ ، ٥] ، المدى = [-٤ ، ٥]

٤- المجال = ح ، المدى =] - ∞ ، ٤]

(٢)

١- المجال = ح ، المدى = { ١ }

٢- المجال = ح ، المدى = { -٣ }

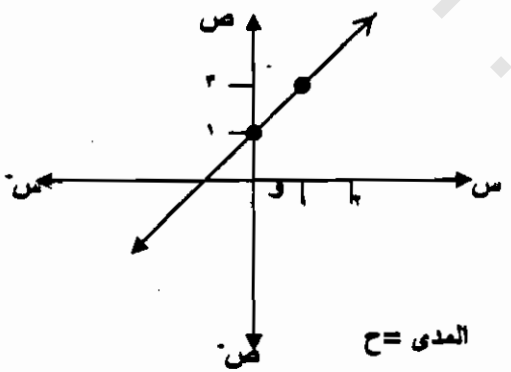
٣- المجال = [-٣ ، ٤ [، المدى = { ٢ }

٤- المجال = ح ، المدى = { ٢ ، -٥}

(٣)

أ)

س	٠	١
ص	١	٣

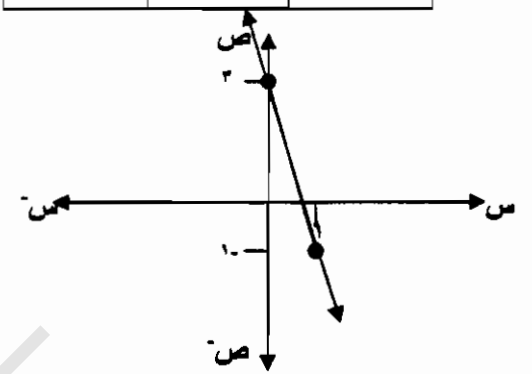


المجال = ح المدى =ح

obeikanal.com

ب)

س	٠	١
ص	٣	١-



المجال = ح المدى = ح

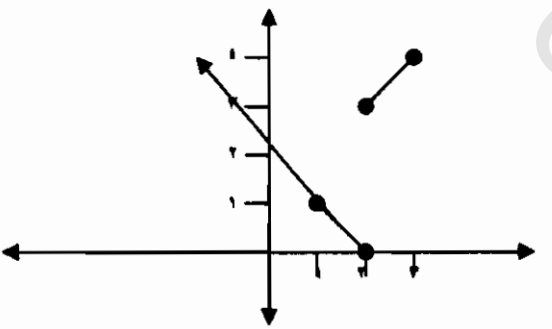
ج)

د (س) = س + ١ ، س ≤ ٢

س	٢	٣
ص	٣	٤

د (س) = ٢ – س ، س > ٢

س	٢	١
ص	٠	١



obeikandl.com

(٤)

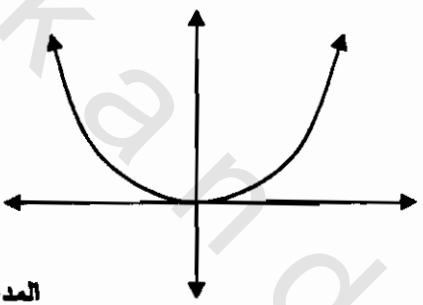
١) المجال = ح ، المدى = ح

٢) المجال = ح ، المدى = ح

(٥)

١) س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢}$ = ٠

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص	٤	١	٠	-١	٤

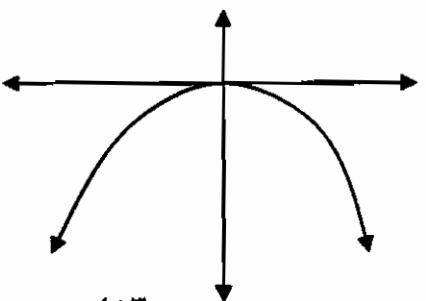


المجال = ح المدى [٠ ، ∞[

ب)

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص	-٤	-١	٠	-١	-٤

المجال = ح ، المدى =] - ∞، ٠]



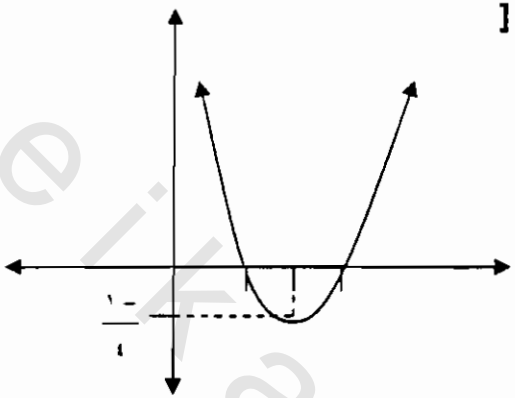
obeikandl.com

ج) س = $\frac{-ب}{2أ}$ = $\frac{٥}{٢}$ ، د ($\frac{٥}{٢}$) = $\frac{٢٥}{٢}$ − ٥ × $\frac{٥}{٢}$ + ٦ = $\frac{-١}{٤}$

∴ رأس المنحنى ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{-١}{٤}$) ، ∵ أ > ٠ ∴ الفتحة لأعلى

توجد أصفار الدالة (س − ٣) (س − ٢) = ٠ ∴ س = ٣ ، ٢

المجال = ح ، المدى [$\frac{-١}{٤}$ ، ∞ [

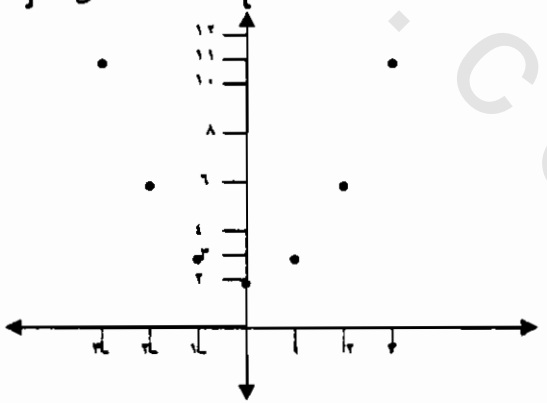


٦) ∴ المجال عبارة عن مجموعة وليس فترة

∴ المدى يكون ايضاً مجموعة والشكل البياني يكون نقط

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١

المجال = { -٣، -٢ ، -١، ٠، ١، ٢ ، ٣ } المدى = { ١١، ٦ ، ٣ ، ٢ }



obeikandl.com

٧)

المجال = [- ١ ، ٥]

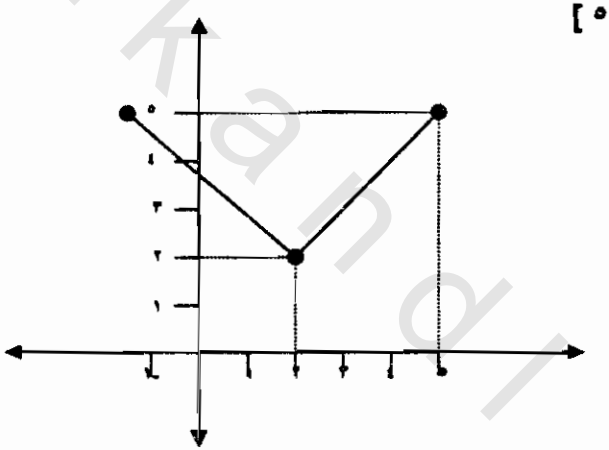
د (س) = ٤ – س ، -١ ≤ س < ٢ (دالة خطية)

س	- ١		(٢)
ص	٥		(٢)

د (س) = س ، ٢ ≤ س < ٥

س	٢		٥
ص	٢		٥

المدى = [٢ ، ٥]



د (س) = ٤ – س ، س ∈ [-١ ، ٢ [

د (-١) = ٤ + ١ = ٥

د (٠) = ٤ – ٠ = ٤

د (١) = ٤ – ١ = ٣

د (٢) غير معروفة

د(س ٩ = س ، س∈ [٢ ، ٥]

د (٢) = ٢

د (٣) = ٣

د (٥) = ٥

obeikandl.com

٨)

المجال = ح

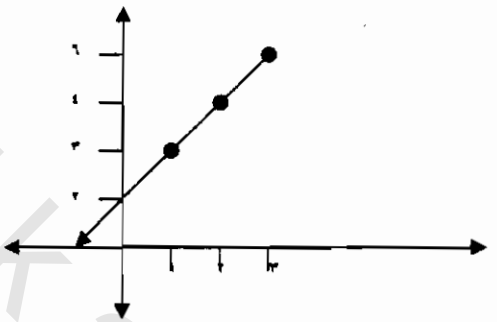
د (س) = ٢ س ، س ≤ ٢

س	٢	٣
ص	٤	٦

د (س) = س + ٢ ، س > ٢

س	(٢)	١
ص	(٤)	٣

المدى = ح



د (س) = ٢ س ، س ≤ ٢

د (٢) = ٤

د (٣) = ٦

د(٤) = ٨

د (س) = س + ٢ ، س > ٢

د (١) = ٣

د (٠) = ٢

د (-١) ١

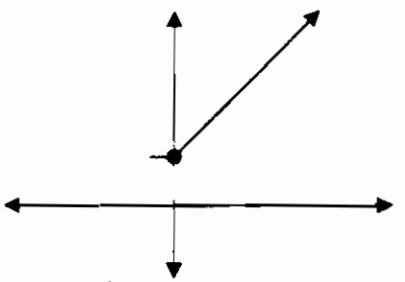
د (- ٤) = -٢

٩)

د (س) { س + ٢ عندما س > ٠ ؛ -١ عندما س < ٠

المجال = ح * = ح – { ٠ }

المدى = [٢ ، ∞[U { -١}



obeikandl.com

١٠)

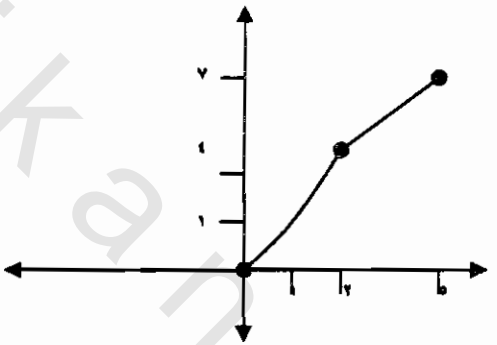
د (س٩ = س ٢ (منحنى) تعين جميع نقط الفترة

س	٠	١	٢
ص	٠	١	٤

د (س) = س+ ٢ (خطية) ب البداية ، النهاية)

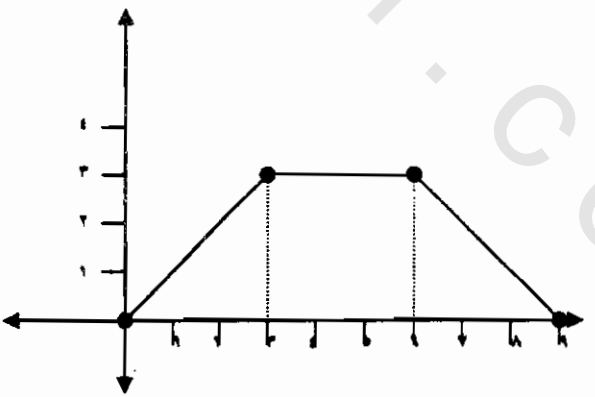
س	(٢)		٥
ص	(٤)		٧

المجال = [٠ ، ٥] المدى = [٠ ، ٧]



١١)

المجال = [٠ ، ٩] المدى = [٠ ، ٣]



obeikandl.com

١٢)

المجال = ح

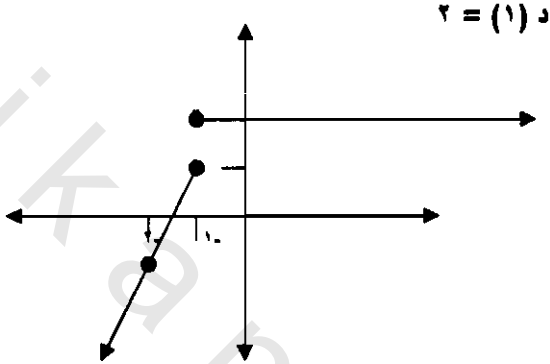
د (س) = ٢ س + ٣ ، س < -١

س	(-١)	-٢
ص	(١)	-١

المدى =] - ∞ ، ١ [U { ٢ }

د (-٣) = -٦ + = -٣ د (-٢) = - ٤ + ٣ = -١

د (٠) = ٢ ، د (١) = ٢

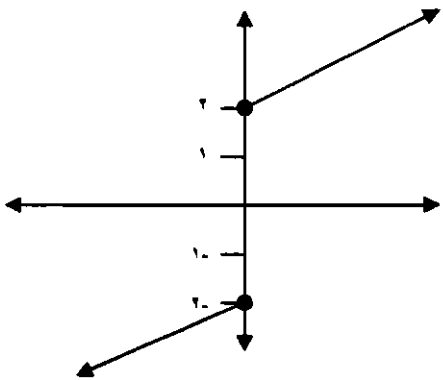


١٣)

المجال = ح * = ح – { ٠ }

المدى =] - ∞ ، -٢ [U] ٢ ، ∞ [

= ح – [-٢ ، ٢]



obeikandl.com

١٤)

$د_{١} = \sqrt{س-٣}$	$د_{٢} = ٥$
معرفة شرط س $-٣ \geq ٠$	
$س \geq ٣$	$م_{٢} = ح$
$م_{١} = [٣ ، \infty[$	

مجال $د_{١} + د_{٢} = م_{١} \cap م_{٢} = [٣ ، \infty[\cap ح = [٣ ، \infty[$

∴ مجال د (س) $= [٣ ، \infty[$

١٥)

$د_{١} = \sqrt{٥-س}$	$د_{١} = \sqrt[٣]{س+١}$
معرفة شرط $٥ - س \geqslant ٠$	الدالة معرفة دائماً
$∴ - س \geqslant -٥$	$م_{٢} = ح$
$س \leqslant ٥$	
$م_{١} =]- \infty ، ٥]$	

مجال $(د_{١} - د_{٢}) = م_{١} \cap م_{٢} = [- \infty ، ٥] \cap ح =]- \infty ، ٥]$

∴ مجال د (س) $= [- \infty ، ٥]$

١٦)

$د_{١} = \sqrt{س+٢}$	$د_{٢} = \sqrt{س-٢}$
معرفة شريط س $+ ٢ \geqslant ٠$	معرفة شرط س $- ٢ \geqslant ٠$
$س \geqslant -٢$	$س \geqslant ٢$
$م_{١} = [-٢ ، \infty[$	$م_{٢} = [٢ ، \infty[$

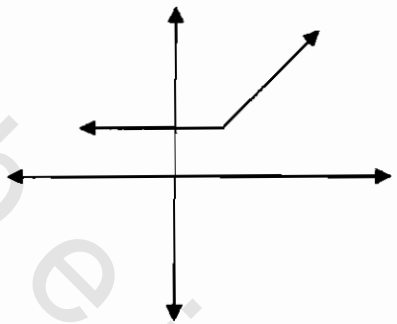
مجال $\frac{د_{١}}{د_{٢}} = م_{١} \cap م_{٢} - \{$ اصفار المقام $\}$

$= [-٢ ، \infty[\cap [٢ ، \infty[- \{٢\}$

= [٢ ، ∞ [- { ٢ } =] ٢ ، ∞ [

١٧) :. مجال د (م١) = ح ن مجال د (م ٢) = ح

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س) ، مجال (د + ر) م١ ∩ م٢ = ح | ح = ح

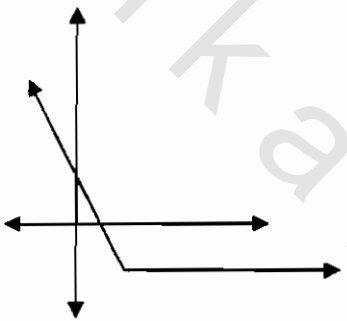


(د + ر) (س) = { ٢ س – ١ ، ١ }

المدى = [١ ، ∞ [

(د + ر) (٣) = ٦ – ١ = ٥

(د + ر) (-٢) = ١



(د – ر) (-٢) = { -١ ، -٢ س + ١ }

المدى = [-١ ، ∞ [

(د – ر) (-٥) = -٢ × -٥ + ١ = ١١

(د × ر) (س) = { س٢ – س ، – س٢ + س }

(د × ر) (-٢) = - ٤ – ٢ = -٦

(د × ر) (-١) = -١ – ١ = -٢

، د (س) مجال = مجال د ∩ مجال ر – { اصفار المقام }

= ح – { صفر }

د (س) = { (س - ١) / س ، (- س + ١) / س }

obeikandl.com

$$\therefore \frac{د}{ر}(-٤) = \frac{١+٤}{-٤} = -\frac{٥}{٤}$$

مجال $\frac{ر}{د}$ = مجال ر ∩ مجال < ٠ { اصفار المقام }

= ح − { ١ }

$$\therefore \frac{ر}{د}(س) = \begin{cases} \frac{س}{س-١} \\ \frac{س}{-س+١} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{ر}{د}(٥) = \frac{٥}{١-٥} = \frac{٥}{٤}$$

obeikandl.com

إجابة تمارين (١٣)

١)

عندما س ≤ ٠

د (س) = ٢ س – ٣

س	ص
٠	- ٣
١	-١
٢	١

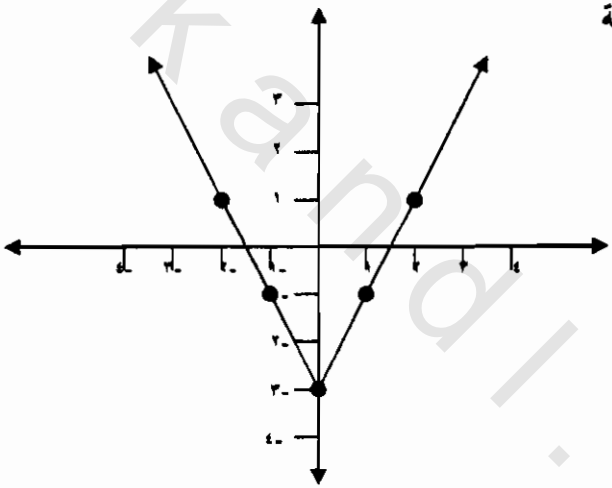
عندما س < ٠

د (س) = -٢ س –٣

س	ص
(٠)	(-٣)
-١	-١
-٢	١

من الرسم : المنحنى متماثل حول الصادات

∴ د (س) زوجية



٢)

س > ٣

د (س) = ٣-س

س	ص
٣	٠
٤	-١
٥	-٢

obeikandl.com

س	ص
٣	٠
٢	١-
١	٢-

س ≥ ٣

د (س) س –٣

من الرسم يتضح ان

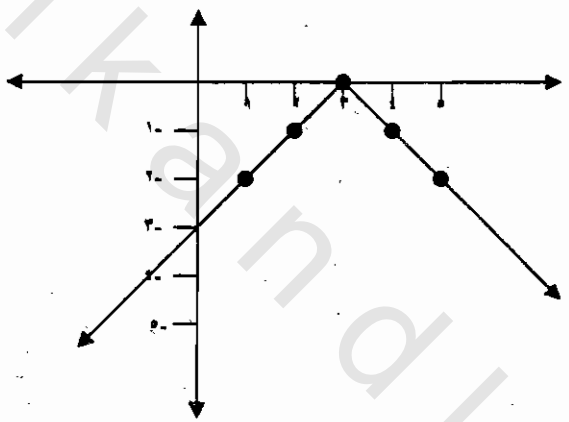
د تزايدية فى الفترة] - ∞ ، ٣]

د تناقصية فى الفترة [٣ ، ∞ [

المدى =] -∞ ، ٠]

منحنى الدالة ليس متماثل عند الصادات ، نقطة الأصل

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية



٣)

د (س) = - ٣

] -∞ ، ٠ [

د (س) = س –٣

] ٠ ، ∞ [

س	٠	١-	٢-	٠	١	٢
د(س)	٣-	٣-	٣-	٣-	٢-	١-

الدالة ليست زوجية ولافردية

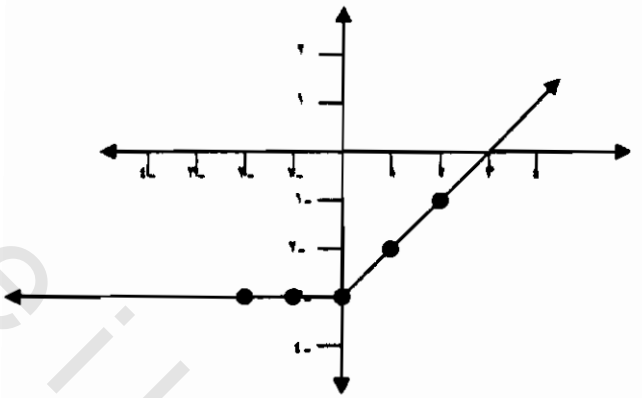
[لأن المنحنى لها غير متماثل حول محور الصادات او حول نقطة الأصل]

المدى = [-٣ ، ∞ [

obeikandl.com

المجال =] -∞ ، ∞ [= ح

د (س) = تزايدية فى الفترة] ٠ ، ∞ [وثابتة فى الفترة] - ∞ ، ٠]



٤)

د (س) = ٢ س – ٣

] ∞ ، ٠ [

د (س) = –٢ س –٣

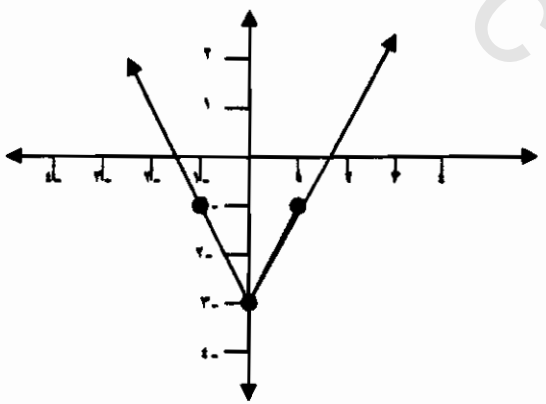
] -∞ ، ٠ [

س	٠	١	٠	١-
د(س)	٣-	١-	٣-	١-

:. المنحنى متماثل حول محور الصادات :. د (- ب) دالة زوجية

المدى = [- ٣ ، ∞ [

د (س) تزايدية فى [٠ ، ∞ [وتناقصية] -∞ ، ٠ [



obeikan.com

٥)

د (س) = ٢

] -١ ، ١ [

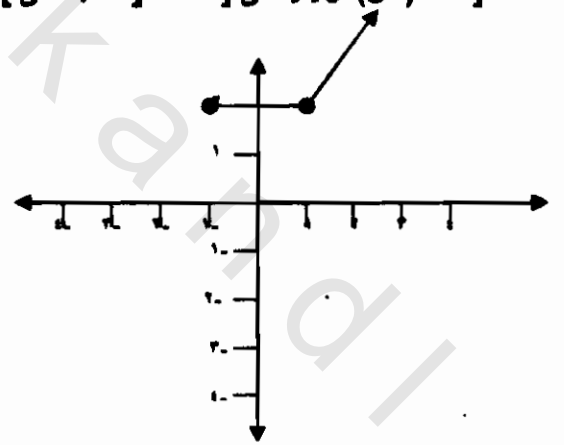
د (س) = ٢س

[١ ، ∞ [

س	-١	٠	١	١	٢	٣
د (س)	٢	٢	٢	٢	٤	٦

د (س) ليست تزايدية ولاتناقصية

المدى = [٢ ، ∞ [، د (س) تزايدية فى [١، ∞ [، ثابتة فى] -١ ، ١ [



٦)

د (س) = س ٢

[٠ ، ∞ [

د (س) = - س٢

] - ∞ ، ٠ [

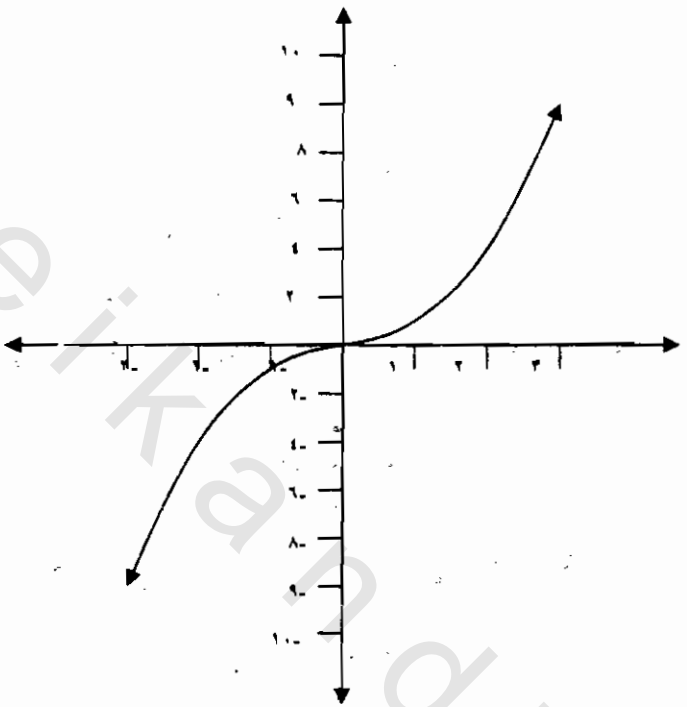
س	-	١	٢	٣	٠	-١	-٢	-٣
د(س)	-	١	٤	٩	٠	-١	-٤	-٩

∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة زوجية المدى =] - ∞ ، ∞ [= ح

الدالة تزايدية س ∈ ح

obeikandl.com



٧)

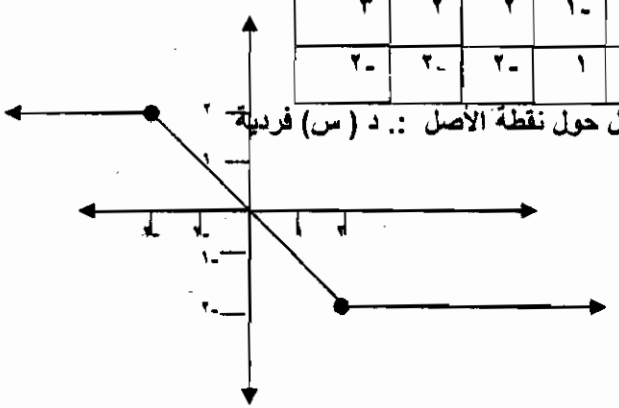
د (س) = ٢ | د (س) = - س | د (س) = -٢

] -∞ ، -٢] |] -٢ ، ٢ [| [٢ ، ∞ [

س	-٢	-٣	-٢	-١	٢	٢	٣
د (س)	٢	٢	٢	١	-٢	-٢	-٢

∴ منحنى الدالة د (س) متماثل حول نقطة الأصل ∴ د (س) فردية

المدى = [- ٢ ، ٢]



٨)

∴ ٣ د (- س) + د (س) = ٤ س^{٣} + ٢س (١)

٣ د (س) + د (- س) = - ٤ س^{٣} – ٢س (٢)

(١) + (٢) ــ

٤ د (- س) + ٤ د (س) = ٠ بالقسمة ÷ ٤

د (- س) + د (س) = ٠

د (- س) = - د (س) ∴ دالة فردية

٩)

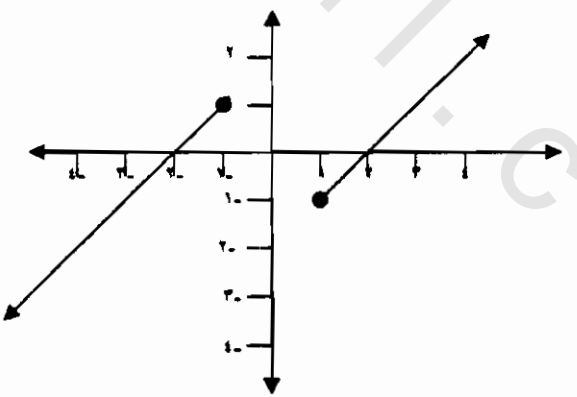
د (س) = س – ٢ | د (س) = س + ٢

[١ ، ∞ [|] - ∞ ، ١-]

س	١	٢	٣	١-	٢-	٣-
د(س)	-	٠	١	١	٠	١-

∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

المدى = ح الدالة تزايدية فى الفترة ح -] –١ ، ١ [



(١٠)

د (س) = $\frac{١٢}{س+٢}$ | د (س) = $\frac{١٢}{س-٢}$

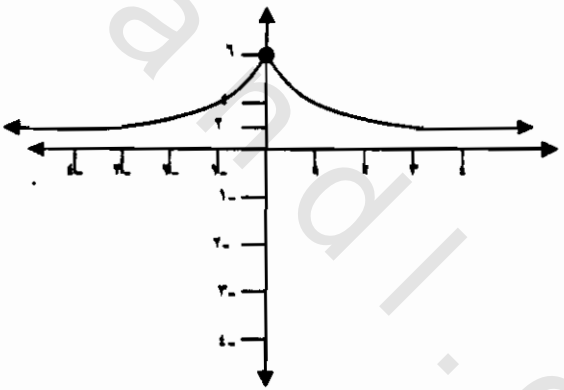
[٠ ، ∞ [|] -∞ ، ٠ [

س	٠	١	٢	٠	١-	٢-
د (س)	٦	٤	٣	٦	٤	٣

:. المنحنى متماثل حول محور الصادات :. د (س) زوجية

المدى =] ٠ ، ٦]

د (س) تزايدية فى] -∞ ، ٠ [لا تزايدية فى [٠ ، ∞ [



(١١)

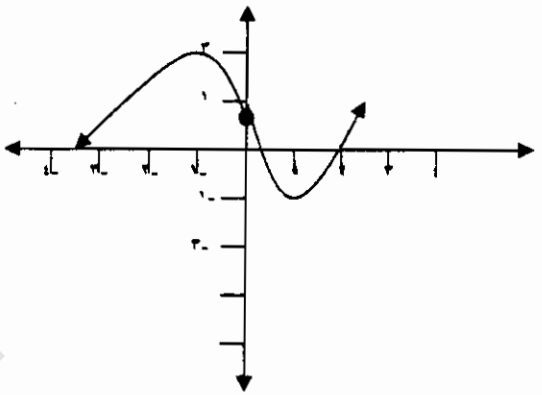
د (س) = س^{٢} – ٣ س + ١ | د (س) = - س^{٢} – س = ١

[٠ ، ∞ [|] - ∞ ، ٠ [

س	٠	١	٢	٠	١-	٢-
د (س)	١	١-	١-	١	٣	٣

د (س) ليست زوجية ولافردية

المدى = ح



د(س) = ٢(- س) ٢ + (- س)٢ – ١ = ٢ س٤ – س٢ – ١

الدالة زوجية

١٣) د (- س) = ٣ د (-س) = د (س) الدالة زوجية

١٤) د (- س) = $\frac{س^{٢}+٩}{س^{٤}-٣}$ الدالو زوجية

١٥) د(- س) = (-١٧)١٧ + ٧ (- س)٥ + (- س)

= - س١٧ – ٧ س٥ – س = - (س١٧ + ٧ س ٥ + س)

الدالة فردية

١) د(-س) = [٣ – (- س)]٢ = [٣ + س]٢ الدالة ليست زوجية ولا فردية

٢) د(-س) = (- س)٣ – حا (- س) = - س٣ + حا س

- (س٣ – حا س) = - د(س) الدالة فردية

١٩) د(-س) = ٥ × ٥ -س + ٥ × ٥ -س ولان الجمع إبدالي

د(- س) = د (س) الدالة زوجية

٢٠) د (- س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$ الدالة زوجية

obeikandl.com

٢١) د (- س) = $\frac{١}{-(س)^{٣}+(س)}$ = $\frac{١}{-س^{٣}+س}$ = $\frac{١}{س^{٣}-س}$ = -د(س)

الدالة فردية

٢٢) د (- س) = $\frac{-س}{-(س)^{٣}+(س)}$ = $\frac{-س}{-س^{٣}+س}$ = $\frac{-س}{-(س^{٣}-س)}$ = $\frac{س}{س^{٣}-١}$

= د (س) الدالة زوجية

٢٣) $\frac{-س}{-(س)^{٢}-٩}$ = $\frac{-س}{-س^{٢}-٩}$ = $\frac{س}{س^{٢}-٩}$ = - د(س) فردية

٢٤) $\frac{١}{-س+٣}$ + $\frac{١}{-س-٣}$ = $\frac{١}{-(س-٣)}$ + $\frac{١}{-(س+١)}$ ($\frac{١}{س-٣}$ + $\frac{١}{س+٣}$)

= - د (س) فردية

٢٥) د(س) = $\frac{(-س)^{٢}\ جتا٣\ (-س)}{(-س)^{٢}+٥}$ = $\frac{س^{٢}جتا٣س}{س^{٢}+٥}$ = د(س) زوجية

٢٦) د(س) = $\frac{(-س)^{٢}\ جتا٣\ (-س)}{(-س)^{٢}+٥}$ = $\frac{س^{٢}جتا٣س}{س^{٢}+٥}$ = - د(س) فردية

٢٧) د(س) = $٥^{س}$ - $٥^{-س}$ د(- س) = $٥^{-س}$ - $٥^{س}$

د(- س) = - ($٥^{س}$ - $٥^{-س}$) د(- س) = - (س)

الدالة فردية

٢٨) د (س) = { - س - ١ عندما س > ٠ ؛ - س + ١ عندما س < ٠ }

د (س) = { س - ١ عندما س > ٠ ؛ س + ١ عندما س < ٠ }

د (- س) = د (س) الدالة زوجية

٢٩) د (س) = (- س)^{٢} + ظا (- س)

= $س^{٢}$ - ظا س = - (- $س^{٢}$ + ظا س)

د(- س) ≠ ± د (س) الدالة ليست زوجية ولا فردية

obeikandi.com

٣٠) د (- س) = ٤ (- س)^{٣} + ٣ جا^{٢} (- س)

= - ٤ س^{٣} + جا^{٢} س = - (٤ س^{٣} – ٣ جا^{٢} س)

د(- س) ≠ ± د (س) الدالة ليست زوجية ولا فردية

obeikandl.com

إجابة تمارين (١٤)

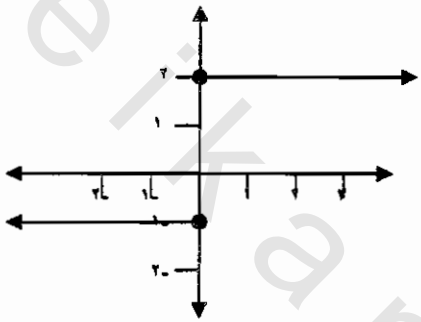
١)

د (س) = -١ د (س ٩ = ٢

] - ∞ ، ٠ ب [٠ ، ∞ [

س	(٠)	٢	٠	٣
د (س)	-١	-١	٢	٢

المدى =] -١ ، ٢]



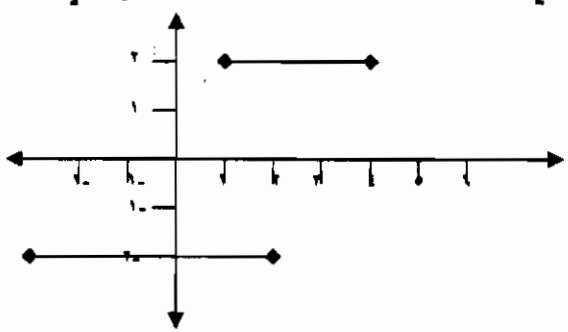
٢)

د (س) = -٢ د (س) = ٢

[-٣ ، ١ [[١ ، ٤]

س	-٣	(١)	١	٤
د (س)	-٢	(-٢)	٢	٢

المجال = [-٣ ، ٤] المدى = [-٢ ، ٢]



obeikandl.com

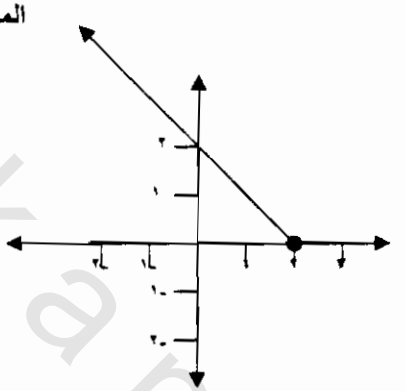
(٣

د (س) = ٤ د (س) = ٢ ــس

[٢ ، ∞ [ ] - ∞ ، ٢ [

س	٢	٣	(٢)	١
د (س)	٤	٤	(٠)	١

المجال = ح المدى + [٢ ، ∞ [



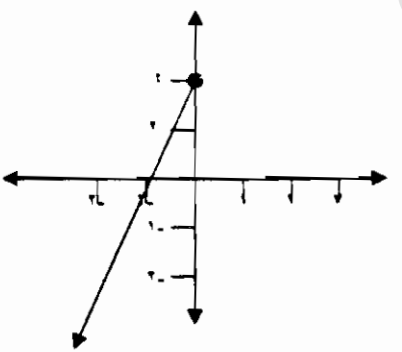
٤)

د (س) =٤ د (س) س + ٤

[- ، ∞ [ ] -∞ ، ٠ [

س	٠	١	(٠)	١-
د(س)	٤	٤	(٤)	٣

المجال = ح المدى =] - ∞ ، ٤]



obeikandl.com

٥)

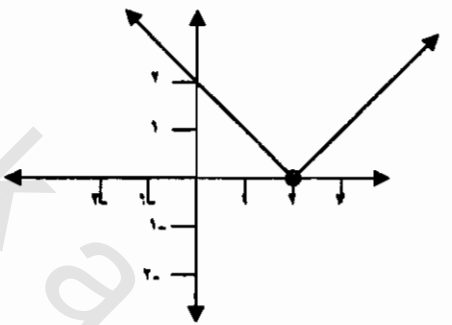
د (س) = س ـ٢ ، [٢ ، ∞ [

د (س) = ٢ ـ س ،] -∞ ، ٢ [

س	٢	٣	٤	(٢)	١	٠
د (س)	٠	١	٢	(٠)	١	٢

المجال = ح

المدى = [٢ ، ∞ [



٦)

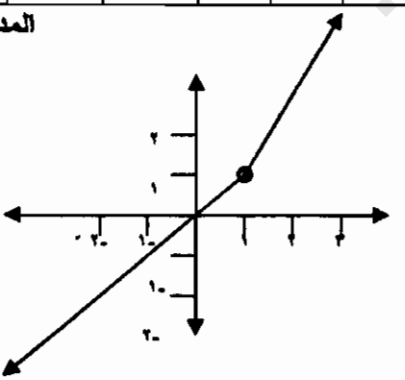
د (س) = س ،] -∞ ، ١ [

د (س) = ٣ س ـ٢ ، [١ ، ∞ [

س	(١)	٠	ـ٢	١	٢	٣
د(س)	(١)	٠	ـ٢	١	٤	٧

المجال = ح

المدى =] -∞ ، ∞ [= ح



obeikandl.com

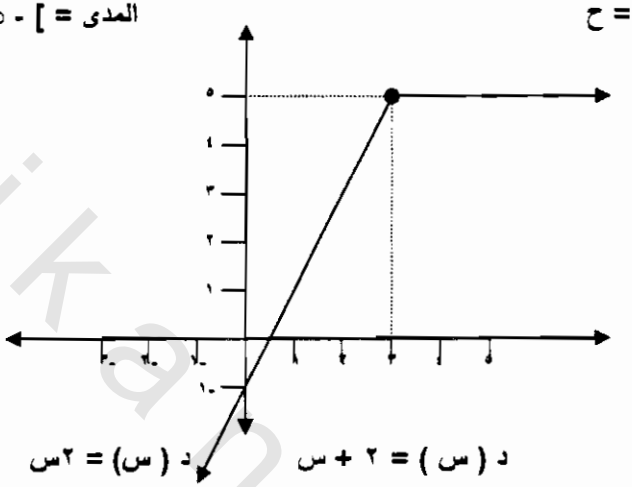
٧)

د (س) = ٢ س – ١ د (س) = ٥

] -∞ ، ٣ [ ] ٣ ، ∞ [

س	٣	٢	١	(٣)	٤	٥
د (س)	٥	٣	١	(٥)	٥	٥

المجال = ح المدى =] - ∞ ، ∞ [= ح



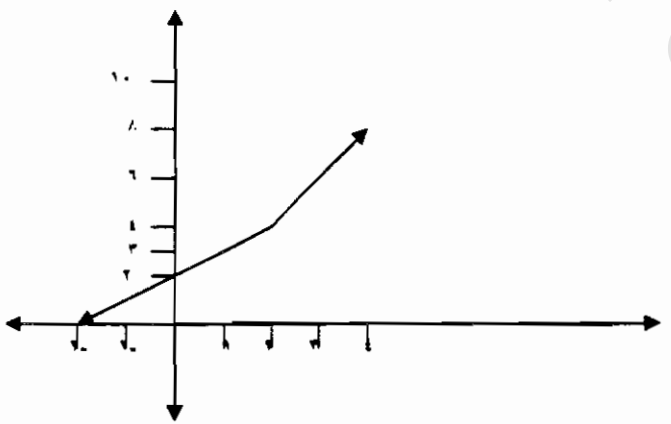
٨)

د (س) = ٢ + س د (س) = ٢س

[-٢ ، ٢] [٢ ، ٤]

س	٢-	١	(٢)	٢	٣	٤
د (س)	٠	٣	(٤)	٤	٦	٨

المجال = [-٢ ، ٤] المدى = [٠ ، ٨]



obeikandi.com

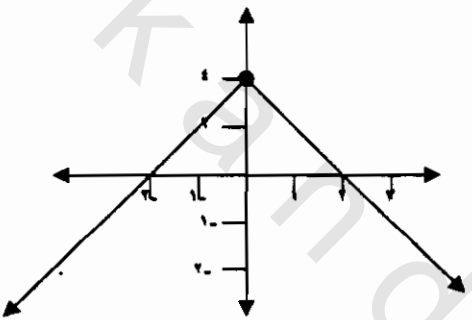
٩)

القاعدة الأولى	القاعدة الثانية
د (٠) = ٤	د (٠) = ٤
د (١) = ٢	د (-١) = ٢
د (٢) = ٠	د (-٢) = ٠

المدى =] -∞ ، ٠]

الأطراد : متزايدة ف] -∞ ، ٠ [ومتناقصة فى [٠ ، ∞ [

الدالة زوجية

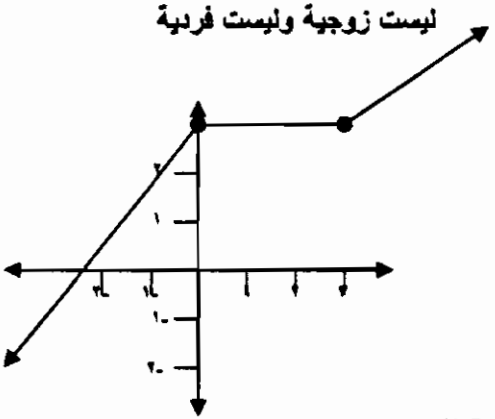


١٠) المجال = ح المدى = ح

الأطراد : متزايدة فى] -∞ ، ٠ [وثابتة فى [٠ ، ٢]

ومتزايدة فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجية وليست فردية



obeikandl.com

١١)

المجال = ح ، المدى = ح

د (س) ٢ – س^{٢} ، س ≤ ٠			د (س) = -٣ + ٢ ، س > ٠			
س	٠	-١	-٢	س	٠	١	٢
ص	٢	١	-٢	ص	٢	-١	-٤

د (٠) = ٢ – ٠ = ٢

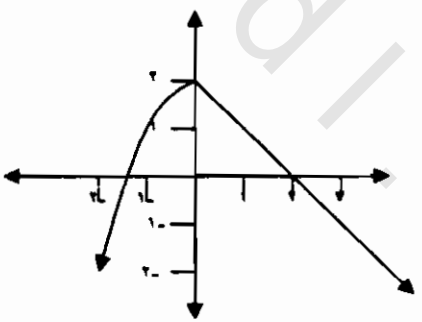
د (٣) = -٩ + ٢ = -٧

د (-٢) ٢ – ٤ = -٢

المدى =] -∞ ، ٢]

الأطراد : متزايدة فى] - ∞ ، ٠] ومتناقصة فى [٠ ، ∞ [

ليست زوجية وليست فردية



obeikandl.com

١٢)

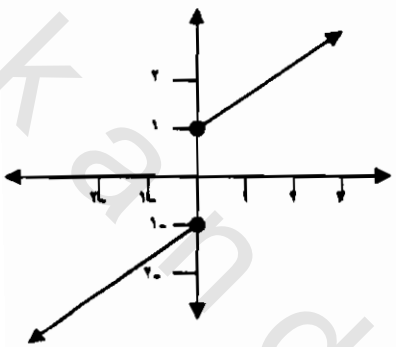
المدى = [- ∞ ، ١- [U { ٠ } U] ١ ، ∞ [

الأطراد : تزايدة فى] - ∞ ، ٠ [

وتزايدية فى] ٠ ، ∞ [

وثابتة عندما س = ٠

النوع : فردية من التماثل حول نقطة الأصل



obeikandl.com

إجابة تمرين (١٥)

١)

|س-١٢= ٣

∴ س - = ٣ او س –٢ = -٣

س = ٣+ ٢ ، س = -٣ + ٢

س = ٥ ، س = -١ ∴ س ∈ { ٥ ، -١}

٢)

∴ ٢١س – ١٣= -٩

س = Ø

٣)

∴ | ٢ س + ١٤ | = | – ١٥ |

∴ | ٢ س + ١٤ | = ٥

٢ س + ٤ = ٥ او ٢س + ٤ = – ٥

٢ س = ٥ – ٤ ٢ س = -٥ – ٤

٢س = ١ ٢س = -٩

س = $\frac{١}{٢}$ س = ٤,٥

س ∈ { ٠,٥ ، -٤,٥ }

٤)

| ٣ س –١٤ | + ٧=٠

∴ | ٣س – ١٤ | = -٧

∴ س = Ø

٥)

∴ | س – ١٣ | = | س –٧ |

اذ | س – ٣ | = س –٧ او س – ٣ = س + ٧

obeikandl.com

س – ٣ – س + ٧= ٠ او س- ٣ + س – ٧= ٠

٢ س – ١٠ = ٠ ٢س = ١٠ س = ٥

٦)

∴ | ٢س – ١٣ = | س + ١٢ |

اما ٢س – ٣ = س + ٢ او ٢س – ٣ = -س ٢

٢ س –٣ – س ٢ =٠ ٢ س - + س + ٢ =٠

س –٥= ٠ ٣ س – ١ =٠س = ٥ ٣ س = ١ س = $\frac{١}{٣}$

س ∈ { ٥، $\frac{١}{٣}$ }

٧) ∴ | ٢س – ١٥ + ٣س – ٧ = ٠ | اذا ٢س س + ٣س – ٧ =٠ أ)

أو ٢س – ٥ –٣ س + ٧ = ٠

ب) من لمعادلة أ) ٥ س – ١٢ =٠ ٥س = ١٢ ∴س= $\frac{١٢}{٥}$

وهى لاتحقق معادلة المقياس

من المعادلة ب) - س + ٢=٠ - س = -٢ س = ٢ ∴ س ∈ { ٢ }

٨)

|٣١س+١٤ + ٩ – ٢ س = ٠ اما ٣ س + ٤ + ٩ – ٢ س = ٠ (أ)

أو ٣س + + ٤ – ٩ + ٢ س = ٠ (ب)

من (أ) س + ١٣ = ٠ س = -١٣ (ب) ٥ س – ٥ = ٠

٥ س = ٥ س = ١ مجموعة الحل Ø

٩)

اس |٢ – ٧اس | +١٢= ٠ (اس | - ٤)(اس |-٣) = ٠

|س| - ٤= ٠ س=±٤

|س| - ٣ = ٠ |س| = ٣ س= ± ٣

س ∈ { ± ٤ ، ± ٣}

obeikandl.com

١٠)

$|س|^{٢} + ٦|س| + ٨ = ٠$ $(|س| + ٢)(|س| + ٤) = ٠$

$|س| + ٢ = ٠$ $|س| = -٢$ $س = \varnothing$

$|س| + ٤ = ٠$ $|س| = -٤$ $س = \varnothing$

١١)

$|س|^{٢} - ٥|س| - ١٤ = ٠$ $(|س| - ٧)(|س| + ٢) = ٠$

$|س| - ٧ = ٠$ $|س| = ٧$ $س = \pm ٧$

$|س| + ٣ = ٠$ $|س| = -٢$ $س = \varnothing$ $س \in \{٧، -٧\}$

١٢)

$|س|^{٢} + ٨|س| - ٢٠ = ٠$ $(|س| + ١٠)(|س| - ٢) = ٠$

$|س| + ١٠ = ٠$ $|س| = -١٠$ $س = \varnothing$

$|س| - ٢ = ٠$ $|س| = ٢$ $س = \pm ٢$ $س \in \{٢، -٢\}$

١٣)

$|س|^{٢} - |س| = ٠$ $|س|(|س| - ١) = ٠$ $|س| = ٠$ $س = ٠$

$|س| - ١ = ٠$ $|س| = ١$ $س = \pm ١$ $س \in \{١، -١\}$

١٤)

$س|س| + ٣ = ٠$ $س(|س| + ٣) = ٠$ $س = ٠$ $|س| + ٣ = ٠$

$|س| = -٣$ ، $= \varnothing$ $س \{٠\}$

١٥)

$٢س - ٦ = ٠$ $س = ٣$

$د(س) = \begin{cases} ٢س - ٦ + ٤ & س \leq ٣ \\ -٢ + ٦ + ٤ & س > ٣ \end{cases} = \begin{cases} ٢س - ٢ & س \leq ٣ \\ -٢س + ١٠ & س > ٣ \end{cases}$

obeikandl.com

د ١ (س)= ٢ س – ٢ | د (س) = - س + ١٠

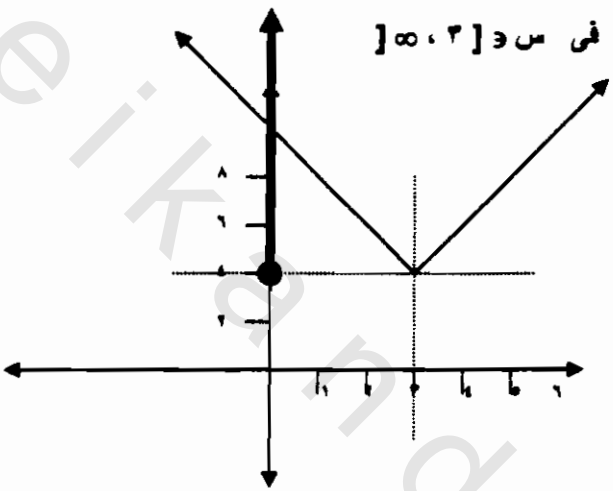
س	٣	٤	س	٣	٢
ص	٤	٦	ص	٤	٦

المجال : س ∈ ح المدى : ص ∈ [٤ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الأطراد متناقصة فى س ∈] - ∞ ، ٣]

متزايدة فى س ∈ [٣ ، ∞ [



١٦)

٢س– ٣ = ٠ ٢س = ٣ س = ١,٥

٢س ٣ - ٤س + ٢ س ≤ ١,٥

د (س) =

-٢ س + ٣ -٤ + ٢ س < ١,٥

د (س) = { -٢ س –١ س ≤ ١,٥ ؛ -١ س + ٥ س < ١,٥

د ١ (س) = -٢ س -١

س	١,٥	٢
ص	-٤	-٥

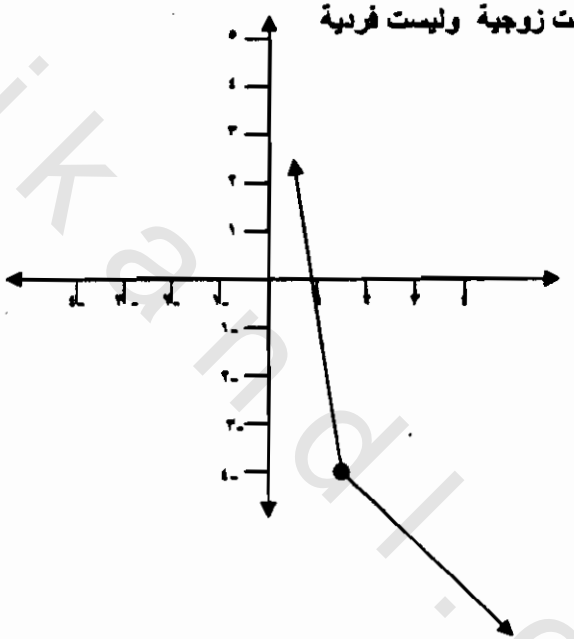
د (س) = -٦ س + ٥

س	١,٥	١
ص	-٤	-١

س ص د ح

الأطراد متناقصة ∨ د ح

النوع ليست زوجية وليست فردية



(١٧

٢ س عندما س ≤ ٠

صفر عندما س > ٠

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : متزايدة عندما س ≤ ٠

وثابتة عندما س د] - ∞ ، ٠]

obeikandl.com

النزع : ليست زوجية وليست فردية

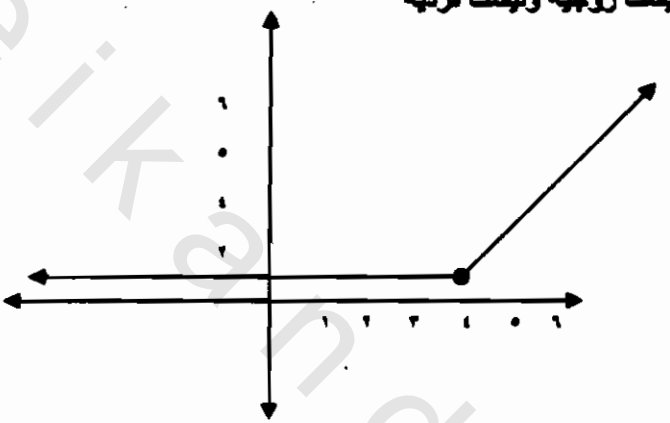
١٨)

$$\left.\begin{array}{ll} ٤س - ٥١ & \text{عندما س} \leq ٤ \\ ١ & \text{عندما س} > ٤ \end{array}\right\}$$

المجال = ح ، المدى = [١ ، ∞ [

تزايدية عندما س $\leq$ ٤ وثابتة عندما س > ٤

وهى ليست زوجية وليست فردية



١٩)

ويكون الشكل النهائى للدالة د (س) = $\begin{cases} ٤س - ٤ : س \leq \frac{١}{٣} \\ ٢ - ٢س : س > \frac{١}{٣} \end{cases}$

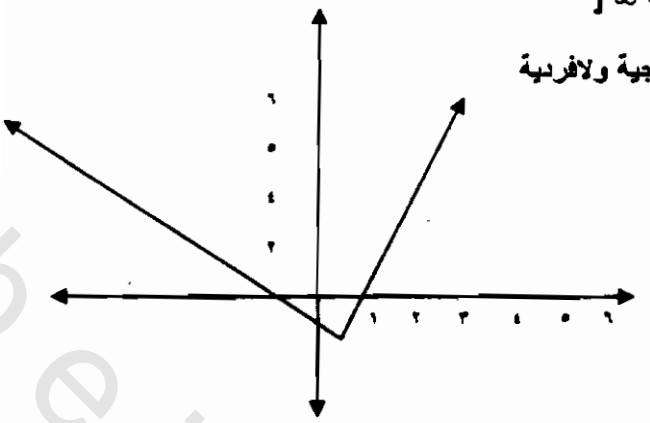
د (س) = ٤ س – ٤ ، د (س) = -٢ س – ٢

[$\frac{١}{٣}$ ، ∞ [،] - ∞ ، $\frac{١}{٣}$ [

س	$\frac{١}{٣}$	١	٢	$\frac{١}{٣}$	٠	-١
د(س)	$-\frac{٢}{٣}$ ٢	٠	٤	$-\frac{٢}{٣}$ ٢	-٢	-

المدى = $\{ \frac{-٢}{٣} ، ٢ ، \infty [$

د (س) ليست زوجية ولافردية



(٢٠

يكون الشكل النهائى للدالة د (س) =

$$\begin{cases} ٣ س + ٣ : س \leq -\frac{١}{٢} \\ -س + ١ : س > -\frac{١}{٢} \end{cases}$$

د (س) = ٣ س + ٣ ، $[-\frac{١}{٢} ، \infty [$

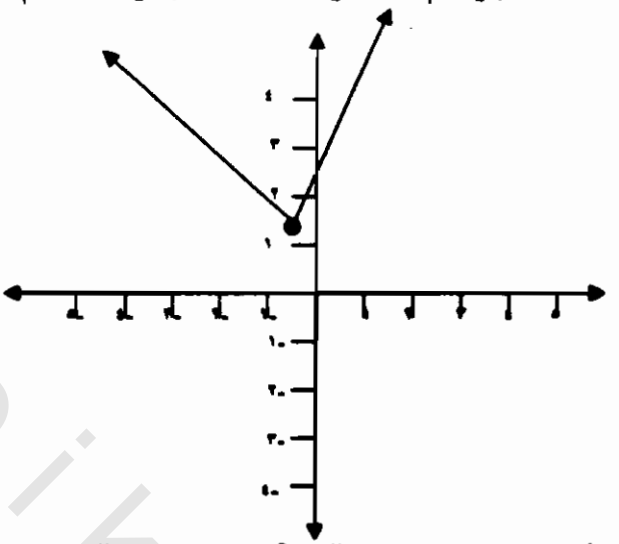
د (س) = - س + ١ ، $]-\infty ، -\frac{١}{٢} [$

س	$-\frac{١}{٢}$	٠	١	$\frac{١}{٢}$	-١	-٢
د(س)	$٢\frac{١}{٢}$	٣	٦	$٢\frac{١}{٢}$	٢	٣

- المدى = $[\frac{١}{٢} ، ١ ، \infty [$ ، د (س) ليست زوجية ورفردية

obeikandl.com

تزايدية فى [$-\frac{1}{2}$ ، ∞ [، تناقصية فى] -∞ ، $-\frac{1}{2}$ [



(٢١)

٣-(٢ – س) : س ≤ ٢ = { ١+س : س ≤ ٢

(س) = ٣ – ١ ٢- س ١ =

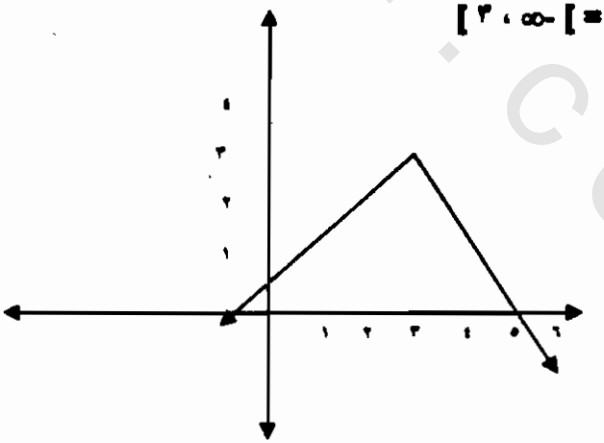
٣-(-٢ +س) : س > ٢ = { ٥- س : س> ٢

د(س) = ١ + س

د(س) = ٥ – س

س	٢	١	٠	٣	٣	٤
ص	٣	٢	١	٢	٢	١

المدى =] -∞ ، ٣]



obeikandi.com

(٢٢

$$د(س) = \begin{cases} ٦ - ٢س : س \leq \frac{٦}{٢} \\ -(٦-٢س) : س > \frac{٦}{٢} \end{cases} = \begin{cases} ٦ - ٢س : س \leq ٣ \\ -٦ + ٢س : س > ٣ \end{cases}$$

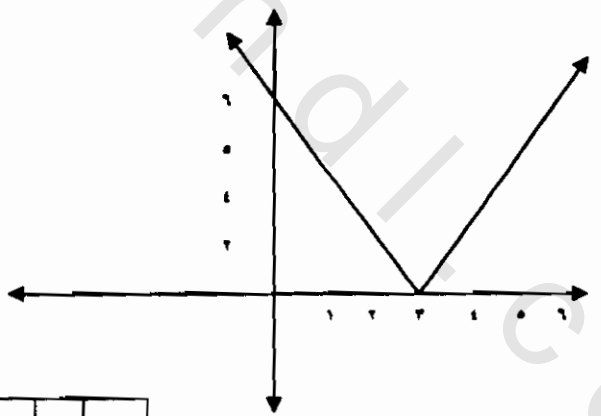
د(س) = ٦-٢س ،] -∞ ، ٣]

د(س) = -٦+٢س ،] ٣ ، ∞ [

س	٣	٢	١	٣	٤	٥
ص	٠	٢	٤	٠	+٢	+٤

المدى = [٠ ، ∞ [، د(س) ليست زوجية ولا فردية

د(س) تزايدية فى الفترة] ٣ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] -∞ ، ٣]



(٢٣

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س & \text{عندما } س \leq ٢ \\ -س + ٢س & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

عندما س ≤ ٢

س	٢	١	٠
ص	٠	١	٠

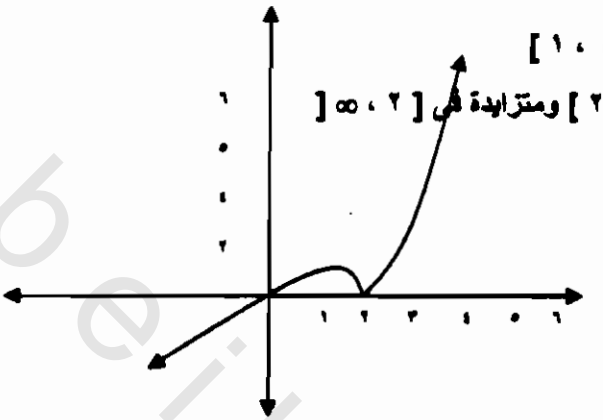
عندما س > ٢

س	٢	٣	٤
ص	٠	٣	٨

المدى = ح

الأطراد = متزايدة فى] -∞ ، ١]

متناقصة فى [١ ، ٢] ومتزايدة فى [٢ ، ∞ [



٢٤) عندما س ≤ صفر

س	٠	١	٢
ص	٠	١	٤

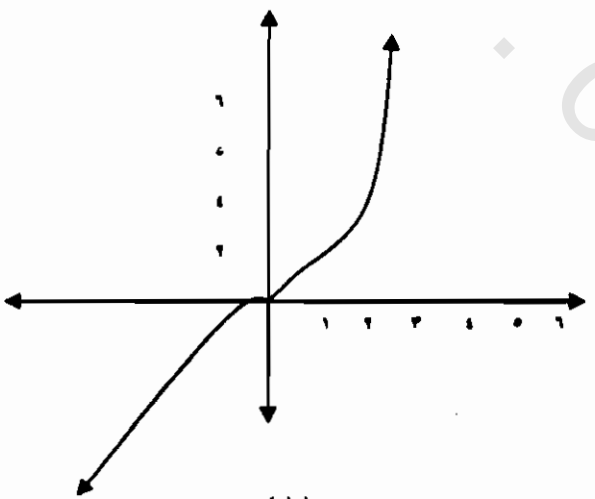
عندما س > صفر

س	٠	١-	٢-
ص	٠	١-	٤-

المدى = ح

الأطراد : متزايدة على مجالها

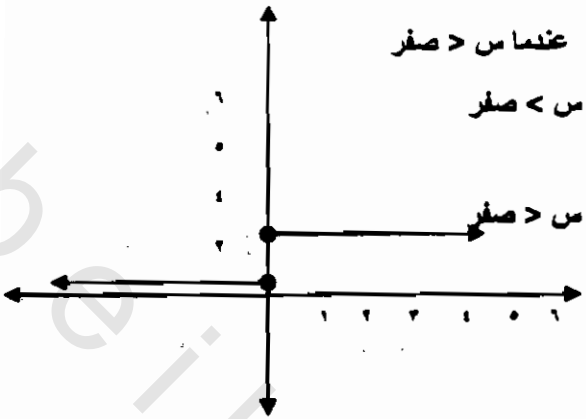
النوع : الدالة فردية من التماثل بالنسبة لنقطة الأصل



obeikandi.com

٢٥) د(س) = { س/س عندما س > صفر ، -س/س عندما س < صفر }

د(س) = { ١ عندما س > صفر ، -١ عندما س < صفر }



obeikandl.com

أجابة تمرين (١٦)

(١)

مدى جميع الدوال = [٠ ، ∞ [

أ ـ ص = س^{٢}

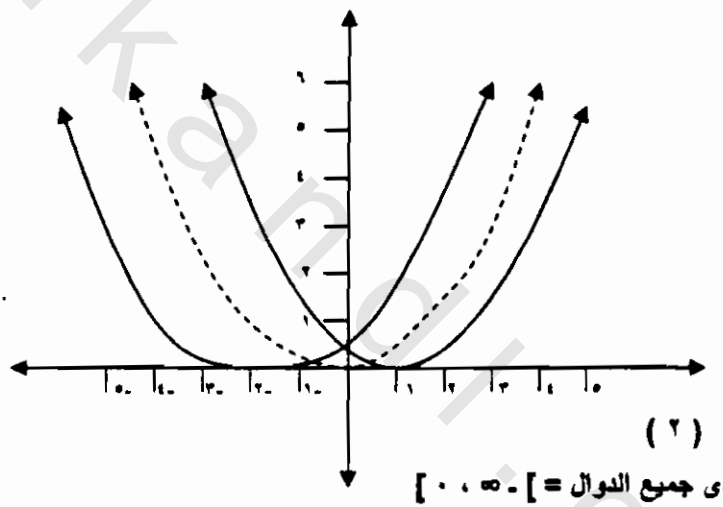
تزايد فى [٠ ، ∞ [وتناقص فى] ـ ∞ ، ٠ [

بـ ص = (س ـ ١)^{٢}

تزايد فى [١ ، ∞ [، وتناقص فى] ـ∞ ، ٠ [

جـ ـ ص = (س + ٢)^{٢}

تزايد فى [ـ٢ ، ∞ [، وتناقص فى] ـ∞ ، ـ٢ [



(٢)

مدى جميع الدوال =] ـ ∞ ، ٠]

أ ـ ص = ـ س^{٢} زوجيه

نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠) محور التماثل س = ٠

بـ ص = ـ (س ـ ٢)^{٢}

نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠) محور التماثل المستقيم س = ٢

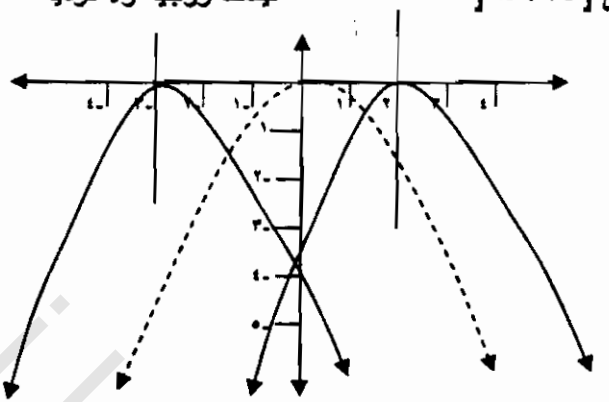
تزايد فى] ـ∞ ، ٢] تناقص فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجيه ولا فرديه

جـ) ص = - (س + ٣)^{٢}

نقطة رأس المنحنى (-٣ ، ٠) تزايد فى] -∞ ، -٣]

تناقص فى [-٣ ، ∞ [ليست زوجيه ولا فرديه



(٣)

د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٩

= (س = ٣)^{٢}

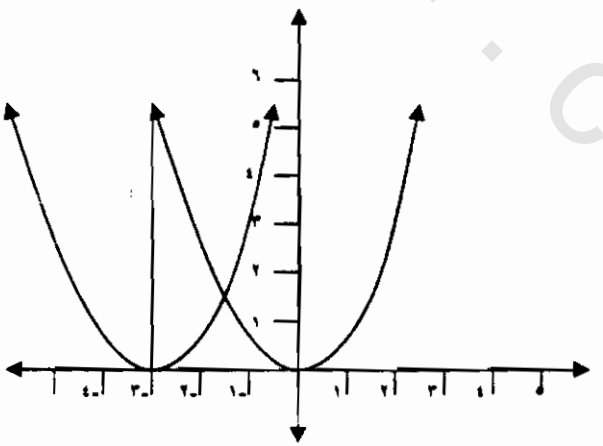
أ- نقطة رأس المنحنى (-٣ ، ٠)

ب- مدى الداله = [٠ ، ∞ [

جـ- الداله تزايديه فى [-٣ ، ∞ [تناقصيه فى] -∞ ، -٣ [

وامكن الحور على منحنى الداله د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س+ ٣)^{٢}

وذلك بعمل ازاحة لمنحنى الداله د (س) = س^{٢} أفقيه بمقدار ٣ فى الاتجاه السالب لمحور السينات



(٤) س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٢}{٤}$ = ٢ ∴ أ = ١

د (٢) = ٤ - ٨ + ٣ = -١ ∴ ب = -٤

∴ راس المنحنى (٢ ، -١)

س	٤	٣	٢	١	٠
ص	٣	٠	-١	٠	٣

المدى = [-١ ، ∞ [

معادلة محور التماثل س = ٢ (متماثل حول لمستقيم س = ٢)

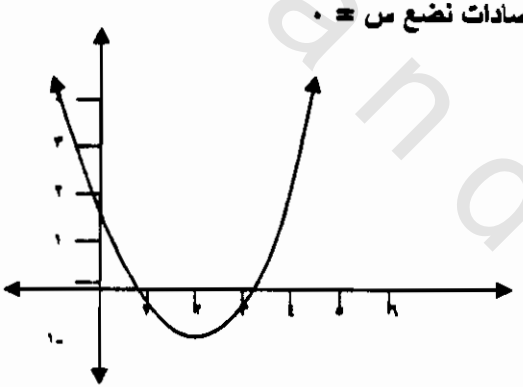
الأطراد : تناقصية فى] -∞ ، ٢]

تزايدية فى [٢ ، ∞ [

∴ ص = س ^{٢} - ٤ س + ٣

لأجد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

لأجد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠



٥)

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

د ($\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٩}{٤}$ - $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$-

د (-٣) = ٩ + ٩ = ١٨

د (٢) = ٤ - ٦ = -٢

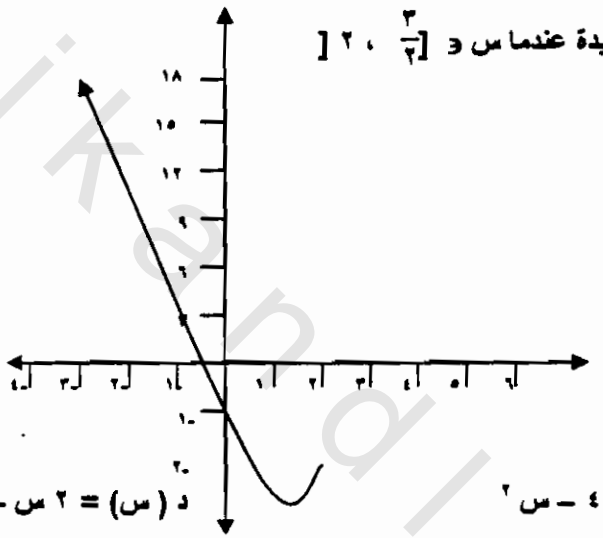
obeikandl.com

س	-٣	$\frac{٣}{٢}$	٢
ص	١٨	$\frac{٩}{٤}$	-٢

المدى = [$-\frac{٩}{٤}$ ، ١٨] ، المجال = [-٣ ، ٢]

الاطراد : متناقصة عندما س ∈] $-\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [

ومتزايدة عندما س ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ٢ [



٦)

د (س) = ٤ – س ٢

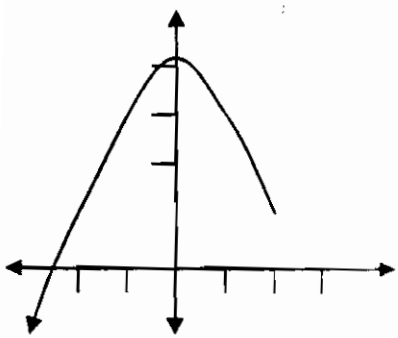
د (س) = ٢ س – ٤

] - ∞ ، ٢]

] ٢ ، ∞ [

س	٢	١	٠	-١	-٢	-٣	(٢)	٣	٤
د (س)	٠	٣	٤	٣	٠	-٥	(٠)	٢	٤

المدى =] -∞ ، ∞ [= ح



obeikandl.com

٧)

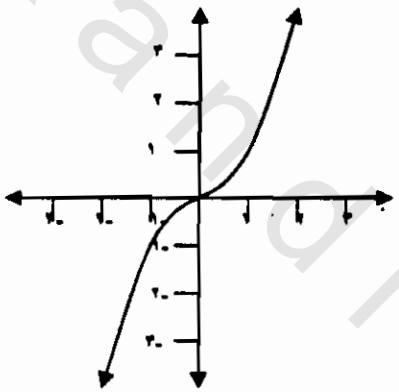
$$|س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$$

$$د(س) = س|س| = \begin{cases} س^{٢} & س^{٢} \geq ٠ \\ -س^{٢} & س^{٢} < ٠ \end{cases}$$

د (س) = س^{٢}	د (س) = - س^{٢}
[٠ ، ∞ [	] - ∞ ، ٠]

س	٠	١	٢	٠	١-	٢-
د(س)	٠	١	٤	٠	١-	٤-

المدى = ح



٨)

د(س) = س اس-١٢ -١

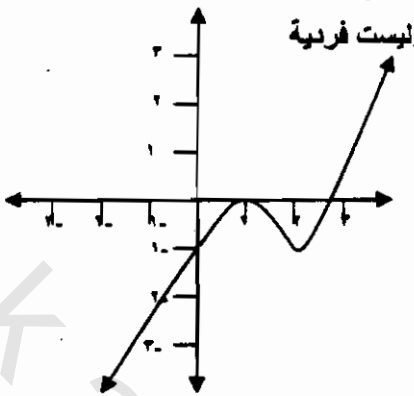
$$د(س) = \begin{cases} س(س-٢) - ١ & س \leq ٢ \\ س(-س+٢) - ١ & س > ٢ \end{cases}$$

د (س) = { (س - ١)^{٢} - ٢ ، س ≤ ٢ ؛ -(- س - ١)^{٢} ، س > ٢ }

المدى = ح الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ١ [، في] ٢ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [١ ، ٢]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



٩)

د(س) = (س + ١)|س| + ٢

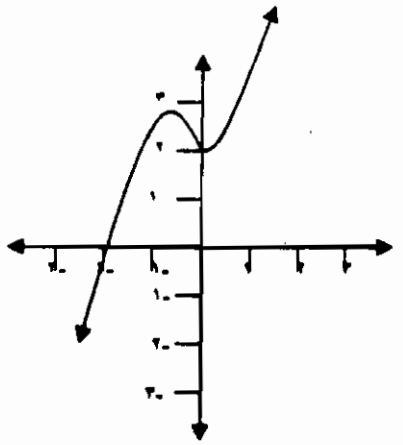
د (س) = { س^{٢} + س + ٢ ، س ≤ ٠ ؛ - س^{٢} - س + ٢ ، س > ٠ }

د (س) = { (س + ٠,٥)^{٢} + $\frac{٧}{٤}$ ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{٩}{٤}$ -(- س - $\frac{١}{٢}$)^{٢} ، س > ٠ }

المدى = ح الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، -$\frac{١}{٢}$ [، في] ٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [-$\frac{١}{٢}$ ، ٠]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



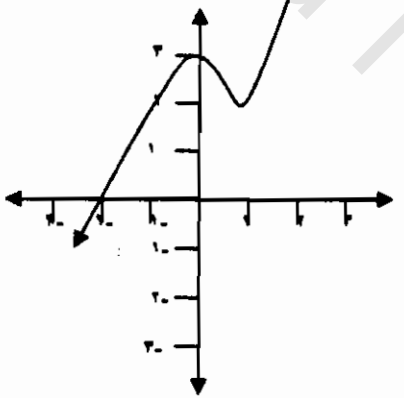
١٠)

$$د(س) = \begin{cases} (س - ١)^{٢} - ٢ & س \leq ٠ \\ ٣ - س^{٢} & س > ٠ \end{cases}$$

المدى = ح الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ٠ [، في] ١ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [٠ ، ١]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



obeikandl.com

إجابة تمارين (١٧)

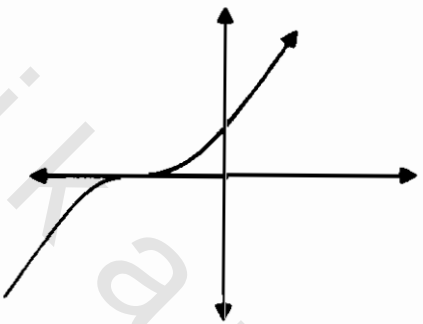
١)

س	ـ ٥	ـ ٤	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١
ص	ـ٢٧	ـ ٨	ـ ١	٠	١	٨	٢٧

المدى : ح والدالة تزايديه فى ح

والمنحنى متماثل حول النقطة (ـ٢ ، ٠)

الداله ليست زوجية ولا فرديه

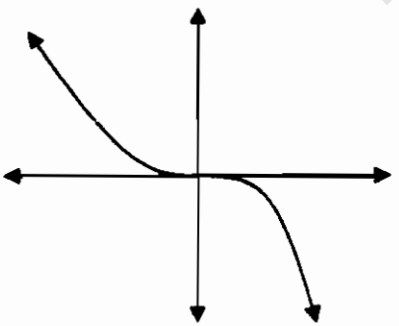


٢)

س	ـ٤	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢
ص	ـ٣	١١	٤	٣	٢	ـ٥	ـ٢٥

المدى : ح والداله تناقصية فى ح

المنحنى متماثل حول (ـ١ ، ٢) الداله ليست زوجية ولا فرديه



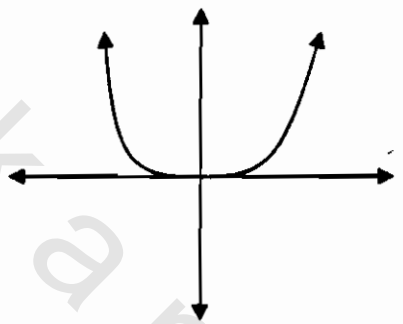
(٣)

د(س) = { س^{٣} عندما س ≤ ٠ ، ـ س^{٣} عندما س > ٠

س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٨	١	٠	١	٨	٢٧

المدى [٠ ، ∞ [الداله تناقصية فى] ـ ∞ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ∞ [

والداله متماثلة حول محور الصادات فهى زوجية



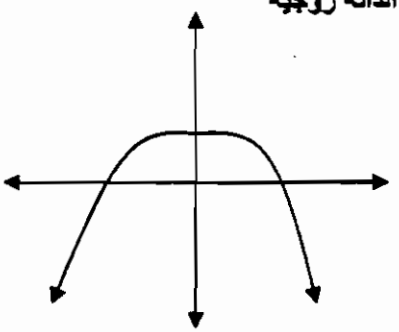
(٤)

د(س) = { ٢ ـ س^{٣} عندما س≤ ٠ ، ٢+ س^{٣} عندما س > ٠

س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	ـ٢٥	ـ٦	١	٢	١	ـ٦	ـ٢٥

تزايدية فى] ـ∞ ، ٠] تناقصية فى [٠ ، ∞ [

المدى =] ـ∞ ، ٢] الداله زوجية



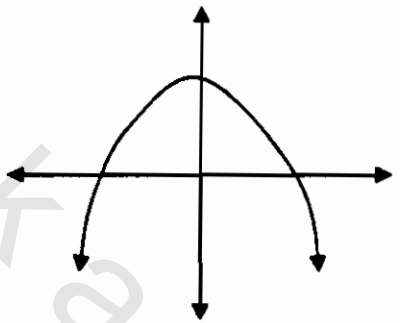
obeikan.com

٥)

د(س) = { ٢- (س-١)^{٢} عندما س≤ ١ ، ٢ + (س-١)^{٢} عندما س >١ }

المدى] -∞ ، ٢] تزايدية فى] - ∞ ، ١ [تناقصية فى [١ ، ∞ [

والداله ليست زوجية وليست فردية

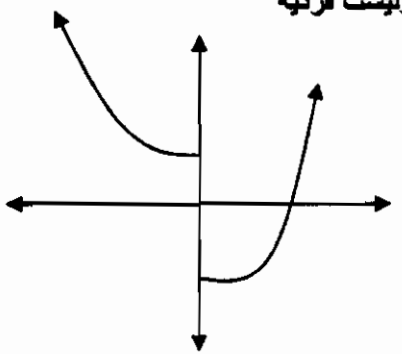


٦)

د(س) = { س^{٢} – ٣ عندما س ≤ ٠ ، - س^{٢} + ٣ عندما س < ٠ }

المدى =] ٣ ، ∞ [تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الداله ليست زوجية وليست فردية



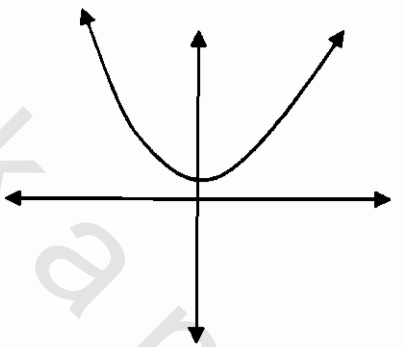
obeikandl.com

٧)

د(س) = { ٢+ س^{٢} عندما س ≤ ٠ ، ٢- س^{٢} عندما س > ٠ }

المدى [٢ ، ∞ [تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [تزايدية فى [٠ ، ∞ [

الداله ليست زوجية وليست فردية

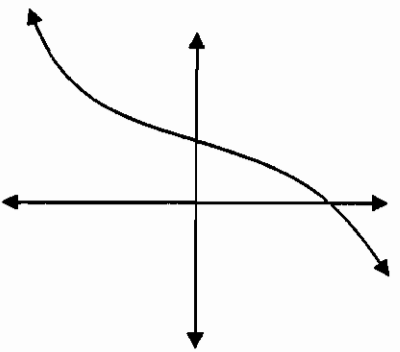


٨)] - ∞ ، ٠ [

ص = ٤- س^{٣}

س	٠	-١	-٢
ص	٤	٥	١٢

ص = ٤ – ٣ س



س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٠

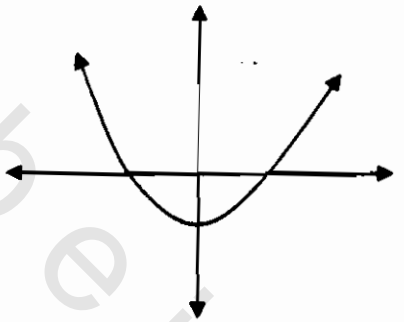
المدى = ح

obeikandi.com

٩)

] - ∞ ، ١]

ص = س^{٢} – ١



س	-١	٠	١
ص	٠	-١	٠

] ٠ ، ∞ [ص = (س – ١)^{٢}

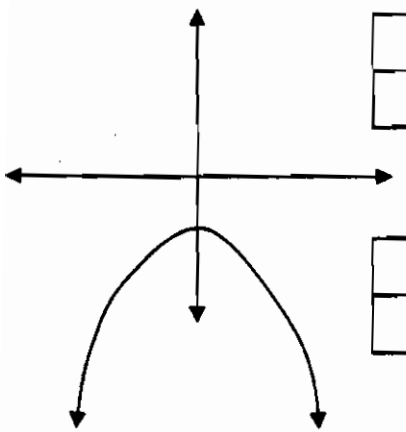
س	١	٢	٣
ص	٠	١	٨

المدى = [-١ ، ∞ [

١٠)

د(س) = { – س^{٢} - ٤ عندما س ≤ ٠ ؛ س^{٢} – ٤ عندما س > ٠ }

ص = - س^{٢} – ٤



س	٣	٢	١	٠
ص	-١	-١٢	-٥	-٤

ص = س^{٢} – ٤

س	٠	-١	-٢	-٣
ص	-٤	-٥	-١٢	-٣١

obeikandl.com

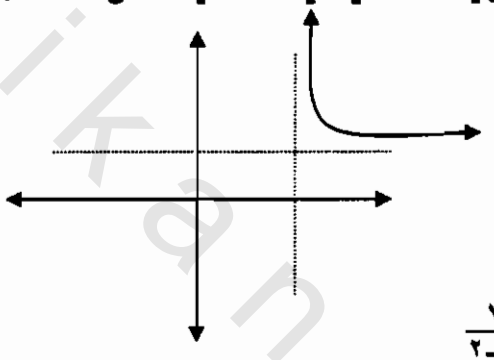
إجابة تمارين (١٨)

١) د(س)= ٢ + $\frac{١٠}{س-٣}$ المجال= ح - { ٣ }

س	٠	١	٢	٤	٥	٦
ص	$\frac{-٤}{٣}$	-٣	-٨	١٢	٧	$\frac{١٦}{٣}$

المدى = ح - { ٢ }

الأطراد: تناقصية فى] - ∞ ، ٣[،] ٣ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية

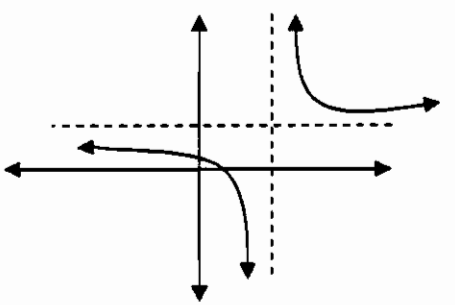


٢) د(س)= ٣ + $\frac{٧}{س-٢}$

س	٦	٥	٤	٣	٢،٥	١	٠	-١
ص	$٤\frac{٣}{٤}$	$٥\frac{١}{٣}$	$٦\frac{١}{٢}$	١٠	١٧	-٤	$\frac{-١}{٢}$	$\frac{٢}{٣}$

المدى = ح - { ٣ }

الداله تناقصية على مجالها النوع: ليست فردية ولا زوجية



obeikandi.com

٣) د(س) = $\frac{١}{س-١}$ ، س > ١

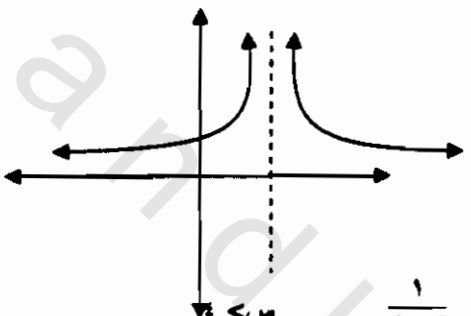
$\frac{-١}{س-١}$ ، س < ١

ص = $\frac{١}{س-١}$ ص = $\frac{-١}{س-١}$

س	٣	٢	$١\frac{١}{٢}$	$١\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	٠	-١
ص	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٢	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$

المدى = ح - { ١ }

الأطراد تزايدية فى] - ∞ ، ١ [وتناقصية فى ،] ١ ، ∞ [



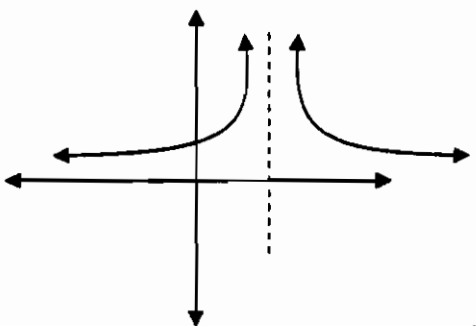
٤) د(س) = $\frac{١}{ص-٤}$ ، س > ٤

$\frac{-١}{ص-٤}$ ، س < ٤

المجال = ح - {+، ٤ } المدى = ح +

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٤ [وتناقصية فى ،] ٤ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



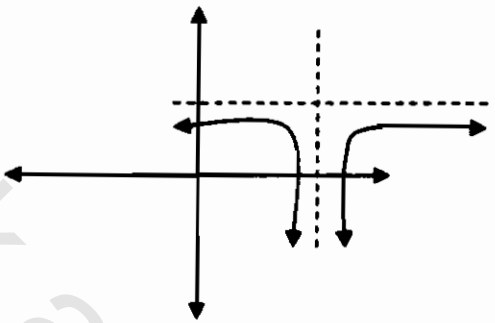
obeikandl.com

(٥) د(س)= $\begin{cases} ٢ - \frac{١}{س-٣} \\ ٢ + \frac{١}{س-٣} \end{cases}$

المجال= {٣} المدى=] - ∞ ، ٢ [

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٣ [وتناقصية فى ،] ٣ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية

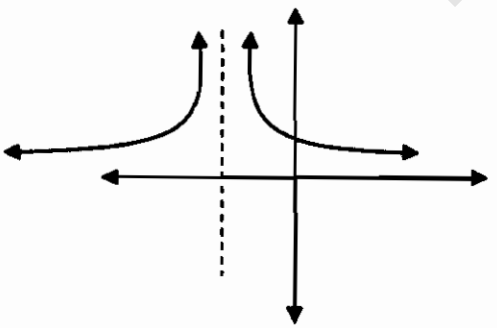


(٦) د(س)= $\begin{cases} \frac{١}{س+١} & س > -١ \\ \frac{-١}{س+١} & س < -١ \end{cases}$

المدى= ح $^{+}$

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، -١ [وتناقصية فى ،] -١ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



obeikandl.com

(٧)

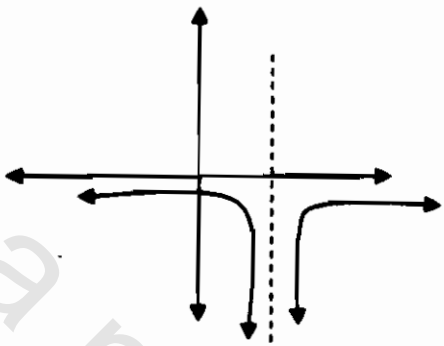
د(س)= $\begin{cases} \frac{-١}{س-٢} \\ \frac{١}{س-٢} \end{cases}$

المجال=ح - { ٢}

المدى= ح +

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، -٢[وتناقصية فى ،] -٢ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



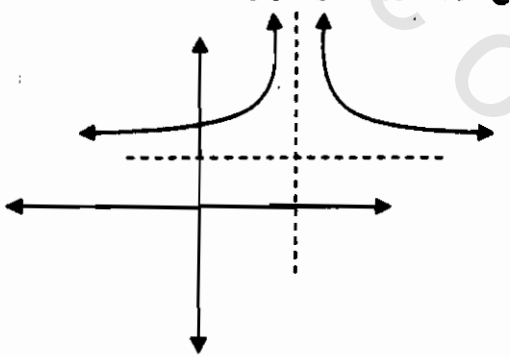
(٨)

د(س)= $\begin{cases} \frac{١}{س-٣}+١ & س<٣ \\ -\frac{١}{س-٣}+١ & س>٣ \end{cases}$

المجال=ح - {٣} المدى=] ١ ، ∞ [

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٣[وتناقصية فى ،] ٣ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية

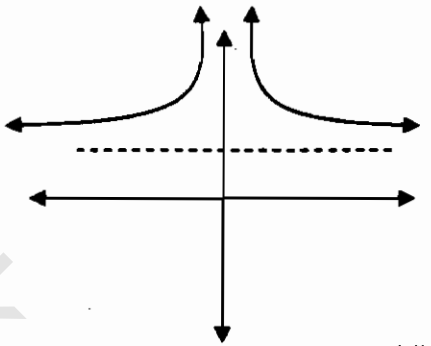


obeikandl.com

(٩) د(س)= $\begin{cases} \frac{١}{س}+١ & س>٠ \\ \frac{١}{س}+١ & س<٠ \end{cases}$

المدى=] ١ ، ∞ [الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٠ [وتناقصية فى ،] ٠ ، ∞ [

النوع: زوجية



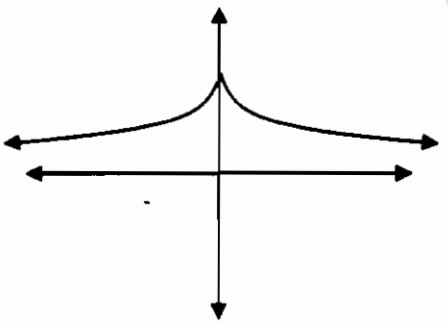
(١٠) د(س)= $\begin{cases} \frac{١٢}{س+٢} & س \geq ٠ \\ \frac{١٢}{س+٢} & س<٠ \end{cases}$

$س=\frac{١٢}{ص+٢}$

س	٠	١	٢
ص	٦	٤	٣

$ص=-\frac{١٢}{س+٢}$

س	٠	-١	-٢
ص	٦	٤	٣



المجال=ح المدى=] ٠ ، ٦ [

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٠ [وتناقصية فى ،] ٠ ، ∞ [

النوع: زوجية

obeikandl.com

إجابة تمرين (١٩)

(١) $٢(س^{٢}-١)=٢^{س}$ ∴ $٢س^{٢}-٢-٣س=٠$ ∴ $٢س^{٢}-٣س-٢=٠$

∴ $(٢س+١)(س-٢)=٠$ ∴ $س=\frac{١}{٢}$ أو ٢

(٢) ∴ $س^{٢}=٢س+٨$ ∴ $س^{٢}-٢س-٨=٠$ $(س-٤)(س+٢)=٠$

∴ $س=٤$ أو -٢

(٣) ∴ $س=٣$

(٤) ∴ $س-٥=٠$ ∴ $س=٥$

(٥) $(س^{٢}+٢س)^{٥}=٣^{٥}$ ∴ $س^{٢}+٢س=٣$ $س^{٢}+٢س-٣=٠$

∴ $س=-٣$ أو ١ ∴ $(س+٣)(س-١)=٠$

(٦) $س^{س^{٢}-٢٥}=س^{٠}$ $س^{٢}-٢٥=٠$ ∴ $(س-٥)(س+٥)=٠$ ∴ $س=\pm ٥$

(٧) $(\frac{٣}{٥})^{س}=(\frac{٣}{٥})^{٣}$ ∴ $س=٣$

(٨) $٦^{س-٤}=٦^{-٤}$ ∴ $س-٤=-٤$ ∴ $س=١$

(٩) $\frac{١٠^{ص-٤}}{٥^{ص-٤}}=٢^{٣}$ ∴ $(\frac{١٠}{٥})^{ص-٤}=٢^{٣}$

∴ $٢^{ص-٤}=٢^{٣}$ ∴ $ص=٧$

(١٠) $٢^{٣س-١}=\frac{٧}{٢^{١}}$ ∴ $٣^{س-١}=\frac{٧}{٢}$ ∴ $٣س=\frac{٩}{٢}$ ∴ $س=\frac{٣}{٢}$

إجابة تمرين (٢٠)

(١)

$$= \frac{(٢^{٢})^{ن-٤}\times(٢\times٣)^{٧-ن}\times(٣^{٢})^{ن-٢}}{(٢)^{٢ن-١٠}\times(٣)^{ن+٢}} = \frac{٢^{٢ن-١٢}\times٢^{٧-ن}\times٣^{٧-ن}\times٣^{٢ن-٤}}{٢^{٢ن-١٠}\times٣^{ن+٣}}$$

$$\frac{٢^{٢ن-٥}\times٣^{ن+٣}}{٢^{٢ن-١٠}\times٣^{ن+٣}} = ٢^{٢ن-٥-٢ن+١٠}\times٣^{ن+٣-ن-٣} = ٢^{٥}\times٣^{٠}=٣٢$$

(٢) $\frac{٢^{٩ص}\times٢^{-١٠ص}\times٧^{-٣ص-٥}}{٢^{-ص}\times٧^{-٣-٥ص}} = ٢^{٩ص-١٠ص+ص}\times٧^{-٣-٥+٣+٥ص}$ صفر $= ٢^{٥}=٣٢$

(٣) $\frac{٥^{ن} \times ٣^{ن+٢} \times ٩^{ن}}{٥^{ن-٢} \times ٣^{ن}} = \frac{٣^{ن+٢} \times ٣^{ن}}{٦^{ن}} = \frac{٣^{ن+٢+ن}}{٣^{ن}}$

$= ٣^{ن+٢-ن} = ٣^{٢} = ٩$

(٤) $\frac{(٣)^{٣(ص-\frac{١}{٣})} \times (٤٢ \times ٣)^{ص+٣}}{(٢ \times ٣)^{٣ص-٣} \times (٢^{٢} \times ٣)^{٢-ص} \times (٢ \times ٣^{٢})^{ص+٣}}$

$= \frac{٣^{٣ص-١} \times ٢^{٤ص+١٢} \times ٣^{ص+٣}}{٢^{٣ص-٣} \times ٣^{٣ص-٣} \times ٢^{٤-٢ص} \times ٣^{٢-ص} \times ٢^{٣ص+٩} \times ٣^{٢ص+٦}}$

$= \frac{٢^{٩ص+١٢} \times ٣^{٣ص-١+ص+٣}}{٢^{٣ص-٣+٤-٢ص+٩} \times ٣^{٣ص-٣+٢-ص+٣ص+٦}} = \frac{٢^{٩ص+١٢} \times ٣^{٣ص-١+ص+٣}}{٢^{٣ص-٣+٤-٢ص+٩} \times ٣^{٣ص-٣+٢-ص+٣ص+٦}}$

$\frac{٢^{٤ص+١٢} \times ٣^{٤ص+٢}}{٢^{٤ص+١٠} \times ٣^{٤ص+٥}} = ٢^{٤ص+١٢-٤ص-١٠} \times ٣^{٤ص+٢-٤ص-٥}$

$= ٢^{٢} \times ٣^{-٣} = \frac{٢^{٢}}{٣^{٣}} = \frac{٤}{٢٧}$

(٥) $\frac{٢^{ن-١٢} \times ٢^{-ن-٧} \times ٣^{-ن} \times ٣^{ن-٤}}{٢^{ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}} = \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times (٢ \times ٣)^{م} \times ٢^{ن-م}}{(٢ \times ٣)^{ن} \times (٥ \times ٢)^{ن+م} \times (٣ \times ٥)^{ن}}$

$= \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٢^{م} \times ٣^{م} \times ٣^{ن-م}}{٢^{ن} \times ٣^{ن} \times ٢^{م+٢} \times ٥^{م+٢} \times ٣^{ن} \times ٥^{ن}} = ٢^{ن+١-(م+٢)-ن} \times ٥^{ن+م-(م+٢)-ن} \times ٣^{ن-م-ن}$

$= ٢^{-١} \times ٥^{-٢} \times ٣^{٠}$

(٦) $\frac{(٥^{٣})^{ص-٤} \times (٣ \times ٥)^{٦-ص} \times (٣^{٢})^{ص-٣}}{(٥^{٢})^{ص-٣} \times ٣^{٣ص+٢}} = \frac{٥^{٣ص-١٢} \times ٣^{٦-ص} \times ٣^{٢ص-٦}}{٥^{٢ص-٦} \times ٣^{٣ص+٢}}$

$= ٥^{٣ص-١٢} \times ٥^{٦-ص} \times ٥^{-(٢ص-٦)} \times ٣^{٦-ص} \times ٣^{٢ص-٢} \times ٣^{-(ص+٣)}$

$= ٥^{٣ص-١٢+٦-ص-٢ص+٦} \times ٣^{٦-ص+٢ص-٢-ص-٣}$ $٥^{٠} \times ٣^{٠} = ١ \times ٣ = ٣$

(٧) $\frac{٣^{ص+٣} \times (٥^{٣})^{ص+٢}}{(٣^{٢})^{ص}} = ٣^{ص+٣+٣ص+٦-٢ص} = ٣^{١٠}$

(٨) $\frac{٢^{٤} \times أ^{٨} \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times أ^{-٢} \times ب^{١٤}}{٢^{-٤} \times أ^{٦} \times ب^{-٢}} = ٢^{٤+٤} \times ٥^{-٢} \times أ^{٨-٢-٦} \times ب^{-١٦+١٤+٢}$

$= ٢^{٨} \times ٥^{-٢} \times أ^{٠} \times ب^{٠} = \frac{٢^{٨}}{٢٥} = \frac{٢٥٦}{٢٥}$

obeikandl.com

(٩) $\frac{٢^{١-٢ن} \times (٣ \times ٢^{٢})^{ن-٣}}{(٢ \times ٣^{٢})^{ن-١} \times ٣^{ن-٤}} = \frac{٢^{١-٢ن} \times ٣^{ن-٣} \times ٢^{٢ن-٣}}{٢^{٢ن-٢} \times ٣^{ن-٢} \times ٣^{ن-٤}}$

$= ٢^{١-٢ن+٢ن-٣} \times ٣^{ن-ن+٤-ن+٢} = ٢^{-٢} \times ٣^{٥} = ٨ \times ٢٤٣ = ١٩٤٤$

(١٠) $\frac{ب^{\frac{٣}{٢}} \times أ^{٢ن} \times جـ^{٢ن-١} \times جـ^{\frac{١}{٢}ن}}{ب^{ن} \times جـ^{-\frac{٣}{٢}ن} \times ب^{\frac{٣}{٢}}} = ب^{\frac{٣}{٢}-ن-\frac{٣}{٢}} \times أ^{٢ن}$

$\times جـ^{\frac{١}{٢}ن^{٢}+\frac{١}{٢}ن-ن+\frac{٣}{٢}} = ب^{-ن} \, أ^{٢ن} \, جـ^{\frac{١}{٢}} = \frac{أ^{٢ن} \, جـ^{\frac{١}{٢}}}{ب^{ن}}$

إجابة تمرين (٢١)

١- أ) $(أ^{-\frac{٣}{٤}})^{-\frac{٤}{٣}} = أ^{-٣} = \frac{١}{أ^{٣}}$

ب) $أ^{-٥ \times \frac{١}{٥}} = أ^{-٤} = \frac{١}{أ^{٤}}$

جـ) $أ^{-٨ \times \frac{١}{٨}} = أ^{-٣} = \frac{١}{أ^{٣}}$

د) $\frac{١}{١٠٠٠} \quad ٢ \quad \frac{١}{٠,٠٠٣} \quad ٣$

(٢) $\frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٧} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٧} \times \sqrt{٥}}{\sqrt[١٢]{(٥)^{٣}}}$

$= \frac{(٥)^{\frac{١}{٢}} \times (٥)^{\frac{١}{٣}} \times (٥)^{\frac{١}{٤}} \times (٥)^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt[١٢]{(٥)^{٣}}} = \frac{(٥)^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٣}+\frac{١}{٤}+\frac{١}{٣}}}{(٥)^{\frac{٣}{١٢}}}$

$= (٥)^{\frac{١٥}{١٢}} \div (٥)^{\frac{١٣}{١٢}} = (٥)^{\frac{١٥}{١٢}-\frac{١٣}{١٢}} = (٥)^{\frac{١٢}{١٢}} = ٥$

(٣) $س^{-\frac{٣}{٤}} \times س^{-\frac{٨}{٣}} \times س^{\frac{٨}{٣}} = س^{\frac{-٩-٣٢+٣٢+٣٦}{١٢}} = س^{\frac{-٣٧}{١٢}}$

(٤) $\frac{٣ \times ٣^{ص-١} \times ٧^{\frac{ص+٣}{ص}}}{٧^{ص-١} \times ٣^{ص-٢} \times ٧} = ٣^{ص-١-ص+٢} \times ٧^{\frac{ص+٣}{ص}-ص+١} = ٣^{٢} \times ٧ = ٦٣$

(٥) $\frac{(٥)^{-\frac{٣}{٢}ص} \times ٥}{٥^{ص} \times ٥^{\frac{١}{٢}ص}} = (٥)^{-\frac{٣}{٢}ص+\frac{٣}{٢}-ص-\frac{١}{٢}ص} = ١$

(٦) الطرف الأيمن $= (٣)^{\frac{٣}{٢}ن^{٢}+\frac{٣}{٢}ن-١} \times \frac{١}{ن}$

$= (٣)^{٣ن} \times \frac{١}{ن} = ٣^{٣} = ٢٧$

(٧) $\frac{(\text{س}\ )^{٢} - (٢)^{٢}}{\text{س} + (٢\text{س}) + ٢} = \sqrt{٢}$

$\frac{(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ٢^{\frac{١}{٣}})\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + (٢\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ٢^{\frac{٢}{٣}})}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + (٢\text{س})^{\frac{١}{٣}} + ٢^{\frac{٢}{٣}}} = \sqrt{٢}^{٢}$ $\quad$ $\text{س}^{\frac{١}{٣}} - \sqrt{٢}^{٢} = \sqrt{٢}^{٢}$

$\text{س}^{\frac{١}{٣}} = ٢\sqrt[٣]{٢}^{٢}$ بتكعيب الطرفين $\quad \therefore$ س $= ٨ \times ٢ = ١٦$

(٨) $(١٢^{\frac{١}{٣}} - ١٣^{\frac{١}{٣}})^{٢} = ١٤^{\frac{١}{٣}} - ١١٢^{\frac{١}{٣}} + ١٩^{-\frac{١}{٣}}$

$= ١٤^{\frac{١}{٣}} - ١٢ + ١٩^{-\frac{١}{٣}}$ ، المقدار $= ١٦^{\frac{١}{٣}} + ٥^{\frac{٢}{٣}} - ٤^{\frac{٢}{٣}} - ٤^{-١}$

(٩) المقدار $= \frac{٥^{\text{س}+٤} - ٥^{\text{س}+٣}}{٥^{\text{س}+٤} - ٥^{\text{س}+٤}} = \frac{٥^{\text{س}+٣}(٥-١)}{٥^{\text{س}+٤}(٥-١)} = \frac{٥^{\text{س}+٣ \times ٤}}{٥^{\text{س}+٤ \times ٢}}$

$= ٥^{-١} = \frac{١}{٥}$

(١٠) $\frac{٣^{\text{س}+٢} + ٣^{\text{س}-١}}{٥ \times ٣^{\text{س}} - ٧ \times ٣^{\text{س}-١}} = \frac{٣^{\text{س}-١}(٣^{٢}+١)}{٣^{\text{س}-١}(٥ \times ٣ - ٧ \times ١)} = \frac{٢٧+١}{١٥-٧}$

$= \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$ = الطرف الأيسر

إجابة تمرين (٢٢)

(١) $٣ \times ٣^{\text{س}} + ٣ \times ٣^{-\text{س}} - ١٠ = ٠$ بضرب الطرفين $\times ٣^{\text{س}}$

$\therefore ٣ \times ٣^{٢\text{س}} + ٣ \times ٣^{\text{س}} - ١٠ \times ٣^{\text{س}} = ٠$ $\quad ٣^{٢\text{س}} \times ٣ + ٣ \times ٣ - ١٠ \times ٣^{\text{س}} = ٠$

$\therefore ٣ \times ٣^{٢\text{س}} - ١٠ \times ٣^{\text{س}} + ٣ = ٠$ $\quad$ بوضع $٣^{\text{س}} =$ ص $\quad \therefore ٣^{\text{س}} = \text{ص}^{٢}$

$\therefore$ المعادلة هي $٣\text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٣ = ٠$ $\quad \therefore (٣\text{ص}-١)(\text{ص}-٣) = ٠$

$\therefore$ ص $= \frac{١}{٣}$ $\quad \therefore ٣^{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ $\quad \therefore$ س $= ٥^{-١}$ $\quad \therefore$ س $= ١٠^{-١}$ ، ص $= ٣$

$\therefore ٣^{\text{س}} = ٣$ $\quad \therefore$ س $= ١$

(٢) $٣^{٢\text{س}+٣} + ٣^{\text{س}+١} = ١٠٨$ $\quad \therefore ٣^{٢\text{س}+٣} + ٣^{\text{س}+٣} - ٣ \times ١٠٨ = ٠$

$\therefore ٣^{٢\text{س}+٣} + ٣^{\text{س}+٣} = ٣ \times ١٠٨$ $\quad \therefore (٣^{\text{س}}-٩)(٣^{\text{س}}+١٢) = ٠$

obeikandi.com

∴ $3^{س} = 9$ أو $3^{س} = -12$ مرفوض ∴ $3^{س} = 3^{2}$ ∴ س = ٢

(٣) $5^{2س} - 126 \times 5^{س} \times 5^{-1} + 5 = 0$ بضرب المعادلة × ٥

∴ $5 \times 5^{2س} - 126 \times 5^{س} + 25 = 0$ نضع $5^{س} = ص$ ∴ $5^{2س} = ص^{2}$

∴ $5ص^{2} - 126ص + 25 = 0$ $(5ص - 1)(ص - 25) = 0$ ∴ $5ص = 1$

∴ $ص = \frac{1}{5}$ $5^{س} = \frac{1}{5}$ ∴ $5^{س} = 5^{-1}$ ∴ س = -١

، ص = ٢ ∴ $5^{س} = 5^{2}$ ∴ س = ٢

(٤) $2ص^{2} + 2 \times 5^{س} - ص - 12 = 0$ بالضرب × ٢ص

∴ $2ص^{2} - 12ص + 32 = 0$ $(2ص - 4)(2ص - 8) = 0$ ∴ $2ص = 4$ ص = ٢

، $2ص = 8$ ∴ ص = ٣

(٥) $2^{2س+1} + (2^{2})^{-س} = 2^{2س+1} + 2^{3-س}$

$= 2^{3س}(2^{-1} + 2^{-2}) = 2^{3س}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 2^{3س} \times \frac{1}{2} 2 = 2^{3س} \times \frac{5}{2} = 160$

$2^{3س} = 160 \times \frac{5}{2}$ ∴ $2^{3س} = 32 \times 2 = 64$ ∴ $2^{3س} = 2^{6}$ ∴ س = ٢

(٦) $7^{3س}(7^{-1} - 1) = 7^{3س}(\frac{1}{7} - 1) = 7^{3س} \times -2058$

$7^{3س} = -2058 \times \frac{-6}{7}$ ∴ $7^{3س} = 343 \times 7 = 7 \times 7^{3}$ ∴ $7^{3س} = \frac{4}{3}$

(٧) $3^{2س-1} \times 5^{-2س} \times 3^{-\frac{3}{2}س+1} = 45$ ∴ $3^{\frac{1}{2}س} \times 5^{-2س} \times 3^{1} = 45$

∴ $3^{\frac{1}{2}س} = 3^{2}$ ∴ س = ٤

(٨) $س^{4} - 16 = 0$ $(س^{2} - 4)(س^{2} + 4) = 0$ ∴ س = ± ٢

(٩) $(3^{3س} - 3)(3^{3س} - 27) = 0$ ∴ $3^{3س} = 3$ ∴ س = ١ أو $3^{3س} = 3^{3}$ ∴ س = ٣

(١٠) $2^{2س+1} + 2^{2س+2} + 2^{3+س} = 28$ ∴ $2^{س+1}(1 + 2 + 4) = 28$

∴ $2^{س+1} = 2^{2}$ ∴ س = ١

(١١) ٢ - س = ٠ ∴ س = ٢

(١٢) $(3^{3س} - 9)(3^{3س} + 2) = 0$ ∴ $3^{3س} = 3^{2}$ ∴ س = ٢

(١٣) $4^{س+1} + 4^{-س} - 17 = 0$ بالضرب في $4^{س}$

$4 \times 4^{2س} + 4 - 17 \times 4^{س} = 0$ ∴ $4(4^{س})^{2} - 17(4^{س}) + 4 = 0$

$[٤\ (٤^{س})-١][٤^{س}-٤]=٠$

$\therefore ٤^{س}=\frac{١}{٤}$ ، $٤^{س}=٤^{-١}$

$\therefore ٤^{س}=٤^{-١}$ $\therefore$ س = ١

س = - ١

(١٤) $٣^{س-١}(٢٧+١)=٢٨$ $\therefore$ س-١=٠ $\therefore$ س=١

(١٥) برفع طرفي المعادلة للأس $\frac{٤}{٣}$ $\therefore (س-٤)\frac{٣}{٤}\times\frac{٤}{٣}=٢^{٣}\times٢$

$\therefore$ س-٣=١٦ $\therefore$ س=١٩

(١٦) $٧^{س+١}+٧^{س-١}=٥٠$ $\therefore$ $٧\times٧^{س}+٧\times٧^{س}\times٧^{-١}=٥٠\times٧^{س}$

$\therefore ٧\times٧^{٢س}-٥٠\times٧^{س}+٧=٠$ $(٧\times٧^{س}-١)(٧^{س}-٧)=٠$

$\therefore$ س=-١ ، س=١

(١٧) $١٢^{س+١}=٤^{٢س-١٣}=٢^{٢}١٢^{٢س-١٣}$ $\therefore$ |س|=٢|٢س-٣| بتربيع الطرفين

$\therefore$ س^{٢}=٤(٤س^{٢}-١٢س+٩)=٠ $\therefore$ ٥س^{٢}-١٦س+١٢=٠

$\therefore$ (٥س-٦)(س-٢)=٠ $\therefore$ س= $\frac{٦}{٥}$ أو س=٢

(١٨) $(٢^{س}-٢)(٢^{س}+١)=٠$ $٢^{س}=٢$ س=١ ، $٢^{س}=-١$ مرفوض

(١٩) $٧^{س^{٢}-١٣}=٢^{٢}$ $\therefore$ |س-٣|=٢ بتربيع الطرفين

س-٦$\sqrt{س}$+٩=٤ $\therefore$ س-٦$\sqrt{س}$+٥=٠ ($\sqrt{س}$-٥)($\sqrt{س}$-١)=٠

$\therefore$ س=٢٥ ، س=١

(٢٠) بالضرب في س $\therefore$ ٣-١١س +٦س=٠

٦(س$^{\frac{١}{٢}}$)^{٢}-١١(س$^{\frac{١}{٢}}$)+٣=٠ ، (٢س$^{\frac{١}{٢}}$ -٣)(٣س$^{\frac{١}{٢}}$-١)=٠

$\therefore$ س= $\frac{٩}{٤}$ أو س= $\frac{١}{٩}$

(٢١) س$^{\frac{٢}{٣}}$ - ٢٨س$^{\frac{١}{٣}}$ +٢٧=٠ $\therefore$ (س$^{\frac{١}{٣}}$ -١)(س$^{\frac{١}{٣}}$-٢٧)=٠

$\therefore$ س$^{\frac{١}{٣}}$ =١ س=١ ، س$^{\frac{١}{٣}}$ =٢٧ س=١٩٦٨٣

(٢٢) $٢^{٢س}-٥\times٢^{س}\times٢+١٦=٠$ $\therefore$ $٢^{٢س}-١٠\times٢^{س}+١٦=٠$

$(٢^{س}-٨)(٢^{س}-٢)=٠$ $\therefore$ س=٣ ، س=١

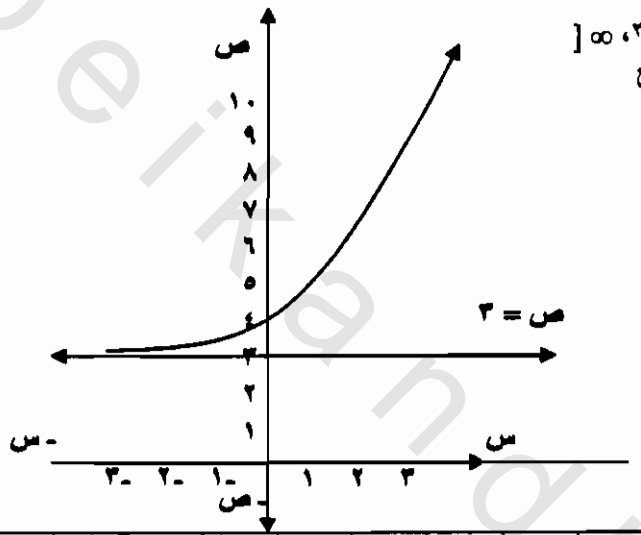
obeikandi.com

إجابة تمرين (٢٣)

(١) واضح أن الشكل البياني لهذه الدالة مماثل للشكل البياني للدالة د(س)=٢س ولكن بإزاحة صادية قدرها ٣

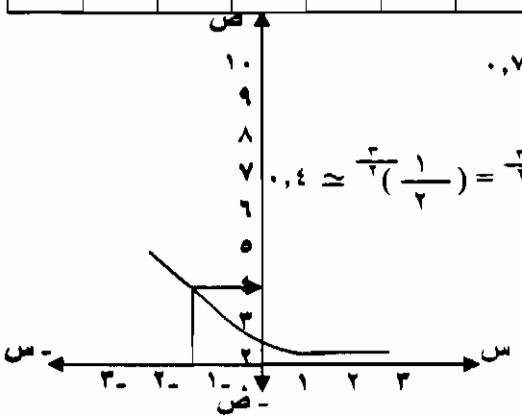
س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
٣+٢س	$٣\frac{١}{٨}$	$٣\frac{١}{٤}$	$٣\frac{١}{٢}$	٤	٥	٧	١١

* المجال ح ، المدي [٣، ∞ [
* الاطراد متزايدة علي ح



(٢)

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣
$ص = (\frac{١}{٢})^{س}$	٤	٢,٨	٢	١,٤	١	٠,٧	$\frac{١}{٢}$	٠,٤	$\frac{١}{٤}$	٠,٢	$\frac{١}{٨}$



* $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢^{\frac{١}{٢}}} = (\frac{١}{٢})^{\frac{١}{٢}} \simeq ٠,٧$
* $\frac{\sqrt{٣}}{٤} = \frac{٢^{\frac{١}{٢}}}{٢^{٢}} = ٢^{-\frac{٣}{٢}} = (\frac{١}{٢})^{\frac{٣}{٢}} \simeq ٠,٤$
* د(١,٥) = $(\frac{١}{٢})^{\frac{٣}{٢}} \simeq ٠,٤$
* د(-١,٥) = $(\frac{١}{٢})^{-\frac{٣}{٢}} \simeq ٢,٨$

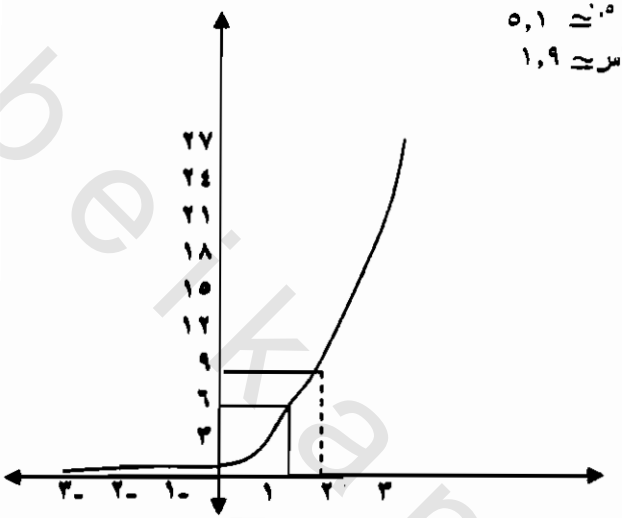
obeikandi.com

(٣)

س	ـ ٣	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧

أ) د(١,٥) = $٣^{١,٥}$ ≃ ٥,١

ب) $٣^{س}$ = ٨ = $٣^{س}$ ≃ ١,٩

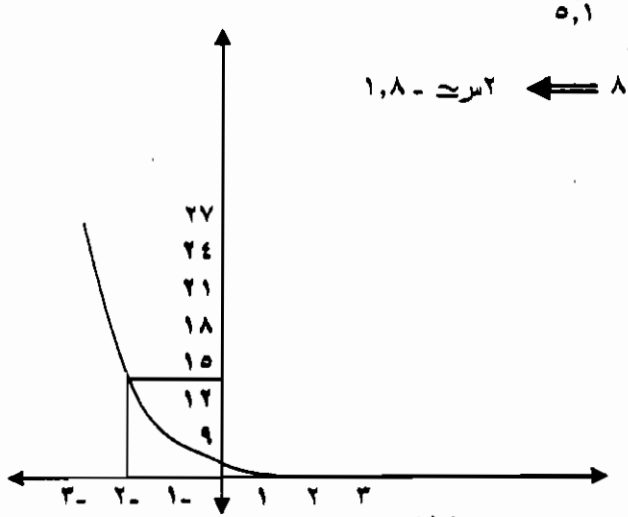


(٤)

س	ـ ٣	ـ٢	ـ ١	٠	١	٢	٣
د(س)	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

أ) د(ـ ٠,٤) ≃ ٥,١

ب) $(\frac{١}{٣})^{س}$ = ٨ ⟸ $٣^{س}$ ≃ ـ ١,٨



obeikandi.com

(٥)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧

عند التعويض في الدالة فمنا بالآتي :

س=٠ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٠-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

س=١ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{١-٢} = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

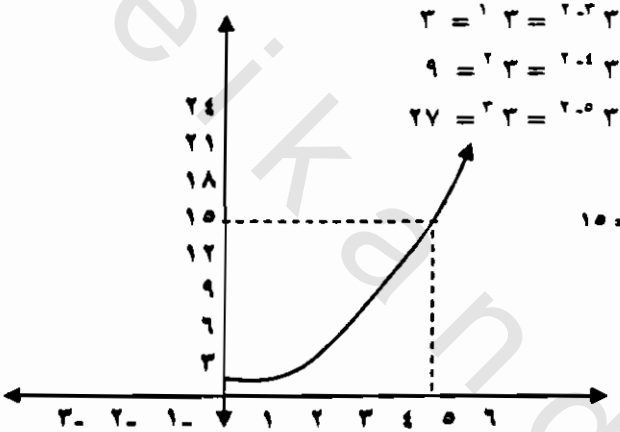
س=٢ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٢-٢} = ٣^{٠} = ١$

س=٣ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٣-٢} = ٣^{١} = ٣$

س=٤ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٤-٢} = ٣^{٢} = ٩$

س=٥ ∴ $٣^{س-٢} = ٣^{٥-٢} = ٣^{٣} = ٢٧$

أولاً : من الرسم
د(١,٨) = ١ تقريباً



ثانياً : عندما $س^{س-١} = ١٥$
من الرسم عندما د(س) = ١٥
∴ س = ٤,٦ تقريباً

(٦)

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٣}{٥}$	١	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٢٥}{٩}$	$\frac{١٢٥}{٢٧}$	$\frac{٦٢٥}{٨١}$
	٠,٤	٠,٦	١	١,٧	٢,٨	٤,٦	٧,٧

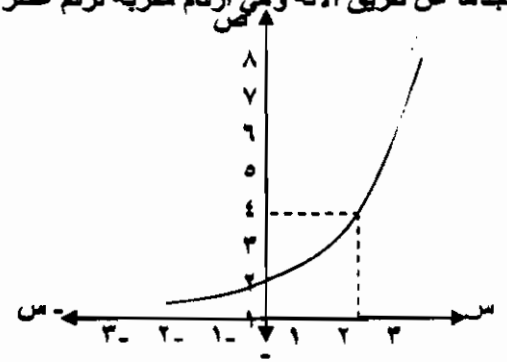
ملحوظة : جميع الأعداد العشرية نوجدها عن طريق الآلة وهي أرقام مقربة لرقم عشري واحد

أولاً: د(٢,٣) = ٢,٩ تقريباً

ثانياً: $(\frac{١}{٣})^{س} = ١٢$

أي أن د(س) = ١٢

∴ س =١٢.



اجابة تمارين (٢٤)

١) $٢٧ \sqrt{س} = س^{\frac{٧}{٢}}$ $\quad ٣^{٢} \times ٣^{\frac{١}{٢}} = س^{\frac{٧}{٢}}$

$٣^{\frac{٧}{٢}} = س^{\frac{٧}{٢}}$ $\quad س = ٣$

٢) $طا \frac{ط}{٣} = ٣^{س}$ $\quad طا ٦٠ = ٣^{س}$

$\sqrt{س} = ٣^{س}$ $\quad ٣^{\frac{١}{٢}} = ٣^{س}$

٣) $٠,٠٠١٦ = ٣ \sqrt{\frac{١٦}{١٠٠٠}}$ $\quad ٥^{\frac{١}{٣}س} = ٤ - \frac{١}{٣}$ س $\quad س = -١٢$

٤) $\frac{١}{٢٧} = ٣^{س}$ $\quad ٣^{-٣} = ٣^{س}$ $\quad س = -٣$

٥) لو٢ لو٢ س = ١ $\quad$ لو٢ (لو٢ س) = ١

لو٢ س = $٢^{١}$ $\quad س = ٢^{٢} = ٨$

٦) $٢^{اس+١١} = ٤$ $\quad اس+١١ = ١٦$

$اس+١١ = \pm ١٦$ $\quad س+١ = ١٦$ أو $س-١ = -١٦$

$س = ١٥$ $\quad س = -١٧$

٧) $س + ٣ = (١٦)^{\frac{١}{٤}}$ $\quad س + ٣ = (٢^{٤})^{\frac{١}{٤}}$

$س + ٣ = ٢$ $\quad س = -١$

٨) لو٣ $(٩ \sqrt{٣})^{٢}$ = لو٣ (٨١ × ٣) = لو٣ ٣٤٣ = لو٣ $٣^{٥}$

= ٥ لو٣ ٣ = ٥ × ١ = ٥

٢) لو٥ لو٢ (٣ لو٢ ٢) = لو٥ لو٢ ٣ = لو٥ ١ = صفر

٣) $\frac{لو ٤٣}{لو ٣٣} = \frac{٤ لو ٣}{٣ لو ٣} = \frac{٤}{٣}$

٤) $لو ٢٥ + لو ٢٨ + \frac{٣ لو ٣ \times ٤ لو ٢}{٦ لو ٢} - لو \frac{١٤}{٥}$

$= لو ٢٥ + لو ٢٨ + ٢ لو ٢ - لو \frac{١٤}{٥}$

$= لو (٢٥ \times ٢٨ \times ٤ \times \frac{١٤}{٥}) = لو ١٠٠٠ = ٣$ د

٥) لو٤ $[١٠٠ \times \frac{١}{٤} \times ٣٦ \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٢٥}]$ = لو٤ ٢

بوضع لو٤ ٢ = س $\quad ٤^{س} = ٢$ $\quad ٢^{٢س} = ٢^{١}$ $\quad س = \frac{١}{٢}$

obeikandl.com

٦) $(٣٤٣)^{\frac{١}{٥}} = (٣^{٥})^{\frac{١}{٥}} = ٣$ $= \text{لو}٦٢٥ + \text{لو}\frac{٨}{١٥} + \text{لو}٩ - \text{لو}٣$

$= \text{لو}\left(٦٢٥ \times \frac{٨}{١٥} \times ٩ \times \frac{١}{٣}\right) = \text{لو}١٠٠٠ = ٣$

٧) $\text{لو}١٠ + \text{لو}\frac{١٦}{٤٩} - \text{لو}\left[\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}} + \text{لو}٤٩ - \text{لو}٦ - \text{لو}٩$

$= \text{لو}\left[١٠ \times \frac{١٦}{٤٩} \times \frac{٢٧}{٨} \times ٤٩ \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٩}\right] \text{لو}١٠ = ١$

٨) $\text{لو}_{٢}(١٤)^{٣} - \text{لو}_{٢}(٥)^{٤} + \text{لو}_{٢}\left(\frac{٢٥}{٧}\right)^{٢} - \text{لو}_{٢}٧$

$\text{لو}_{٢}\left[٢٧٤٤ \times \frac{١}{٦٢٥} \times \frac{٦٢٥}{٤٩} \times \frac{١}{٧}\right]^{٢} = \text{لو}_{٢}٨ = \text{لو}_{٢}٢^{٣}$

$= ٣\ \text{لو}_{٢}٢ = ٣ \times ١ = ٣$

٩) الايمن $= \text{لو}_{٢}\left(٣٠ \times \frac{٢٥}{٢٧} \times \frac{٩}{١٢٥}\right) = \text{لو}_{٢}٢ = ١$

١٠) الأيمن $= \frac{(\text{لو}٤٠ \times \frac{١}{٨} \times ٥)}{(\text{لو}٢٨ \times \frac{١}{٧} \times ٢٥)} = \frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}١٠٠} = \frac{٢\text{لو}٥}{٢} = \text{لو}٥$

الأيسر $= ١ - \text{لو}٢ = \text{لو}١٠ - \text{لو}٢ = \text{لو}\frac{١٠}{٢} = \text{لو}٥$

الايسر $= ١ - \text{لو}٢ = \text{لو}١٠ - \text{لو}٢ = \text{لو}\frac{١٠}{٢} = \text{لو}٥$

١١) الايمن $= \frac{\text{لو}(٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{لو}(٣)^{٢} - \text{لو}(١٠)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}} = \frac{\text{لو}(٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{لو}(٩)^{\frac{٣}{٢}} - \text{لو}(١٠)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}}$

$= \frac{\left(\frac{١}{١٠} \times ٩ \times ٥\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}} = \frac{\frac{٣}{٢}\ \text{لو}\frac{٩}{٢}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}} = \frac{٣}{٢} =$ الايسر

obeikandi.com

١٢) الايمن = لو(٥)^{٣} + لو(١٤)^{٢} − لو ٤٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

= لو (١٢٥ × ١٩٦ × $\frac{١}{٤٩}$ × $\frac{٢}{١٠}$) = او١٠٠ = ٢

الايسر = لو٢٥، = لو، (٥)^{٢} = ٢ لو، ٥ = ٢

١٣) لو، $\frac{٣}{٢٥}$ + لو، (٥)^{٥} + لو، ٢٧ − لو، $\frac{١٢٥}{١٢}$ - لو، ٢٤٣ = لو، س

لو،($\frac{٣}{٢٥}$ × ٣١٢٥ × ٢٧ × $\frac{١٢}{١٢٥}$ × $\frac{١}{٢٤٣}$) = لو، س

لو، ٤ = لو، س س = ٤

١٤)لو س^{٢} + لو ص^{٢} − لو س − ص = ٢ لو ٦

لو (س^{٢} × ص^{٢} × $\frac{١}{\text{س}\cdot\text{ص}^{٢}}$) = لو ٣٦

س^{٢} ص^{٢} = ٣٦ س ص = ٦

١٥) (لو س)$^{\text{لوس}}$ = لو (١٠٠ × س) لو س × لو س = لو ١٠٠ + لو س

(لو س)^{٢} = ٢ + لو س (لوس)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

(لو س − ٢) (لو س + ١) = ٠ اما لو س = ٢

س = ١٠^{٢} = ١٠٠

١٦) لو س = $\frac{\text{لو}٤٩-(\text{لو}٧)^{٢}}{\text{لو}٠,٠٧}$ = $\frac{٢\text{لوس}-\text{لو}٧\times\text{لو}٧}{\text{لو}٧-\text{لو}١٠٠}$

$\frac{\text{لو}٧(٢-\text{لو}٧)}{\text{لو}٧-٢}$ = $\frac{\text{لوس}(\text{لو}٧-٢)}{\text{لو}٧}$

لوس = − لو٧ لو س = ١٠$^{-\text{لو}٧}$ س = $\frac{١}{٧}$

١٧) و س = $\frac{(\text{لو}٥)^{٢}-٣\text{لو}٥}{\text{لو}٥-\text{لو}١٠٠٠}$ = $\frac{\text{لو}٥(\text{لو}٥-٣)}{\text{لو}٥-٣}$ = لو ٥

لو، س = لو ٥ س = ٥

١٨) بوضع لو، س = لو، ٩ = ص

obeikandl.com

لو، س = ص | لو، ٩ = ص

س = ٢ | ٩^٤ = ٤

٣ = ٢

مجموعة الحل { ٣ }

١٩)(لو س)^٢ + ٢ لو س + ١ = (لو ٢)^٢

[(لو س) + ١] = (لو٢)^٢ | لو س + ١ = ± لو ٢

لو س + ١ = لو ٢ | لو س + ١ = - لو ٢

لو س = (لو ٢) – ١ | لو س = - لو٢ – ١

= لو٢ – لو ١٠ | لوس = لو٢^١٠ – لو ١٠

= لو ٢/١٠ | لو س = لو ١/٢ - لو ١٠

س = ١/٥ لو س = لو ١/٢٠ س = ١/٢٠

٢٠)٣^٢س – ٢٧ × ٣^س + ٥٠ = ٠

(٣^س – ٢٥) (٣^س – ٢) = ٠

إما ٣^س = ٢٥ س لو٣ = لو ٢٥ س = لو٢٥/لو٣ = ٢,٩

أو ٣^س = ٢ س لو ٣ = لو ٢ س = لو٢/لو٣ = ٠,٦٣

٢١)٣^س^٢ – ١٤ × ٣^س + ٤٥ = ٠

(٣^س – ٩) (٣^س – ٥) = ٠

إما ٣^س = ٣^٢ س =٢

أو ٣^س = ٥ س لو ٣ = لو ٥ س = لو٥/لو٣ ٠,٦٣

٢٢)لو ٣ ^٧-٢س = لو ١٨,١

٧ – ٢س لو ٣ = لو ١٨,١ ٧ – ٢ س = لو١٨,١/لو٣

٧ – ٢ س = ٢,٦٤ - ٢ س = ٢,٦٤-٧

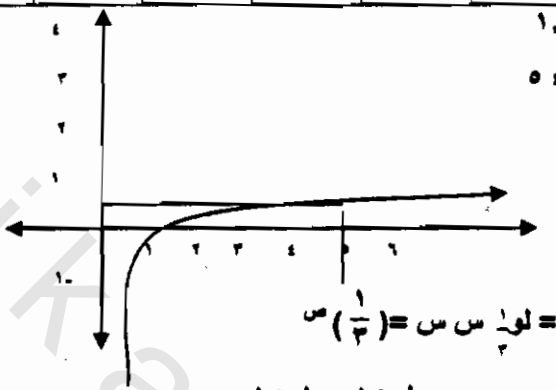
ـ ٢ س = ٤,٣٦ـ س = ٢,١٨

٢٣) ص = لو ٢ س عكس ص = ٣ ^ س

س	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩	٢٧
ص	٣ـ	٢ـ	٠	١	٢	٢	٣

لو٢ ٥ = ١,٥

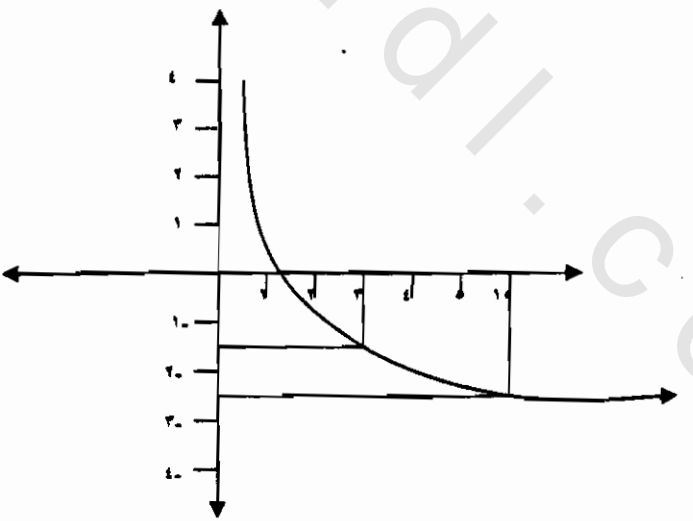
عندما س = ٥



٢٤)ص = لو$\frac{1}{3}$ س س = $(\frac{1}{3})^{ص}$

للتاكيد فقط لو$\frac{1}{3}$ ١٥ = $\frac{لو١٥}{لو\frac{1}{3}}$ = $\frac{لو١٥}{لو١ ـ لو٣}$

٢,٥ـ



اجابة تمرين (٢٥)

١) [أ] د = [(١ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٨) ، ..... ، (ر ، ٢ر - ٤ ، .....]

[ب] د = [(١ ، $\frac{١}{٤}$) ، (٢ ، $-\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، ١) ، ..... ، (ر ، ٢ر-٣) ، ...]

[ج] د = [(١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $-\frac{٢}{٣}$) ، (٣ ، $-\frac{٣}{٤}$)]

[هـ] د = [(١ ، ٢) ، (٢ ، $٣\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $٢\frac{٢}{٣}$)]

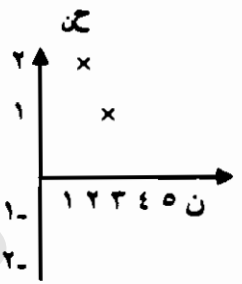
٢) [أ] ح١ = ٢

ح٢ = -١

ح٣ =

ح٤ = -١

ح٥ = -٢



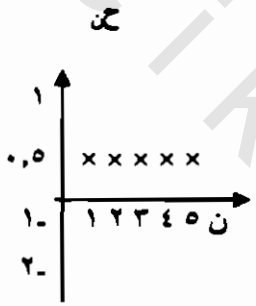
٢)[ب] ح١ = -

ح٢ = ٠,٣٣

ح٣ = ٠,٢٥

ح٤ = ٠,٢

ح٥ = ٠,١٦



٢) [ج] ح١ = ٨

ح٢ = ٤

ح٣ = ٢

ح٤ = ١

ح٥ = $\frac{١}{٢}$

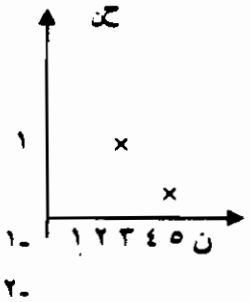
٢)[هـ] ح١ = -١

ح٢ = ٠,٥

ح٣ = -٣٣

ح٤ = ٠,٢٥

ح٥ = -٠,٢



---

٣) [أ] ح١ = ٢ ، ح٢ = -١ ، ح٣ = ٢ ، ح٤ = -١ ، ح٥ = ٢ ، ح١ = -١

[ب] ح١ = $-\frac{١}{٢}$ ، ح٢ = ٣ ، ح٣ = $\frac{٩}{٢}$ ، ح٤ = ٧ ، ح٥ = $\frac{١}{٢}$ ، ح١ = ١١

obeikandl.com

[ج] $ح_1 = ٢$ ، $ح_2 = ٣$ ، $ح_3 = \frac{٩}{٢}$ ، $ح_4 = ٨$ ، $ح_5 = \frac{٢٥}{٢}$ ، $ح_6 = ١٨$

[د] $ح_1 = ٣$ ، $ح_2 = ٣$ ، $ح_3 = ٩$ ، $ح_4 = ٨١$ ، $ح_5 = ٦٥٦١$ ، $ح_6 = (٥٦١)$

٤) [أ] $ح_1 = ١$ ، $ح_2 = -٢$ ، $ح_3 = \frac{١}{٢}(ح_2 + ح_1) = -\frac{٢٥}{٢}$

$ح_4 = \frac{١}{٢}(ح_3 + ح_2) = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٤}$

$ح_5 = \frac{١}{٢}(ح_4 + ح_3) = -\frac{٧}{٨}$ $ح_6 = \frac{١}{٢}(ح_5 + ح_4) = -\frac{١٧}{١٦}$

[ب] $ح_1 = ٥$ ، $ح_2 = ح_1 - ٢ = ١$ ، $ح_3 = ح_2 - ٢ = ١$ ، $ح_4 = ح_3 - ٢ = ١٠$
، $ح_5 = ح_4 - ٢ = -٣$ ، $ح_6 = ح_5 - ٢ = -٥$

[ج] $ح_1 = ٢$ ، $ح_2 = -١٠$ ، $ح_3 = ح_2^٢ - ح_1^٢ = ٣$ ، $ح_4 = ح_3 - ح_2 = ٨$
، $ح_5 = ح_4 - ح_3 = ٥٥$ $ح_6 = ح_5 - ح_4 = ٢٩٦١$

[د] $ح_1 = ٣$ ، $ح_2 = ٣$ ، $ح_3 = -٢$ ، $ح_4 = ح_3 + ح_2 = ٧$
، $ح_5 = ح_4 + ح_3 = ١٦$ ، $ح_6 = ح_5 + ح_4 = ٢٠$

٥) [أ] $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{ر + ٣}{ر + ١} - \frac{ر + ٢}{ر} = \frac{ر^٢ + ٣ر - ر^٢ - ٣ر - ٢}{ر(ر + ١)}$

$= \frac{-٢}{ر(ر + ١)} < ٠$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[ب] $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣ر_{ن+١} - ٣ر_ن = ٣ر_ن^{٢-١}(٣-١) > ٠$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[جـ] $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣ \times ٢ر_{ن+١} - ٥) - (٣ \times ٢ر_ن^{٢-١}(٢-١) > ٠$

$= ٣ \times ٢ر_ن^{٢-١}(٢ - ١) > ٠$ ∴ المتتابعة متزايدة.

[د] $ح_{ن+١} - ح_ن = (٢ - \frac{٣}{ر + ١}) - (٢ + \frac{٣}{ر}) = \frac{٣ر - ٣ر - ٣}{ر(ر + ١)}$

$= \frac{-٣}{ر(ر + ١)} < ٠$ ∴ المتتابعة متناقصة.

obeikandi.com

[هـ] $ح_{ن+1} - ح_ن = \frac{1}{ر^2 + 2ر + 2} - \frac{1}{ر^2 + 1} = \frac{ر^2 + 1 - ر^2 - 2ر - 2}{(ر^2+1)(ر^2+2ر+2)}$

$= \frac{-2ر - 1}{(ر^2 + 1)(ر^2 + 2ر - 2)} < 0$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[و] $ح_{ن+1} - ح_ن = (11 - 2ر - 2) - (11 - 2ر) = -2 < 0$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[ز] $ح_{ن+1} - ح_ن = 7 - 7 = 0$ ∴ المتتابعة ثابتة.

٦) [أ] $ح_1 = -1$ ، $ح_2 = 2$ ، $ح_3 = 1$ $ح_4 = ح_2 + 3 = 5$

، $ح_5 = ح_3 + ح_1 = 4$ ، $ح_6 = ح_4 + 3 = 8$

لاحظ أن: $ح_{2ن+1}$ يعطي الحدود الفردية الرتبة، $ح_{2ن}$ يعطي الحدود الزوجية الرتبة.

[ب] $ح_1 = 1$ ، $ح_2 = 2$ ، $ح_3 = -2$ ، $ح_4 = ح_2 = 4$ ، $ح_5 = ح_3 + ح_1 = -1$

، $ح_6 = ح_4 = 16$

٧) $ن^2 - 13ن = -42$ ∴ $ن^2 - 13ن + 42 = 0$ ∴ $(ن - 6)(ن - 7) = 0$

∴ ن = ٦ أو ن = ٧ ∴ $-42 \in (ح_ن)$ وتكون إما $ح_6$ أو $ح_7$

$ن^2 - 13ن = -30$ ∴ $ن^2 - 13ن + 30 = 0$ $(ن - 3)(ن - 10) = 0$

∴ ن = ٣ أو ١٠ ∴ $-30 \in (ح_ن)$ وتكون إما $ح_3$ أو $ح_{10}$

$ن^2 - 13ن = 12$ $ن^2 - 13ن - 12 = 0$

$ن = \frac{13 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$ ∴ $\sqrt{} \in ص^+$ ∴ $12 \in (ح_ن)$

٨) $ح_1 = 1$ ، $ح_2 = \frac{2}{3} = 1$ ، $ح_3 = 3$ $ح_4 = \frac{1}{2}(ح_2 + ح_3) = 2$ ، $ح_5 = 5$

إجابة تمارين (٢٦)

١) [أ] $ح_ن = 2ن - 1$ مقدار من الدرجة الأولى ومعامل ن = ٢

∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢ بوضع ن= ١ ∴ $ح_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$

∴ المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .....)

[ب] $ح_ن = \frac{6}{ن} - \frac{ن}{5} - \frac{ن^2}{5}$ ليس مقدار من الدرجة الأولى في ن

∴ $(ح_ن)$ ليس متتابعة حسابية

[جـ] ح$_{ن}$ = ٣ن$^{-١}$ -٢ ليس مقدار من الدرجة الأولى في ن ∴ (ح$_{ن}$) ليس متتابعة حسابية.

[ء] ح$_{ن}$ = $\frac{٣}{٢}$ ن + ٢ مقدار من الدرجة

الأولى في ن ∴ (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية أساسها $\frac{٣}{٢}$ بوضع ن = ١

∴ ح$_{١}$ = $\frac{٣}{٢}$ + ٢ = ٣$\frac{١}{٢}$ ∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٣$\frac{١}{٢}$ ، ٥ ، $\frac{١}{٢}$ ٨ ،

٢) [أ] ١١-٧ = ١٥-١١ = ١٩-١٥= ٤ ∴ المتتابعة الحسابية أساسها ٤

ح$_{ن}$ = ٧ +(ن-١) × ٤ = ٤ن + ٣ [ب] ٣٤-٣٧=٣١-٣٤=٢٨-٣١= -٣

∴ المتتابعة حسابية أساسها -٣ ح$_{ن}$ = ٣٧ +(ن -١) × -٣ = ٤٠ -٣ن

[جـ] ٠,٣٣ - ٠,٣ ≠ ٠,٣٣٣ - ٠,٣٣ ∴ المتتابعة ليست حسابية

[ء] س+ ٢أ - س= س + ٤أ -(س+٢أ) = ٢أ ∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢أ

ح$_{ن}$ = س +(ن-١) ×٢أ= س-٢أ + ٢أن

٣) ٨٧ = -٩ +(ن-١) ×٤ ∴ ٤ن = ١٠٠ ∴ ن = ٢٥ ∴ ح$_{٢٥}$= ٨٧ ٣٣٣=-٩

+(ن-١)×٤ ٣٤٦ = ٤ن ∴ ن = ٨٦$\frac{١}{٢}$ ∴ لا يوجد حد قيمته ٣٣٣

٤) ء =(٣س + ٢ص) - (س - ص) = ٢س + ٣ص

٩س + ١١ص = (س - ص) + (ن-١) (٢س + ٣ص)

٨س + ١٢ص = (ن-١) (٢س + ٣ص) ∴ ٤(٢س+ ٣ص)= (ن-١)(٢س+ ٣ص)

∴ ن-١ = ٤ ∴ ن = ٥

٥) ٤١ +(ن-١) × -٤ < ٠ ∴ ٤٥- ٤ن < ٠ ∴ ٤ن > ٤٥ ∴ ن > $\frac{١}{٤}$

∴ ن = ١٢ أو ١٣ أو ١٤ أو..... ∴ أول حد سالب هو ح$_{١٢}$

٦) -٦,٧ + (ن-١) × ٠,٣ > ٠ ∴ ٠,٣ ن > ٧ ∴ ن > $\frac{٧٠}{٣}$ ∴ ن > ٢٣$\frac{١}{٢}$

∴ أول حد موجب هو ح$_{٢٤}$

٧) ٨ + (ن-١) × ٩ > ٤٠٠ ∴ ٩ن > ٤٠١ ∴ ن > $\frac{٤٠١}{٩}$

∴ ن > $\frac{٥}{٩}$ ∴ أول حد > ٤٠٠ هو ح٥٠١

٨) ح٣ن+١ = ١٣ +(٣ن+١-١) × $\frac{١}{٢}$ = ١٣ + $\frac{٣}{٢}$ ن

ح٦ن+٢ = ٤٦ +(٦ن+٢-١) × - $\frac{٣}{٢}$ = - $\frac{٨٩}{٢}$ ٩ن

∴ ١٣ + $\frac{٣}{٢}$ ن = $\frac{٨٩}{٢}$ - ٩ن ∴ $\frac{٢١}{٢}$ ن = $\frac{٦٣}{٢}$ ∴ ن = ٣

٩) ٢ب + ٢-(٥ + ب) =١٧ - (٢ب+٢) ∴ ب - ٣ = ١٥ -٢ب

٣ب = ١٨ ∴ ب = ٦ ∴ الأعداد الثلاثة الأخيرة هي ١١ ، ١٤ ، ١٧

∴ ء = ٣ ∴ أ = ٨

١٠) نفرض ان أساس المتتابعة هـ ∴ ب = أ هـ ، جـ = أ + ٢هـ

، ء = أ + ٣هـ ∴ أ(أ + ٣هـ) = $\frac{٦٣}{٢}$ ∴ أ٢ + ٣أ هـ = $\frac{٦٣}{٢}$ .....(١)

(أ + هـ) (أ + ٢هـ) = ٤٤ ∴ أ٢ + ٣أ هـ + هـ٢ = ٤٤ .....(٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ هـ٢ = $\frac{٢٥}{٤}$ ∴ هـ = $\frac{٥}{٢}$ بالتعويض في (١)

∴ أ٢ + $\frac{١٥أ}{٢}$ - $\frac{٦٣}{٢}$ = ٠ ∴ ٢أ٢ + ١٥أ - ٦٣ = ٠ ∴ (أ - ٣) (٢أ + ٢١) = ٠

∴ أ = ٣ أو أ = - $\frac{١}{٢}$ ١٠ ∴ الأعداد هي: ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ٥ ، ٨ ، $\frac{١}{٢}$ ١٠

١١) ٦ + (ن - ١) ء = ٣٣ ∴ (ن - ١) ء = ٢٧ .....(١) ٦ + (٢ن -١) ء = ٦٣

obeikandl.com

∴ (٢ن - ١) ء = ٥٧ .....(٢) بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{\text{ن - ١}}{\text{٢ن - ١}} = \frac{٩}{١٩}$

∴ن = ١٠ بالتعويض في (١) ٩ء = ٢٧ ∴ ء = ٣

ح٢٠ - ٢ = ح١٧ = ٦ + ١٦ × ٣ = ٥٤

١٢) نفرض أن رتب س ، ب ، جـ ، ص هي على الترتيب ط ، ق ، ك ، ل

∴ ط + ل = ق + ك .....(١) س = أ + (ط - ١) ء .....(٢)

ص = أ + (ل - ١) ء .....(٣) بالجمع (٢) ، (٣)

∴ س+ص = ٢أ +(ط + ل - ٢)ء..(٤) ب = أ + (ق - ١) ء .....(٥)

جـ = أ + (ك - ١) ء .....(٦) ∴ ب+جـ=٢أ + (ق + ك - ٢) ء..(٧)

من (١) ، (٤) ، (٧) ينتج أن: س + ص = ب + جـ

١٣) أ (أ + ٤ء) = ٥٧ ∴ أ٢ + ٤أ ء = ٥٧.....(١)

(أ + ء) (أ + ٦ء) - (أ + ٢ء) (أ + ٣ء) = ٢٤

٢أ ء = ٢٤ ∴ أ = $\frac{١٢}{ء}$.....(٢) بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $\frac{١٤٤}{ء^٢}$ + ٤٨ = ٥٧ ∴ ء٢ = ١٦ ∴ ء = ٤ ∴ أ = ٣

١٤) أ + (م - ١) ء = ن .....(١) ، أ + (ن - ١) ء = م .....(٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ (م - ن)ء = ن - م

∴ ء = $\frac{\text{ن - م}}{\text{- (ن - م)}}$ = -١ بالتعويض في (١)

∴ أ + (م - ١) × -١ = ن ∴ أ = م + ن - ١

ح م+ن = م + ن - ١ + (م + ن - ١) × -١ = صفر

١٥) ٣ + (ن - ٢) ء = ١٧ ∴ (ن - ٢) ء = ١٤ .....(١)

٣ + (٢ن - ٦) ء = ٢٧ ∴ (ن - ٣) ء = ١٢ .....(٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ ء = ٢ بالتعويض في (١) ∴ ن = ٩

، المتتابعة هي: (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

إجابة تمارين (٢٧)

١) $(أ^{٢} + ١) + (٢أ^{٢} + أ + ٣) = ٢(٢أ^{٢} + ١)$ ∴ $أ^{٢} - أ - ٢ = ٠$

∴ $(أ - ٢)(أ + ١) = ٠$ ∴ $أ = ٢$ أو $أ = -١$

∴ المتتابعة هي (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) أو (٢ ، ٣ ، ٤ ، ...)

٢) $س + ص = ٢٤$ .....(١) ، $٥س + ٣ص = ٩٠$ .....(٢)

بحل (١) ، (٢) ∴ $س = ٩$ ، $ص = ١٥$

٣) $٢ب = أ + ٢جـ$ .....(١) ، $٦جـ = ٢ب + ء$ .....(٢)

من (١) $٢جـ = ٢ب - أ$ بالتعويض في (٢) ∴ $٦ب - ٣أ = ٢ب + ء$

∴ $٤ب = ٣أ + ء$ ∴ ٢ب وسط حسابي بين ٣أ ، ء ∴ (٣أ ، ٢ب ، ء) متتابعة حسابية.

٤) عدد حدود المتتابعة = ١٥ + ٢ = ١٧ حداً $٣٠ = ٧٨ + ١٦ء$ ∴ $ء = -٣$

∴ الأوساط هي: ٧٥ ، ٧٢ ، ...، ٣٣

٥) عدد الحدود = ن + ٢ ∴ $ن^{٢} = ١ + (ن + ٢ - ١)ء$

∴ $ء = \frac{ن^{٢} - ١}{ن + ١} = \frac{(ن - ١)(ن - ١)}{ن + ١} = ن - ١$

∴ الأوساط هي ن ، ٢ن - ١ ، ٣ن - ٢ ، $ن^{٢} - ن + ١$

٦) بوضع $ص = س + ء$ ، $ع = س + ٢ء$

الأيمن = $\frac{س + ء + ٢س + ٤ء}{ء} - \frac{س + ٢ + ٢س}{ء} = \frac{٢}{ء}$ = ٤ = الأيسر

٧) الوسط الخامس هو $ح_{٥} = ١ + ٥ء$ الوسط ن - ٢ هو $ح_{ن-٢} = ١ + (ن-٢)ء$

∴ $\frac{١ + ٥ء}{١ + (ن - ٢)ء} = \frac{٤}{٧}$ ∴ $ء(٤ن - ٤٣) = ٣$.....(١)

عدد حدود المتتابعة = ن + ٢ $٣٧ = ١ + (ن + ١)ء$ ∴ $(ن + ١)ء = ٣٦$.....(٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $\frac{ن + ١}{٤ن - ٤٣} = ١٢$ ∴ ن = ١١

٨) $٣١ = ١ + (ن + ١)ء$ ∴ $(ن + ١)ء = ٣٠$.....(١)

$\frac{١ + ٧ء}{٣١ - ٢ء} = \frac{٥}{٩}$ ∴ $ء = ٢$.....(٢) بالتعويض من (٢) في (١)

ن= ١٤ ∴ الأوساط هي ٣ ، ٥ ، ٧ ،.....، ٢٩

٩) ٢ب = أ + جـ ∴ جـ = ٢ب + أ وهو المطلوب أولا

$\frac{٢}{ب} = \frac{١}{هـ} + \frac{١}{أ}$ ∴ $\frac{١}{هـ} = \frac{٢}{ب} - \frac{١}{أ}$ وهو المطلوب ثانيا

بقسمة (١) على (٢) $\frac{جـ}{هـ} = \frac{(٢ب - أ)(٢أ - ب)}{أب}$

∴ $\frac{جـ}{هـ} = \frac{٥أب - ٢(أ^٢ - ب^٢)}{أب}$ وهو المطلوب ثالثا

١٠) ٢ × $\frac{٢}{ب + جـ} = \frac{٢}{أ + ب} + \frac{٢}{جـ + أ}$ ∴ $\frac{٢}{جـ + أ} = \frac{أ + ٢ب + جـ}{(ب + جـ)(أ + ب)}$

∴ ٢(ب + جـ)(أ + ب) = (جـ + أ)(أ + ٢ب + جـ) ∴ ٢ب^٢ = جـ^٢ + أ^٢

∴ ب^٢ وسط حسابي بين جـ^٢ ، أ^٢ أ^٢ ، ب^٢ ، جـ^٢ تكون متتابعة حسابية.

مجموع الحدود ٩ ، ١٠ ، ١١ = صفر

إجابة تمارين (٢٨)

١) حن = ٩ن – ٥ بوضع ن = ١ ∴ ح١ = ٤ بوضع ن = ٢ ∴ ح٢ = ١٣

بوضع ن = ٣ ∴ ح٣ = ٢٢ ∴ أ = ٤ ، ء = ٩ جن = [٨ + (ن-١) × ٩]

= (٩ن - ١)

٢) ١٧٦ = [٧٢ + (ن -١) × -٤] ٨٨ = ن(١٩ - ن)

∴ن^٢ -١٩ن + ٨٨ = ٠ ∴ (ن -٨) (ن -١١) = ٠ ∴ ن= ٨ أو ن = ١١

مجموع الحدود ٩ ، ١٠ ، ١١ = صفر

٣) ٤٦٥ = [٢أ + ١٤ × ٢] ٣١ = أ + ١٤ ∴ أ = ١٧

١٧ = ٩ + (ن-١) × ٢ ∴ ن = ٥ ∴ الحد الذي نبدأ به هو ح٥

٤) جـ. الفردية= [٢×٤ + ٦×٩]=٣١٠ جـ. الزوجية= [٢×٧ + ٦×٩] = ٣٤٠

٥) ١٠٠ = ٥[٢أ + ٩ء] ∴ ٢أ + ٩ء = ٢٠.....(١)

٤٠٠ = ١٠[٢أ + ١٩ ء] ∴ ٢أ + ١٩ ء = ٤٠.....(٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ء = ٢ بالتعويض في (١) ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هي(١ ، ٣ ، ٥ ،.....)

٦) $\frac{ن}{٢}$ [١٠ + (ن-١) × ٤] > ٥٠٠ ∴ ن (٢ن + ٣) > ٥٠٠

∴ ٢ن^{٢} + ٣ن > ٥٠٠ ∴ ن^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ن > ٢٥٠

∴ ن^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ن + $\frac{٩}{١٦}$ > $\frac{٩}{١٦}$ + ٢٥٠ بإكمال المربع ∴ (ن + $\frac{٣}{٤}$)^{٢} > $\frac{٤٠٠٩}{١٦}$

بأخذ الجذر التربيعي ∴ ن + $\frac{٣}{٤}$ > $\frac{٦٣,٣}{٤}$ ∴ ن > ١٥,٠٧٥

∴ أصغر عدد من الحدود هو ١٦ حداً.

٧) نفرض أن عدد الحدود = ٣س مجموع الثلث الأول = $\frac{س}{٢}$ [٨ + " س - ١ " × ٤)

= ٢س (١ + س) مجموعه حدود المتابعة = $\frac{٣س}{٢}$ [٨ + (٣س - ١) × ٤)

= ٦س (١ + ٣س) مجموع الثلث الأول: مجموعه المتتابعة كلها = ٢ : (٢ + ١٥)

= ٢ : ١٧ ∴ $\frac{٢س(١ + س)}{٦س(١ + ٢س)}$ = $\frac{٢}{١٧}$ ∴ س = ١١ ∴ عدد الحدود = ٣ × ١١ = ٣٣

مجموع باقي الحدود = ١٦س^{٢} + ٤س ∴ ١٦س^{٢} + ٤س - ٢س (١ - س) = ١٤٢٠
∴ ٢س^{٢} + س = ٧١٠ = ٠ ∴ (٧س + ٧١) (س - ١٠) = ٠ ∴ س = ١٠
∴ عدد الحدود = ١٠ × ٣ = ٣٠ صفراً س
٨) ح$_{ن+١}$ - ح$_{ن}$ = لو س ص^{ن} - لو س ص$^{ن-١}$ = لو ص = ثابت
∴ المتتابعة حسابية أساسها = لو ص بوضع ن = ١ ∴ ح$_{١}$ لو س

جـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ [٢لو س + ١٢لو ص] = ١٣ [لو س + لو ص^{٦}]

= ١٣لو س ص^{٦} = ١٣لو $\frac{١}{٧٢٩}$ × ٧٢٩٠ = ١٣لو ١٠ = ١٣

٩) ٣٢٥٥ = ٧+١٤+٢١+....إلى ن حدا ٣٢٥٥ = $\frac{ن}{٢}$ [١٤ + (ن - ١) × ٧]

٩٣٠ = ن (ن + ١) ∴ ن^{٢} + ن - ٩٣٠ = ٠ ∴ (ن + ٣١) (ن - ٣٠) = ٠

∴ ن = ٣٠

١٠) نفرض أن الدراجتين تتلاقيان بعد ن ثانية - الأولى تقطع ٢١ ، ١٩ ، ١٧،...إلى ن حد

مجموع ما تقطعه = $\frac{ن}{٢}$ [٤٢ + (ن -١) × -٢] .....(١)

الثانية تقطع ٣٢ ، ٢٩ ، ٢٦ ،...إلى ن حد مجموع ما تقطعه

= $\frac{ن}{٢}$ [٦٤ + (ن - ١) × -٣].....(٢) بجمع (١) ، (٢)

ن (٢٢ - ن) + $\frac{ن}{٢}$ [٦٧ - ٣ن] = ٢٩٧ ∴ ٥ن^{٢} - ١١١ن + ٥٩٤ = ٠

∴ (٥ن - ٦٦) (ن - ٩) = ٠ ∴ ن = ٩ث من (١) ⟵ = ١١٧ متر

ومن (٢) ⟵ = ١٨٠متر

obeikandl.com

إجابة تمارين عامة (م ح)

(١) نفرض أن الأعداد هي أ-ء ، أ ، أ+ء

∴ أ-ء + أ + أ+ء = ٢٧ ∴ أ = ٩

∴ الأعداد هي ٩ - ء ، ٩ ، ٩+ ء

∴ (٩-ء)^{٢} + ٨١ + (٩+ ء)^{٢} = ٢٥١

∴ ء^{٢} = ± ٢

∴ الأعداد هي ٧ ، ٩ ، ١١ أو ١١ ، ٩ ، ٧

(٢) نفرض أن الأعداد هي

أ-٣ء ، أ-ء ، أ+ء ، أ+٣ء

∴ ٤أ = ٢٠ ∴ أ = ٥

∴ الأعداد هي $\frac{(٥-٣ء)(٥+٣ء)}{(٥-ء)(٥+ء)} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{٢٥ - ٩ء^{٢}}{٢٥ - ء^{٢}} = \frac{٢}{٣}$

∴ ء^{٢} = ١ ∴ ء = ± ١

∴ الأعداد هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ أو ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢

(٣) $\frac{٢}{٣}$ [٢أ + ٢ء] = ١٥

∴ أ+ء = ٥ ——— (١)

$\frac{٥}{٢}$[٢أ + ٤ء] = ٣٥

∴ أ+ ٢ء = ٧ ——— (٢)

بطرح (١) من(٢) ∴ ء = ٢ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٥ ، ٧ ، .....)

$\frac{ن^{٢}+١}{ن^{٢}-١} = \frac{\frac{ن+١}{٢}[٦+٢ن]}{\frac{ن-١}{٢}[٦+(ن-٢)\times٢]}$

$= \frac{ن+٣}{ن-١}$

(٤) $\frac{أ+١٠ء}{أ+٥ء} = \frac{٣}{١}$

∴ أ٢ + ٥ ء = صفر ——— (١)

[٢أ+٩ء] = ٤٠

∴ ٢أ + ٩ء = ٨ ——— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ء = ٣ ، أ = -٥

∴ المتتابعة هي (-٥ ، -٢ ، ١ ، .....)

١٦٠ = $\frac{ن}{٢}$[٢× -٥ + (ن- ١) ×٢]

∴ ن^{٢} - ٦ن- ١٦٠ = ٠ ∴ ن = ١٦

(٥) $\frac{ن}{٢}$[٢ أ + (ن-١) ×٢] = ٣٢٠

∴ ن أ + ن^{٢} - ن = ٣٢٠ ——— (١)

$\frac{٢ن}{٢}$[٢أ + (٢ ن- ١) ×٢] = ١١٥٢

∴ ن أ + ٢ ن^{٢} - ن = ٥٧٦ ——— (٢)

بطرح (١) من(٢) ∴ ن^{٢} = ٢٥٦

∴ ن = ١٦ بالتعويض في (١)

∴ أ = ٥ المتتابعة هي (٥ ، ٧ ، ٩ ، .....)

(٦) $\frac{٢٥}{٢}$ (٢ ح ١١ + ٢٤ ء) = $\frac{٤٠}{٩}$ × $\frac{١٥}{٢}$

(٢أ + ١٤ ء)

∴ ٢٥ (أ + ١٥ ء + ٢٤ء) = $\frac{٤٠}{٩}$×١٥

(أ+ ٧ ء) ∴ أ = ٥ء ——— (١)

٥٥٥٠ = $\frac{١٥}{٢}$(٢ ح ١١ + ١٤ء)

٥٥٥٠ = ١٥ (أ + ٢٥ء + ٧ء)

∴ أ + ٣٢ء = ٣٧٠ ——— (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ∴ ء = ١٠

، أ = ٥٠ ∴ الأقساط الثلاثة الأولي هي

٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ جنيها

obeikandl.com

٧) ح١ = حـ٢ − حـ١ = $\frac{٢٧}{٤}$(٩-١٧)

$\frac{٢٤}{٤}$(١٧ − ٨) = صفر = حـ١٧

$\frac{٣}{٤}$ن (١٧-ن) = ٣٩ ∴ ن = ٤ أ، ١٣

(٨) نفرض أن عدد الحدود = ن

حـن = $\frac{ن}{٢}$[٢٤ + (ن − ١) × -٣]

= $\frac{ن}{٢}$(٢٧ − ٣ ن)

حـن = $\frac{ن}{٦}$[٢٤ + ($\frac{ن-١}{٣}$) × -٣]

= $\frac{ن}{١٦}$(٢٧ − ن)

مجموع $\frac{١}{٢}$ عدد الحدود / مجموع كل الحدود = $\frac{-٢}{-١١-٢}$ = $\frac{٢}{٩}$

∴ $\frac{\frac{ن}{٢}[٢٧-ن]}{\frac{ن}{٢}٢٧ - ٣ن}$ = $\frac{٢}{٩}$

∴ ن = ١٥

(٩) ح١ = لو٢×٣ = لو ٢ + لو ٣

، ح٢ = لو ٢ × ٣٢ = لو ٢ + ٢ لو ٣ ح ن+

، ح٣ = لو ٢ × ٣٣ = لو ٢ + ٣ لو ٣ ح ن+١

∴ أ = لو ٢ + لو ٣ ، ء = لو ٣

حـن = $\frac{ن}{٢}$[٢(لو٢ + لو٣) +(ن − ١) لو٣]

= $\frac{ن}{٢}$[لو ٤ + (ن + ١) لو ٣]

= $\frac{ن}{٢}$لو (٤ × ٣ن + ١)

= لو (٢ن × ٣ $\frac{ن(ن+١)}{٢}$)

(١٠) (أولاً) أول عدد يقبل القسمة علي ٣ حـ١٠

هو ٢٠١ وآخر رقم هو ٣٩٩

∴ الأعداد التي تقبل القسمة علي ٣ هي

٢٠١ ، ٢٠٤ ، ٢٠٧ ، ..... ، ٣٩٩

٣٩٩ = ٢٠١ + (ن−١) × ٣ ∴ ن = ٦٧

= $\frac{٦٧}{٢}$(٢٠١ + ٣٩٩) = ٢٠١٠٠

(ثانيا) مجموع جميع الأعداد المحصورة بين ٢٠٠، ...

أي مجموع الأعداد ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ... ، ٣٩٩

٣٩٩ = ٢٠١ + (ن- ١) × ١ ∴ ن = ١٩٩

حـ١٩٩ = $\frac{١٩٩}{٢}$[٢٠١+٣٩٩) = ٥٩٧٠٠

∴ مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة علي ٣

= ٥٩٧٠٠ − ٢٠١٠٠ = ٣٩٦٠٠

(١١) ح ن = حـ ن − حـ ن − ١

= $\frac{ن}{٢}$[٢ أ + (ن- ١) ء]

- $\frac{ن-١}{٢}$[٢ أ + (ن − ٢٠) ء]

= أ + (ن − ١) ء = ح ء

= حـ ن+٢ − حـ ن+١ ——— (١)

= حـ ن+١ − حـ ن ——— (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ء = ح ن+ ٢ - ح ن+١

= حـ ن+٢ − ٢حـ ن+١ + حـ ن

(١٢) راتبة بعد١٥سنة أي ح ١٥ = أ+ ١٤ء

= ٤٨٠ + ١٤ × ١٨ = ٧٣٢ جنيها

= $\frac{١٥}{٢}$[٤٨٠ + ٧٣٢] = ٩٠٩٠جنيه

(١٣) أ + (ن+١) ء= ٢٢ ——— (١)

أ + (ن- ٣) ء) = ١٠ ——— (٢)

obeikandi.com

أ + (٢ ن) ء = ٣٤ ----- (٣)

بطرح (٢) من (١) .. ء = ٣

بالتعويض في(١) .. أ + ٣ن = ١٩ (٤)

بالتعويض في (٣) .. أ + ٦ ن= ٣٤ (٥)

بطرح (٤) من (٥) .. ن = ٥ (١٨)

بالتعويض في (٤) .. أ = ٤

(١٤) الأيمن = [$\frac{ن}{٢}$(١+ن)]^{٢}

- [$\frac{ن-١}{٢}$(١+ن – ١)]^{٢}

= $\frac{ن^{٢}}{٤}$[١+٢ن + ن^{٢}– ن^{٢}+ ٢ن-١] = ن^{٣}

(١٥) المجموع =(١+ ٣+ ٥+ ... إلي ن حدا)

- (٢ + ٤ + ٦ +.... إلي ن حدا)

= $\frac{ن}{٢}$[٢+ (ن-١) ×٢]- $\frac{ن}{٢}$[٤+(ن- ١) ×٢]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢+٢ن – ٢ – ٤- ٢ن + ٢]= ن

(١٦) $\frac{٦}{٢}$(٢أ + ٥ء) = ١٥٩

.. ٢أ + ٥ء = ٥٣ ---- (١)

حـ١٣ = ١٥٩+ ٤٩ = ٢٠٨

$\frac{١٣}{٢}$[٢أ + ١٢ء] = ٢٠٨

.. أ+ ٦ء = ١٦ ----- (٢)

من (١) ، (٢) .. أ = ٣٤ ، ء = - ٣

.. المتتابعة هي (٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ،.....)

$\frac{ن}{٢}$[٦٨ +(ن- ١) × -٣] > ٠

.. ن < ٢٣$\frac{١}{٢}$ .. ن =٢٤

(١٧) نفرض أن الحد الأول في كل منهما أ حـ

وأساس الأولي ء والثانية هـ

.. أ +٤ ء = أ + ٨هـ .. ء= ٢هـ

ح ٧ في الأولي = أ + ٦ء = أ +١٢ هـ

= ح ١٣ في الثانية

ح ٢ –ح١ = لو س ص – لو س

لو $\frac{س\ ص}{س}$ = لو ص

ح ٣ – ح ٢ = لوس ص^{٢} – لوس ص= لوص

.. المتتابعة حسابية أساسها لوص

حـ = $\frac{٩}{٢}$[٢لو ١٦٠ +٨ لو]

= $\frac{٩}{٢}$لو(١٦٠) ^{٢}× $\frac{١}{٨٢}$= $\frac{٩}{٢}$لو ١٠٠= ٩

(١٩) أ + ١٤ء = ٦٤ ---------- (١)

(أ+٨ء)^{٢}=(أ + ٣ء) (أ+ ١٨ء) — (٢)

من (١) ، (٢) .. أ= ٨ ، ء = ٤

.. المتتابعة هي (٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ....)

حـ ١٥ = $\frac{١٥}{٢}$[٢ × ٨+ ١٤×٤] = ٥٤٠

(٢٠) ١٣+ ء + ١٣+ (ن- ١) ء = - ١٤

.. ن ء = - ٤٠ — (١)

$\frac{ن}{٢}$[٢٦ + (ن- ١) ء] = - ٥٠ — (٢)

بالتعويض من (١) في(٢) .. ن=١٠ ،ء=-٤

(٢١) ح ن= ٣+ (ن- ١) × ٣ = ٣ن

ح ٣ن = ٣+ (٣ن- ١) × ٣ = ٩ن

ح٥ن = ٣+ (٥ن- ١) × ٣ = ١٥ن

ن = $\frac{ن}{٢}$[٦ن + (ن- ١)×٦ن] = ن^{٣}

(٢٢) عدد الحدود = ١٨ حداً

$\frac{٢٧}{٢} = -١٢ + (١٨-١)ء$ ∴ $ء = \frac{٣}{٢}$

المتتابعة هي (-١٢ ، $-\frac{١٥}{٢}$ ، ٩ ، ... ، $\frac{١}{٢}$

$ح_{١٤} = -١٢ + ١٣ \times \frac{١}{٢} = ٧$

∴ $٦ ح_{١٤} = ٤٥$

$٤٥ = \frac{ن}{٢}[-٢٤ (ن-١) \times \frac{٣}{٢}]$

∴ $ن^{٢} - ١٧ ن - ٦٠ = ٠$ ∴ $ن = ٢٠$

$ح_{١٨} + ح_{١٩} + ح_{٢٠} = ٣أ + ٥٤ ء$

$= -٣٦ + ٥٤ \times \frac{٣}{٢} = ٤٥$ نفس المجموع

(٢٣) نفرض أن أساس المتتابعة ء

$س = ب + ء$ ، $ص = ب + ٢ء$ ، $ع = ب + ٣ء$

، $هـ = ب + ٤ ء$

$٣س - ص + ع = ٣ب + ٣ ء - ب - ٢ء + ب + ٣ء$

$= ٣ ب + ٤ ء$ ---- (١)

$٢ ب + جـ = ٢ ب + ب + ٤ ء$

$= ٣ب + ٤ ء$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب

(٢٤) $\frac{ن}{٢}[٤٠٠ + (ن-١) \times ١٠٠] = ١٧٠٠٠$

∴ $ن^{٢} + ٣ ن - ٣٤٠ = ٠$

$(ن - ١٧)(ن + ٢٠) = ٠$ ∴ $ن = ١٧$

(٢٥) الحدود الثلاثة الوسطي هي $ح_{١٠}$ ، $ح_{١١}$ ، $ح_{١٢}$

∴ $أ + ٩ء + أ + ١١ ء = ١٢٩$

∴ $أ + ١٠ ء = ٤٣$ ---- (١)

∴ الحدود الثلاثة الأخيرة هي $ح_{١٩}$ ، $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$

∴ $أ + ١٨ء + أ + ١٩ء + أ + ٢٠ء = ٢٣٧$

∴ $أ + ١٩ ء = ٧٩$ ---- (٢) ١٣)

بطرح (١) من (٢) ∴ $ء = ٤$ ، $أ = ٣$

∴ الحدود الثلاثة الأولي هي ٣ ، ٧ ، ١١

(٢٦) نفرض أن الأعداد هي $أ - ء$ ، $أ$ ، $أ + ء$

∴ $٣أ = ٢٤$ ∴ $أ = ٨$

∴ الأعداد هي $٨ - ء$ ، ٨ ، $٨ + ء$

$٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{ء - ٨} + \frac{١}{ء + ٨}$ ∴ $ء = \pm ٤$

∴ الأعداد هي ٤ ، ٨ ، ١٢ أو ١٢ ، ٨ ، ٤

$-١٢٠ = \frac{ن}{٢}[٢٤ + (ن - ١) \times -٤]$

∴ $ن = ١٢$ حداً

(٢٧) $ح_{١٣} = ١ + ٢٢ \times ٢ = ٤٥$

، $ح_{١٣} = ١ + ٦٢ \times ٢ = ١٢٥$

∴ الوسط المتناسب = $\sqrt{٤٥ \times ١٢٥} = ٧٥$

$٧٥ = ١ + (ن - ١) \times ٢$ ∴ $ن = ٣٨$

$هـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢ + ١٩ \times ٢] = ٤٠٠$

∴ $هـ_{٢٠} = ١٠٠$

$١٠٠ = \frac{ن}{٢}[٢ + (ن - ١) \times ٢] = ن^{٢}$

∴ $ن = ١٠$

(٢٨) الحد الأوسط =

$ح_{١١} = أ + ١٠ء = ١٣$ ---- (١)

$ح_{١٢} = أ + ١١ء$

obeikandl.com

$$\therefore \frac{10}{2}[2أ + 22ء + 9ء]$$

$$= 12 \times \frac{10}{2}[2أ + 9ء]$$

$$\therefore أ = -\frac{7ء}{2} \quad \text{-----} (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١) .. ء = ٢ ، أ = -٧

.. المتتابعة هي (-٧ ، -٥ ، -٣ ، .....)

(٢٩) ٦٤٠ = ٤٠٠ + (ن - ١) × ٢٠

.. ن = ١٣

$$\therefore حـ = \frac{13}{2}[800 + 12 \times 20] = 6760$$

مجموع المبالغ = ٦٧٦٠ + ٣ × ٦٤٠

= ٨٦٨٠ جنيه

$$8680 = \frac{16}{2}[800 + 15ء]$$

.. ء = ١٩ جنيهاً

(٣٠) أ + ٢ء + أ + ٣ء = ٩

.. ٢أ + ٥ء = ٩ ـــ (١)

$$-610 = \frac{20}{2}[2أ + 19ء]$$

.. ٢أ + ١٩ء = -٦١ ـــ (٢)

بطرح (١) من (٢) .. ١٤ء = -٧٠

.. ء = -٥ بالتعويض في (١) .. أ = ١٧

$$-1665 = \frac{ن}{2}[34 + (ن - 1) \times -5]$$

-٣٣٣٠ = ٣٩ن - ٥ن٢

.. ٥ن٢ - ٣٩ن - ٣٣٣٠ = ٠

.. (٥ن + ١١١) (ن - ٣٠) = ٠ .. ن = ٣٠

(٣١) $حـ_ن = \frac{ن}{2}[2 + (ن - 1) \times 2]ن^2$

$حـ_{82} = (82)^2$ ، $حـ_{17} = (17)^2$

.. $(82)^2 - (17)^2 = حـ_{82} - حـ_{17}$

= مجموع الحدود الفردية ابتداء من $ح_{18}$ إلي $ح_{82}$

$ح_{18} = 1 + 17 \times 2 = 35$

$ح_{82} = 1 + 81 \times 2 = 163$

.. الأعداد هي ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٩ ، .... ، ١٦٣

(٣٢) $\frac{م^2}{ن^2} = \frac{\frac{هـ}{2}[2 \times 1 + (هـ - 1)ء]}{\frac{ن}{2}[2 \times 1 + (ن - 1)ء]}$

.. ٢ن + مـ٢ن ء - ن ء = ٢م + م ن ء - م ء

.. ٢ن - ن ء - ٢م + م ء = ٠

.. ن (٢ - ء) - م (٢ - ء) = ٠

.. (٢ - ء) (ن - م) = ٠

.. ء = ٢ أو ن = م مرفوض

$ح_ر = 1 + (ن - 1) \times 2 = 2ن - 1$

(٣٣) $\frac{أ + (س - 1)ء}{أ - (ص - 1)ء} = \frac{س}{ص}$

أ (س - ص) + ء(س٢ - ص٢) - ء(س - ص) = ٠

بالقسمة علي س - ص

أ + ء (س + ص - ١) = ٠

.. $ح_{ر+ص}$ = صفر

(٣٤) نفرض ان أطوال أضلاع المثلث هي

أ - ٤ ، أ ، أ + ٤ .. $ح = \frac{13}{2}$

$$24 = \sqrt{\frac{13}{2} \times (\frac{أ}{2} + 4) \times \frac{أ}{2} \times (\frac{أ}{2} - 4)}$$

$$\therefore 576 = \frac{13}{4}(أ^2 - 16)$$

.. $أ^4 - 164أ^2 + 16 \times 192 = 0$

.. $(أ^2 - 96)(أ^2 + 32) = 0$

.. $أ = 4\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{6} - 4$ ، $4\sqrt{6} + 4$

(٣٥) .. $حـ_ن = كن^2$

.. $حـ_{ن-1} = ك(ن - 1)^2$

$ح_ن = حـ_ن - حـ_{ن-1} = ك[ن^2 - (ن-1)^2]$

.. $ح_ن = ك(2ن - 1)$

.. ح تتناسب مع ٢ن - ١

ح ، = ك (٢×١- ١) = ك

، ح ، = ٣ ك ، ح ، = ٥ ك

∴ المتتابعة حسابية ء = ٢ك ∴ ء = ٢ أ

(٣٦) أ + (ن- ١) ء = ك

∴ أ = ك – ن ء + ء

حـ ن، ١ = $\frac{٢ن - ١}{٢}$ [٢ ك – ٢ ن ء + ٢ ء + (٢ن – ٢) ء]

= ك (٢ ن- ١)

(٣٧) ح ن- ح م = [أ+ (ن- ١) ء]

- [أ + (م- ١) ء]

= (ن- م) ء

ح ، – ح ، = (٤ -١) ء

∴ ء – أ = (٤- ١) (حـ - ب)

∴ أ- ء = ٣ (ب – حـ)

(٣٨) ء = ١

∴ ١٩٨ = $\frac{ن}{٢}$ب ٢ أ + (ن-١) ×١] ∴

∴ ٣٩٦ = ٢ أ ن + ن٢ – ن ـــ (١)

ل = ٢ أ ∴ أ+ (ن- ١) ء = ٢ أ

∴ أ = (ن – ١) × ١ ـــ (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ ٣٩٦ = ٢ ن٢ – ٢ ن + ن٢ – ن

∴ ن٢ – ن – ١٣٢ = ٠

∴ (ن – ١٢) (ن+ ١١) = ٠

∴ ن = ١٢ ∴ أ = ١١

(٣٩) نفرض عدد حدود المتتابعة = ٢ن

الحدود الفردية حدها الأول أ وأساسها ٢ء

وعدد حدودها ن

$\frac{ن}{٢}$[٢ أ+ (ن-١) × ٢ء] = ٩٠

∴ ن أ + ن٢ ء – ن ء = ٩٠ ـــ (١)

الحدود الزوجية حدها الأول أ + ء ، أساسها

٢ ء وعدد حدودها ن

$\frac{ن}{٢}$ [٢ أ+ ٢ء+ (ن-١) × ٢ء] = ١٠٥

∴ ن أ + ن٢ ء = ١٠٥ ـــ (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ن ء = ١٥ ـ (٣)

أ + (٢ ن – ١) ء – أ = ٢٧

∴ (٢ن -١) ء = ٢٧ ـ (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ ء = ٣ ، ن = ٥

∴ عدد الحدود = ١٠

(٤٠) بفرض أن قياس زوايا الشكل

أ ، أ+س ، أ + ٢س ، أ+ ٣س

∴ ٤ أ + ٦س = ٥٣٦٠

∴ ٢ أ + ٣ س = ٥١٨٠ ـــ (١)

جا أ + جا ء = $\sqrt{٣}$

٢ جا $\frac{أ + ء}{٢}$ جتا $\frac{أ - ء}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ٢جا $\frac{أ + ٣س}{٢}$ جتا $\frac{أ - ٣س}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ٢ جا ٥٩٠ جتا $\frac{٣س}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ جتا $\frac{٣س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق ($\frac{٣س}{٢}$) = ٥٣٠

∴ ق (< س) = ٥٢٠ بالتعويض في (١)

∴ ق (٢ أ) + ٥٦٠ = ٥١٨٠

∴ (أ) = ٥٦٠

∴ قياس زوايا الشكل هي :

٥٦٠ ، ٥٨٠ ، ٥١٠٠ ، ٥١٢٠

obeikandi.com

(٤١) ح$_{ن+٢}$ = ح$_{ن+٢}$ – ح$_{ن+١}$ = ط – ق

ح$_{ن+١}$ = ح$_{ن+١}$ – ح$_{ن}$ = ق .. ك

.. ء = ح$_{ن+٢}$ - ح$_{ن+١}$ = ط – ق – (ق – ك)

= ط – ٢ ق + ك

ص وسط حسابي بين س ، ع

.. ٢ص = س+ع .. س- ٢ص+ع = ٠

(٤٢) أ+ [(ن-١)^{٢} - ١] ء = صفر

.. أ = - ن^{٢}ء – ٢ ن ء ـــ (١)

ح$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[-٢ ن^{٢}ء-٤ن ء + (ن-١) ء]

= $\frac{ن}{٢}$(- ٢ن^{٢}ء – ٣ نء – ء)

= - $\frac{ء ن}{٢}$(٢ن^{٢} + ٣ ن + ١)

= - $\frac{ء ن}{٢}$(٢ن + ١) (ن+١)

الحدود التالية تبدأ بـ ح$_{ن+١}$

ح$_{ن+١}$= - ن^{٢}ء – ٢ن ء + (ن+١-١) ء

= - ن^{٢}ء – ن ء

ح$_{ن+١}$ = $\frac{ن+١}{٢}$[- ٢ن^{٢}ء-٢نء +(ن+١-١) ء

= $\frac{ن+١}{٢}$(- ٢ن^{٢}ء- ن ء)

= - $\frac{ء ن}{٢}$(ن +١) (٢ن +١)

(٤٣) المتتابعة هي

(٢أ+١ ، ٢ أ+٣ ، ٢ أ+٥ ، .....)

ح$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢(٢ أ+١) + (ن-١) ×٢]

= ٢ أ ن + ن^{٢}

٢أن + ن^{٢} = ن^{٣} .. أ = $\frac{ن^{٢}-ن}{٢}$

(٤٤) نفرض أن رقم المنزل هو ن

.. ح$_{ن-١}$ = ح$_{٤٩-ن}$

.. $\frac{ن-١}{٢}$[٢×١+ (ن-٢) ×١]

= $\frac{٤٩^{٢}-ن}{٢}$[٢(ن+١) + (٤٩- ن-١) ×١]

.. (ن-١) (ن) = (٤٩-ن) (ن+٥٠)

.. ٢ن^{٢} = ٤٩ × ٥٠

ن^{٢} = ٤٩ × ٢٥ .. ن = ٣٥

(٤٥) نفرض أن نصف قطر الدائرة س

.. مساحة الحلقة الأولي

= ط (س + ١)^{٢} – ط س^{٢}

= (٢ س +١) ط

مساحة الحلقة الثانية = ط (س+٢)^{٢} - ط (س+١)

= (٢ س +٣) ط

مساحة الحلقة الثالثة = ط (س+٣)^{٢} - ط (س+١)^{٢}

= (٢ س + ٥) ط

.. مساحات الحلقات الدائرية تكون متتابعة

حسابية ح$_{١٠}$ = ٣ ح ء

(٢س +١) ط + ١٤ × ٢ ط

= ٣[(٢س+ ١) ط + ٣× ٢ط]

.. ٢ (٢س+ ١) ط = ١٠ط

.. س = ٢

إجابة تمارين (٢٩)

(١) (أ) ر = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ المتتابعة هي

(٦ ، ٩ ، $\frac{٢٣}{٤}$ ، $\frac{٩١}{٤}$ ، $\frac{٢٤٣}{٤}$)

(ب) ر = $\frac{٩}{٦}$ × $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{١٠٢٤}{٧٢٩}$ ، $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$ ، $\frac{٦٤}{٨١}$ ، $\frac{١٦}{٢٧}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

(جـ) ح٤ = أ ر^{٣} ∴ − ٤٠ = ٥ ر^{٣}

ر^{٣} = − ٨ ∴ ر = − ٢

المتتابعة هي (٥ ، − ١٠ ، ٢٠ ، − ٤٠ ، ٨٠)

(٢) ح ن = أ ر$^{ن-١}$ ∴ $\frac{٧٢٩}{٩٢٥}$ = ٢٥ (− $\frac{٣}{٥}$)$^{ن-١}$

$\frac{٧٢٩}{٢٥ \times ٦٢٥}$ = (− $\frac{٣}{٥}$)$^{ن-١}$ ، (− $\frac{٣}{٥}$)^{٦} = (− $\frac{٣}{٥}$)$^{ن-١}$

∴ ن − ١ = ٦ ∴ ن = ٧

(٣) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = $\frac{٦(٢)^{ن}}{٦(٢)^{ن-١}}$ = ٢ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية ح$_{٨}$ = ٦ (٢)$^{٨-١}$ = ٧٦٨

(٤) ح ن في الأولي = ٦ (٣)$^{ن-١}$

ح ن في الثانية = ٣٢ ($\frac{٣}{٢}$)$^{ن-١}$

∴ ٦ (٣)$^{ن-١}$ = ٣ × ٣٢ × $\frac{٣^{ن-١}}{٢^{ن-٥}}$

∴ ٢$^{ن-١}$ = ٢^{٤} ، ن − ١ = ٤ ، ن = ٥

(٥) أ ر + أ ر^{٢} = $\frac{٩}{٢}$ أ ر (١ + ر) = $\frac{٩}{٢}$ ..... (١)

أ ر^{٢} − أ ر^{٤} = $\frac{٩}{٨}$ ، أ ر^{٢} (١ − ر^{٢}) = $\frac{٩}{٨}$ ..... (٢)

بقسمة (٢) علي (١) $\frac{ر(١-ر)(١+ر)}{١+ر}$

= $\frac{٩}{٨}$ × $\frac{٢}{٩}$ ∴ ر^{٢} − ٤ ر + ١ = ٠ ∴ (ر − ١)^{٢} = ٠

ر = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١)

أ × $\frac{١}{٢}$ (١ + $\frac{١}{٢}$) = $\frac{٩}{٢}$ ∴ أ = ٦

المتتابعة هي (٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....)

(٦) ١ (٢)$^{ن-١}$ > ١٠٠٠ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (ن − ١) لو ٢ > ٦ لو ١٠

∴ (ن − ١) > $\frac{٤}{٠,٣٠١٠}$

∴ ن − ١ > ١٣,٢ ∴ ن > ١٤,٢

أي ن = ١٥ أ، ١٦ أ، ١٧ .....

∴ أول حد أكبر من ١٠٠٠٠ هو ح ١٥

(٧) نفرض أن الأعداد هي أ ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ٩٣ ∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٩٣ ..... (١)

أ ر^{٢} − (أ + أ ر) = ٥٧ ∴ أ (ر^{٢} − ر − ١) = ٥٧ ..... (٢)

بقسمة (١) علي (٢)

∴ ٦ ر^{٢} − ٢٥ ر − ٢٥ = ٠

∴ (٦ ر + ٥) (ر − ٥) = ٠

ر = ٥ أ، ر = − $\frac{٥}{٦}$ وحيث أن الأعداد موجبة

∴ ر = ٥ بالتعويض في (١)

∴ أ = ٣ ∴ الأعداد هي (٣، ١٥، ٧٥)

(٨) نفرض أن الأعداد هي أ، أ ر ، أ ر^{٢}

∴ أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١٣ ∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ١٣ ..... (١)

أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} + أ^{٢} ر^{٤} = ٩١ ∴ أ^{٢} (١ + ر^{٢} + ر^{٤}) = ٩١ .. (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$\frac{١+ر+ر^{٢}}{١-ر+ر^{٢}}$ = $\frac{١٣}{٧}$ ..... (٣)

٣ ر^{٢} − ١٠ ر + ٣ = ٠ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$ ، ٣

أولاً : إذا كانت ر = $\frac{١}{٣}$ بالتعويض في (٢)

∴ أ = ٩ ∴ الأعداد ٩ ، ٣ ، ١

ثانياً: إذا كانت ر = ٣ بالتعويض في (١)

∴ أ = ١ ∴ الأعداد هي ١ ، ٣ ، ٩

(٩) أ (٢)$^{ن-١}$ = ٢ ..... (١)

$\therefore (٢)^{-٣} = ١٢٨$ ---- (٢)

بقسمة (٢) علي (١)

$\therefore ٢^{-٣-ن} = ٦٤ = ٢^{٦}$ ن = ٥

بالتعويض في (١) $\therefore$ أ $= \frac{١}{٨}$

$\therefore$ المتتابعة هي ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ـــ)

(١٠) بوضع المتتابعة علي الصورة

(٢١٧٨ ، .... ، ٩ ، ٣ ، ٣ ، $\sqrt{٣}$)

ر $= \frac{\sqrt{٣}}{٩} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ح$_{٧}$ = أ ر^{٦} = ٢١٨٧ $(\frac{\sqrt{٣}}{٣})^{٦}$

= ٢١٨٧ × $\frac{٢٧}{٧٢٩}$ = ٨١ .

(١١) أ س$_{ر+١}$ = م ---- (١)

، أ س$_{ر+١٠}$ = ن ---- (٢)

بقسمة (٢) علي (١) $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ = س^{١٠}

م $(\frac{\text{ن}}{\text{م}})^{\frac{ر}{١٠}}$ = أ س$_{ر+١}$ $(\text{س}^{١٠})^{\frac{ر}{١٠}}$

= أ س^{٤} = ح$_{٥}$

إجابة تمارين (٣٠)

(١) $(\text{أ} + ٦)^{٢} = (\text{أ}+١)(\text{أ}+١٦)$ $\therefore$ أ = ٤

(٢) $(٢\text{أ} + ٥\text{ب}^{٢}) = (\text{أ}+\text{ب})(٤\text{أ} + ١٩\text{ب})$

أ = ٢ب

$\therefore ٥\text{أ} - ٣\text{ب} = ٧\text{ب}$ ، $٥\text{أ} + ٤\text{ب} = ١٤\text{ب}$

، $٥\text{أ} + ١٨\text{ب} = ٢٨\text{ب}$

$\therefore$ ٧ ب، ١٤ ب ، ٢٨ ب في تتابع هندسي

$\therefore$ المقادير في تتابع هندسي

(٣) عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦

ر^{٥} = ٢٧ $\frac{١}{٩}$ ر = $\frac{١}{٣}$

$\therefore$ الأوساط هي ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$

(٤) نفرض أن الوسط الهندسي هو س

$\therefore$ العددان هما س- ٨ ، س+ ٢٤

$\therefore$ س^{٢} = (س- ٨) (س+ ٢٤)

$\therefore$ س = ١٢ $\therefore$ العددان هما ٤ ، ٣٦

(٥) نفرض أن العددين هما أ ، ب

$\therefore ٣ (\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}) = ٥\sqrt{\text{أ ب}}$

٣ أ + ٣ب = ١٠ $\sqrt{\text{أ ب}}$ بتربيع الطرفين

$\therefore ٩\text{أ}^{٢} + ٩\text{ب}^{٢} + ١٨\text{أ ب} = ١٠٠\text{أ ب}$

$\therefore ٩\text{أ}^{٢} - ٨٢\text{ب} + ٩\text{ب}^{٢} = ٠$

$\therefore (٩\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - ٩\text{ب})$

$\therefore$ ٩أ = ب ، أ = ٩ ب

(٦) نفرض أن العددين س ، ص

$\therefore$ س- ص = ٤٨ $\therefore$ س= ٤٨ + ص--- (١)

$\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} - \sqrt{\text{س ص}} = ١٨$

$\therefore$ س + ص – ٣٦ = $\sqrt{\text{س ص}}$ ---- (٢)

$\therefore$ ٤٨ + ص+ ص-٣٦ = $\sqrt{(٤٨ + \text{ص})\text{ ص}}^{٢}$

$\therefore$ ص+ ٦ = $\sqrt{٤٨\text{ ص} + \text{ص}^{٢}}$

$\therefore$ ص^{٢} + ١٢ص+ ٣٦ = ٤٨ ص+ ص^{٢}

$\therefore$ ص = ١ ، س = ٤٩

(٧) الوسط الأول هو ح$_{١}$. والوسط الثاني هو ح$_{٢}$ ، ....

ح٢ + ح٥ = -١٥٦

∴ أ ر + أ ر٤ = -١٥٦ --- (١)

ح٣ + ح٤ = ٣٦

∴ أ ر٢ + أ ر٣ = ٣٦ --- (٢)

بقسمة (١) علي (٢) $\frac{١+ر^{٣}}{ر(١+ر)} = -\frac{١٣}{٣}$

∴ ٣ ر٢ + ١٠ ر + ٣ = ٠

(٣ ر + ١) (ر + ٣) = ٠

ر = $-\frac{١}{٣}$ أ، ر = -٣

إذا كانت ر = $-\frac{١}{٣}$ فإن أ = ٤٨٦

والعدد الآخر = ح١ = -٢

إذا كانت ر = -٣ فإن أ = -٢

والعدد الآخر = ح١ = ٤٨٦

(٨) ٢ع = أ + ب ، هـ٢ = أ ب

الأيمن = أ٣ + ب٣ = (أ + ب)(أ٢ + ب٢ - أ ب)

= ٢ع [(أ + ب)٢ - ٣ أ ب]

= ٢ع [٤ع٢ - ٣ هـ٢]

= ٨ ع٣ - ٦ هـ٢ع = الأيسر

(٩) الوسط الحسابي بين $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{ب}{أ}$

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{أ}{ب}$ + $\frac{ب}{أ}$)

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ}} = ١$

∴ $\frac{١}{٢}$ ($\frac{أ}{ب}$ + $\frac{ب}{أ}$) > ١ ∴ $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ} > ٢$

الوسط الحسابي بين ١ ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ (١ + أ ب)

الوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{١ \times أ ب} = \sqrt{أ ب}$

∴ $\frac{١}{٢}$ (١ + أ ب) > $\sqrt{أ ب}$

∴ ١ + أ ب > ٢ $\sqrt{أ ب}$

(١٠) $\frac{أ + جـ}{٢} > ب$ ∴ أ + جـ > ٢ب -- (١)

، $\frac{ب + ء}{٢} > جـ$ ∴ ب + ء > ٢ جـ --(٢)

من (١) ، (٢)

∴ (أ + جـ) (ب + ء) > ٤ ب جـ

من (١) ٢أ + ٢ جـ > ٤ ب -- (٣)

بجمع (٢) ، (٣)

∴ ٢أ + ٢جـ + ب + ء > ٤ ب + ٢جـ

∴ ٢أ + ء > ٣ ب

(١١) ٣ ب - أ > ٣أ × ٢ب بتربيع الطرفين

∴ ٩ ب٢ + أ٢ - ٦أب > ٦ أ ب

∴ أ٢ + ٩ ب٢ > ١٢ أ ب

(١٢) ٢ص = س + ع ، (ص - س)٢ = س(ع - س)

∴ ($\frac{س+ع}{٢}$ - س)٢ = س (ع - س)

∴ ع٢ - ٢س ع + س٢ = ٤ س ع - ٤ س٢

٥ س٢ - ٦ س ع + ع٢ = صفر

∴ (٥ س - ع) (س - ع) = ٠

∴ أما س = ع مرفوض أ، ع = ٥ س

∴ ٢ص = س + ٥ س = ٦ س

∴ ص = ٣ س ∴ ٣ع = ٥ ص = ١٥ع

إجابة تمارين (٣١)

(١) ر = $\frac{أ}{س}$ ∴ حـ = $\frac{س^{ن-١} [١ - (\frac{أ}{س})^{ن}]}{١ - \frac{أ}{س}}$

بضرب كل من البسط والمقام في س

∴ حـ = $\frac{س^{ن} [١ - \frac{أ^{ن}}{س^{ن}}]}{س - أ}$ = $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$

(٢) ر = -٤ ∴ حـ = $\frac{١ - (-٤)^{ن}}{١ - (-٤)}$

$\frac{١ - ١٦^{ن}}{٥}$ = حـ ∴ ٥ حـ = ١ - ١٦ن

obeikandl.com

∴ ١٦ = ١ + ٥ د

(٣) $\frac{٢٠١}{٩} = \frac{أ - أ \times (\frac{١}{٣})^{١٠}}{١ - \frac{١}{٣}}$

∴ $\frac{٢٠١}{٩} = ٣ أ - \frac{٣٢}{٩}$

∴ $\frac{٢٤٣}{٩} = ٣ أ$ ∴ أ = ٩

∴ المتتابعة هي (٩، ٦، ٤ ، .....)

(٤) ح١ = $\frac{٣}{٤}(٢)^{١}$ = ٣ ، ح٢ = $\frac{٣}{٤}(٢)^{٢}$ = ٦

، ح٣ = $\frac{٣}{٤}(٢)^{٣}$ = ١٢

المتتابعة هي (٣، ٦، ١٢، .....) هندسية

حـ٥ = $\frac{٣(٢^{٥} - ١)}{٢ - ١}$ = ٩٣

∴ $\frac{١٥٣٣ = ٣(٢^{ن} - ١)}{٢ - ١}$ ∴ ٢ن = ٥١٢

∴ ن = ٩

(٥) حـ = $\frac{١ [١ - (\frac{١}{٣})^{ن}]}{١ - \frac{١}{٣}}$ < ١٠٠٠٠

∴ ٣ن > ٢٠٠٠١ ∴ ن لو٣ > لو ٢٠٠٠١

∴ ن > $\frac{٤,٣٠١٠}{٠,٤٧٧١}$ ∴ ن > ٩

∴ أصغر عدد من الحدود = ١٠ حدود

(٦) حـ = $\frac{١٠٠ [١ - (-\frac{١}{٢})^{ن}]}{١ - (-\frac{١}{٢})}$ > ١٩٨

١٠٠ [١ - $(\frac{١}{٢})^{ن}$] > ٩٩

∴ $(\frac{١}{٢})^{ن}$ < $\frac{١}{١٠٠}$ ، ∴ $(\frac{١}{٢})^{٧}$ = $\frac{١}{١٢٨}$

، $(\frac{١}{٢})^{٧}$ = $\frac{١}{١٢٨}$. أكبر عدد من الحدود = ٦حدود

(٧) $\frac{أ (ر^{١٢} - ١)}{ر - ١}$ = ٢٧٣ $\frac{أ (ر^{٤} - ١)}{ر - ١}$

∴ (ر٤ - ١) (ر٨ + ر٤ + ١) = ٢٧٣ (ر٤ - ١)

∴ ر٨ + ر٤ - ٢٧٢ = صفر

∴ (ر٤ + ١٧) (ر٤ - ١٦) = ٠

∴ ر = ٢

أ $(٢)^{٤}$ = ٢٠٠ ∴ أ = $\frac{١٢١}{٢}$

(٨) حـ٤ = ٤ (٣ - ١) = ٨

حـ٢ = ٤ (٩ - ١) = ٣٢

∴ ح٢ = حـ٢ - حـ١ = ٣٢ - ٨ = ٢٤

حـ٣ = ٤ (٢٧ - ١) = ١٠٤

∴ ح٣ = حـ٣ - حـ٢ = ١٠٤ - ٣٢ = ٧٢

المتتابعة هي (٨ ، ٢٤ ، ٧٢ ، ٢١٦ ، .....)

ح٧ = ٨ $(٣)^{٦}$ = ٥٨٣٢

(٩) ح١ = ٢ ($\frac{١}{٣}$)^{٠} = ٢

ح٢ = ٢ ($\frac{١}{٣}$)$^{-١}$ = ٦

ح٣ = ٢ ($\frac{١}{٣}$)$^{-٢}$ = ١٨

$\frac{أ (٣^{٨} - ١)}{٣ - ١}$ = ١٧٧١٢٠٠

∴ أ = ٥٤ ∴ ٥٤ = ٢ (٣ ن - ١)

∴ ٣ن - ١ = ٣٣ ∴ ن = ٤

(١٠) ٦٣٠٥ = $\frac{١٢٨ [(\frac{٣}{٢})^{ن} - ١]}{\frac{٣}{٢} - ١}$

∴ $\frac{٦٣٠٥}{٢٥٦}$ = $(\frac{٣}{٢})^{ن}$ - ١ ∴ $(\frac{٣}{٢})^{ن}$ = $\frac{٦٥٦١}{٢٥٦}$

$(\frac{٣}{٢})^{ن}$ = $(\frac{٣}{٢})^{٨}$ ∴ ن = ٨

إجابة تمارين (٣٢)

(١) (أ) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = $\frac{٥ \times ٣^{ن}}{٥ \times ٣^{ن-١}}$ = $\frac{١}{٣}$ ثابت

المتتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$

∴ | ر | < ١ ∴ يمكن جمعها إلي ∞

(ب) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{2 \times 3^{ن+2}}{2 \times 3^{ن+1}} = 3$ = ثابت

المتتابعة هندسية أساسها ٣

∴ |ر| > ١ ∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(جـ) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{16 - 4^{ن+1}}{20 - 4^{ن}}$ تعتمد علي ن

∴ المتتابعة ليست هندسية ولا يمكن جمعها إلي ∞

(د) المتتابعة هندسية أساسها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أي > ١

∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(٢) ٠,٧٤ = $\frac{0,74}{1 - 0,01} = \frac{74}{99}$

٠,١٢٦ = $\frac{126}{1 - 0,001} = \frac{14}{111}$

٠,٢٠٩ = ٠,٢ + $\frac{0,009}{1 - 0,01} = \frac{23}{110}$

(٣) ٠,٠٣٧ = $\frac{0,037}{1 - 0,001} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$

$\sqrt[3]{0,037} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} = 0,3$

(٤) $\frac{أ}{1 - ر} = 18$ ——— (١)

، $\frac{أ^2}{1 - ر^2} = 162$ ----- (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$\frac{(1 - ر)(1 + ر)}{(1 - ر)^2} = \frac{324}{162}$

∴ ر = $\frac{1}{3}$ بالتعويض في (١) ∴ أ = ١٢

∴ المتتابعة هي (١٢ ، ٤ ، $\frac{4}{3}$ .....)

(٥) س = $\frac{أ}{1 - ر}$ (١) ، ص = $\frac{أ^2}{1 - ر^2}$

س٢ - ص = $\frac{أ^2}{(1 - ر)^2} - \frac{أ^2}{(1 - ر)(1 + ر)}$

= $\frac{أ^2 ر}{(1 - ر)^2 (1 + ر)}$

، س٢ + ص = $\frac{أ^2}{(1 - ر)^2 (1 + ر)}$

∴ $\frac{س^2 - ص}{س^2 + ص}$ = ر

(٦) (م - ١)٢ = (٢م + ١) (م - ٣)

∴ م٢ - ٣م - ٤ = ٠ ∴ (م - ٤) (م + ١) = ٠

∴ م = ٤ أو م = - ١

إذا كانت م = ٤

∴ المتتابعة هي (٩ ، ٣ ، ١ ، .....)

ر = $\frac{1}{3}$ |ر| < ١

حـ∞ = $\frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

إذا كانت م = - ١

∴ المتتابعة هي = (- ١ ، - ٢ ، - ٤ ، .....)

ر = ٢ |ر| > ١ ∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(٧) أر٢ = ٢٤ ، أر٥ = ٣ ∴ ر٣ = $\frac{1}{8}$

∴ ر = $\frac{1}{2}$ ∴ أ = ٩٦

حـ∞ = $\frac{96}{1 - \frac{1}{2}} = 192$

حـن = $\frac{96 [1 - (\frac{1}{2})^ن]}{1 - \frac{1}{2}} = 192 [1 - (\frac{1}{2})^ن]$

حـ∞ - حـن = ١٩٢ - ١٩٢ + ١٩٢ $(\frac{1}{2})^ن$

∴ ١٩٢ $(\frac{1}{2})^ن$ < ٠,٠١

ن لو $\frac{1}{2}$ < $\frac{0,01}{192}$

∴ - ن لو٢ < لو ٠,٠١ - لو ١٩٢

- ن × ٠,٣٠١٠ < - ٢ - ٢,٢٨٣٣

∴ ن > ١٤ + كسر ∴ ن = ١٥

(٨) أ = ٧ × $\frac{أ ر}{1 - ر}$ ← ر = $\frac{1}{8}$

$\frac{أ}{1 - \frac{1}{2}} = 4$ ← أ = $\frac{7}{2}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{7}{2}$ ، $\frac{7}{16}$ ، $\frac{7}{128}$ ، .....)

(٩) أ ر + أ ر^{٢} = ٦ .. أ ر(١+ ر) = ٦ --- (١)

أ × أ ر^{٣} = ٨ .. أ^{٢} ر^{٣} = ٨ --- (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$\frac{١ + ٢ر + ر^{٢}}{ر} = \frac{٩}{٢}$

٢ ر^{٢} - ٥ ر + ٢ = ٠ .. (٢ر-١) (ر-٢) = ٠

ر = $\frac{١}{٢}$ أ، ر = ٢ .. للمسألة حلان

ر = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١) .. أ = ٨

ح$_{\infty}$ = $\frac{٨}{١ - \frac{١}{٢}}$ = ١٦

ر = ٢ بالتعويض في (١) .. أ = ١

(١٠) أ ر - ر = $\frac{٣}{٢}$ .. ر(أ-١) = $\frac{٣}{٢}$ (١)

أ = $\frac{٢ أ ر^{٢}}{١ - ر}$ .. ٢ ر^{٢} + ر - ١ = ٠

(٢ر-١) (ر+١) = ٠

.. ر = $\frac{١}{٢}$ أ، ر = - ١ مرفوض

بالتعويض في (١) $\frac{١}{٢}$ (أ-١) = $\frac{٣}{٢}$

.. أ = ٤ .. المتتابعة هي (٤ ، ٢ ، ١ ، .....)

إجابة تمارين عامة (م هـ)

(١) (س-١)^{٢} = (س-٢) (٣س-٥)

.. س = س = ٣ أ، $\frac{٣}{٢}$

ر = $\frac{س - ١}{س - ٢}$ = $\frac{٣ - ١}{٣ - ٢}$ = ٢

أ، ر = $\frac{\frac{٣}{٢} - ١}{\frac{٣}{٢} - ٢}$ = - ١

(٢) ح$_{١}$ = ٣ × ٢$^{-٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، ح$_{٢}$ = ٣ × ٢$^{-١}$ = $\frac{٣}{٢}$

، ح$_{٣}$ = ٣ × ٢^{٠} = ٣

المتتابعة ($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، .....) هندسية

$\frac{١}{٤}$ $\frac{(٢^{ن} - ١)}{٢ - ١}$ = ٧٦٧

٢^{ن} = $\frac{٣٠٦٩}{٤}$ × $\frac{٤}{٣}$ + ١ = ١٠٢٤

.. ٢^{ن} = ٢^{١٠} .. ن = ١٠

(٣) ح$_{١}$ = ٢ × ٣^{٠} = ٢ ، ح$_{٢}$ = ٢ (٣)^{١} = ٦

، ح$_{٣}$ = ٢(٣)^{٢} = ١٨

.. المتتابعة الهندسية أساسها = ٣

.. ٢ $\frac{(٣^{ن} - ١)}{٣ - ١}$ > ٣٠٠

.. ٣^{ن} > ٣٠١ .. لو ٣ > لو ٣٠١

.. ن > $\frac{٢,٤١٦}{٠,٤٧٧١}$ .. ن > ٥,١٩٥

.. ن = ٦

(٤) الشرط |س| < ١

ح$_{ن}$ = ١ × س$^{ن-١}$ ، ح$_{ن+١}$ = س^{ن}

ح$_{\infty}$ = $\frac{س^{ن}}{١ - س}$

.. $\frac{ح_{ن}}{ح_{\infty} \text{ التالية}}$ = س$^{ن-١}$ × $\frac{١ - س}{س^{ن}}$ = $\frac{١ - س}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

.. س = $\frac{٢}{٣}$

ح$_{٥}$ الأولي = ١ × $\frac{١ - (\frac{٢}{٣})^{٥}}{١ - \frac{٢}{٣}}$ = $\frac{٢١١}{٨١}$

(٥) أ ر + أ ر^{٣} = ١٠

.. أ ر (١ + ر^{٢}) = ١٠ --- (١)

أ × أ ر^{٢} = ٣ أ ر^{٢} .. أ ر^{٢} = ٣ --- (٢)

بقسمة (١) علي (٢) .. ٣ ر^{٢} - ١٠ ر + ٣ = ٠

.. (٣ر-١) (ر-٣) = ٠

.. ر = $\frac{١}{٣}$ أ، ر = ٢ مرفوض

بالتعويض في (٢) .. أ = ٢٧

obeikandl.com

$ح_٥ = \frac{٢٧[١-(-\frac{١}{٣})^{٥}]}{١-(-\frac{١}{٣})} = \frac{١٢١}{٣}$

$ح_∞ = \frac{٢٧}{١-(-\frac{١}{٣})} = \frac{٨١}{٢}$

(٦) $أ = ٢ \times \frac{أ_١}{١-ر}$ .. $ر = \frac{١}{٣}$

$\frac{أ^{٢}}{١-ر^{٢}} = \frac{٢٧}{٢٦}$ .. $\frac{أ^{٢}}{١-\frac{١}{٩}} = \frac{٢٧}{٢٦}$

.. $أ = ١$ .. المتتابعة هي $(١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ...)$

(٧) $ح_{٢٠}$ للأول $= \frac{٢٥٠[١-(١,٠٥)^{٢٠}]}{١-١,٠٥}$

$= \frac{٢٥٠[١-٢,٦٥٥]}{١,٠٥} = ٨٢٧٥$ جنيها

$ح_{٢٠}$ للثاني $= \frac{٢٠}{٢}[٢ \times ٥٠٠ + ١٩ \times ١٥]$

$= ٧٨٥٠$جنيه .. الفرق $= ٤٢٥$ جنيها

(٨) مرتب الأول في السنة العشرين =

$٣٠٠ + ١٩ \times ٢٤ = ٧٥٦$ جنيها

مرتب الثاني في السنة العشرين $= ٣٠٠(١,٠٤)^{١٩}$

$= ٣٠٠ (٢,١٠٤) = ٦٣١,٢$جنيها

$ء = ٦٣١,٢ - ٣٠٠ = ١٩$

.. $ء = ١٧.٤٣$ جنيها

(٩) المسافة المقطوعة لأعلي بعد الصدمة الأولي

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})$

المسافة المقطوعة لأعلي بعد الصدمة الثانية

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^{٢}$

المسافة المقطوعة لأعلي بعد الصدمة الثالثة

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^{٣}$

المسافة المقطوعة لأعلي بعد الصدمة الرابعة

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^{٤}$

$= \frac{٨١}{١٢٥}$ مترا

مجموع المسافات التي قطعتها من لحظة سكونها حتي تكاد تسكن =

$٥ + ٢[٥ \times \frac{٣}{٥} + ٥ \times (\frac{٣}{٥})^{٢} + ٥(\frac{٣}{٥})^{٣} + ...]$

$= ٥ + ٢ \times \frac{٥ \times \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥}} = ٢٠$ مترا

(١٠) المتتابعة الحسابية (-١، ٤ ، ٩)

المتتابعة الهندسية (١ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

$ح_{١٢}$ للحسابية $= \frac{١٢}{٢}[٢ \times ١١ + ٥] = ٣١٨$

$ح_{١٢}$ للهندسية $= \frac{١[(\sqrt{٢})^{١٢} - ١]}{١ - \sqrt{٢}}$

$= ١٣(\sqrt{٢}+١)$

(١١) $أ(١ + ر + ر^{٢}) = \frac{٧}{٤} ر^{٢}$

.. $٣ ر^{٢} - ٤ ر - ٤ = ٠$

.. $(ر - ٢)(٣ ر + ٢) = ٠$

.. $ر = ٢$ والآخر مرفوض

$أ_{١} = ر^{٤} = ٢٤$ .. $أ = \frac{٣}{٢}$

.. المتتابعة هي $(\frac{٣}{٢} ، ٣ ، ٦ ، ....)$

$ح_{١٢} = \frac{\frac{٣}{٢}[٢^{١٢} - ١]}{١ - ٢} = ٩٤\frac{١}{٢}$

(١٢) $أ_{ر-١} ، أ_{ر} ، أ_{ر+١}$ متتابعة هندسية

$(أ_{ر})^{٢} = أ_{ر-١} \times أ_{ر+١}$

.. $ر^{٢ص} = ر^{س+ع}$

.. $٢ص = س + ع$ .. س، ص، ع متتابعة حسابية

(١٣) $ب = أ ر$ ، $ح = أ ر^{٢}$

.. $ء = \frac{أ + أ ر}{٢} = \frac{أ(١+ر)}{٢}$

، $هـ = \frac{أ ر + أ ر^{٢}}{٢} = \frac{أ ر(١+ر)}{٢}$

الطرف الأيمن $= \frac{أ ٢}{أ(١+ر)} - \frac{أ ر ٢}{أ ر(١+ر)}$

obeikandl.com

= $\frac{٢(١+ر)}{١+ر}$ = ٢ = الطرف الأيسر

(١٤) ب = أر ، جـ = أ$ر^{٢}$ ، ء = أ$ر^{٣}$

لوب − لوأ = لوأس − لوأ = لو $\frac{\text{أس}}{\text{أ}}$ = لور

لوجـ − لوب = لوأ$ر^{٢}$ − لوأر = لور

لوء − لوجـ = لوأ$ر^{٣}$ − لوأ$ر^{٢}$ = لور

∴ لوأ ، لوب ، لوجـ ، لوء تكون متتابعة حسابية

∴ ء = أ$ر^{٢}$ ∴ لوء = لوأ + ٢ لور

∴ لو $\frac{١٣٧٥}{١١}$ = ٣ لور لو١٢٥ = ٣ لور

∴ ٣ لوه = ٣ لور ∴ ر = ٥

∴ ب = ١١×٥ = ١١ ، جـ = ١١ ، ء = ٢٧٥

(١٥) ٤٨ = $\frac{١٢}{٢}$[٢أ + ١١ء]

∴ ٢أ + ١١ء = ٨ ـــ (١)

(أ+ء)^{٢} = أ(أ+ ٤ء) ∴ ء = ٢أ ـــ (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ ٢٤ أ = ٨ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$ ، ء = $\frac{٢}{٣}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٥}{٣}$ ....)

(١٦) أ(١+ر+ر٢) = ٧٠ ـــ (١)

١ار = ٤أ + ٤أر٢ .. ٢ر^{٢} − ٥ر+٢=٠

∴ (٢ر − ١)(ر − ٢) = ٠ .. ر = $\frac{أ١}{أ}$ = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في(١) ∴ أ = ٤٠

عندما ر = ٢ بالتعويض في(١) ∴ أ = ١٠

∴ الأعداد هي ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠

(١٧) $\frac{١١}{٢}$[٢أ + ١٠ء] = (أ + ٥ء)^{٢}

∴ أ + ٥ء = ١١ ـــ (١)

(أ + ٦ء)^{٢} = (أ + ٣ء) (أ + ١٠ء)

∴ أ = ٦ ء بالتعويض في (١) .. ء = ١

∴ أ = ٦ .. المتتابعة هي (٦ ، ٧ ، ٨ ،...)

(١٨) ٣ب = $\frac{٢أ + ٤جـ}{٢}$ = أ + ٢جـ

(٣ب − ٢أ)^{٢} = ٢أ (٤جـ − ٢أ)

(٢جـ − أ)^{٢} − ٤أ (٢جـ − أ) = صفر

∴ (٢جـ − أ) (٢جـ − أ − ٤أ) = صفر

∴ ٢جـ − أ = ٠ ، أ ، ٢جـ − ٥أ = ٠

∴ $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ أ ، $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٥}{٢}$

(١٩) أ − ء + أ + ء = ٢١ ∴ أ = ٧

١١ − ء ، ١٢ ، ١٥ + ء متتابعة هندسية

∴ ١٤٤ = (١١ − ء) (١٥ + ء)

∴ ء^{٢} + ٤ء − ٢١ = ٠ ∴ (ء+٧)(ء−١٣)=٠

∴ ء = −٧ أ ، ء = ٣

∴ الأعداد هي ١٤ ، ٧ ، أو ٤ ، ٧ ، ١٠

(٢٠) ٢لوص = لوس + لوع

∴ لوص^{٢} = لوس ع ∴ ص^{٢} = س ع

∴ ص وسط هندسي بين س ، ع

(٢١) الوسط الحسابي بين أ،هـ ب = $\frac{أ + هـ ب}{٢}$

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{أ هـ ب}$

∴ $\frac{أ + هـ ب}{٢}$ > $\sqrt{أ هـ ب}$

∴ أ + هـ ب > ٢ $\sqrt{أ هـ ب}$ ـــ (١)

الوسط الحسابي بين أ ، $\frac{\text{ب}}{\text{هـ}}$ هو $\frac{\text{أ} + \frac{\text{ب}}{\text{هـ}}}{2}$

والوسط الهندسي بينهما = $\text{أ} \times \sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{هـ}}}$ (٢)

بضرب (١) × (٢)

$\therefore (\text{أ} + \text{هـ ب})(\text{أ} + \frac{\text{ب}}{\text{هـ}}) < ٤\ \text{أ ب}$

(٢٢) ٣ ب وسط حسابي بين ٦أ ، ٢حـ

ووسطهما الهندسي = $\sqrt{٦\ \text{أ} \times ٢\text{حـ}}$

$\therefore ٣\text{ب}^{٢} < ٧٢\ \text{أحـ}$

$\therefore ٣\text{ب}^{٢} < ٤\text{أحـ}$ ـــ (١) بالمثل $٢\text{حـ}^{٢} < ٣\ \text{ب}\text{ء}$

بجمع (١) ، (٢) ينتج المطلوب

(٢٣) $\text{ب} < \frac{٤\text{أ} + ٣\text{حـ}}{٢}$ $٣\text{حـ} < \frac{\text{ب} + ٤\text{ء}}{٢}$

$\therefore ٢\text{ب} \times ٦\text{حـ} < (٤\text{أ} + ٣\text{حـ})(\text{ب} + ٤\text{ء})$

(٢٤) $\frac{\text{أ} + \text{حـ}}{٢} < \text{ب}$ $\therefore \text{أ} + \text{جـ} < ٢\text{ب}$

$\frac{\text{ب} + \text{ء}}{٢} < \text{حـ}$ $\therefore \text{ب} + \text{ء} < ٢\text{حـ}$

بالجمع $\therefore \text{أ} + \text{حـ} + \text{ب} + \text{ء} < ٢\text{ب} + ٢\text{حـ}$

$\therefore \text{أ} + \text{ء} < \text{ب} + \text{حـ}$

(٢٥) نفرض أن أساس الأولي = ر

$\therefore$ أساس الثانية = ر + ١

$١(\text{ر}+١)^{٢} = ١٦ \times ١ \times \text{ر}$

$\therefore \text{ر} + ١ = \pm ٤\ \text{ر}$ $\therefore \text{ر} = \frac{١}{٣}$ أ، $-\frac{١}{٥}$

$\therefore$ يوجد حلان

عندما ر = $\frac{١}{٣}$ $\therefore$ أساس الثانية = $\frac{٤}{٣}$

ملا يمكن جمعها إلي ∞

عندما ر = $-\frac{١}{٥}$. أساس الثانية = $\frac{٤}{٥}$ حـ

$\therefore$ يمكن جمع المتتابعتين إلي ∞

حـ للأولي = $\frac{١}{١ + \frac{١}{٥}} = \frac{٥}{٦}$

حـ للثانية = $\frac{١}{١ - \frac{١}{٥}} = ٥$

$\therefore \frac{\text{حـ للأولي}}{\text{حـ للثانية}} = \frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٦}$

(٢٦) المتتابعة الحسابية هي (٢، ٢+ء، ٢+٢ء ،...)

المتتابعة الهندسية هي (٢، ٢ر، ٢ر^{٢} ،...)

$\therefore ٢\text{ر} = ٢ + ٢\text{ء}$ $\therefore \text{ء} = \text{ر} - ١$ ـــ (١)

$٢\text{ر}^{٢} = ٢ + ٧\ \text{ء}$ ـــ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$\therefore ٢\text{ر}^{٢} - ٧\text{ر} + ٥ = ٠$

$\therefore (٢\text{ر} - ٥)(\text{ر} - ١) = ٠$ $\therefore \text{ر} = \frac{٥}{٢}$ والآخر مرفوض

$\therefore \text{ء} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ المتتابعة الحسابية هي $(٢ ، ٣\frac{١}{٢} ، ٥ ،...)$

، المتتابعة الهندسية هي $(٢ ، ٥ ، ١٢\frac{١}{٢} ،...)$

(٢٧) $٨ + ٨\text{ر} + ٨\text{ر}^{٢} = ١٤$

$\therefore ٤\text{ر}^{٢} + ٤\text{ر} - ٣ = ٠$

$\therefore (٢\text{ر} + ٣)(٢\text{ر} - ١) = ٠$

$\therefore \text{ر} = -\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{١}{٢}$

المتتابعة الأولي هي (٨، -١٢، ١٨ ،..)

المتتابعة الثانية هي (٨ ، ٤ ، ٢ ، .....)

حـ للأولي $= \frac{٨[١ - (-\frac{٣}{٢})^{٧}]}{١ - (-\frac{٣}{٢})} = \frac{٤٦٣}{٨}$

للثانية $= \frac{٨[١ - (\frac{١}{٢})^{٧}]}{١ - (\frac{١}{٢})} = \frac{١٢٧}{٨}$

obeikandl.com

(٢٨) $\frac{أ}{١-ر} = \frac{أ ٣}{١-(ر-\frac{١}{٢})}$

$\therefore \frac{١}{١-ر} = \frac{٣}{\frac{١}{٢}-ر}$

$\therefore ر = \frac{٥}{٦}$

$\therefore$ أساس المتتابعة الثانية $= \frac{٥}{٦} \div \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$

$أ٣(\frac{١}{٢})^{٢} - أ(\frac{٥}{٦})^{٢} = \frac{١}{١٨} \therefore أ = ١$

$\therefore$ المتتابعة الأولي هي(١، $\frac{٥}{٦}$، $\frac{٢٥}{٣٦}$ ....)

، المتتابعة الثانية هي(٣، $\frac{٣}{٢}$، $\frac{٣}{٤}$....)

(٢٩) $\frac{أ(١+٧+ر^{٢})}{\text{حصو}} = \frac{٢٦}{٢٧}$

$\therefore (١-ر)(١+ر+ر^{٢}) = \frac{٢٦}{٢٧}$

$\therefore ١-ر^{٣} = \frac{٢٦}{٢٧}$ $\therefore ر = \frac{١}{٣}$

$أر^{٢} = ٩$ $\therefore أ(\frac{١}{٣})^{٢} = ٩$

$\therefore أ = ٢٤٣$

المتتابعة هي (٢٤٣، ٨١، ٢٧ ، ....)

حـ $= \frac{٢٤٣}{١-\frac{١}{٣}} = \frac{٧٢٩}{٢}$

حـن $= \frac{٢٤٣[١-(\frac{١}{٣})^{ن}]}{١-(\frac{١}{٣})} = \frac{٧٢٩}{٢}[١-(\frac{١}{٣})^{ن}]$

حـ$_{\infty}$ - حـ$_{ر}$ $= \frac{٧٢٩}{٢}(\frac{١}{٣})^{ن} = \frac{١}{٢ \times ٣^{ن-٦}}$

$\therefore \frac{١}{٢ \times ٣^{ن-٦}} < \frac{١}{١٠٠٠}$

$\therefore ٣^{ن-٦} > ٥٠٠$

$\therefore (ن-٦) لو ٣ > لو ٥٠٠$

$\therefore ن - ٦ > \frac{٢,٦٩٩٠}{٠,٤٧٧١}$

$\therefore ن - ٦ > ٥,٦٥٧$ $\therefore ن > ١١,٦٥٧$

$\therefore ن = ١٢$ أو أكثر

(٣٠) $\frac{أ}{١-ر} = \frac{٢٧}{٢}$ ------ (١)

$أ = ٢(أر + أر^{٢} + ------- \infty)$

$\therefore أ = ٢ \times \frac{أر}{١-ر} . ر = \frac{١}{٣}$ (٢)

بالتعويض في (١) $\therefore أ = ٩$

$\therefore$ المتتابعة هي (٩، ٣، ١، .....)

حـ$_{ن}$ $= \frac{٩[١-(\frac{١}{٣})^{ن}]}{١-(\frac{١}{٣})} = \frac{٢٧}{٢}[١-(\frac{١}{٣})^{ن}]$

(٣١) حاصل ضرب حدود المتتابعة

$= أ \times أر \times أر^{٢} \times ..... \times أر^{ن-١}$

$= أ^{ن} \times ر^{١+٢+٣+ ..... +(ن-١)}$

$= أ^{ن} ر^{\frac{ن}{٢}(١+ن-١)} = أ^{ن} ر^{\frac{ن^{٢}}{٢}}$ (المطلوب)

(٣٢) س $= \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$

، ص $= أ^{ن} ر^{\frac{ن}{٢}(ن-١)}$ من المسألة السابقة

ع $= \frac{\frac{١}{٢}[١-(\frac{١}{٣})^{ن}]}{١-(\frac{١}{٣})} = \frac{ر^{ن}-١}{أ ر^{ن-١}(ر-١)}$

$\therefore (س)^{٢} = (أ^{٢} ر^{ن-١})^{ن} =$

ع $أ^{ن} ر^{ن(ن-١)} = ص^{٢}$

(٣٣) س $= \frac{١}{ص}$ $\therefore س = ص^{-\frac{٢}{٥}}$

ع $= \frac{١}{ص^{\frac{٣}{٥}}}$ $\therefore ع = ص^{-\frac{٧}{٥}}$

س ع $= ص^{-\frac{٢}{٥}} \times ص^{-\frac{٧}{٥}} = ص^{٢}$

$\therefore$ ص وسط هندسي بين س ، ع

(٣٤) حاصل الضرب $= ٠ \times \frac{س}{ر} \times \frac{س}{ر} \times س$

$\times س ر \times س ر^{٢} \times .... = س^{ن}$

$٢٤٣ = ٣^{ن}$ $\therefore ٣^{ن} = ٣^{٥}$

$\therefore ن = ٥$ $\therefore أر^{٢} = ٣$ ، $أر^{٣} = ٩$

بالقسمة .. ر = ٣ .. أ = $\frac{١}{٣}$

حـ$_{ن}$ = $\frac{\frac{١}{٣}[١ - ٣^{ن}]}{١ - ٣}$ = $\frac{١٢١}{٣}$

(٣٥) س ر + س ر^{٢} = ١٨

.. س ر (١ + ر) = ١٨ ـــ (١)

س + ء + ص – ء = ٢٧

.. س + ص = ٢٧ .. س + س ر^{٢} = ٢٧

.. س (١ + ر^{٢}) = ٢٧ ـــ (٢)

بقسمة (٢) إلي (١)

$\frac{(١+ر)(١-ر+ر^{٢})}{ر(١+ر)}$ = $\frac{٣}{٢}$

.. ٢ر^{٢} – ٥ ر + ٢ = ٠

ومنها (٢ر-١) (ر- ٢) = ٠

ر = أ ، ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ .. س × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ = ١٨

.. س = ٢٤ .. ص = ٣

عندما ر = ٢ .. س × ٢ × ٣ = ١٨

.. س = ٣ ، ص = ٢٤

(٣٦) حـ$_{\infty}$ = $\frac{١}{١ - \frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٢}$

حـ$_{ن}$ = $\frac{١ - (\frac{٣}{٥})^{ن}}{١ - \frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٢}$ [١ – $(\frac{٣}{٥})^{ن}$]

$\frac{٥}{٢}$ - $\frac{٥}{٢}$ [١ - $(\frac{٣}{٥})^{ن}$] < ٠,٠٠٠١

$(\frac{٣}{٥})^{ن}$ < $\frac{٤}{١٠٠٠٠٠}$

.. ن [لو٣ – لو٥] < لو٤ – لو ١٠٠٠٠٠

ن [٠,٤٧٧١ – ٠,٦٩٩٠] < ٠,٦٠٢١ – ٥

- ن × ٠,٢٢١٩ < - ٤,٣٩٧٩

.. ن > ١٩,٨

.. اصغر عدد من الحدود = ٢٠ حدا

(٣٧) ص < $\sqrt{س ع}$ .. ص^{٢} < س ع ـــ (١)

أ^{٢} = س ص ، ب^{٢} = ص ع

.. أ^{٢} ب^{٢} = س ع ص^{٢}

.. س ع = $\frac{أ^{٢}ب^{٢}}{ص^{٢}}$

بالتعويض في (١) .. ص^{٢} < $\frac{أ^{٢}ب^{٢}}{ص^{٢}}$

.. ص^{٤} < أ^{٢} ب^{٢} .. ص^{٢} < أ ب

(٣٨) الوسط الحسابي بين س ، $\frac{١}{س}$ = $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢}$

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{س \times \frac{١}{س}}$ < ٢

.. $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢}$ < ١ .. س + $\frac{٢}{س}$ < ٢

حل آخر: .. س < ١

.. س – ١ < ٠ بالتربيع

.. س^{٢} – ٢ س + ١ < ٠

.. س^{٢} + ١ < ٢ س بالقسمة علي س

.. س + $\frac{١}{س}$ < ٢

(٣٩) حـ = ٤٠٠٠ + ٤٠٠٠(٠,٨٧) +

٤٠٠٠(٠,٨٧)^{٢} + ... إلي ١٠ حدود

= $\frac{٤٠٠٠[١ - (٠,٨٧)^{١٠}]}{١ - ٠,٨٧}$

= $\frac{٤٠٠٠[١ - ٠,٢٤٨٣]}{٠,١٣}$

= ٢٣١٢٩,٢٣ كجم

الحد الأقصى للإنتاج = $\frac{٤٠٠٠}{١ - ٠,٨٧}$

= ٣٠٧٦٩,٢٣ كجم

(٤٠) $\frac{ع}{ف} = \frac{أ+ب}{٢\sqrt{أب}} = \frac{أب+ب^{٢}}{٢\sqrt{أب \times ب^{٢}}}$

$= \frac{أب+أحـ}{٢\sqrt{أب \times أحـ}} = \frac{ب+حـ}{٢\sqrt{ب حـ}}$

$= \frac{و}{ى}$

(٤١) نفرض أن العددين الأوسطين

هما ب ، ٢٠ـ ب

∴ الأعداد هي أ، ب، ٢٠ـ ب ، ٢٢ـ أ =

٢ب = أ + ٢٠ ـ ب

∴ أ = ٣ب ـ ٢٠ ---- (١)

(٢٠ ـ ب)^{٢} = ب (٢٢ ـ أ)

٤٠٠ ـ ٤٠ب + ب^{٢} = [٢٢ ـ ٣ب +٢٠]

∴ ٢ب^{٢} ـ ٤١ب +٢٠٠ = ٠

(٢ب ـ ٢٥) (ب ـ ٨) = ٠

∴ ب = $\frac{٢٥}{٢}$ أ، ب = ٨

∴ أ = $\frac{١٧}{٢}$ أ، أ = ٤

∴ الأعداد هي $\frac{١٧}{٢}$ ، $\frac{١٢}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$، $\frac{١}{٢}$

أ، الأعداد هي ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٨

(٤٢) $\frac{١[١- أ^{ن+١}]}{١-أ} = (١+أ)(١+أ^{٢})(١+أ^{٤})$

$(١+أ^{٨})$

∴ $١- أ^{ن+١} = (١-أ)(١+أ^{٢})(١+أ^{٤})$

$(١+أ^{٨})$

∴ $١- أ^{ن+١} = (١-أ^{٢})(١+أ^{٢})(١+أ^{٤})$

$(١+أ^{٨})$

$= (١-أ^{٤})(١+أ^{٤})(١+أ^{٨})$

$= (١-أ^{٨})(١+أ^{٨}) = ١-أ^{١٦}$

∴ $أ^{ن+١} = ١٦$ ∴ ن+ ١ = ١٦

∴ ن = ١٥

(٤٣) مجموع الحدود الفردية الرتبة

$= \frac{أ[١-(ر^{٢})^{ن}]}{١-ر^{٢}}$ ---- (١)

مجموع الحدود الزوجية الرتبة

$\frac{أر[١-(ر^{٢})^{ن}]}{١-ر^{٢}}$ (٢)

بقسمة (٢) علي (١) ∴ ر = ٢

ح$_{ن}$ = أ$ر^{ن-١}$ ، ح$_{ن+٢}$ = أ$ر^{ن+١}$

أ$ر^{ن-١}$ + أ$ر^{ن+١}$ = ٤٠

∴ أ$ر^{ن-١}$ (١+ ر^{٢}) = ٤٠

∴ أ × ٢$^{ن-١}$ × ٥ = ٤٠

∴ أ × ٢$^{ن-١}$ = ٨ ---- (٣)

$\frac{أ(ر^{٤ن}-١)}{ر-١} \quad \frac{أ(ر^{٢ن}-١)}{ر-١}$

$= ٣٢ [\frac{أ(ر^{٣ن}-١)}{ر-١} \quad \frac{أ(ر^{ن}-١)}{ر-١}$

∴ $ر^{٢ن}(ر^{٢ن}-١) = ٣٢ ر^{ن}[ر^{٢ن}-١]$

∴ $ر^{ن} = ٣٢$ ∴ $ر^{٢ن} = ٢^{٥}$

ن = ٥ ومن (٣) ∴ أ = $\frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٢}$، ١ ، ٢ ، ....)

(٤٤) نفرض أن أساس الأولي ر والثانية $\frac{١}{ر}$

والحد الأول للأول ٩ أ وللثانية أ

∴ ٥٢ = $\frac{٩أ(ر^{٦}-١)}{ر-١}$ ---- (١)

∴ ١٤٠٤ = $\frac{أ(١-\frac{١}{ر^{٦}})}{١-\frac{١}{ر}}$

∴ ١٤٠٤ = $\frac{أ(ر^{٦}-١)}{ر^{٥}(ر-١)}$ ---- (٢)

بقسمة (٢) علي (١)

$$\therefore \frac{١٤٠٤}{٢٥} = \frac{أ(ر^{٦}-١)}{ر^{٥}(ر-١)} \times \frac{ر-١}{٩أ(ر^{٢}-١)}$$

$$\therefore ٢٧ = \frac{١}{٩ر^{٥}} \quad \therefore ر^{٥} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$$

$$\therefore ر = \frac{١}{٣} \quad \text{أساس الأولي}$$

∴ أساس الثانية = ٣

بالتعويض في (١) $\therefore أ = \frac{٢٧}{٧}$

∴ المتتابعة الأولي $\left(\frac{٢٤٣}{٧} \quad \frac{٨١}{٧} \quad \frac{٢٧}{٧} \ldots\right)$

، المتتابعة الثانية $\left(\frac{٢٧}{٧}، \frac{٨١}{٧} \quad \frac{٢٤٣}{٧} \ldots\right)$

$$ح_{٧} = أر^{٦} = \frac{٢٤٣}{٧} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦} = \frac{١}{٢١}$$

$$ح_{\infty} = \frac{\frac{١}{٢١}}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١}{١٤}$$

obeikandl.com