(٢) : الأسس واللوغاريتمات

- قوانين الاسس الصحيحة
- الأسس الكسرية
- الدالــــة الاسية
- اللوغاريتمات والدالة اللوغاريتمية
- قوانين اللوغاريتمات
- استخدام حاسبة الجيب

الأســــس

<u>النوع الأول من المسائل:-</u>

قوانين الأسس الصحيحة

قوانين الأسس :-

١- إذا كان أ ∋ ح ، م، ن ∋ ص$^{+}$ ، أ ≠ صفر فان:-

$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ويسمى قانون الضرب

∴ إذا ضربت كميات متساوية إلي أسس فلإيجاد حاصل الضرب نجمع الأسس

مثلا: $٢^{٣} \times ٢^{٣} = ٢^{٣+٣} = ٢^{٦}$

$$(١,٠٤)^{٢} \times (١,٠٤)^{\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{٢+\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{٢\frac{١}{٣}}$$

نتيجة

$$١^{ن} = ١$$

∴ الواحد الصحيح إذا رفع لأي أس يكون الناتج واحدا صحيحاً

مثلاً : $١^{٥} = ١\times١\times١\times١\times١ = ١$

٢- إذا كان أ ∋ ح ، م ، ن ∋ ص فان :

$$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن} \text{ ، } أ \neq \text{صفر}$$

∴ إذا قسمت كميات متساوية مرفوعة إلي أسس فالإيجاد حاصل خارج القسمة نطرح الأسس

مثلا $\frac{س^{٥}}{س^{٤}} = س^{٥-٤} = س$

نتيجة :-

$$أ^{٠} = ١$$

∴ (أي كمية)^{صفر} = ١ مثلا $(٣٤٠)^{٠} = ١$

نتيجة :-

$$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$$

∴ العدد المرفوع لأس سالب يمكن أن ينقل من البسط إلى المقام مع تغيير إشارة آسه (والعكس صحيح أيضا)

مثلا $\text{٥}^{-\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}^{\text{٢}}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{ب}^{-\text{٨}}} = \text{ب}^{\text{٨}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{٣}} = \text{٣}^{-\text{١}}$

٣-إذا كان أ ، ب ∈ ح ، ن∈ ص فان :-

$$(\text{أ ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$$

وتسمى قوانين ضرب أو قسمة كميات متحدة الأس

مثلاً : $(\text{٢} \times \text{٥})^{\text{٣}} = \text{٢}^{\text{٣}} \times \text{٥}^{\text{٣}}$ ، $\left(\frac{\text{٢}}{\text{٥}}\right)^{\text{٣}} = \frac{\text{٢}^{\text{٣}}}{\text{٥}^{\text{٣}}}$

ملاحظة :-

- قاعدة توزيع الاسس على الحدود داخل القوس لا تستخدم الا في حالتي الضرب والقسمة .
- اما اذا كانت الحدود يفصلها علامة (+ أو-) فلا يوزع الأس على الحدود داخل القوس

مثلاً : $(\text{٤}+\text{٣})^{\text{٤}} = \text{٧}^{\text{٤}} = \text{٢٤٠١}$

٤- اذا كان م، ن> صفر ،أ∈ح فإن :

$$(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$$

∴ لرفع أس أي مقدار إلى قوة أعلي نضرب الأسان في بعضهما

مثلا : $(\text{٢}^{-\text{٣}})^{\text{٤}} = \text{٢}^{-\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}^{\text{١٢}}}$ ، $(\text{٣}^{\text{٢}})^{\text{٤}} = \text{٣}^{\text{٨}}$ ،

$$(-\text{٣}^{-\text{٣}})^{\text{٢}} = (-\text{٣})^{-\text{٣}\times\text{٢}} = (-\text{٣})^{-\text{٦}} = \frac{\text{١}}{-\text{٣}^{\text{٦}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}^{\text{٦}}}$$

٥- $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{-\text{ن}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}$

طريقة حل مسائل الأسس :-

١) تحليل الاساسات إلى عوامل أولية
٢) توزيع الأسس
٣) اختصار كل من لبسط والمقام كل على حدة
٤) اختصار البسط مع المقام

مثال :

اختصر $\frac{٨^{ن-٤} \times ٦^{ن-٧} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٥} \times ٨^{ن+٣}}$

الحـــــل

١ - تحليل الأساسات إلى عوامل أولية

$$\frac{(٢^{٣})^{ن-٤} \times (٢ \times ٣)^{ن-٧} \times (٣^{٢})^{ن-٢}}{(٢)^{٢ن-١٠} \times (٣)^{ن+٣}}$$

٢ - توزيع الأسس

$$\frac{٢^{٣ن-١٢} \times ٢^{ن-٧} \times ٣^{ن-٧} \times ٣^{٢ن-٤}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$$

٣ - اختصار كل من البسط والمقام على حدة

$$\frac{٢^{٢ن-٥} \times ٣^{ن+٣}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$$

٤ - اختصار البسط مع المقام

$$= ٢^{٢ن-٥-٢ن+١٠} \times ٣^{ن+٣-ن-٣}$$

$$= ٢^{٥} \times ٣^{٠} = ٣٢$$

مثال :

أثبت أن: $\frac{٣^{س} \times (٣^{٤})^{س+١}}{(١٤٣)^{س}} = ٨١$

الحـــــل

الطرف الأيمن: $= \frac{٣^{س} \times (٣^{٤})^{س+١}}{(٣^{٥})^{س}} = \frac{٣^{س} \times ٣^{٤س+٤}}{٣^{٥س}}$

$$= ٣^{٥س+٤-٥س} = ٣^{٤}$$

= ٨١ الطرف الأيسر

مثال :

اختصر: $\frac{١٢٥^{س-٤} \times ١٥^{س-٦} \times ٩^{س-١}}{٢٥^{س-٢} \times ٣^{س+٢}}$

الحـــــل

$$\frac{(٥^{٣})^{س-٤} \times (٣ \times ٥)^{س-٦} \times (٣^{٢})^{س-١}}{(٥^{٢})^{س-٢} \times ٣^{س+٢}}$$

$$\frac{5^{3\text{س}-12} \times 3^{6-\text{س}} \times 5^{6-\text{س}} \times 3^{2\text{س}-2}}{5^{2\text{س}-6} \times 3^{\text{س}+3}}$$

$$= 5^{3\text{س}-12} \times 5^{6-\text{س}} \times 5^{-(2\text{س}-6)} \times 3^{6-\text{س}}$$
$$\times\ 3^{2\text{س}-2} \times 3^{-(\text{س}+3)}$$
$$= 5^{3\text{س}-12+6-\text{س}-2\text{س}+6} \times 3^{6-\text{س}+2\text{س}-2-\text{س}-3}$$
$$= 5^{\text{صفر}} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

مثال :

اختصر: $\dfrac{2^{\text{ن}+1} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times 6^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}}}{6^{\text{ن}} \times 10^{\text{م}+2} \times 15^{\text{ن}}}$

الحـــــل

$$= \frac{2^{\text{ن}+1} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times (2\times3)^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}}}{(2\times3)^{\text{ن}} \times (2\times5)^{\text{م}+2} \times (3\times5)^{\text{ن}}}$$

$$= \frac{2^{\text{ن}+1} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times 2^{\text{م}} \times 3^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}}}{2^{\text{ن}} \times 3^{\text{ن}} \times 2^{\text{م}+2} \times 5^{\text{م}+2} \times 3^{\text{ن}} \times 5^{\text{ن}}}$$

$$= 2^{\text{ن}+1} \times 2^{\text{م}} \times 2^{-(\text{م}+2)} \times 2^{-\text{ن}} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times 5^{-(\text{م}+2)} \times 5^{-\text{ن}} \times 3^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}} \times 3^{-\text{ن}} \times 3^{-\text{ن}}$$
$$= 2^{\text{ن}+1+\text{م}-\text{م}-2-\text{ن}} \times 5^{\text{ن}+\text{م}-\text{م}-2-\text{ن}} \times 3^{\text{م}+2\text{ن}-\text{م}-\text{ن}-\text{ن}}$$

$$= 2^{-1} \times 5^{-2} \times 3^{0} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5^{2}} \times 1 = \frac{1}{2\times25} = \frac{1}{50}$$

تمرين (١٩)

اختصر:-

١- $\dfrac{8^{\text{ن}-4} \times 6^{7-\text{ن}} \times 9^{\text{ن}-2}}{2^{2\text{ن}-1000} \times 3^{\text{ن}+3}}$

٢- $\dfrac{8^{3\text{ن}} \times 28^{3-5\text{س}}}{14^{1-\text{س}} \times 49^{1-2\text{س}}}$

٣ - $\dfrac{(5)^{3\text{ن}} \times (3)^{4\text{ن}+2}}{(5\times9)^{3\text{ن}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\text{ن}}}$

٤- $$\frac{(٢٧)^{\frac{١}{٣}س} \times (٤٨)^{س+٣}}{(٢١٦)^{س-١} \times (١٢)^{٢-س} \times (٧٢)^{س+٣}}$$

٥- $$\frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٦^{م} \times ٣^{٢ن-م}}{٦^{ن} \times ١٠^{م+٢} \times ١٥^{ن}}$$

٦- $$\frac{١٢٥^{س-٤} \times ١٥^{٦-س} \times ٩^{س-١}}{٢٥^{س-٣} \times ٣^{س+٣}}$$

٧- $$\frac{٣^{س} \times (٢٤٣)^{س+٢}}{(٧٢٩)^{س}}$$

٨- $$\frac{(٢م^{٢}ن^{٤})^{٤} \times (٥أب^{-٧})^{-٢}}{(٤أ^{-٣}ب)^{-٢}}$$

٩- $$\frac{٢^{١-٢ن} \times ٤٣٢^{ن} \times ٣^{-ن}}{٣^{ن-٤} \times ١٢^{ن-١}}$$

١٠- $$\frac{(ب^{\frac{١}{٢}})^{٣} \times (أ^{\frac{١}{٢}})^{٤ن} \times ج^{٢ن-١} \times \sqrt{ج^{ن}}}{ب^{ن} \times ج^{ن} \ldots ^{\frac{٣}{٢}} \times \sqrt{ب^{٣}}}$$

النوع الثاني من المسائل :

المعادلات الآسية البسيطة

المعادلة الأسية هي معادلة لا تحتوي علي علامة (+) أو (-) بين الأساس .

قواعد حل المعادلات الآسية :

(١) إذا كانت $أ^{م} = أ^{ن}$ فان م = ن

أي إذا كان الأساس = الأساس فان الأس= الأس

(٢) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ فان أ = ب

أي إذا تساوى الأسان يتساوى الأساسان

(٣) إذا كان $أ^{م} = ١$ فان م = صفر

(٤) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ ، أ ≠ ب فان م = صفر

ملاحظة

للتخلص من علامة الجذر نقسم الأس علي الدليل

مثلاً $\sqrt{س^{٣}} \longrightarrow س^{\frac{٣}{٢}}$ $\qquad \sqrt[٤]{س^{٢}} \longrightarrow س^{\frac{٢}{٤}}$

مثال :أوجد قيمة س العددية :

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \frac{٨١}{٦٢٥}$$

الحـــل

الطرف الأيسر $= \frac{٨١}{٦٢٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$

$\because \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤} \qquad \therefore س = ٤$

مثال : أوجد قيمة س العددية:-

$$\frac{(٨١)^{س-١} \times ٢٧^{س-٢}}{٩^{٣س-٧}} = ٧٢٩$$

الحـــل

المقدار $= \frac{(٣^{٤})^{س-١} \times (٣^{٣})^{س-٢}}{(٣^{٢})^{٣س-٧}} = \frac{٣^{٤س-٤} \times ٣^{٣س-٦}}{٣^{٦س-١٤}}$

$$= \frac{3^{4س-4+3س-6}}{3^{6س-14}} = 3^{7س-10-6س+14}$$

$\therefore 3^{س+4} = 3^{6}$ $\quad \therefore س + 4 = 6 \quad \therefore س = 2$

مثال : <u>أوجد مجموعة حل المعادلة</u>

$$س^{\frac{4}{3}} - 10س^{\frac{2}{3}} + 9 = صفر$$

الحـــــل

$\therefore س^{\frac{4}{3}} - 10س^{\frac{2}{3}} + 9 = صفر$

$(س^{\frac{2}{3}} - 1)(س^{\frac{2}{3}} - 9) = 0$

$\therefore (س^{\frac{2}{3}} - 1) = 0 \quad \therefore س^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \therefore س = 1$

أو $س^{\frac{2}{3}} - 9 = 0 \quad \therefore س^{\frac{2}{3}} = 9 \quad \therefore س^{\frac{2}{3}} = 3^{2}$

$\therefore س^{\frac{2}{3}} = 3^{2}$ بضرب أس الطرفين في $\frac{3}{2}$

$\therefore س = 3^{3} \quad \therefore س = 27$

مثال : <u>أوجد مجموعة حل المعادلة .</u>

$$س^{\frac{1}{3}} + 12س^{-\frac{1}{3}} - 7 = 0$$

الحـــــل

$س^{\frac{1}{3}} + 12س^{-\frac{1}{3}} - 7 = 0$

بضرب الطرفين في $س^{\frac{1}{3}}$ $\quad \therefore س^{\frac{2}{3}} + 12 = 0$

$(س^{\frac{1}{3}} - 3)(س^{\frac{1}{3}} - 4) = 0 \quad \therefore س^{\frac{1}{3}} = 3 \longrightarrow س = 27$

أو $س^{\frac{1}{3}} = 4 \quad \therefore س = 2^{6} \longrightarrow س = 64$

مثال : <u>أوجد مجموعة حل المعادلة</u>

$$7^{س-6} = س^{س-6}$$

الحـــــل

$\therefore 7^{س-6} = س^{س-6} \quad \therefore$ الأس = الأس

$\therefore$ إما $س = 7$

أو $س - 6 = 0$ ومنها $س = 6$

∴ مجموعة الحل { ٦ ، ٧ }

مثال : حل المعادلة

$$\text{٣}^{\text{س-١}} = \text{٩}\sqrt{\text{٣}}$$

الحـــل

$$\text{٣}^{\text{س-١}} = \text{٣}^{\text{٢}} \times \text{٣}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{٣}^{\text{٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$$

∴ الأساس = الأساس

∴ س - ١ = $\text{٢}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ∴ س = $\text{٣}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

مثال : حل المعادلة:

$$\text{٨}^{\text{٥-س}} = \text{٧}^{\text{س-٥}}$$

الحـــل

∴ $\text{٨}^{\text{٥-س}} \longleftarrow \left(\frac{\text{١}}{\text{٨}}\right)^{\text{س-٥}}$

∴ $\left(\frac{\text{١}}{\text{٨}}\right)^{\text{س-٥}} = \text{٧}^{\text{س-٥}}$ ∴ س - ٥ = ⟵ س = ٥

∴ م . ج = { ٥ }

مثال : حل المعادلة:

$$\text{٣}^{|\text{٣س-٤}|} = \text{٩}^{\text{٢س-٢}}$$

الحـــل

∴ الأساس = الأساس لأن $\text{٩}^{\text{٢س-٢}} = \text{٣}^{\text{٢(٢س-٢)}}$

∴ | ٣س - ٤ | = ٤س - ٤

∴ | ٣س - ٤ | - ٤س + ٤ = صفر

∴ ٣س - ٤ - ٤س + ٤ = ٠ عندما س ≥ $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ = - س

- ٣س + ٤ - ٤س + ٤ عندما س < $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ = - ٧س + ٨

∴ - س = صفر ⟵ س = صفر (مرفوض)

، -٧س + ٨ = ٠ ⟵ س = $\frac{\text{٨}}{\text{٧}}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\text{٨}}{\text{٧}}$ }

مثال : حل المعادلة:

$$\frac{\text{٦}^{\text{٢س}} \times \text{٢٧}^{\text{س}}}{\text{٤}^{\text{س}} \times \text{٨١}^{\text{س}}} = \frac{\text{١٠}^{\text{٣س}} \times \text{٢٥}^{\text{س}}}{\text{٨}^{\text{س}} \times \text{٦٢٥}^{\text{س}}}$$

الحـــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{(٢)^{٢\text{س}} \times (٣)^{٢\text{س}} \times (٣)^{٣\text{س}}}{(٢)^{٢\text{س}} \times (٣)^{٤\text{س}}} = \frac{(٢)^{٢\text{س}} \times (٣)^{٥\text{س}}}{(٢)^{٣\text{س}} \times (٣)^{٤\text{س}}}$$

$$= ٣^{٥\text{س} - ٤\text{س}} = ٣^{\text{س}} \longrightarrow (١)$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{(٢)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٢\text{س}}}{(٢)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٤\text{س}}} = \frac{(٢)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٥\text{س}}}{(٢)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٤\text{س}}}$$

$$= ٥^{٥\text{س}} - ٥^{٤\text{س}} = ٥^{\text{س}} \longrightarrow (٢)$$

∴ الأس = الأس ، ∵ ٥ $\neq$ ٣

∴ مجموعة الحل هي { صفر }

تمرين (٢٠)

<u>حل المعادلات الآتية :-</u>

١) $٤^{\text{س}^٢ - ١} = ٨^{\text{س}}$

٢) $٣^{\text{س}^٢} = ٩^{\text{س} + ٤}$

٣) $\text{س}^{٢\text{س} - ٥} = ٣^{٢\text{س} - ٥}$

٤) $٤^{\text{س} - ٥} = ٩^{\text{س} - ٥}$

٥) $(\text{س}^٢ + ٢\text{س})^٥ = ٢٤٣$

٦) $\text{س}^{\text{س}^٢ - ٢٥} = ١$

٧) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{١٢٥}{٢٧}\right)^{-١}$

٨) $٦^{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢١٦}$

٩) $١٠^{\text{ص} - \text{ع}} = ٨ \times ٥^{\text{ص} - \text{ع}}$

١٠) $٢^{٣\text{س} - ١} = \frac{١٦}{\sqrt{٢}}$

النوع الثالث من المسائل :

الأسس الكسرية

** إذا كانت $ن \in ص^+$ ، $أ \in ح^+$ فإن

(أ) $أ^{\frac{1}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ و تقرأ ((الجزر النوني للعدد أ))

(ب) $\sqrt[ن]{أ}$ تسمى الصورة الجذرية للعدد

فمثلا : $(9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ ، $(\frac{1}{81})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

(ج) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^م} = (\sqrt[ن]{أ})^م$ بمعنى مقام الأس (دليل الجذر)

مثلا $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

(د) $\sqrt[ن]{أ^م} = \sqrt[نك]{أ^{مك}}$

مثلا $\sqrt[3]{أ^5} = \sqrt[4\times3]{5^{2\times4}} = \sqrt[12]{5^8}$

وتستخدم هذه القاعدة عند توحيد أدلة الجذور حتى يمكن استخدامها عند مقارنتها أو إجراء العمليات الحسابية بينهما.

ملاحظة

جميع قوانين الأسس الصحيحة تصلح كقوانين للأسس الكسرية

مثال : اختصر لأبسط صورة:

(أ) $8^{\frac{1}{3}} \times (16)^{-\frac{1}{4}}$ (ب) $(\sqrt[5]{243})^{-1}$

(ج) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ (د) $\sqrt[4]{أ} \times \sqrt[7]{أ^3} \times \sqrt[10]{أ^2}$

الحـــــل

(أ) (أ) $8^{\frac{1}{3}} \times (16)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{8} \times \frac{1}{(16)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ب) $(\sqrt[5]{243})^{-1} = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^5}} = \frac{1}{3}$

(ج) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \sqrt[4]{(\frac{3}{5})^4} = \frac{3}{5}$

(د) $\sqrt[4]{أ} \times \sqrt[7]{أ^3} \times \sqrt[10]{أ^7} = (أ)^{\frac{1}{4}} \times (أ)^{\frac{3}{7}} \times (أ)^{\frac{7}{10}} = أ^{\frac{1}{4} + \frac{3}{7} + \frac{7}{10}}$

$= أ^{\frac{196 + 120 + 70}{280}} = أ^{\frac{323}{280}}$

<u>مثال : أوجد قيمة كل مما يأتي :-</u>

١) $\sqrt{3} \times \sqrt[5]{2}$

٢) $\sqrt[3]{6} \div \sqrt{3}$

٣) $(256)^{\frac{3}{4}}$

٤) $\sqrt[3]{(343)^{-1}}$

٥) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{2}}$

٦) $(0.0625)^{-\frac{1}{4}}$

الحــــــل

١) نوجد الأدلة حتى نتمكن من عملية الضرب

$\therefore \sqrt[10]{3^5} \times \sqrt[10]{2^2} = \sqrt[10]{3^5 \times 2^2} = \sqrt[10]{243 \times 4} = \sqrt[10]{972}$

٢) $\sqrt[3]{6} \div \sqrt{3} = \sqrt[6]{6^2} \div \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{(\frac{36}{27})} = \sqrt[6]{\frac{4}{3}}$

٣) $(256)^{\frac{3}{4}} = (2^8)^{\frac{3}{4}} = 2^{8 \times \frac{3}{4}} = 2^6 = 64$

٤) $\sqrt[3]{(343)^{-1}} = (343)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}}$

٥) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[2\times3]{4^3}}{\sqrt[3\times2]{2^2}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\frac{64}{4}} = \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{4^2} = (4)^{\frac{2}{6}} = 4^{\frac{1}{3}}$

٦) $(0.0625)^{-\frac{1}{4}} = (\frac{625}{10000})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{5^4}{10^4})^{-\frac{1}{4}} = (\frac{5}{10})^{-1} = \frac{10}{5} = 2$

<u>مثال : أيهما أكبر :</u>

(أ) $\sqrt{5}$ أو $\sqrt[3]{7}$

(ب) $\sqrt[4]{3}$ أو $\sqrt[5]{4}$

الحــــــل

- لابد من توحيد دليلي الجذرين
-

(أ) $\sqrt{5} = \sqrt[3\times2]{5^3} = \sqrt[6]{125}$ ، $\sqrt[3]{7} = \sqrt[3\times2]{7^2} = \sqrt[6]{49}$

$\therefore \sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{49}$ $\therefore \sqrt{5} > \sqrt[3]{7}$

(ب) $\sqrt[٤]{٣} = \sqrt[٤\times٥]{٣^٥} = \sqrt[٢٠]{٢٤٣}$ ، $\sqrt[٥]{٤} \quad \sqrt[٥\times٤]{٤} \quad \sqrt[٢٠]{٢٥٦}$

$\therefore \sqrt[٢٠]{٢٥٦} > \sqrt[٢٠]{٢٤٣}$ $\qquad \sqrt[٥]{٤} > \sqrt[٤]{٣}$

<u>مثال : اختصر لأبسط صورة :</u>

$$\frac{(١٨)^{-\frac{١}{٢}} \times (٢٤)^{-\frac{٣}{٢}}}{(٢٧)^{-\frac{١}{٢}} \times (١٦)^{-\frac{٥}{٢}}}$$

الحـــــل

$$= \frac{(٢\times٣^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times (٣\times٢^٣)^{-\frac{٣}{٢}}}{(٣^٣)^{-\frac{١}{٢}} \times (٢^٤)^{-\frac{٥}{٢}}} = \frac{(٢)^{-\frac{١}{٢}} \times (٣)^{-١} \times ٣^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢^{-\frac{٩}{٢}}}{(٣)^{-\frac{٣}{٢}} \times (٢)^{-٤\times\frac{٥}{٢}}}$$

$$= (٢)^{-\frac{١}{٢}-\frac{٩}{٢}+١٠} \times (٣)^{-١-\frac{٣}{٢}+\frac{٣}{٢}} = ٢^٥ \times ٣^{-١} = \frac{٣٢}{٣}$$

<u>مثال : أوجد قيمة :</u>

أ- $(س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}})(س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}})$

ب- $(س^{\frac{١}{٤}} - ص^{\frac{١}{٤}})^٢$ $\qquad$ جـ- $(س^{\frac{١}{٥}} - ١)^٢$

د- $(س^{\frac{١}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} - ١)$

الحـــــل

أ- $(س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}})(س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{٢}{٣}})$ (فرق بين مربعين)

$= (س^{\frac{٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}) = س^{\frac{٢}{٣}}(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = \sqrt[٣]{س^٢}(\sqrt[٣]{س^٢} - ١)$

ب- $(س^{\frac{١}{٤}} - ص^{\frac{١}{٤}})^٢ = س^{\frac{٢}{٤}} - ٢س^{\frac{١}{٤}} ص^{\frac{١}{٤}} + ص^{\frac{٢}{٤}}$

$= س^{\frac{١}{٢}} - ٢س^{\frac{١}{٤}} ص^{\frac{١}{٤}} + ص^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س} - ٢\sqrt[٤]{س ص} + \sqrt{ص}$

جـ- $(س^{\frac{١}{٥}} + ١)^٢ = س^{\frac{٢}{٥}} + ٢س^{\frac{١}{٥}} + ١ = \sqrt[٥]{س^٢} + ٢\sqrt[٥]{س} + ١$

د- $(س^{\frac{١}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} - ١) = س^{\frac{١}{٣}} س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} \times س^{\frac{١}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} - ١ \times س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١$

$= س^{\frac{٣}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١ = س - ٢س^{\frac{٢}{٣}} + ١ = س - ٢\sqrt[٣]{س^٢} + ١$

تمرين (٢١)

١- اختصر:-

أ- $\left(\text{أ}^{-\frac{3}{4}}\right)^{4}$ ب- $\left(\text{أ}^{-5}\right)^{\frac{4}{5}}$

ج- $\left(\text{أ}^{-8}\right)^{\frac{3}{8}}$ د - $\left(0{,}001\right)^{-\frac{2}{3}}$

٢- أوجد قيمة : $\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{5}\times\sqrt[6]{5}}{\left(\sqrt[12]{5}\right)^{3}}$

٣- اختصر: $\dfrac{\left(\text{س}^{\frac{1}{4}}\right)^{-3}\times\left(\text{س}^{\frac{4}{3}}\right)^{-2}\times\left(\text{س}^{-\frac{2}{3}}\right)^{4}}{\left(\text{س}^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}}$

٤- أختصر: $\dfrac{27^{\text{س}-\frac{1}{3}}\times\sqrt[\text{س}]{7^{\text{س}^{2}+3\text{س}}}}{\left(189\right)^{\text{س}-1}\times\left(\sqrt{49}\right)^{3}}$

٥- أثبت أن: $\dfrac{\left(\sqrt{125}\right)^{\text{س}-1}\times\sqrt{125}}{5^{\text{س}}\times\sqrt{5^{\text{س}}}}=1$

٦- أثبت أن: $\dfrac{9^{\text{ن}+\frac{1}{4}}\times\sqrt{3\times3^{\text{ن}}}}{\sqrt{3^{3-\text{ن}}}}=27$

٧- إذا كانت س $\ni$ ح_{+} وكان $\left(\dfrac{\text{س}-2}{\text{س}^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{2\text{س}}+4^{\frac{1}{3}}}\right)^{3}=\sqrt{2}$ اوجد قيمة س

٨- أوجد ناتج: $\left(2\text{أ}^{\frac{1}{2}}-3\text{أ}^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}$ ، $\left(2\text{أ}^{\frac{2}{3}}-\text{ب}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3\text{أ}^{\frac{2}{3}}+4\text{ب}^{-\frac{1}{2}}\right)$

٩- إذا كانت د (س) = ٥ $^{\text{س}}$ فأوجد قيمة :

$$\frac{\text{د}\left(\text{س}+4\right)-\text{د}\left(\text{س}+3\right)}{\text{د}\left(\text{س}+5\right)-\text{د}\left(\text{س}+4\right)}$$

١٠- إذا كانت د(س) = ٣ $^{\text{س}}$ أثبت أن

$$\frac{\text{د}\left(2\text{س}+2\right)+\text{د}\left(2\text{س}-1\right)}{5\,\text{د}\left(2\text{س}\right)-7\,\text{د}\left(2\text{س}-1\right)}=\frac{7}{2}$$

النوع الرابع من المسائل :

مسائل علي حل معادلات تشتمل الأسس الكسرية

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:-

أ) $٦^{\text{س}-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ ب) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$

ج) $٨\sqrt{٢} \times (٨)^{\frac{٥\text{س}+٧}{٣}} = \frac{١}{٢}$ د) $(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحـــــــل

أ) $٦^{\text{س}-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ $\therefore ٦^{\text{س}-٤} = (٦)^{-٣}$ $\therefore \text{س} - ٤ = -٣$

$\therefore \text{س} = ١$

ب) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$ $\therefore \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٥^{-٢}$ بضرب الأسين في $\frac{٣}{٢}$

$\therefore \text{س} = ٥^{-٢ \times \frac{٣}{٢}}$ $\therefore \text{س} = ٥^{-٣}$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{١٢٥}$

ج) $٨\sqrt{٢} \times (٨)^{\frac{٥\text{س}+٧}{٣}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore (٢)^{٣}(٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٢)^{٣ \times \frac{٥\text{س}+٣}{٣}} = ٢^{-١}$

$٢^{\frac{٧}{٢}} \times ٢^{٥\text{س}+٣} = ٢^{-١}$

$\therefore ٢^{\frac{١٣}{٢} + ٥\text{س}} = ٢^{-١}$ $\longleftarrow$ $\frac{١٣}{٢} + ٥\text{س} = -١$

$٥\text{س} = -\frac{١٥}{٢}$ $\longleftarrow$ $\text{س} = \frac{-٣}{٢}$

د) $\therefore (\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

$\therefore (\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٣^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

$\therefore [(\text{س} - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}}]^{٣} = [٣^{-١}]^{٣}$ بتكعيب الطرفين

$\text{س} - \frac{١}{٢} = ٣^{-٣}$ $\therefore \text{س} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore \text{س} = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثال : حل المعادلة $\text{ص}^{\frac{٣}{٤}} = ٢\text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ **ثم أوجد قيمة** $٥\text{س} + ٢\text{ص}$

الحـــــــل

نوجد قيمة كل من س ، ص

$\therefore \text{ص} = ٦٤^{\frac{٣}{٤}}$ $\therefore \text{ص} = ٢^{٦}$ بدفع الطرفين للقوة $\frac{٤}{٣}$

$\therefore \text{ص} = ٢^{٦ \times \frac{٤}{٣}} = ٢^{٨} = ٢٥٦$ ، $٢\text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ بالقسمة علي ٢

$\therefore \text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ \longrightarrow \text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$ بدفع الطرفين للقوة $\frac{٣}{٥}$

$\therefore \text{س} = ٢^{٥ \times \frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$ $\therefore \text{س} = ٨$ ، $\text{ص} = ٢٥٦$

$\therefore$ المقدار $٥\text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \times ٨ + ٢ \times ٢٥٦ = ٥٥٢$

<u>النوع الخامس من المسائل :</u>

<u>المعادلات الآسية لمركبة</u>

المعادلات الآسية المركبة هي التي تحتوي علي علامة (+) أو (-) وهي نوعان:

(١) <u>النوع الأول :</u> بإخراج العامل المشترك بأصغر أس

<u>مثال</u> : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١- $٤^{٢\text{س}-١} - ١٦^{\text{س}-١} = -٤$

الحـــــل

$٢^{٤\text{س}-٢} - ٢^{٤\text{س}-٤} = -٤$

$٢^{٤\text{س}-٤}\left[٢^{٢} + ١\right] = -٤$ $\therefore ٢^{٤\text{س}-٤} \times ٥ = -٤$ بالقسمة علي ٥

$\therefore ٢^{٤\text{س}-٤} = ٢^{٣}$ $\therefore ٤\text{س} - ٤ = ٣$

$\therefore ٤\text{س} = ٧$ $\therefore \text{س} = \frac{٧}{٤}$ $\therefore$ مجموعة الحل $\left\{\frac{٧}{٤}\right\}$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

$٢^{٣\text{س}+١} + ٨^{\text{س}-\frac{١}{٣}} = ١٦٠$

الحـــــل

$٢^{٣\text{س}+١} + (٢^{٣})^{\text{س}-\frac{١}{٣}} = ٢^{٣\text{س}+١} + ٢^{٣\text{س}-١} = ٢^{٣\text{س}}(٢^{١} + ٢^{-١})$

$= ٢^{٣\text{س}}(٢ + \frac{١}{٢}) = ٢^{٣\text{س}} \times ٢\frac{١}{٢} = ٢^{٣\text{س}} \times \frac{٥}{٢} = ١٦٠$

$٢^{٣\text{س}} = ١٦٠ \times \frac{٢}{٥}$ $\therefore ٢^{٣\text{س}} = ٣٢ \times ٢ = ٦٤$

$٢^{٣\text{س}} = ٢^{٦}$ $\therefore ٣\text{س} = ٦$ $\therefore \text{س} = ٢$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

$١١^{٤\text{س}+١} + ١١^{٤\text{س}} = ١٢$

الحـــــل

$١١^{٤\text{س}}\left[١١^{١} + ١\right] = ١١^{٤\text{س}} \times ١٢ = ١٢$

$\therefore ١١^{٤\text{س}} = ١$ $\therefore ١١^{٤\text{س}} = ١^{٠}$

$\therefore ٤\text{س} = ٠$ $\therefore \text{س} = ٠$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

$٤ \text{س} + ٢ \; ٢\text{س} + ٣ = ١٤٤$

الحـــــل

$٢^{٢س} + ٢^{٢س+٣} = ٢^{٢س}(١ + ٢^٣) = ٢^{٢س}(١+٨)$

$٢^{٢س} \times ٩ = ١٤٤$ ∴ $٢^{٢س} = \frac{١٤٤}{٩}$ ∴ $٢^{٢س} = ١٦$

$٢^{٢س} = ٢^٤$ ∴ $٢س = ٤$ ∴ $س = ٢$

مثال :

إذا كان $د(س) = ٧^س$ أثبت أن $٧^ص \times د(س - ص) = د(س)$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= ٧^ص \times د(س - ص)$

$= ٧^ص \times ٧^{س-ص}$

$= ٧^ص \times ٧^س \times ٧^{-ص} = ٧^س$

$= د(س)$ ∴ الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت $د(س) = ٤^س$ فاوجد قيمة س التي تحقق $د(س+١) + (س-١) = ٦٨$

الحـــــل

∴ $٤^{س+١} + ٤^{س-١} = ٦٨$

∴ $٤^{س-١}(٤^٢ + ١) = ٦٨$

∴ $٤^{س-١} \times ١٧ = ٦٨$ $(\div ١٧)$

∴ $٤^{س-١} = ٤^١ = ٣^٢$

∴ $س - ١ = ١$ ∴ $س = ١ + ١$ ∴ $س = ٣$

مثال :

إذا كانت $د(س) = (\frac{١}{٣})^س$ فاوجد قيمة س إذا كانت $د(س+٢) - د(س-٢) = -٨٠$

الحـــــل

$د(س+٢) - د(س-٢) = (\frac{١}{٣})^{س+٢} - (\frac{١}{٣})^{س-٢}$

$= (\frac{١}{٣})^س [(\frac{١}{٣})^٢ - (\frac{١}{٣})^{-٢}] = (\frac{١}{٣})^س [\frac{١}{٩} - ٩] = (\frac{١}{٩})^س [\frac{١-٨١}{٩}]$

∴ $(\frac{١}{٣})^س \times \frac{-٨٠}{٩} = -٨٠$

$(\frac{١}{٣})^س = -٨٠ \times \frac{٩}{-٨٠}$ ∴ $(\frac{١}{٣})^س = ٩$ ∴ $٣^{-س} = ٣^٢$

∴ $-س = ٢$ ∴ $س = -٢$

مثال :

إذا كانت د: ح $ح^+$ حيث $د(س) = أ^س$ اثبت أن $د(١) = \frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س) + د(س+١)}$

الحـــــل

الطرف الأيمن = د(١) = أ ⟵ (١)

الطرف اليسر = $\frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س) + د(س+١)} = \frac{أ^{س+١} + أ^{س+٢}}{أ^{س} + أ^{س+١}} = \frac{أ^{س+١} + (١+أ)}{أ^{س} + (١+أ)}$

$= أ^{س+١-س} = أ$ ⟵ (٢)

من ① ، ② ∴ الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت د(س) = ٢ س- ١ فأوجد قيمة: $\frac{د(س+٢)}{د(س-٢)} - \frac{د(س-٢)}{د(س+٢)}$

الحـــــل

المقدار = $\frac{٢^{(س+٢)-١}}{٢^{س-٣}} - \frac{٢^{(س-٣)}}{٢^{س+١}} = ٢^{٤} - ٢^{-٤}$

$= ١٦ - \frac{١}{١٦} = \frac{٢٥٥}{١٦}$

٢) النوع الثاني : بالتحليل

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$٧^{٢س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩ = ٠$

الحـــــل

$(٧^{س} - ٤٩)(٧^{س} - ١) = ٠$

$٧^{س} = ٤٩$	$٧^{س} = ١$
$٧^{س} = ٧^{٢}$	$٧^{س} = ٧^{٠}$
∴ س = ٢	∴ س = صفر

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢}

مثال : $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ٦٢٥ = ٠$

الحـــــل

المقدار عبارة عن مقدار ثلاثي

∴ $(٥^{س} - ١٢٥)(٥^{س} - ٥) = ٠$

$٥^{س} = ١٢٥$	$٥^{س} = ٥$
$٥^{س} = ٥^{٣}$	$٥^{س} = ٥^{١}$
$\therefore س = ٣$	$\therefore س = ١$

$\therefore$ **مجموعة الحل = { ١ ، ٣}**

<u>مثال</u> : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$$٢^{٤س-٣} - ٣ \times ٢^{٢س} + ١٦ = ٠$$

الحـــــل

بضرب طرفي المعادلة $\times ٢^{٣}$

$$\therefore ٢^{٤س-٣} \times ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٢^{٣} + ١٦ \times ٢^{٣} = ٠$$

$$٢^{٤س-٣+٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٨ + ١٦ \times ٨ = ٠$$

$$٢^{٤س} - ٢٤ \times ٢^{٢س} + ١٢٨ = ٠$$

$$\therefore (٢^{٢س} - ١٦)(٢^{٢س} - ٨) = ٠$$

$٢^{٢س} = ١٦$	$٢^{٢س} = ٨$
$٢^{٢س} = ٢^{٤}$	$٥^{س} = ٢^{٣}$
$\therefore ٢س = ٤$	$\therefore ٢س = ٣$
$س = ٢$	$\therefore س = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ **مجموعة الحل = { ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ }**

<u>مثال</u> : إذا كان $٩^{س} + ٣^{س+١} = ١٠٨$ فأوجد قيمة س

الحـــــل

$٣^{٢س} + ٣^{س+١} = ١٠٨$ $\therefore ٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$

$$٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$$

$$\therefore (٣^{س} - ٩)(٣^{س} + ١٢) = ٠$$

$\therefore ٣^{س} = ٩ \longrightarrow ٣^{س} = ٣^{٢}$ $\therefore س = ٢$

، $٣^{س} = -١٢$ (مرفوض) $\therefore$ **مجموعة الحل = { ٢ }**

<u>مثال</u>: $٢^{ص} + ٢^{٥-ص} = ١٢$

الحـــــل

$٢^{ص} + ٢^{٥} \times ٢^{-ص} - ١٢ = ٠$ ى بالضرب في $٢^{ص}$

$\therefore ٢^{٢ص} - ١٢ \times ٢^{ص} + ٣٢ = ٠$

$\therefore (٢^{ص} - ٤)(٢^{ص} - ٨) = ٠$

$٢^{ص} - ٤ = ٠$	$٢^{ص} - ٨ = ٠$
$٢^{ص} = ٤$	$٢^{ص} = ٢^{٣}$
$٢^{ص} = ٢^{٢}$	$\therefore ص = ٣$
$\therefore ص = ٢$	

$\therefore$ **مجموعة الحل = $\{٢ ، ٣\}$**

تمرين (٢٢)

حل المعادلات الآتية (أوجد قيمة س)

١) $٣^{١+س} + ٣^{١-س} = ١٠$

٢) إذا كان $٩^{س} + ٣^{س} + ١ = ١٠٨$ فأوجد قيمة س

٣) $٢٥^{س} - ١٢٦ \times ٥^{س-١} + ٥ = ٠$

٤) $٢^{ص} + ٢^{٥-ص} = ١٢$

٥) $٢^{٣س+١} + ٨^{س-\frac{١}{٣}} = ١٦٠$

٦) $٧^{٣س-١} - ٧^{٣س} = -٢٠٥٨$

٧) $\dfrac{(٠,٦)^{٢س-١} \times ٥^{٢س}}{(\sqrt{٣})^{٢س-١}} = ٤٥$

٨) $٣^{س٤-١٦} = ٥^{س٤-١٦}$

٩) $٣^{٢س} - ٣٠ \times ٣^{س} + ٨١ = ٠$

١٠) إذا كانت $د: ح \longrightarrow ح^{+}$ حيث $د(س) = ٢^{س+١}$

حل المعادلة $د(س) + د(س+١) + د(س+٢) = ٢٨$

١١) $١٢٥\left(\frac{\sqrt{٣}}{٥}\right)^{س+١} = \sqrt{٣}$

١٢) $٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{س} - ١٨ = ٠$

١٣) $٢^{٢س+٢} + ٤^{١-س} - ١٧ = ٠$

١٤) $٣^{س+٢} + ٣^{س-١} = ٢٨$

١٥) $(س - ٣)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

١٦) $٧^{١+س} + ٧^{١-س} = ٥٠$

١٧) $٢^{|س|} = ٤^{|٢س-٣|}$

١٨) $٢^{٢س} - ٢^{س} - ٢ = ٠$

١٩) $٢^{\sqrt{س}-١٣} = ٤$

٢٠) $١٠ \, س^{٢-١} - ١١ \, س^{-\frac{١}{٢}} + ٦ =$ صفر

٢١) $س^{\frac{٢}{٣}} - ٢٨ \, س^{\frac{١}{٣}} + ٢٧ = ٠$

٢٢) $٤^{س} - ٥ \times ٢^{س+١} + ١٦ = ٠$

الدالـــــة الأسيـــــــة

تعريف الدالة : د (س) = أ^س ، ص = أ^س

حيث (الأس) أ ∈ ح ، (الأساس) أ ∈ ح$^+$ - { ١ }

ملحوظة : في حالة أ = ١ تصبح دالة ثابتة

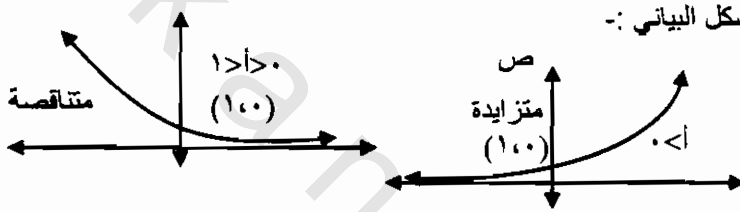
تسمي دالة آسية حيث د : ح ⟵ ح$^+$

المجال المجال المقابل

١- المجال = ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) =] - ∞ ، ∞ [

٢- المدى = ح$^+$ =] ٠ ، ∞ [

٣- الشكل البياني :-



أ- تمثيل بيانياً بمنحني يقع بأكمله فوق محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ١) كذلك النقطة (١ ، أ) وتكون الدالة متزايدة إذا كان أ > ١ ، و متناقصة إذا كان ٠< أ < ١

ب- الدالة موجبة دائماً أي المدي = ح$^+$

ج- لها نفس قوانين الأســس .

أ- د (م) . د(ن) = د(م + ن)

ب- [د(م)]^{ن} = د(م ن)

ج- د(م) ÷ د (ن) = د(م – ن)

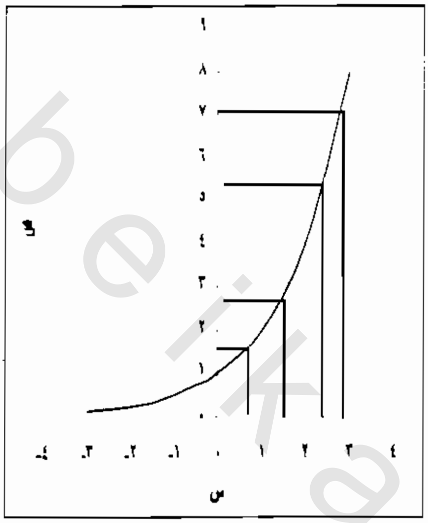
د – د(- م) = $\frac{١}{د(م)}$

***مثال :- ارسم منحني الدالة د(س) = ٢^س مستخذة س ∈ [- ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد قيمة:-**

د (٢,٤) و (- $\frac{٣}{٢}$) جـ ($\sqrt{٢}$) ثم أوجد قيمة س عندما ٢^س = ٧

د(س) = ٢^س .. ص = ٢^س

س	٣ -	٢-	١ -	٠	١	٢	٣
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨



إيجاد القيم التقريبية :-

* د ($\frac{٢,٤}{٣}$) = $٢^{٢,٤} \simeq ٥,٣$

* د(- $\frac{٣}{٢}$) = د (- ١,٥) = $٢^{٥} \simeq ٠,٣$

* د($\sqrt{٢}$) = ٢ = $٢^{٠,٤} \simeq ٢,٦$

$\sqrt[٥]{٨} = \sqrt[٥]{٢^{٣}} = ٢^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٠,٦} \simeq ٠,٥$

مثال :-

ارسم الشكل البياني للدالة

د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ حيث س ∋ [- ٣ ، ٣]

من الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ ، د (١,٢) ، د (- ١,٢)

الحـــــــل

س	٣ -	٢-	١ -	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = (\frac{١-}{٣})^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$ ، د ($\frac{١}{٢}$) = $(\frac{١}{٣})^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٠,٦ من الرسم

$\frac{\sqrt{٣}}{٩} = \frac{٣^{\frac{١}{٢}}}{٣^{٢}} = ٣^{-١,٥} = (\frac{١}{٣})^{١,٥}$

⇐ س = ١,٥ ⇐ د (١,٥) = ($\frac{١}{٣}$)^١,٥ = ٠,٢ من الرسم

د(١,٢) = ($\frac{١}{٣}$)^١,٢ ≃ ٠,٣ من الرسم

الحاسبة للتأكيد

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٠,٦ $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ = ٠,٢ د(١,٢) = ($\frac{١}{٣}$)^١,٢ = ٠,٣

أكمل !!!

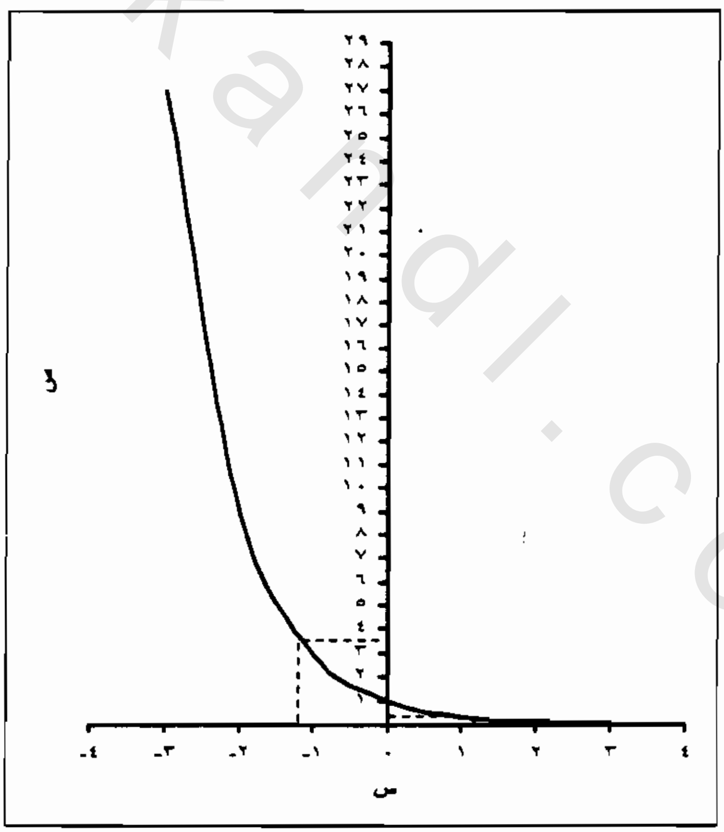
الصورة العامة للدالة الآسية هي:

د(س) = أ^س حيث أ ∈ ح⁺ - { ١ } مجالها ح

، مجالها المقابل ح⁺ ، منحني الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

وتكون متزايدة علي مجالها إذا كان أ > ١

، ومتناقصة علي مجالها إذا كان ٠ < أ < ١



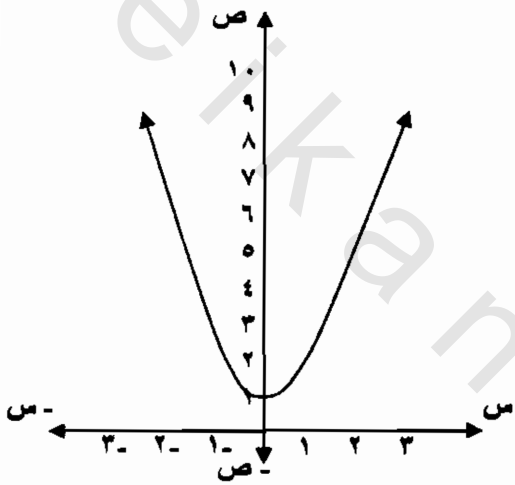
مثال :- ارسم الشكل البياني للدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٢^{س} & \text{حيث } س \geq \\ ٢^{-س} & \text{حيث } س < ٠ \end{cases}$$

من الرسم استنتج المدى والاطراد وبين نوعها من حيث الزوجية أو الفردية

الحـــــــل

	$٢^{س}$					$٢^{-س}$			
س	٠	١	٢	٣	س	٠	١-	٢-	٣-
$٢^{س}$	١	٢	٤	٨	$٢^{-س}$	١	٢	٤	٨



المدي = [١ ، ∞ [

في]- ∞ ، - [تناقصية

في [٠ ، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية

٢٧) $٢^{س} = س^{٢}$

الحـــــــل

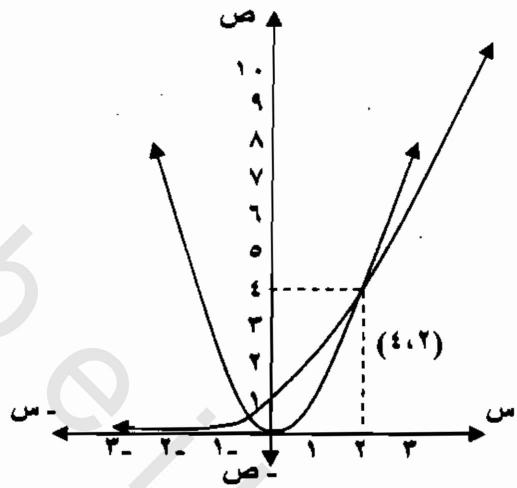
نفرض أن ص = $٢^{س}$ ⟸ ص= $س^{٢}$ ثم نكون جدولين وهما

$٢^{س}$

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣
$٢^{س}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

$س^{٢}$

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



مجموعة الحل = { - ٠,٨ ، ٢ }

مثال:-

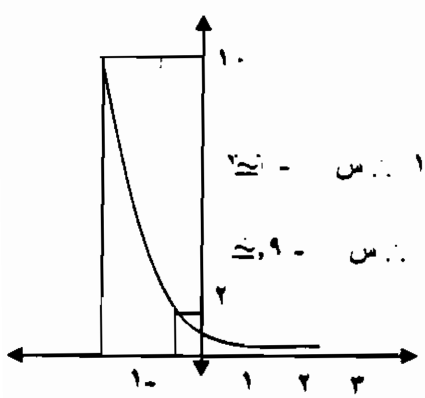
إذا كانت د : ح ⟸ ح⁺ حيث د (س) = $(\frac{1}{3})^{س}$ ، س ∋ [-٣ ، ٣] فارسم المنحني لهذه الدالة ومن الرسم.

أولاً: د(- ٠,٥)

ثانياً: قيمة س عندما $(\frac{1}{3})^{س}$ = ١٠، أوجد قيمة س إذا كانت $(\frac{1}{3})^{س}$ = ٨

، ص= $(\frac{1}{3})^{س}$

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١٠	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$



أولاً : د(-٠,٥) ≃ ١,٧ عندما س = - ٠,٥

ثانياً : $(\frac{1}{3})^{س}$ = ١٠ ∴ عندما ص = ١٠ ∴ س ≃ - ٢

$(\frac{1}{3})^{س}$ = ٨ ∴ عندما ص = ٨ ∴ س ≃ - ,٩

للتأكيد فقط : د(- ٠,٥) = $(\frac{1}{3})^{-٠,٥}$

$= (٣^{-١})^{-٠,٥} = ٣^{٠,٥}$

مثال:- إرسم

$٢ - س = ٢^{-س}$

الحـــــــل

نفرض أن ص = ٢ ــ س   ص = $٢^{-س}$

ثم نكون جدولين وهما

ص = $٢^{-س}$

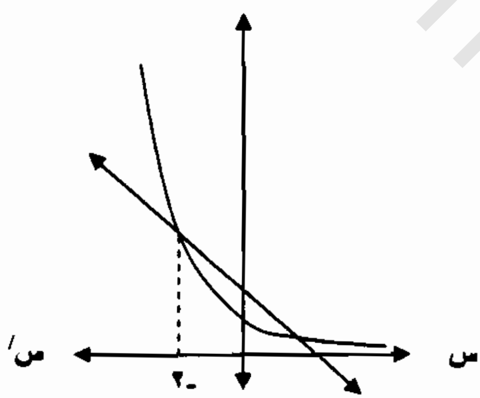
س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$٢^{-س}$	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

ص = ٢ ــ س

س	٠	١
ص	٢	١

ص = $٢^{-س}$ ص = ٢ - س

مجموعة الحل = {- ٢ ، ١,٧ }



تمرين رقم (٢٣)

(١) أرسم الشكل البياني للدالة ص= ٣+ $٢^{س}$ ومن الرسم عين مجال الدالة ومداها وأطرادها .

(٢) مثل بيانياً د(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ حيث س [- ٢ ، ٣] ومن الرسم

أوجد قيمة تقريبية لكل من: $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ، د(١,٥) ، د (- ١,٥)

(٣) إذا كانت د : ح ← $ح^{+}$ ، د(س) = ٣ س أرسم منحني هذه الدالة متخذاً س∋ [-٣،٣]

أوجد قيمة تقريبية من لكل من :-

أ) د (١,٥)

ب) قيمة س عندما $٣^{س}$ = ٨

(٤) أرسم الكل البياني للدالة د(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$: س ∋ [- ٣،٣] ومن الرسم

أوجد قيمة : د (- ٠,٤) قيمة س عندما $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ = ٨

(٥) مثل بيانياً الدالة د: ح ← $ح^{+}$ حيث د(س) = $٣^{س-٢}$ متخذاً س ∋ [٠ ، ٥] ومن الرسم

أوجد : أ) د (١,٨)

ب) قيمة س عندما $٣^{س-٢}$

(٦) د(س) = $\left(\frac{٥}{٣}\right)^{س}$ مثلها بيانياً في [- ٢ ، ٤] ومن الرسم

أوجد : أ) د (٢,٣)

ب) قيمة س عندما $\left(\frac{٥}{٢}\right)^{س}$ = ١٢

(اللوغاريتمـــــات)

نعلم أن ٣٢ = $٢^{٥}$

هذه المتساوية تحتوى على

(١) العدد ٣٢   (٢) الأساس ٢   (٣) الأس ٥

يمكن تحويل هذه المتساوية الى صورة

لو$_{٢}$ ٣٢ = ٥

وتقرأ لوغاريتم ٣٢ للأساس ٢ يساوى ٥

<u>تعريف اللوغاريتم</u>

هو الأس الذى يرفع اليه الأساس لكى يعطى العدد

<u>أمثلة</u>

لو$_{٢}$ ١٦ ، لو$_{٥}$ ١٢٥ ، لو$_{٢}$ $\frac{١}{٦٤}$ ، لو$_{٦}$ ٦ ، لو$_{٥}$ ١

<u>الحل</u>

لو$_{٢}$ ١٦ = ٤   &   لو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣

لو$_{٢}$ $\frac{١}{٦٤}$ = -٦   & لو$_{٦}$ ٦ = ١   &   لو$_{٥}$ ١ = صفر

مثال

١) **<u>أحسب قيمه ما يلى:-</u>**

١) لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٥}$ ١٢٥

٢) $\frac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}_{٢}\ \frac{١}{١٢٨}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦}$

الحل

١) لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٥}$ ١٢٥ = ٣ + ٣ = ٦

٢) $\dfrac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}_{٢}\ \frac{١}{١٢٨}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦} = \dfrac{٥ \times -٧}{٥} = \dfrac{-٣٥}{٨}$ ٧

المعادلة اللوغاريتمية:

هى معادلة يكون المجهول فيها إما عدد أو أساس أو أس لذلك تحول الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية

مثال

حل المعادلات الآتيه:-

١) لو$_{٨}$ س = $\frac{٢}{٣}$

٢) لو$_{٦٤}$ ٣٢ = س

٣) لو$_{\text{س}-١}$ ١٢٥ = ٣

٤) (لو$_{٢}$س)^{٢} - ٥ (لو$_{٢}$$^{\text{س}}$) + ٦ = ٠

الحل

١) س= $(٨)^{\frac{٢}{٣}}$

س= $٢^{٣ \times \frac{٢}{٣}}$

س= $٢^{٢}$

س= ٤

٢) س= ٣٢ = $(٦٤)^{\text{س}}$

$٢^{٥} = ٢^{٦\text{س}}$

٦س = ٥

س = $\frac{٥}{٦}$

٣) س = ١٢٥ = $(\text{س} - ١)^{٣}$

$٥^{٣} = (\text{س} - ١)^{٣}$

س - ١ = ٥

س = ٦

٤) أ^{٢} ــ ٥أ + ٦ = ٠ 　　　　 <u>أ = لو$_{٢}$ س</u>

(أ - ٣) (أ - ٢) = ٠

أ = ٣ 　　 ، 　　 أ = ٢

لو$_{٢}$ س = ٣ 　　 ، 　　 لو$_{٢}$ س = ٢

س = ٢^{٣} 　　 ، 　　 س = ٢^{٢}

س = ٨ 　　 ، 　　 س = ٤

س ∈ { ٨ ، ٤ }

قوانين اللوغاريتمات

(١) لو$_{أ}$ (س × ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

لو ٧ × ٨ 　　 = لو ٧ + لو ٨

لو ٥ + لو ٦ 　　 = لو ٥ × ٦ = لو ٣٠

(٢) لو$_{أ}$ $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)$ 　　 = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص

لو $\frac{٧}{٨}$ 　　 = 　　 لو$_{٧}$ - لو$_{٨}$

لو$_{٦}$ ــ لو$_{٥}$ 　　 = لو $\frac{٦}{٥}$

مثال

<u>حول إلى ضرب وقسمة ما يلي :-</u>

١) لو ٧ + لو ٦ - لو ٥ - لو ١١ = لو $\frac{٦ \times ٧}{٥ \times ١١}$

٢) لو $\frac{٣}{٤}$ + لو $\frac{٥}{٦}$ - لو $\frac{٩}{١١}$ 　　 = لو $\frac{٣ \times ٥ \times ١١}{٤ \times ٦ \times ٩}$

٣) 　　 لو$_{أ}$ س^{ن} 　　 = 　　 ن لو$_{أ}$ س

لو ٥^{٣} 　　 = 　　 ٣ لو ٥

٧ لو$_{٢}$ 　　 = 　　 لو$_{٢}$ ^{٧}

٤) لو$_{أ}$ أ = ١   لذلك يكون لو$_{٦}$ ^{٦} = لو$_{٧}$ ^{٧} = لو $_{٨}$ ^{٨} = ١

لو$_{أ}$ ^{١} = صفر   لذلك يكون لو$_{٥}$ ^{١} = لو$_{١٠}$ ^{١} = لو$_{٢٠}$ ^{١} = صفر

<u>النوع الأول من المسائل:</u>

<u>جمع وطرح لوغاريتمات</u>

مثال ١   :- بدون الحاسبة أوجد قيمة

٢لو $\frac{٤}{٧}$ + $\frac{٣}{٢}$ لو$\frac{١}{٤}$ ٢+ ٢ لو (٧)^{٢} - لو ٦ - لو ٩

<u>الحل</u>

لو $(\frac{٤}{٧})^{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ لو $\frac{٩}{٤}$ + لو (٧)^{٢} - لو $\frac{٦}{١}$ - لو $\frac{٩}{١}$

لو$(\frac{٤}{٧})^{٢}$ + لو$\frac{٩}{٤}$ $\frac{٣}{٢}$ + لو $\frac{٤٩}{١}$ - لو $\frac{٦}{١}$ - لو $\frac{٩}{١}$

لو $\frac{١٦}{٤٩}$ + لو $\frac{٢٧}{٨}$ + لو$\frac{٤٩}{١}$ - لو$\frac{٦}{١}$ - لو$\frac{٩}{١}$

لو $\left(\frac{١٦\times٢٧\times٤٩\times١\times١}{٤٩\times٨\times١\times٦\times٩}\right)$

= لو ١   = صفر

مثال ٢

:- لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + ١ لو$_{٤}$ ٢٥ + ٦ لو$_{٤}$ ٢ – $\frac{١}{٤}$ لو$_{٤}$ ٨١ = لو$_{٢}$ ٨

<u>الحل</u>

الأيمن لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{١}{٢}$لو$_{٤}$ (٢٥)$^{١/٢}$ + لو$_{٤}$ ٢ ^{٦} - لو$_{٤}$ (٨١)$^{١/٤}$

لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + لو$_{٤}$ $\frac{٥}{١}$ + لو$_{٤}$ $\frac{٦٤}{١}$ - لو$_{٤}$ $\frac{٣}{١}$

= لو$_{٤}$ $\left(\frac{٣\times٥\times٦٤\times١}{٥\times١\times١\times٣}\right)$ = لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣

الأيسر   لو$_{٢}$ ٨   = ٣

مثال ٣

بدون الحاسبة أوجد قيمة

$$\frac{\text{لو ٤٠ - لو ٨ + لو ٥}}{\text{لو ٢٨ - لو ٧ + لو ٢٥}} = \text{١ - لو ٢}$$

الحل

: الأيمن = $\dfrac{\text{لو}\left(\frac{٤ \times ٥}{٨}\right)}{\text{لو}\left(\frac{٢٨ \times ٢٥}{٧}\right)} = \dfrac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ١٠٠}}$

$= \dfrac{\text{لو ٥}^{٢}}{٢} = \dfrac{\text{٢ لو ٥}}{٢} = \text{لو ٥}$

الأيسر ١ - لو ٢ = لو ١٠ - لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

الأيمن = الأيسر

النوع الثاني :-

ضرب وقسمة اللوغاريتمات

تستخدم القاعدة لو س ^{ن} = ن لو س

مثال

أوجد قيمة ما يلى بدون الحاسبة

١) $\dfrac{\text{لو ١٦} \times \text{لو ٢٧}}{\text{لو ٨١} \times \text{لو ٣٢}}$

٢) $\dfrac{\text{لو}\frac{٨١}{١٦}}{\text{٥لو}\frac{٣}{٢}}$

الحل

$$١)\quad \frac{\text{لو}\,٢^{٤}\times\text{لو}\,٣^{٣}}{\text{لو}\,٣^{٤}\times\text{لو}\,٢^{٥}}=\frac{٤\text{لو}٢\times٣\text{لو}٣}{٤\text{لو}٣\times٥\text{لو}٢}=\frac{١٢}{٢٠}=\frac{٣}{٥}$$

$$٢)\quad \frac{\text{لو}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤}}{٥\text{لو}\,\frac{٣}{٢}}=\frac{٤\text{لو}\frac{٣}{٢}}{٥\text{لو}\,\frac{٣}{٢}}=\frac{٤}{٥}$$

مثال

حل المعادلات الآتية :-

١) $\text{لو}_{٣}\,(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+١٢)=٢$

٢) $\text{لو}_{\frac{١}{٥}}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}}=\text{صفر}$

٣) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ \text{لو}_{٨}\dfrac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}}{\text{س}-٣}=\text{صفر}$

٤) $\text{لو}_{٤}\ \text{لو}_{٣}\ \text{لو}_{٢}\,(٢\text{س}-١)=\frac{١}{٢}$

الحـــل

١) $\text{س}^{٢}+٤\text{س}+١٢=٣^{٢}$

$\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣=٠ \quad \therefore (\text{س}+٣)(\text{س}+١)=٠$

$\therefore$ س = - ٣ أما س = - ١

٢) $\text{لو}_{\frac{١}{٥}}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}}=\text{صفر}$

$\therefore \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}}=\left(\frac{١}{٥}\right)^{٠}=١$

$\therefore \sqrt{٥\text{س}}=٥^{١}$ بالتربيع

$\therefore ٥\text{س}=٢٥ \qquad \therefore \text{س}=٥$

٣) $لو_{\frac{١}{٢}} \; لو_{٨} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٣} = صفر$

$\therefore \; لو_{٨} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٣} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} = ١ \qquad \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٣} = ٨$

$\therefore$ س^{٢} − ٢س = ٨س − ٢٤ $\therefore$ س^{٢} − ١٠س + ٢٤ = ٠

(س − ٦) (س − ٤) = ٠ $\therefore$ س = ٦ أما ٤

٤) $لو_{٤} لو_{٢} لو_{٣} (٢س - ١) = \frac{١}{٢}$

$\therefore لو_{٢} لو_{٣} (٢س - ١) = ٤^{٢} = ٤$

$\therefore$ ٢س − ١ = ٣ ^{٤} = ٨١

$\therefore$ ٢س = ٨٢ $\therefore$ س = ٤١

<u>المعادلات التي تعتمد على قوانين اللوغاريتمات</u>

ملاحظات :-

١) إذا كان $لو_{أ} س = لو_{أ} ص$ فإن س = ص

٢) إذا كان $لو_{س} أ = لو_{ص} أ$ فإن س = ص

٣) إذا كان $لو_{أ} س = ب$ فإن $س = أ^{ب}$

مثال ١

<u>حل المعادلة</u>

$$لو_{٤} \frac{٣ - س}{١} - لو_{٤} \frac{١}{٢س - ١} = \frac{١}{٢}$$

<u>الحل</u>

$$لو_{٤} \frac{(٣ - س) \times (٢س - ١)}{١ \times ١} = \frac{١}{٢}$$

$$(٣ - س) \; (٢س - ١) = (٤)^{\frac{١}{٢}} = ٢$$

٦س – ٢س^{٢} + س – ٢ = ٠

-٢س^{٢} + ٧س – ٥ = ٠

٢س^{٢} – ٧س + ٥ = ٠

(٢ س – ٥) (س – ١) = ٠

٢ س – ٥ = ٠   س – ١ = ٠

٢ س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$ س = ١

مثال ٢

حل المعادلة

لو$_{٣}$ س = $\frac{١}{٢}$ لو ٨١ – ٢ لو$_{٥}$ ٣ + لو$_{٥}$ ١٠ – لو$_{٥}$ ٠,٤

الحل

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ (٨١)$^{\frac{١}{٢}}$ – لو$_{٥}$ (٣)^{٢} + لو$_{٥}$ ١٠ – لو$_{٥}$ $\frac{٤}{١٠}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ ٩ – لو$_{٥}$ ٩ + لو$_{٥}$ ١٠ - لو $\frac{٤}{١٠}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ $\frac{١٠×١٠}{٤}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ ٢٥

لو$_{٣}$ س = ٢

س = ٣^{٢} س = ٩

مثال

حل المعادلة

لو ٢٥ × لو ٦٤ = لو ١٢٥ × لو س^{٢}

الحل

لو ٥^{٢} × لو ٢^{٦} = لو ٥^{٣} × لو س^{٢}

٢ لو ٥ × ٦^{٢} لو ٢ = ٣ لو ٥ × لو س^{٢}

٤ لو ٢ = لو س^{٢}

لو ٢^{٤} = لو س^{٢}

لو ١٦ = لو س^{٢}

س^{٢} = ١٦ س $\pm$ ٤

ملاحظة

تغير الأساس:

قاعدة

لو$_{أ}$ س = لو$_{أ^{٢}}$ س^{٢} = لو$_{أ^{٣}}$ س^{٣}

لو$_{٢}$ ٣ = لو$_{٤}$ ٩ = لو$_{٨}$ ٢٧ و هكذا

مثال :

<u>حل المعادلة</u>

لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩

لو$_{٤}$ س^{٢} = لو$_{٤}$ ٩

س^{٢} = ٩

س = $\pm$ ٣

س = ٣

(اللوغاريتمات المعتادة)

هى التى يكون أساسها (١٠) ويمكن حساب هذه اللوغاريتمات بواسطة الحاسبة كما يلى

مثال :-

<u>أوجد بواسطة الحاسبة</u>

١) لو ١٣ **٢) لو ٥ + لو ٧**

٣) $\dfrac{\text{٣لو٣+٢لو٥-لو١١}}{\text{لو١٢-لو٥+لو٢}}$

<u>الحل</u>

١) لو ١٣ = ١.١١٣٩ = Log ١٣

٢) لو٥ + لو ٧ = ١٥٤٤٠٦ =Log ٧ + Log ٥

٢ر٦٢٤٤ = [٣× ٣ Log+ ٢× ٥ Log–١١Log] ÷ [١٢ Log– ٥ Log+ ٢ Log]

مثال

إذا كانت س = $\frac{\text{٣لو ٢ـ٥لو٣+٧لو٣,٥}}{\text{٢لو٣+٣لو٢}}$

<u>الحل</u>

[٣× ٢ Log–٥× ٣ Log+ ٧×٣،٥ Log] ÷ [٢× ٣ Log+ ٣× Log]= ١،٢٥٢٣

ملاحظة :-

لو٢ ٧ ٢،٨٠٧ =Log÷ ٢ Log ٧ لو٥ ١٣ ١, = ١٣ Log÷ ٥ Log

العملية العكسية إيجاد العدد إذا علم اللوغاريتم

مثال

<u>أوجد قيمة س فيما يلى</u>

١) لوس = ١,٣٢٥٧ ٢) لوس =ـ١,٣٥٧

٣) لوس = $\frac{-٣}{٥}$ ٤) لوس = $\frac{\text{لو٧ـلو٢+لو٣}}{\text{لو٢ـلو٣+لو٥}}$

<u>الحل</u>

١) ∴ س = ٢١,١٦ = ١,٣٢٥٧ Sh Log

٢) ∴ س = ٠,٤٣٩٥ = Sh Log ١,٣٥٧ ±

٣) ∴ س = ٠,٢٥ = Sh Log ± = ٥ +٣

٤) = [٥ Log+ ٣ Log– ٢ Log] ÷ [٣ Log+ ٢ Log – ٧ Log]

Sh Log س = ٨٩,٧٤

حل المعادلات الآسية بواسطة اللوغاريتمات

مثال

حل المعادلة

$$٣^{س} = ١١$$

الحل

∴ لو $٣^{س}$ = لو١١

∴ س لو٣ = لو١١

$$∴ \quad س = \frac{لو١١}{لو ٣}$$

∴ س = ٢,١٨ ١١ Log = ٣ Log

مثال

حل المعادلة

$$(٧)^{٢س+٣} = ١٥$$

الحل

لو $(٧)^{(٢س+٣)}$ = لو١٥

(٢ س + ٣) لو٧ = لو١٥

٢س لو٧ + ٣ لو٧ = لو١٥

٢س لو٧ = لو١٥ – ٣لو٧

$$س = \frac{لو١٥ - ٣ لو٧}{٢ لو٧}$$

[١٥ Log – ٣× ٧ Log] ÷ [٢ × ٧ Log] =

س = ـ ٠,٨٠٤

مثال

حل المعادلة

$$٧^{٢س-٣} = ٥ \times (٣)^{س+٢}$$

الحل

لو $٧^{٢س-٣}$ = لو٥ × $(٣)^{س+٢}$

لو $٧^{٢س-٣}$ = لو ٥ + لو $٣^{س+٢}$

(٢س-٣) لو٧ = لو٥ + (س+٢) لو٣

٢س لو٧ – ٣ لو٧ = لو٥ + س لو٣ + ٢لو٣

٢س لو٧ – س لو٣ = ٣لو٧ + لو٥ + ٢لو٣

$$س = \frac{٣\ لو٧ + لو٥ + ٢\ لو٣}{٢\ لو٧ - لو٣}$$

[٣ × ٧ Log + ٥ Log + ٢ × ٣ Log] ÷ [٢× ٧ Log – ٣ Log]

س = ٣,٤٥

مثال

حل المعادلة

$٣^{س+٢}$ × $٧^{٢س-٣}$ = ١٥

الحل:

لو $٣^{س+٢}$ + لو $٧^{٢س-٣}$ = ١٥

(س+٢) لو٣ + (٢س-٣) لو٧ = لو١٥

س لو٣ + ٢لو٣ + ٢س لو٧ – ٣لو٧ = لو١٥

س = [لو٣ + ٢ لو٧] = لو١٥ + ٣ لو٧ – ٢ لو٣

$$س = \frac{[\ لو١٥ + ٣لو٧ - ٢لو٣\ ]}{[\ لو٣ + ٢لو٧\ ]}$$

س = ١,٢٧

مثال

حل المعادلة

$٣^{٢س}$ - ١١ × $٣^{س}$ + ٢٤ = ٠

الحل

نضع $٣^{س}$ = أ $أ^{٢}$ – ١١ أ + ٢٤ = ٠

(أ − ٨) (أ − ٣) = ٠

أ = ٨ أو أ = ٣

٣^{س} = ٨ أو ٣^{س} = ٣

لو ٣^{س} = ٨ س = ١

س لو ٣ = ٨

س = $\frac{\text{لو}٨}{\text{لو}٣}$ = ١,٨٩ س ∈ { ١ : ٨٩ }

مثال

إذا كانت د(س) = ٢^{س} أوجد قيمه س إذا كانت

د (٢س + ١) + (س-١) = ٧

<u>الحل</u>

٢$^{٢س+١}$ + ٢$^{س-١}$ = ٧

٢^{١} × ٢^{٢س} + ٢$^{-١}$ × ٢^{س} = ٧

بوضع ٢^{س} = أ ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ أ^{٢} + $\frac{١}{٢}$ أ − ٧ = ٠ × ٢

٤ أ^{٢} + أ − ١٤ = ٠

(٤ أ − ٧) (أ + ٢) = ٠

٤ أ − ٧ = ٠ أ + ٢ = ٠

٤ أ = ٧ أ = -٢

أ = $\frac{٧}{٤}$ ٢^{س} = $\frac{٧}{٤}$ ٢^{س} = -٢

لو ٢^{س} = لو $\frac{٧}{٤}$

س لو٢ = لو٧ − لو٤

س = $\frac{\text{لو}٧-\text{لو}٤}{\text{لو}٢}$ = ٠,٨

مثال :- **إذاكان حجم المتروط الدائرى القاسم هو**

$$ح = \frac{١}{٣} \text{ ط نق}^٢ \times ع$$ أوجدى ح إذا كانت ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ونق = (٣,٧)

$$ع = \frac{١٣}{٥}$$

الحل:

$$ح = \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (٣,٧)^٢ \times \frac{١٣}{٥}$$

$$ح = \frac{٢٢ \times ٣,٧^٢ \times ١٣}{٣ \times ٥}$$

= [٥ × ٣] ÷ [١٣ × ٢ × Sh ٣،٧ × ٢٢]

ح = ٢٦١

مثال

كرة من الرصاص صهرت وحولت إلى مكعب ، احسب طول حرف المكعب علما بان حجم الكرة هو ٣١٧٥ سم^٣ . علما بأن لم يفقد شئ من الرصاص .

الحل

حجم المكعب = ل^٣

حجم المكعب = حجم الكرة

ل^٣ = ٣١٧٥

ل = $(٣١٧٥)^{\frac{١}{٣}}$

١٤,٦٩ = ٣ ÷ SH ٣١٧٥

ل = ١٤,٦٩ سم

التمثيل البيانى للدالة اللوغارتمية

<u>الصورة العامة للدالة اللوغارتمية هى :</u>

ص = لو$_{أ}$ س حيث

س ∋ ح$^{+}$ ، أ ∋ ح$^{+}$ - { ١ } ، ص ∋ ح

<u>مجال الدالة اللوغارتمية</u> ⟵ **ح $^{+}$ والمجال المقابل لها ح**

، <u>مداها</u> ح

الدالة اللوغارتمية متزايدة على مجالها إذا كان أ > ١

ومتناقصة على مجالها إذا كان ٠ < أ < ١ ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

مثال .

- **ارسم منحنى الدالة ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س ومن الرسم اوجدى قيمة تقريبية للعدد**

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ ، قيمة $\sqrt{٢٧}$

<u>الحل</u>

تعين ازدواج النقط (س ، لو$_{\frac{١}{٣}}$ س)

س	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$
ص	٣-	٢-	٠	١	٢	٢	٣

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = س ٢,٧

∴ لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = -٩ ,٠

$$\therefore \sqrt{٢٧} = = ٣^{\frac{٣}{٢}} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{-٣}{٢}}$$

بعض المفاتيح الهامة فى الحاسبة

المفتاح $X^{٢}$ موضوع على زرار x ويستخدم لإيجاد ضرب العدد فى نفسه عدة مرات

المفتاح $X^{\frac{١}{٢}}$ موضوع على زرار ÷ يستخدم فى إيجاد جذور الإمداد لأي دليل

مثال

- أحسب ما يلى

$(١,٢٥)^{٨}$ $\qquad$ $(١,٣٢)^{-٣}$

الحل:

١,٢٥ Sh ×٨ = ٥,٩

١,٣٢ Sh× ٣ ± = ٠,٤٣

مثال٢

- أحسب قيمه

$\sqrt[٥]{١٧}$ و $\sqrt[٣]{١٧}$ و $\sqrt[٧]{١٧}$

الحل

$\sqrt[٥]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٥}}$ $\qquad$ ١٧ Sh÷ ٥ = ١,٧٦

$\sqrt[٣]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٣}}$ $\qquad$ ١٧ Sh ÷ ٣ = ٢,٥٧

$\sqrt[٧]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٧}}$ $\qquad$ ١٧ Sh ÷ ٧ = ١,٤٧

تطبيقـــات عمليــــــة

مثال١ :- إذا كانت $س^{٧} = ٣٤٥$ فما قيمة س

الحل

س = ٣٤٥ Sh ÷ ٧ = ٢,٣

مثال٢ :- إذا كانت س$^{\frac{٣}{٤}}$ = (٢,٧٥) فما قيمه س

الحل

$$س = (٢.٧٥)^{\frac{٣}{٤}}$$

س = ٣,٨٥ = ٣ ÷ Sh × ٤ Sh ٢,٧٥

مثال٣ - إذا كان حجم الكرة يساوى $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

أوجدى نق إذا علم أن ح = ٣٤٨ ٣ ط = ٣,١٤

الحل:

$$ح = \frac{٤ط . نق^{٣}}{٣}$$

٣ ح = ٤ ط نق^{٣}

$$نق^{٣} = \frac{٣ح}{٤ط} \qquad نق = \left(\frac{٣ح}{٤ط}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$نق = \left(\frac{٣٤٨×٣}{٣,١٤×٤}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

نق = ٤,٣٦ = ٣ ÷ Sh = ٣،١٤ ÷ ٤ ÷ ٣٤٨ × ٣

مثال:- إذاكان أ = م (١+س)^{ن}

وكانت م = ٦٧٥ و س = ,٠٤

ن = ٣٠ فما قيمة (أ)

الحل:

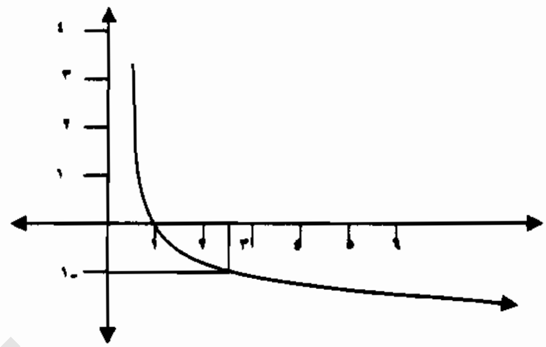
أ = ٦٧٥ [١ + ,٠٤]^{٣٠}

أ = ٦٧٥ (١,٠٤)^{٣٠}

= ٦٧٥ × ٣٠ × Sh ١،٠٤

أ = ٢١٨٩,٢٩

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$ = س   لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = $\frac{-٣}{٢}$ عندما ص = $\frac{-٣}{٢}$ س ≅ ٥,٢



مثال

ارسم منحنى الدالة ص = لو$_٢$س ومن الرسم اوجد قيمة لو$_٢$ ٤,٥

يتعين انواج النقط (س لو$_٢$س)

<u>الحل</u>

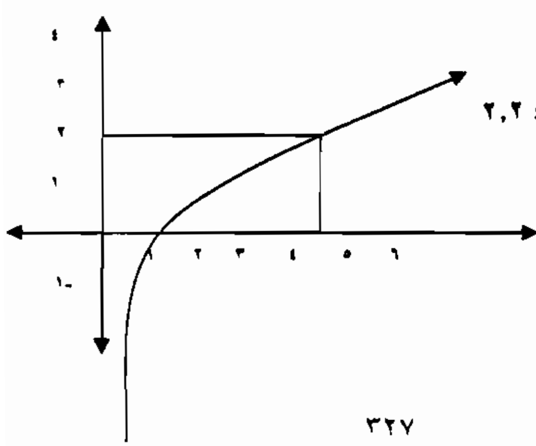
س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ص	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣

لو$_٢$ ٤,٥ = س = ٤,٥

بالحاسبة للتأكيد :

لو$_ب$أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو$_٢$ ٤,٥ = لو ٤,٥ ≈ ٢,٢



تمرين (٢٤)

اوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١) لو$_{س}$ ٢٧ $\sqrt{س}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$

٢) س = لو$_{٣}$ طا $\frac{ط}{٣}$

٣) لو ١٦ ٠٠ .٠ = س^{٣} $\sqrt{٥}$

٤) ٤) لو$_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = س

٥) لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ س = ١

٦) لو$_{٣}$ |س + ١| = ٤

٧) لو$_{١٦}$ (س + ٣) = $\frac{١}{٤}$

اوجد قيمة : -

٨) ٢ لو$_{٣}$ ٩ $\sqrt{٣}$

٩) لو$_{٥}$ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ٨

١٠) $\frac{\text{لو ٨١}}{\text{لو ٢٧}}$

١١) لو ٢٥ + لو ٢٨ + $\frac{\text{لو ٨ × لو ١٦}}{\text{لو ٦٤}}$ _ لو ($\frac{٤}{٥}$ + ٢)

١٢) لو$_{٤}$ ١٠٠ _ ٢ لو$_{٤}$ ٢ + ٣٦ _ لو$_{٤}$ ١٨ _ لو$_{٤}$ ٢٥

١٣) ٢ لو ٢٥ + لو ($\frac{١}{٥}$ + $\frac{١}{٣}$) + ٢ لو ٣ _ $\frac{١}{٥}$ لو ٣ ٢٤

١٤) ١ + ٢ لو $\frac{٤}{٧}$ - $\frac{٣}{٢}$ لو $\frac{٤}{٩}$ + ٢ لو ٧ _ لو ٦- ٢ لو ٣

١٥) ٣ لو$_{٢}$ ١٤ - ٤ لو$_{٢}$ ٥ + لو$_{٢}$ $\frac{٢٥}{٧}$ - لو$_{٢}$ ٧

أثبت ان

١٦) لو ٠٫٣٠ – لو$_{٢}$ $\frac{٢٧}{٢٥}$ - لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{٩}$ = ١

١٧) $\frac{\text{لو ٤٠ – لو ٨ + لو ٥}}{\text{لو ٢٨ – لو ٧ + لو ٢٥}}$ = ١ – لو ٢

١٨) ٣لو٥ + ٢لو١٤ – لو٤٩ + ٢و٢,٠ = لو٢٥.

١٩) اذا كان لو$_{٢}$ $\frac{٣}{٢٥}$ + ٥لو$_{٢}$ ٥ + لو٢٧ – لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ - لو$_{٢}$ ٢٤٣ = لو$_{٢}$ س

فاوجد قيمة س

٢٠) اذا كان ٣لوس + ٤ لوص – س ص^{٢} = ٢ (لو٢ + لو٣)

حل المعادلات الآتية

٢١) س$^{\text{لوس}}$ = ١٠٠ س

٢٢) لو س × لو ٠,٧ = لو٤٩ – (لو٧)^{٢}

٢٣) لو س = $\frac{\text{(لو ٥)}^{٢}\text{ – لو١٢٥}}{\text{لو٠,٠٠٥}}$

٢٤) لو$_{٢}$س = لو$_{٤}$ ٩

٢٥) (لوس)^{٢} – لوس^{٢} = (لو٢)^{٢} – ١

٢٦) ٩^{س} – ٢٧ × ٣^{س} + ٥٠ = ٠

٢٧) ٩^{س} – ١٤ × ٣^{س} + ٤٥ = ٠

٢٨) اذا كانت ٣$^{٢-٣ س}$ = ١٨,١ اوجد قيمة س

ارسم الدوال الآتية :

٢٩) ص = لو$_{٣}$ س متخذا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩٠] ومن الرسم اوجد قيمة للعدد لو$_{٣}$ ٥

٣٠) د (س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س من الرسم اوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٣}}$ ١٥