ثانيا : الجبـــــــــــــــــر

(١) : الدوال الحقيقية

الدالـــــــــة :-

- مراجعة على الدوال الحقيقية
- المجال – المدى – الدالة الزوجية والدالة الفردية – التمثيل البياني في اطراد الدوال – الدالة الثابتة – الدالة الخطية – دالة المقياس – حل المعادلات – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية

obeikandl.com

تذكر أن

- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) = { ١، ٢، ٣، ..... ، ∞ }
- مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) = {٠، ±١، ±٢، ±٣، ..... ، ± ∞ }
- مجموعة الأعداد النسبية (ن) = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص , ب ≠ ٠ }
- مجموعة الأعداد الغير نسبية (ن): هي التي لا يمكن وضعها على صورة $\frac{أ}{ب}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) = ن ∪ ن = ح+ ∪ { ٠ } ∪ ح

تعريف الدالة

هي علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س وص مثلا بحيث أن كل عنصر من عناصر س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث س مجال الدالة ، ص مجال المقابل للدالة

الدوال الحقيقية

إذا كانت س ، ص مجموعتين جزئيتين من ح كانت الدالة حقيقية

مدى الدالة

هو مجموعة عناصر الصور في المجال المقابل والتي يكون لكل منها أصل في مجال الدالة

مثال

إذا كانت د(س) = ٤ س^{٢} + ٥س ـ ٧ فإن

د (٢) = ١٢ + ١٠ ـ ٧ = ١٥ د(-٣) = ٢٧ ـ ١٥ ـ٧ = ٥

د(-١) = ٣ ـ ٥ ـ ٧ = -٩ وهكذا .....

مجال الدالة = { ٢ , -٣ , -١ , ...}

مدى الدالة = { ١٥, ٥ , -٩ , ... }

مجال الدالة :- هو قيم س التي تجعل الدالة معرفه

openkanal.com

ملاحظات

١) إذا لم يذكر مجال الدالة يكون مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة عندها معرفه

٢) يقال للدالة أنها حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

٣) مدى الدالة هو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

٤) تتحدد الدالة تحديداً تاماً إذا علم :-

أ – المجال (س)

ب – المجال المقابل (ص)

ج – قاعدة الدالة

٥) الشكل البياني للدالة يكون على شكل مجموعة من النقط المنفصلة لا يجوز التوصيل إلا إذا كان مجال الدالة مجموعة وليست فترة .

٦) مدى الدالة يؤخذ من الرسم من محور الصادات من أسفل إلى أعلى

٧) مجال الدالة من الرسم من محور السينات من اليسار إلى اليمين .

مثال

إذا كان د = { -١، ٠ ، ١ ، ٣ } [-٥ ، ٤]

وكان د(س) = ٢س-٣

أوجد مدى هذه الدالة وأرسم الشكل البياني لها .

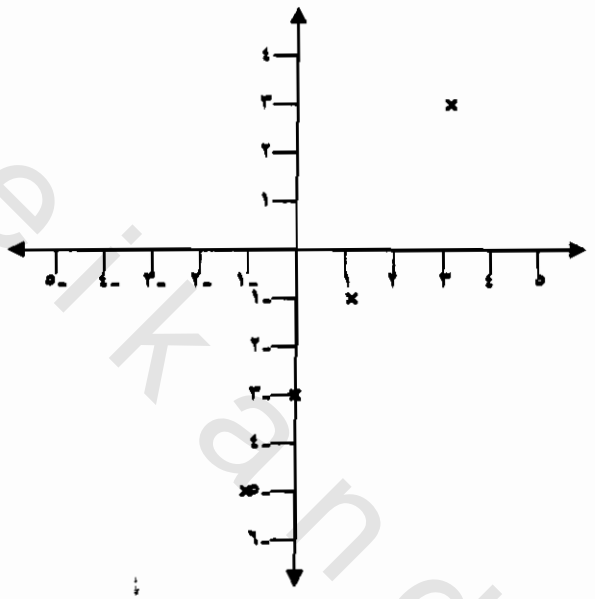
obeikandl.com

الحل

د(-١) = ٢ (-١) −٣ = -٥ د(٠) = ٢ (٠) −٣ = -٣

د(١) = ٢ (١) −٣ = -١ د(٣) = ٢ (٣) −٣ = ٣

مدى الدالة = { -٥، -٣ ، -١ ، ٣ }



ملاحظة

في المثال السابق يمكن كتابة د(س) على صورة أزواج مرتبة كما يلي

د = { (-١ ، -٥) ، (٠ ، -٣) ، (٣ ، ٣) ، (١ ، -١) }

مثال

إذا كان د : [-٣ ، -٥] ← ح حيث د(س) = { ٢س+٣ ، -٣ ≤ س < ٠ ؛ ٤ − س ، ٠ ≤ س ≤ ٥ }

أوجد د(-٣) ، د(-١) ، د(٠) ، د(١) ، د(٥)

ثم أرسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم أستنتج مدى الدالة

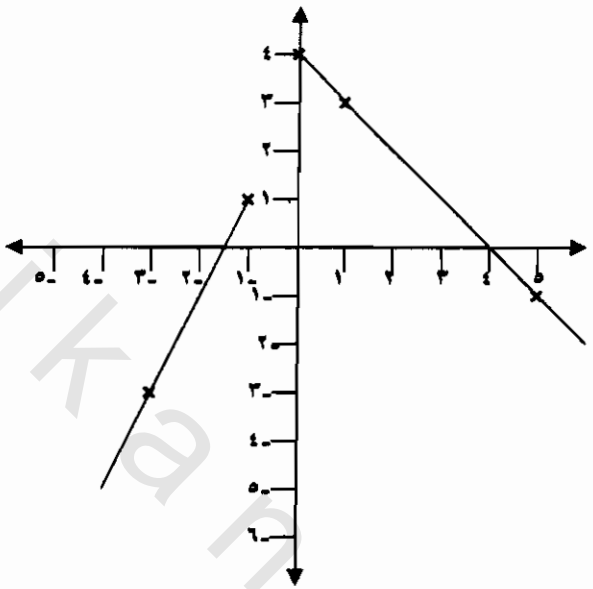
obeikandl.com

الحل:-

د(-٣) = ٢ (-٣) + ٣ = -٣ ، د(-١) = ١

د(٠) = ٤ ـ ٠ = ٤ ، د(١) = ٤ ـ ١ = ٣

د(٥) = ٤ ـ ٥ = -١



من الرسم : المدى = [-٣ ، ٤]

لاحظ أن

ـ٣ أصغر قيمه صادية ، ٤ أكبر قيمه صادية

مثال

أرسم الشكل البياني للدوال الآتية في ح ومن الرسم استنتج مدى الدالة

د (س) = { -س + ١ : س ≥ ١ ؛ س ـ ١ : س < ١ }

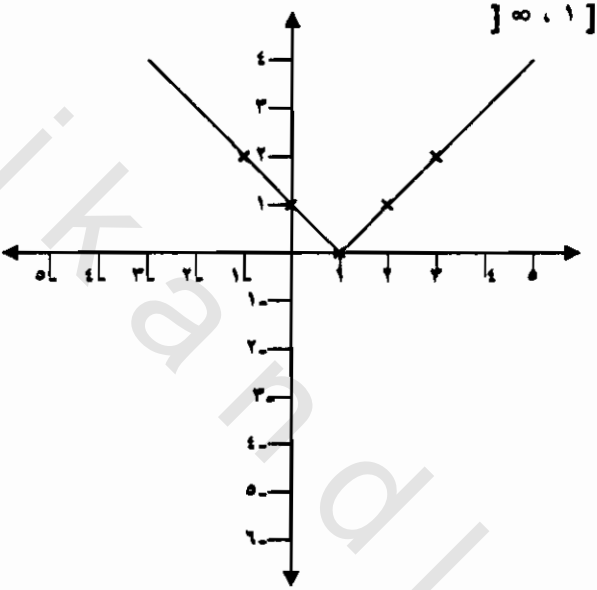
الحل

د (س) = - س + ١ | د (س) = س – ١

] - ∞ ، ١] |] ١ ، ∞ [

س	١	٠	١-	١	٢	٣
ص	٠	١	٢	١	٠	١

المدى = [١ ، ∞ [



قواعد إيجاد مجال بعض الدوال الحقيقية جبريا

أولا :- دوال كثيرة الحدود

وهى فى صورة د(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + ن$_{-١}$ أ س$^{ن-١}$ + ... + أ س + أ

حيث ن عدد صحيح غير سالب

فمثلاً: د(س) = ٧س^{٣} + ٥س^{٤} – ١٥ س^{٢} + ١٦ دالة كثيرة الحدود

، د(س) = ٣س^{٣} + ٤س$^{-٣}$ + ٢س + ٨ ليست كثيرة الحدود

لأنها تحتوى على ٤س$^{-٣}$

obeikandl.com

- جميع الدوال كثيرة الحدود مجالها ح (ما لم يذكر خلاف ذلك)

(أ) الدالة ثابتة ⟵ ص = أ (عدد)

المجال ⟵ ح ، المدى ⟵ أ

(ب) الدالة الخطية ⟵ ص = أ س + ب ص + جـ

المجال ⟵ ح ، المدى ⟵ ح

(ج) الدالة المحايدة ⟵ ص = س

المجال ⟵ ح ، المدى ⟵ ح

(ء) الدالة التربيعية ⟵ ص = أ $س^{٢}$ + جـ

المجال ⟵ ح

والمدى يتوقف على أشارة أ

أشارة أ موجبة

المدى { جـ ، ∞ }

أشارة أ سالبه

المدى { - ∞ ، جـ }

(هـ) الدالة التكعيبية ⟵ ص = أ $س^{٢}$ + ب

المجال ⟵ ح ، المدى ⟵ ح

ملاحظة

١. لأي دالة إذا عرف مجالها ..... عوض بقيمة المجال في الدالة لإيجاد المدى .

٢. <u>طريقة أخرى لإيجاد مدى الدالة التربيعية :-</u>

- نوجد س حيث س = $\frac{-ب}{أ}$
- ثم نعوض بقيمة س فى الدالة ونوجد ص
- فإن كان معامل س موجب يكون المدى { ص ، ∞ }
- واذا كان معامل س سالب يكون المدى { -∞ ، ص }

obeikandi.com

مثال

اوجد مجال ومدى الدالة ص = ٣ - س ٢

الحـــل

∵ الدالة تربيعية ∴ المجال ⟵ ح

∵ معامل س ٢ سالب ∴ المدى ⟵ { -∞ ، ٣}

ثانياً:- الدوال الكسرية (الدوال القياسية)

وهى فى صورة $د(س) = \frac{ق(س)}{ك(س)}$

حيث ق (س) ، ك (س) دوال كثيرة الحدود

مثل $د(س) = \frac{٢س^{٥} + ٤س^{٢}}{٣س^{٢} + ٨}$

قاعدة

إذا كانت (الدالة كسرية) في صورة بسط ومقام ، فالمجال جميع قيم ح ماعدا التي تجعل المقام = صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :

أ) $د(س) = \frac{جـ}{س + أ}$

ب) $د(س) = \frac{س + ١}{س^{٢} - ٩}$

ج) $د(س) = \frac{س-٢}{٥ س+٩}$

ء) $د(س) = \frac{١}{س(س-٢)}$

الحـــل

أ- المجال = ح – ما يجعل المقام = ٠

= ح – (- أ)

obeikandl.com

ب) ∵ ص = $\frac{س + ١}{س^{٢} - ٩}$ = $\frac{س+١}{(س-٣)(س+٣)}$

∴ المجال ⟵ ح - { ٣ ، - ٣ }

جـ) ∵ ص = $\frac{س-٢}{٥ س+٩}$ ∴ ٥ س + ٩ = ٠

∴ ٥ س = - ٩ ∴ س = $\frac{-٩}{٥}$

∴ المجال ⟵ ح - { $\frac{-٩}{٥}$ }

ء) ∵ص = $\frac{١}{س (س-٢)}$

نجد أن عندما س (س - ٢) = ٠

فإنه إما س = ٠ او س – ٢ = ٠ ⟵ س = ٢

∴ المجال ح ماعدا { ٠ ، ٢ }

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

أ) د (س) = $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٣}$

ب) د (س) = $\frac{س}{س^{٢}+٥}$

جـ) ص = $\frac{٥ س - ١}{س}$

الحـــل

أ) ∵ ص = $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٣}$ ∴المقام لا يحلل

∴ المجال = ح

ب) ص = $\frac{س}{س^{٢}+٥}$

obeikandl.com

عندما $س^{٢} + ٥ = ٠$ ∴ $س^{٢} = -٥$

∵ لا يوجد عدد حقيقي مربعه $= -٥$ ∴ المجال ⟵ ح

ج) ص $= \frac{٥ س - ١}{س}$ ∴ المجال ⟵ ح $-$ { صفر }

ثالثاً :- الدوال الغير قياسية (الدوال المشتملة على جذور)

أ) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الأولى : -

نجعل ما تحت الجذر $\geq$ صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

١) ص $= \sqrt{س - أ}$ ٢) ص $= \sqrt{أ - س}$

٣) ص $= \sqrt{٩ - س}$ ٣) ص $= \sqrt{س - ٣}$

الحـــل

١) ∵ ص $= \sqrt{س - أ}$ ∴ س $-$ أ $\geq$ ٠

∴ س $\geq$ أ ∴ المجال = [أ ، ∞)

٢) ∵ ص $= \sqrt{أ - س}$ ∴ أ $-$ س $\geq$ ٠

∴ أ $\geq$ س ∴ س $\leq$ أ ∴ المجال = ($-$ ∞ ، أ]

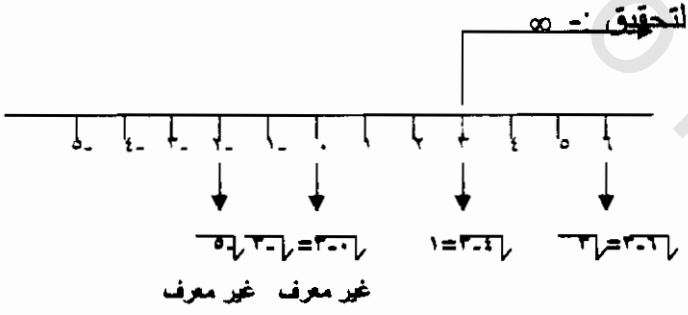
٣) ∵ ص $= \sqrt{٩ - س}$ ∴ ٩ $-$ س $\geq$ ٠

∴ ٩ $\geq$ س ∴ س $\leq$ ٩ ∴ المجال = ($-$ ∞ ، ٩]

٤) ∵ ص $= \sqrt{س - ٣}$ ∴ س $-$ ٣ $\geq$ ٠

∴ س $\geq$ ٣ ∴ المجال = [٣ ، ∞) فترة مغلقة من ناحية ٣

التحقيق :-



ملاحظة

إذا كان الجذور في المقام :-

نجعل ما تحت الجذور > صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

١) ص = $\frac{١}{\sqrt{س-٣}}$

٢) ص = $\frac{١}{\sqrt{س+٢}}$

الحـــل

١) ∵ ص = $\frac{١}{\sqrt{س-٣}}$ ∴ س – ٣ >

∴ س > ٣ ∴ المجال = (٣ ، ∞)

اى إن العدد ٣ لا ينتمي إلى المجال ٠

٢) ∵ ص = $\frac{١}{\sqrt{س+٢}}$ ∴ س + ٢ > ٠١ ٠

∴ س > - ٢ ∴ المجال = (-٢ ، ∞)

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الثانية : -

١) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الثانية ولا يحلل :

∴ المجال = ح ، المدى (صفر ، ∞)

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

أ) ص = $\frac{١}{س^{٢}+٩}$

ب) ص = $\sqrt{س^{٢}+٣}$

obeikandi.com

الحل

أ) ∵ ص = $\frac{١}{س^{٢}+٩}$ ∴ المجال = ح

∵ص = س^{٢} + $\sqrt{٣}$ ∴المجال = ح

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الثانية ويحلل :

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

أ) ص = $\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$

ب) ص = ٠ $\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$

ج) ص = $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$

الحـــل

أ) ∵ ص = $\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$ حيث أ^{٢} = (عدد)^{٢}

∴ أ^{٢} = س ∴أ^{٢} – س^{٢} ≤ صفر

∴أ^{٢} ≤ س^{٢} ∴س^{٢} ≥ أ^{٢}

∴س ≥ ± أ ∴المجال [- أ ، + أ]

ب) ص = $\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}$

∴المجال = [-أ ، أ]

ج) ص = $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$

∴س^{٢} – أ^{٢} = ٠ ∴ س^{٢} = أ^{٢}

∴س = ± أ ∴المجال = ح – [- أ، - أ]

جـ) إذا كانت الجذور في البسط والمقام معاً

∴المجال = مجال د$_{١}$ ∩ مجال د$_{٢}$ – [أصفار المقام]

obeikandl.com

مثال

أوجد مجال الدوال ألآتية

أ) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س}}$

ب) ص = $\frac{\sqrt{س^{٢}+٤}}{س^{٢}-٤}$

الحـــــل

أ) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س}}$

∵ مجال البسط س + ١ ≥ ٠ ⟹ س ≥ -١

∴ المجال = [-١ ، ∞)

مجال المقام س > ٠ ∴ المجال] ٠ ، ∞)

∴ المجال = [-١ ، ∞) ∩] ٠ ، ∞) – ح

ب) ص = $\frac{\sqrt{س^{٢}+٤}}{س^{٢}-٤}$

∴ المجال ح ∩ ح – { ± ح }

ملاحظة

إذا كانت الدالة الغير قياسية تحتوى على جذور فردية للمتغير س فإن مجالاها جميعاً ح

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

أ١٤) ص = $\sqrt[٣]{س^{٢}-١}$

ب) ص = (س^{٢} – ٢س + ١) $^{\frac{٢}{٣}}$

جـ) ص = (س – ١) $^{\frac{١}{٢}}$

الحـــل

أ) ∵ ص = $\sqrt[3]{س^2 - 1}$ ∴ المجال = ح

ب) ص = ($س^2$ - ٢ س + ١) $^{\frac{1}{2}}$

= $\sqrt{(س^2 - ٢ س + ١)^2}$ ∴ المجال = ح

جـ) ص = (س _ ١) $^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{١}{\sqrt{س - ١}}$

∴ المجال = ح

رابعاً :- مجال الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة : -

هو اتحاد فترات تعريفها

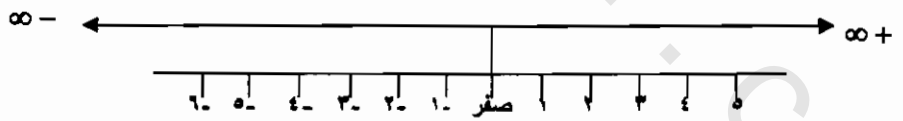
مثال

أوجد الدوال الآتية

د (س) = { س – ٢ عندما س ≤ ٠ ، - س – ٢ عندما س > ٠

الحـــل

∴ المجال = [صفر ، ∞) U (- ∞ ، صفر] = ح

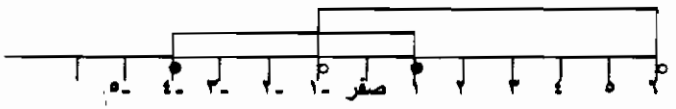


مثال

أوجد مجال الدالة

د(س) = { س + ٤ عندما س ∈ [-٤ ، ١] ، ٦ – س عندما س ∈] ١ ، ٦]

obeikandl.com

الحل

∴ المجال = [-٤ ، ١] U [-٦ ، ٤] = [-٤ ، ٦]

مثال

أوجد مجال الدالة

د(س) = { ٢ س^٢ عندما س ∈ [٠ ، ٢ [؛ ٢س + ٤ عندما س ∈] ٢ ، ٥]

الحل

∴ المجال = [٠ ، ٢ [U] ٢ ، ٥] = [٠ ، ٥] – { ٢ }

ملاحظة

١- عندما س < ٣ ، عندما س > ٣

∴ المجال ح – {٣}

٢- عندما س > صفر ، عندما س < صفر

∴ المجال ح – { صفر }

العمليات على الدوال

(أولا) الجمع والطرح : -

إذا كانت د١ ، د٢ دالتان مجالهما م١ ، م٢ على الترتيب .

فإن : (د١ ± د٢) (س) = د١ (س) ± د٢ (س)

ويكون مجالهما (د١ ± د٢) هو م١ ∩ م٢

obeikandl.com

ملاحظة

مجموع (او فرق) دالتين هو دالة جديدة

(ثانياً) الضرب والقسمة : -

إذا كانت د$_1$ ، د$_2$ دالتان مجالهما م$_1$ ، م$_2$ على الترتيب .

١) فإن : (د$_1$ ، د$_2$) (س) = د$_1$ (س) × د$_2$ (س)

ويكون مجالهما (د$_1$ ، د$_2$) هو م$_1$ ∩ م$_2$

٢) $\frac{د_1}{د_2}$ (س) = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث د$_2$(س) ≠ صفر

حيث : مجال $\frac{د_1}{د_2}$ هو (م$_1$ ∩ م$_2$) - [اصفار د$_2$ (س)]

ملاحظة

- **حاصل ضرب او خارج قسمة دالتين هو دالة جديدة**
- **مجال الدالة د$_1$ ، د$_2$ هو المجال المشترك للدالتين اى م$_1$ ∩ م$_2$**

ومجال الدالة د$_1$ هو المجال المشترك للدالتين ونستبعد منه اصفار د$_2$

مثال

إذا كانت د$_1$:] -٢ ، صفر [ح حيث د$_1$ (س) = ٣ - س

، د$_2$:] -١ ، ١ [ح حيث د$_2$ (س) ٣ + س

فأوجد

أ) (د$_1$ + د$_2$) (س) ، (د$_2$ - د$_1$) (س) ، (د$_1$ ، د$_2$) (س) ، $\frac{د_1}{د_2}$ (س)

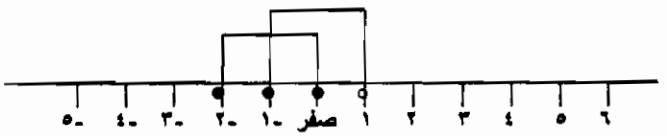
مجال كل من د$_1$ + د$_2$ ، د$_1$ - د$_2$ ، د$_1$ د$_2$ ، $\frac{د_2}{د_1}$

الحل

(د$_1$ + د$_2$) (س) = ٣- س + ٣ + س = ٦

ومجالها م$_1$ ∩ م$_2$ =] -٢ ، ٠ [∩] -١ ، ١ [

obeikandi.com



∴ المجال = م١ ∩ م٢ =] -١ ، صفر [

، (د٢ - د١) (س) = ٣+ س -٣ + س = ٢س

والمجال المشترك] -١ ، صفر [

، (د١ . د٢) (س) = (٣ - س) (٣ + س) = ٩ - س٢

والمجال] -١ ، صفر [

، $\frac{د١}{د٢}$ (س) = $\frac{٣-س}{-٣س}$ م١ ∩ م٢ ماعدا أصفار المقام

∴ المجال] -١ ، صفر [-٣

مثال

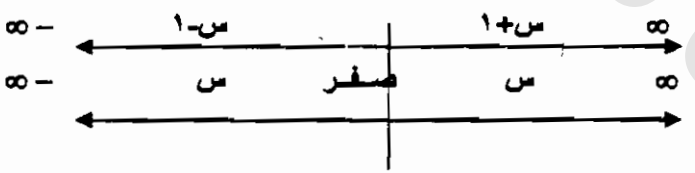
إذا كانت

د١ (س) = { س+١ عندما س ≤ ٠ ؛ س-١ عندما س > ٠ }

، ر(س) = س حيث س ∈ ح أوجد:-

(د + ر) (س) ، (د - ر) (س) ، (د × ر) (س) ، $\frac{د}{ر}$ (س) وعين المجال .

الحل



لإيجاد (د + ر) (س) =

= { د + ر عندما س ≤ ٠ ؛ د + ر عندما س > ٠ }

$$= \begin{cases} س+١+س & ٢س+١ \quad س \geq ٠ \\ س-١+س & ٢س-١ \quad س < ٠ \end{cases}$$

نعين مجال (د + ر) (س) = مجال د ∩ مجال ر

= ح ∩ ح = ح

لإيجاد (د – ر) (س) = د(س) – ر (س)

$$= \begin{cases} س+١-س & ١ \quad \text{عندما } س \geq ٠ \\ س-١-س & -١ \quad \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

والمجال (د – ر) (س) = ح (مثل الجمع)

لإيجاد (د × ر) (س) = د (س) × ر (س)

$$= \begin{cases} (س+١)(س) & س^{٢}+س \quad \text{عندما } س \geq ٠ \\ (س-١)(س) & س^{٢}-س \quad \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

والمجال = مجال د ∩ مجال ر = ح

لإيجاد $\left(\frac{د}{ر}\right)$س $= \frac{د(س)}{ر(س)}$

$$= \begin{cases} \frac{س+١}{س} & \text{عندما } س \geq ٠ \\ \frac{س-١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

والمجال = مجال د ∩ مجال ر – { أصفار المقام }

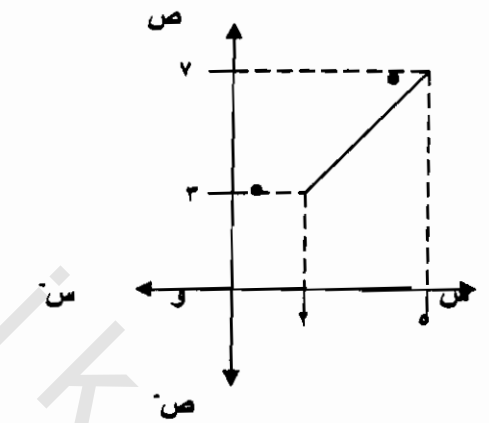
= ح – { صفر }

obeikandl.com

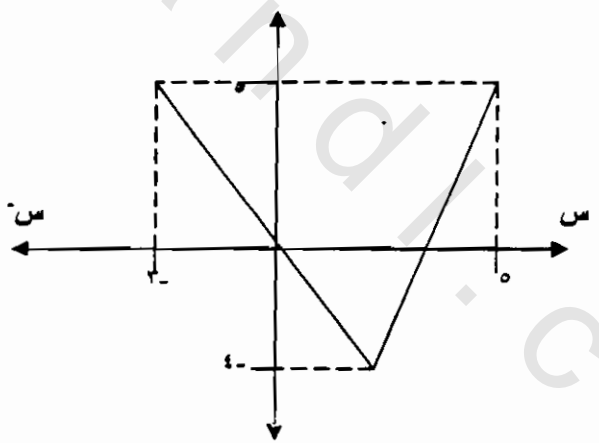
تمرين (١٢)

على مجال الدالة ومداها من الرسم والعمليات على الدوال

١) من الأشكال الآتية عين المجال والمدى .

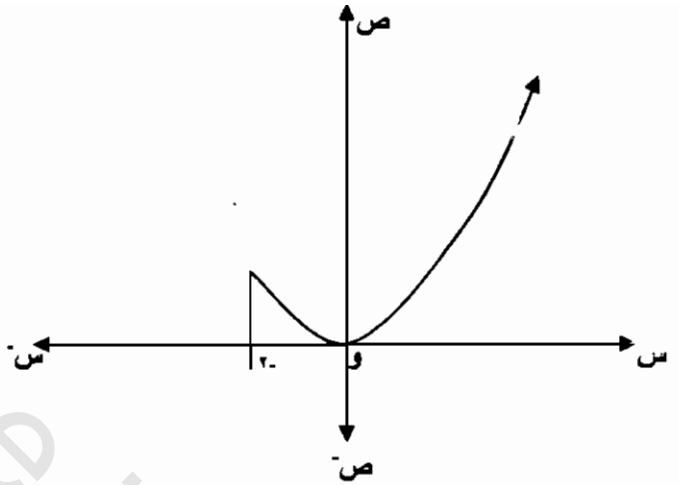


(١)

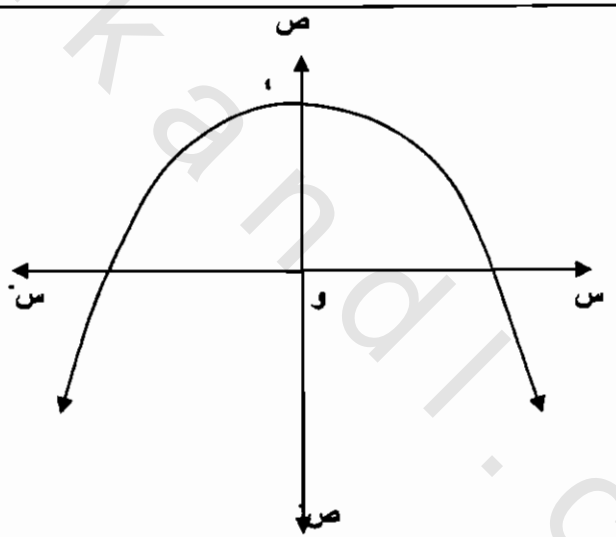


(٢)

obeikandl.com



(٣)



(٤)

٢) أوجد المجال والمدى للدوال الآتية :-

أ) د(س) = ١ ب) د(س) = -٣

ج) د(س) = ٢ عندما س [-٣ ، ٤ [

د) د(س) = { ٢ عندما س ≤ ٠ ، -٥ عندما س > ٠ }

٣) أرسم الدوال الآتية وأوجد من الرسم المجال والمدى

أ) د(س) = ٢س+١ ب) د(س) = ٣-٤ س

ج) د(س) = { س+١ عندما س ≤ ٢ ، ٢ - س عندما س > ٢ }

٤) أرسم الدوال الآتية ومن الرسم أوجد المجال والمدى

أ) د(س) = س ب) د(س) = - س

٥) أرسم الدوال الآتية وأوجد المجال والمدى

أ) د(س) = س^{٢} ب) د(س) = -س^{٢}

ج) د(س) = س^{٢} – ٥ س + ٦

٦) إذا كانت د : { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فى ح [٢ ، ١١]

، د(س) = س^{٢} + ٢ اوجد مدى هذه الدالة وارسم الشكل البيانى

٧) إذا كانت د : [- ١ ، ٥] ⟵ ح

، د (س) = { ٤ – س عندما -١ ≤ س < ٢ ، س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ }

اوجد كل من د (-١) ، د (٠) ، د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٥)

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم اوجد المدى

٨) إذا كانت د (س) = { ٢س عندما س < ٢ ، س + ٢ عندما س ≥ ٢ }

أوجد د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، د (١) ، د (٠) ، د (-١) د (-٤)

وارسم الشكل وأوجد المدى

obeikandi.com

٩) إذا كانت

د (س) = { س + ٢ عندما س > ٠ ؛ ١- عنما س < ٠

ارسم الشكل وأوجد المجال والمدى

١٠)ارسم منحنى الدالة

د (س) = { س٢ عندما س ∈ [٠ ، ٢] ؛ س + ٢ عندما س ∈] ٢ ، ٥]

١١)ارسم الدالة

د (س) = { س عندما س ∈ [٠ ، ٣] ؛ ٣ عندما س ∈] ٣ ، ٦ [؛ ٩ ـ س عندما س ∈ [٦ ، ٩]

ثم عين المجال والمدى

١٢)مثل بيانياً

د (س) = { ٢ س + ٣ عندما س < -١ ؛ ٢ عندما س ≤ -١

وعين مداها ثم أوجد د (-٣) ، د (-٢) ، د (٠) ، د (١)

١٣)مثل بيانياً

د (س) = { س- ٢ عندما س <٠ ؛ س + ٢ عندما س > ٠

وعين مداها

١٤)عين مجال د (ر) = $\sqrt{\text{س ـ ٣ + ٥}}$

١٥) عين مجال د (ر) = $\sqrt{\text{٥-س}}$ - $\sqrt{\text{س+ ١}}$ ٢

عين مجال د (ر) = $\frac{\sqrt{\text{س+٢}}}{\sqrt{\text{س-٢}}}$

١٧) إذا كانت

د (س) = { س - ١ عندما س > ١ ؛ س + ١ عندما س < ١

، ر (س) = س ، س ∈ ح

أوجد :

١) (د + ر) (س)

٢) (د – ر) (س)

ومثلهما بيانياً وأوجد مداها ثم أوجد (د + ر) (٣) ، (د – ر) (-٥)

وأوجد (د × ر) (س) ، $\frac{د}{ر}$ (س) ، $\frac{ر}{د}$ (س)

ثم اوجد (د × ر) (-١) ، $\frac{د}{ر}$ (-٤) ، $\frac{ر}{د}$ (٥)

إطرا د الدوال

المقصود ببحث اطراد الدالة : -

إيجاد الفترات الجزئية من المجال (محور السينات) التي تكون فيها الدالة

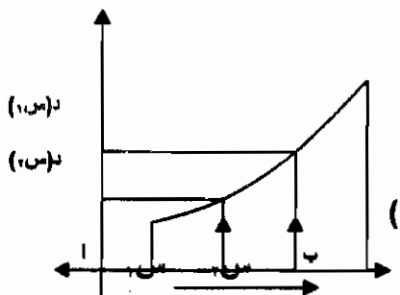
(متزايدة - متناقصة - ثابتة)

١) **الدالة المتزايدة : -**

(كلما زادت س زادت ص والعكس)

لكل س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب]

إذا كانت س١ < س٢ ← د (س١) < د (س٢)

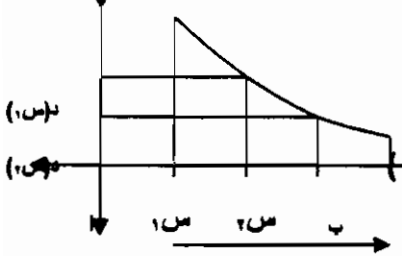


٢) **الدالة المتناقصة:-**

(كلما زادت س نقصت ص والعكس)

لكل س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب]

إذا كانت س١ < س٢ ← د (س١) > د (س٢)



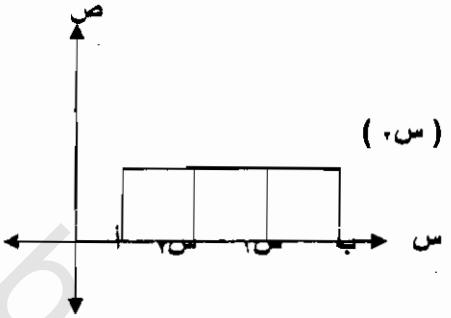
obeikandl.com

الدالة الثابتة :-

د (س) = جـ

لكل س١ ، س٢ ∈ [أ،ب]

إذا كانت س١ > س٢ ← د (س١) > د (س٢)



الخلاصة :-

١) د(س) تزايدية إذا كانت قيمة الدالة تتزايد بزيادة قيمة س

٢) د(س) تناقصية إذا كانت قيمة الدالة تتناقص بازدياد قيمة س

٣) د(س) ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما زادت قيمة س

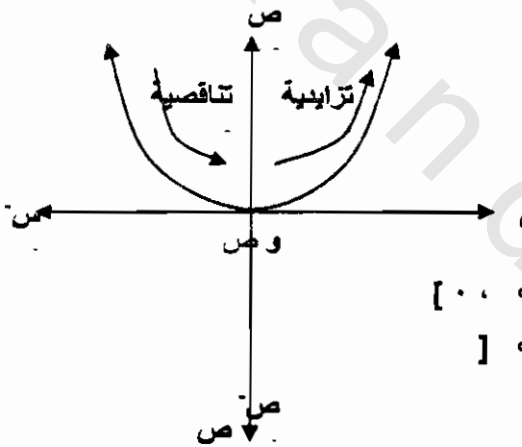
٤) الدالة الثابتة تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات

ملاحظات :-

١) د(س) = س^{٢}

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [



الاطراد :-

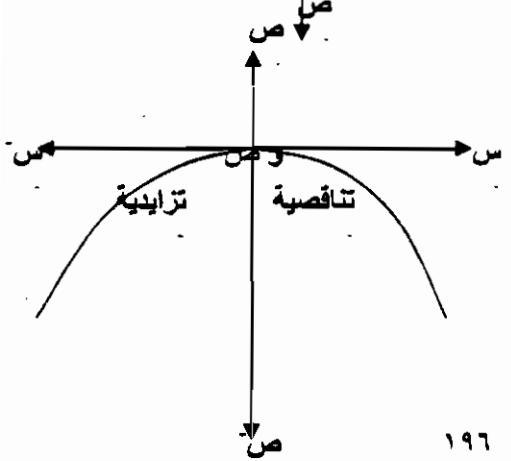
متناقصة عندما س ∈]- ∞ ، ٠]

متزايدة عندما س [٠ ، ∞ [

٢) د (س) = - س^{٢}

المجال = ح

المدى =] - ∞ ، ٠]



الأطراد :-

متناقصة عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

متزايدة عندما س ∈]- ∞ ، ٠]

obeikandl.com

مثال

مثل بيانيا :-

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{2}(س + 3) & \text{عندما } س \leq -1 \\ س^2 & \text{عندما } س > -1 \end{cases}$$

وعين مداها وأبحث أطرادها

الحل

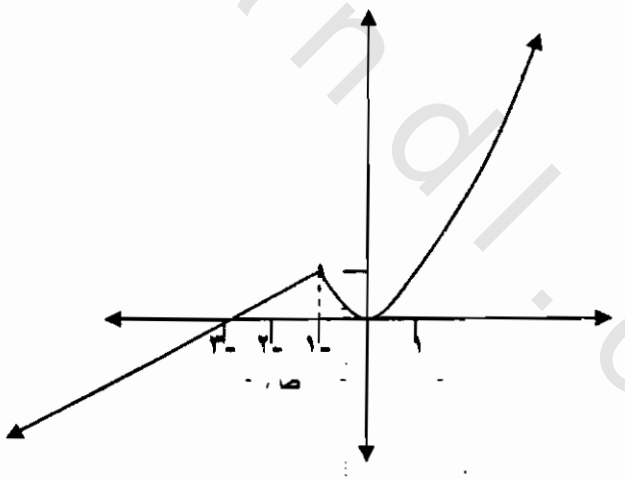
المجال = ح **المدى = ح**

الاطراد :-

متزايدة عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

متناقصة عندما س ∈ [-١ ، ٠ [

متزايدة عندما س ∈]- ∞ ، -١]



مثال

مثل بيانيا :-

د (س) = س^2 – ٣س

س ∈ [-٣ ، ٢] وعين مداها وأبحث أطرادها

obeikandl.com

الحل

نوجد الرأس : :. س = $\frac{-ب}{2أ}$ = $\frac{3}{2}$

د($\frac{3}{2}$) = $\frac{9}{4}$ - $\frac{9}{2}$ = - $\frac{9}{4}$:. رأس المنحنى = ($\frac{3}{2}$ ، - $\frac{9}{4}$)

التقاطع مع محور السينات نضع د (س) = ٠

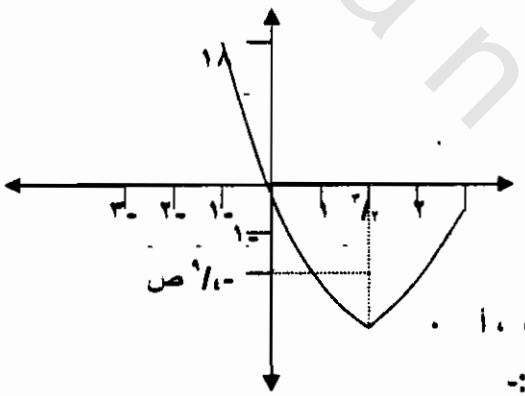
$س^2$ – ٣س = ٠ ← س (س – ٣) = ٠ :. س = ٠ ، ٣

المدى = [- $\frac{9}{4}$ ، ١٨]

الأطراد :-

متناقصة عندما س ∈]-٣ ، $\frac{3}{2}$ [

متزايدة عندما س ∈ [$\frac{3}{2}$ ، ٢]



ملاحظة

الدالة الخطية د (س) = أ س + ب ، أ ٠

تمثل بخط مستقيم ميلة (أ) إذا كان :-

(أ) أ > ٠ فإن الدالة متزايدة على مجالها

(ب) أ < ٠ فإن الدالة متناقصة على مجالها

مثال

مثل بيانيا :- د (س) = { س + ٢ عندما س ≥ ٢ ؛ - (س + ٢) عندما س < ٢ }

وعين مداها وأبحث أطرادها .

obeikandl.com

الحل

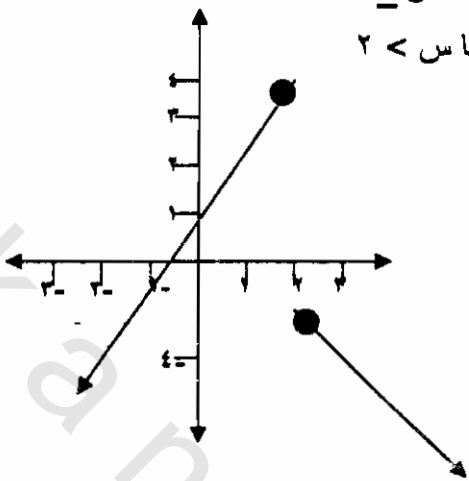
المجال =] - ∞ ، ٤]

المدى =] -∞ ، ٤]

الاطراد :-

الدالة تزايدية عندما س ≤ ٢

وتناقصية عندما س > ٢



ملاحظة :-

لبحث أطراد الدالة في فترة ما س باستخدام التعريف:-

١) نفرض س١ ، س٢ ∋ س حيث س١ < س٢

∴ س٢ – س١ = صفر ⟵ ١

٢) نوجد د(س٢) – د(س١) فى ابسط صورة ومن (١) نستنتج أحد الحالات الآتية:-

د(س٢) – د(س١) > صفر	د(س٢) – د(س١) < ٠	د(س٢) – د(س١) = ٠
∴ الدالة تزايدية	∴ الدالة متناقصة	∴ الدالة ثابتة

obeikandl.com

مثال

اذا كانت د : ح ← ح، حيث د (س) = ٢ س ـ١ إثبت ان الدالة تزايدية وحقق ذلك من التمثيل البيانى

الحـــل

نفرض ان س ١ ، س٢ ∈ ح ، س٢ > س١ فإن س٢ - س١ > ٠

د (س٢) = ٢ س٢ ـ ١ ، د (س١) = ٢ س١ ـ١

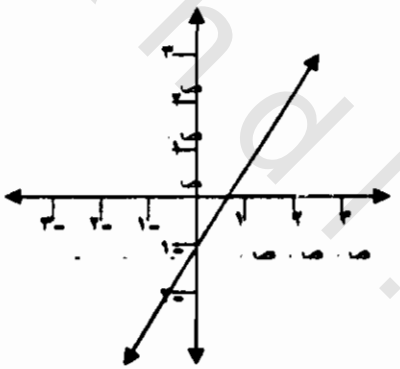
د(س٢) ـ د(س١)= ٢ س٢ ـ١ ـ (٢ س١ ـ١) =٢ س٢ ـ١ ـ٢ س١ +١

= ٢ س٢ ـ٢ س١ = ٢ (س٢ ـ س١)> ٠ [نلاحظ ان الناتج موجب]

∴ د(س٢) > د(س١) الدالة تزايدية

س	٠	١	٢
د(س)	ـ١	١	٣

من الرسم يتضح ان الدالة د (س) تزايدية [كما زادت س زادت د (س)]



مثال

ابحث اطراد الدالة : د (س) = ٤ ـ ٣س

الحـــل

د (س٢) = ٤ ـ ٣س٢ ..... (١)

د (س١) = ـ٤ ± ٣ س ١ .....(٢) بطرح (١) ـ (٢) نجد ان

د (س٢) ـ د (س١) = ـ٣ س٢ + ٣ س١ = ـ ٣ (س ـ س) < ٠ [سالبة]

∴ د (س) دالة تناقصية

مثال :

ابحث اطراد الدالة : د (س) = ٢ س + ٣

الحـــل

نفرض ان س١ ، س٢ ∋ ح & س٢ > س١

د (س٢) = ٢ س٢ + ٣ ..... (١)

د (س ١)= ٢ س١ + ٣ ..... (٢) بطرح (١) - (٢) نجد ان

د (س) – د (س) = ٢س٢ – ٢س١ = ٢ (س٢ – س١) > ٠ [موجبة]

∴ د (س) دالة تزايدية

مثال

ابحث اطراد الدالة :-

$$\text{د (س)} = \begin{cases} \text{س} & : \text{س} \geq 0 \\ 0 & : \text{س} < 0 \end{cases} \quad ، \text{ر (س) = س}$$

الحـــل

$$\text{هـ (س)} = (\text{د} \times \text{ر})(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 & : \text{س} \geq 0 \\ 0 & : \text{س} < 0 \end{cases}$$

مجال هـ (س) = ح

هـ (س) س٢ فى [٠ ، ∞]

س ١ ، س ٢ ∋ [٠ ، ∞]

س٢ > س١

هـ (س٢) – هـ (س١) = س٢٢ – س١٢ > ٠

∴ هـ (س) تزايدية فى [٠ ، ∞]

هـ (س) =٠ في]-∞ ، ٠ [

وهي دالة ثابتة

أي ليست تزايدية ولا تناقصية

obeikandl.com

مثال

د : ح$_{\cdot}$ ← ح حيث ح = ح$_{\cdot}$ - { ٠ }

$$د(س) = \begin{cases} س + \frac{١}{س} & : س < ٠ \\ ر : ح \leftarrow ح \text{ حيث } ر(س) = س & \\ \frac{١}{س} & : س > ٠ \end{cases}$$

عين مجال (د × ر) (س) وأرسم الشكل البياني لها وأدرس أطرادها

الحل

$$هـ(س) = (د \times ر)(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & : س < ٠ \\ س & : س > ٠ \end{cases}$$

هـ (س) = س^{٢} + ١ فى] ٠ ، ∞ [هـ (س) = ١ فى] - ∞ ، ٠ [

س	(٠)	١	٢	٣	٠	١-
هـ (س)	(١)	٢	٥	١٠	١	١

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈] ٠ ، ∞ [& س$_{٢}$ > س$_{١}$

هـ (س$_{٢}$) – هـ (س$_{١}$) = $\frac{س_{٢}^{٢}}{٢}$ + ١ - $\frac{س_{١}^{٢}}{١}$ - ١

$= \frac{س_{٢}^{٢}}{٢} - \frac{س_{١}^{٢}}{١} > ٠$

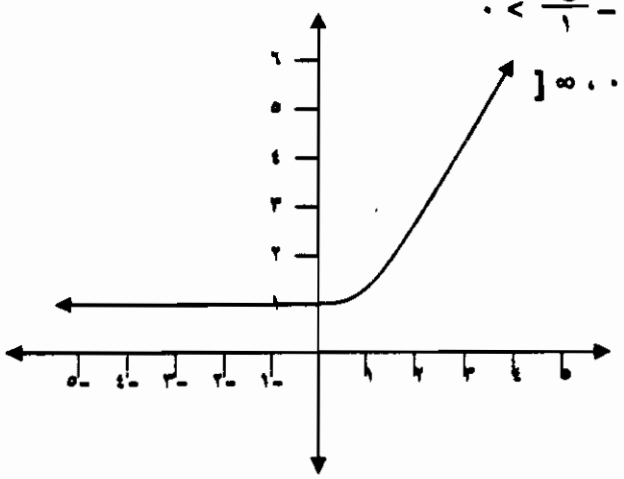
∴ هـ (س) تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

المجال = ح – { ٠ }

المدى =] ١ ، ∞ [

هـ(س) = ١ دالة ثابتة

ليست تزايدية ولا تناقصية

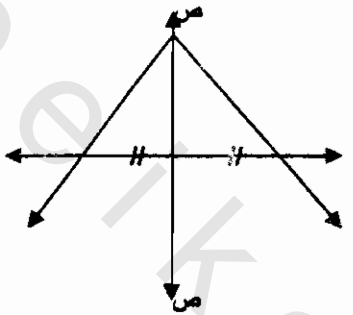


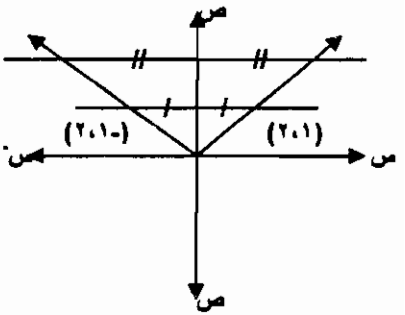
الدوال الزوجية والدوال الفردية

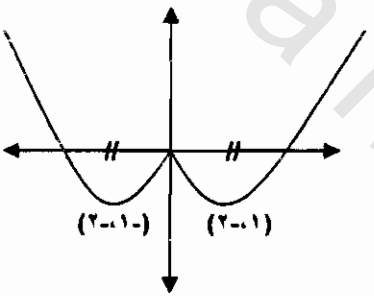
أولاً ..... بيانياً

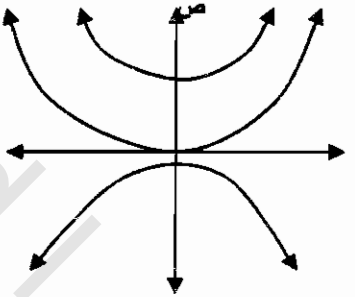
يقال للدالة انها زوجية إذا كان الشكل البيانى للدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادرات اى

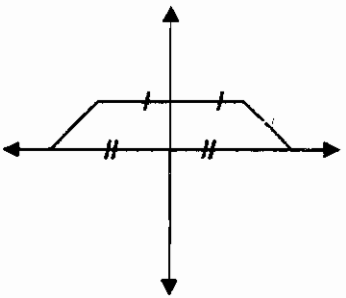
كل نقطة (س ، ص) ∈ د تناظر (- س ، ص) ∈ د

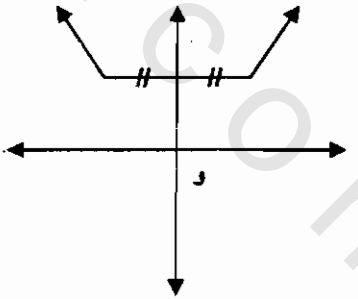






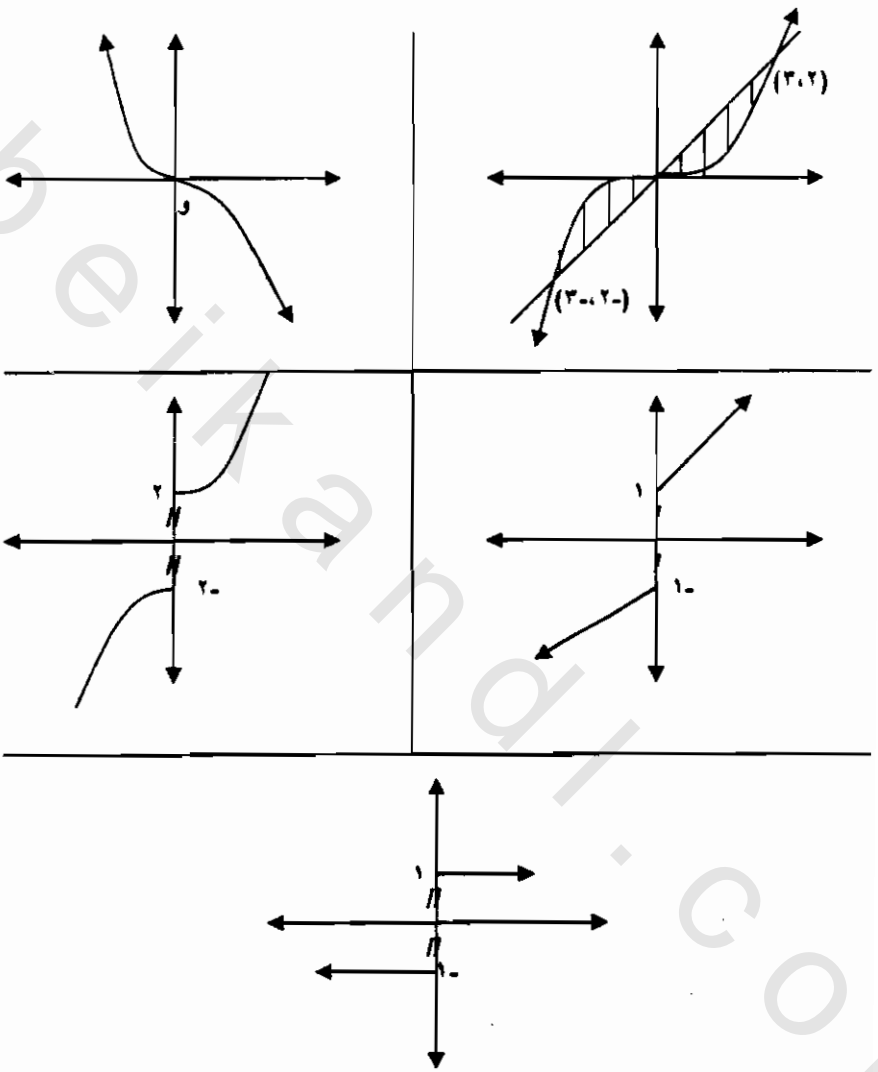






obeikandi.com

ويقال للدالة انها فردية اذا كان الشكل البياني متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (و) اى كل نقطة (س، ص) تناظر (-س ، -ص) ∈ د



ملاحظة هامة

ليس من الضروري ان تكون الدالة فردية او زوجية فمعظم الدوال ليست فردية وليست زوجية

مثال

مثل بيانيا

$$د(س) = \begin{cases} -٣س & \text{عندما } س \leq ٠ \\ ٣س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

وعين مداها وابحث اطردها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية

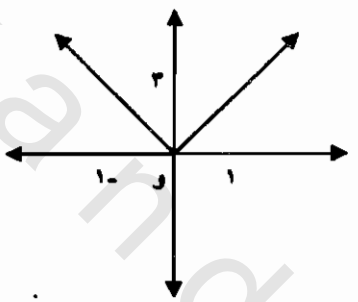
الحـــل

المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الاطراد :- متناقصة عندما س ∈] - ∞ ، ٠]

وتزايدية عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية من التماثل بالنسبة لمحور الصادات



مثال

مثل بيانيا

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

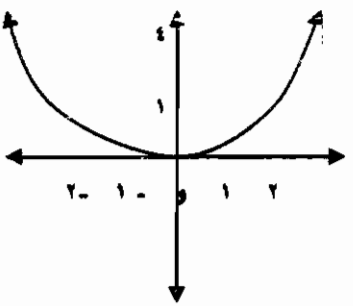
الحـــل

المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية

الأطراد : متناقصة عندما س ∈] -∞ ، ٠]

وتزايدية عندما س ∈ [٠ ، ∞ [



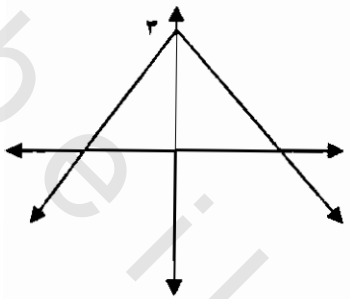
obeikandl.com

مثال

مثل بيانياً

د (س) = { س + ٣ عندما س < ٠ ؛ ـ س + ٣ عندما س ≥ ٠

الحـــل



المجال = ح

المدى =]ـ ∞ ، ٣]

النوع : زوجية

الأطراد : متذايدة عندما

س ∈]ـ∞ ، ٠]

ومتناقصة عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

مثال

مثل بيانياً

د (س) = { ١ـ ٢ س عندما س < ـ٣ ؛ ٣ عندما ـ٣ ≤ س ≤ ٢ ؛ ١/٢ (س + ٤) عندما س > ٢

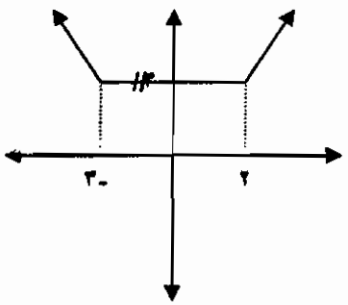
الحـــل

المجال = ح

المدى = [٣ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الأطراد :



متناقصة عندما س ∈]ـ ∞ ، ـ٣]

وثابتة عندما س ∈ [ـ٣ ، ٢]

ومتزايدة عندما س ∈ [٢ ، ∞ [

مثال

مثل بيانياً واوجد المدى والمجال ونوع الدالة

د (س) = { س^{٢} = ١ عندما س > ٠ ؛ ـ س^{٢} ـ ١ عندما س < ٠

الحل

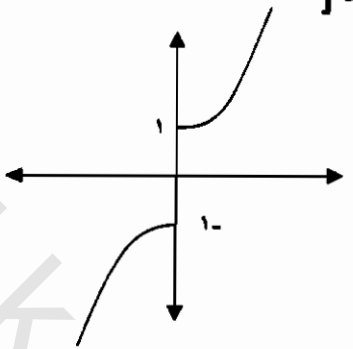
المجال = ح – { ٠ }　　المدى = ح – [-١ ، ١]

الأطراد :

متزايدة عندما س ∈] - ∞ ، ٠ - [

ومتزايدة عندما س∈ ٠ ، ∞ [

النوع : فردية



مثال

مثل بيانياً وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة

د (س) = { ٣ عندما س > ٠ ، ٣ عندما س < ٠ }

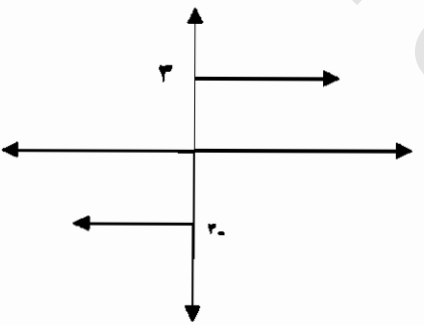
الحـــل

المجال = ح *　　المدى = { -٣ ، ٣ }

الأطراد :

ثابتة عندما س > ٠　　وثابتة عندما س < ٠

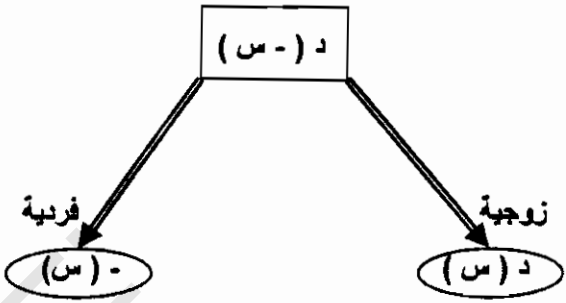
النوع : فردية



obeikandl.com

الدالة الزوجية والدالة الفردية

ثانياً : ..... جبرياً



إذا كانت : د (- س) = د (س) ⟵ :. الدالة زوجية

إذا كانت : د (-س) = - د (س) ⟵ :. الدالة فردية

إذا كانت : د (- س) ≠ ± د (س) ⟵ :. الدالة زوجية وليست فردية

ملاحظة

حا (- س) = - حا(س) ، حتا (- س) = حتا س ، طا (- س) = - طا س

ملاحظة

إذا رمزنا للدالة الزوجية بالرمز + والفردية بالرمز -

أ) حاصل ضرب دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

ب) حاصل ضرب دالتين فرديتين يكون دالة زوجية

ج) حاص ضرب دالتين احدهما زوجية وألأخرى فردية يكون دالة فردية

د) حاصل جمع دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

هـ) حاصل جمع دالتين فرديتين يكون دالة فردية

و) حاصل جمع دالتين احدهما فردية والأخرى زوجية يكون دالة ليست زوجية وليست فردية

obeikandl.com

الخلاصة

الدالة الزوجية	الدالة الفردية
بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة لمحور الصادات	بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة لنقطه الأصل (و)
جبرياً د (س) = د (س)	جبرياً : د (-س) < - د(س)

استنتاج هام

١- فردي√دالة فردية = دالة فردية

٢- زوجي√دالة فردية = ليست فردية ولا زوجية

٣- فردي او زوجي√دالة زوجية = دالة زوجية

٤- من الدوال الزوجية

حتا س ، قا س ، ا س ا ، س^{ن} حيث ن زوجي والدالة الثابتة

مثال

بين نوع الدالة

ص = $\sqrt[٧]{\text{س}^{٢} + \text{حتا } ٥\text{ س} + ٩}$

الحل

∵ ما تحت الجذر دالة زوجية ، الجذر فردي

∴ الدالة زوجية

مثال

بين نوع الدالة

ص = $\sqrt[٦]{-٥\text{س}^{٣} - \text{س}}$

الحل

∵ ما تحت الجذر دالة فردية ، الجذر زوجية

∴ الدالة ليست فردية ولا زوجية

obeikandl.com

مثال

بين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية

١) د(س) = ٧

الحل

∵ د (- س) = ٧

∴ د (- س) = د (س) **زوجي**

٢) د(س) = $س^{٦}$ + $س^{٢}$ + ١

الحل

د(س) = (- س)^{٦} + (- س)^{٢} + ١

= $س^{٦}$ + $س^{٢}$ +١

= د(س) **زوجية**

د (س) = $٥^{س}$ + $٥^{-س}$

٣)

الحل

د(- س) = $٥^{س}$ + $٥^{-س}$

∵ عملية الجمع عملية تبادلية

∴ د (- س) = د (س) **زوجي**

٤) د(س) = $\frac{٣}{٣^{س}}$ ÷ ٣ × $٣^{س}$

الحل

د(س) = ٣ × $٣^{-س-٣}$ + ٣ × $٣^{س}$

د(س) = ٣ × $٣^{س-٣}$ + ٣ × $٣^{-س+٣}$

∴ الدالة **زوجية**

٥) د(س) = س جا س

obeikandl.com

الحل

د(- س) = (- س) × حا (- س)

= - س × - حا س

= س حا س = د (س)

∴ الدالة زوجية

٦) د (س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{طاس}}{\text{قاس} + ١}$

الحل

د(- س) = $\frac{(-\text{س})^{٣} \times \text{طا}(-\text{س})}{\text{قا}(-\text{س}) + ١}$

د(- س) = $\frac{\text{س}^{٣} \times - \text{طاس}}{\text{قاس} + ١}$

د(-س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{طاس}}{\text{قاس} + ١}$

= د(س) الدالة زوجية

٧) د(س) = (حا٢س – حا ٥ س)^{٢}

الحل

د(-س) = (- حا ٢ س + حا ٥ س)^{٢}

= (- ١)^{٢} [حا ٢ س – حا ٥ س = د(س) الدالة زوجية

٨) د(س) = ٣ س (س - $\frac{١}{\text{س}}$)^{٥}

الحل

د(- س) = - ٣ س (- س + $\frac{١}{\text{س}}$)^{٥}

= - ٣ س ×(-١)^{٥} [- س + $\frac{١}{\text{س}}$]^{٥}

= د(س) الدالة زوجية

obeikandl.com

د(س) = (س^{٣} – ٢ س – ١) (س^{٣} – ٢ س + ١)

الحل

د(- س)= (- س^{٣} +٢ س – ١) (- س^{٣} + ٢ س + ١)

د(- س)= (-١) (س^{٣} – ٢ س – ١) × (-١) (س^{٣} – ٢ س - ١)

= (س^{٣} – ٢ س – ١) (س^{٣} – ٢ س - ١)

∴ عملية الضرب عملية تبادلية

د(س) الدالة زوجية

٩) د(س) = س حتا س

الحل

د(- س) = - س حتا(- س)

= س حتا س

= -(س حتا س)

= - د (س)

الدالة فردية

٩) د(س) = س^{٣} – ٥ س

الحل

د(- س) = - س^{٣} + ٥ س

= - (س^{٣} – ٥ س)

= - د (س)

الدالة فردية

١٠)د (س) = $\frac{\text{س} \times \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}+١}$

الحل

د (- س) = $\frac{-\text{س} \times \text{جتاس}}{\text{س}^{٢}+١}$

obeikandl.com

$$= -\left(\frac{\text{س} \times \text{جتا س}}{\text{س}^2 + 1}\right) \quad = -\text{د}(\text{س}) \text{ فردية}$$

١١) د(س) = $7^{-\text{س}} - 7^{\text{س}}$

الحل

د(- س) = $7^{-(-\text{س})} - 7^{-\text{س}}$

= - ($7^{-\text{س}} - 7^{\text{س}}$)

= - د(س)

الدالة فردية

١٢) د(س) = $\frac{\sqrt[3]{\text{س} + \text{طاس}}}{\text{س}^3}$

الحل

د(- س) = $\frac{\sqrt[3]{-\text{س} + \text{طاس}}}{-\text{س}^3}$

= $-\left(\frac{\sqrt[3]{\text{س} + \text{طاس}}}{\text{س}^3}\right)$

= د (س) زوجية

د (س) = $\left(\frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^3}\right)^3$

الحل

د(- س) = $\left(\frac{-2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^3}\right)^3$

= $(-1)^3 \left(\frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^3}\right)^3$

= $-\left(\frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^3}\right)^3$

obeikandl.com

= - د(س) فردية

١٣)د (س) = س^{٢} + س

الحل

د (- س) = س^{٢} - س

= - (- س^{٢} + س)

≠ ± د (س) ليست فردية أو زوجية

١٤)د(س) = س قتا س + س^{٥}

الحل

د(- س) = - س × - قتا س - س^{٥}

= س قتا س - س^{٥}

= - (- س قتا س + س^{٥})

≠ ± د (س) ليست فردية أو زوجية

تمرين (١٣)

على اطراد الدوال والدوال الزوجية والفردية

١) مثل بيانياً منحنى د (س) = { ٢ س – ٣ ، س ≤ ٠ ؛ ٢ س – ٣ ، س > ٠ }

ومن الرسم عين نوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

٢) ارسم الشكل البياني للدالة د (س) = { ٣ - س ، س < ٣ ؛ س – ٣ ، س ≥ ٣ }

ومن الرسم استنتج

الأطراد والمدى ونوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

obeikandl.com

٣) مثل بيانياً الدالة الآتية ثم وضح نوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية وأطرادها

$$د(س) = \begin{cases} -٣ & ، س \geq ٠ \\ س - ٣ & ، س < ٠ \end{cases}$$

٤) مثل بيانياً الدالة واوجد المجال والمدى وابحث أطرادها وبين نوع الدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & ، س \leq ٠ \\ -٢س - ٣ & ، س > ٠ \end{cases}$$

٥) مثل بيانياً واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & ، -١ < س < ١ \\ ٢س & ، س \leq ١ \end{cases}$$

٦) ارسم بيانياً واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث اطرادها

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٠ \\ -س^{٢} & ، س > ٠ \end{cases}$$

٧) ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث اطرادها

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & ، س \geq -٢ \\ -س & ، -٢ < س < ٢ \\ -٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

٨) اذا كانت د : ح ← ح حيث ٣ د (- س) + د (س) = ٤ س^{٢} + ٢ س
اثبت ان د: فردية

٩) ارسم الدالة وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة زابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} س - ٢ & س \leq ١ \\ س + ٢ & س \geq -١ \end{cases}$$

obeikandl.com

١٠)ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١٢}{س+٢} & ، س \leq ٠ \\ \frac{١٢}{س-٢} & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

١١)ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ١ & ، س \leq ٠ \\ -س^{٢} - ٣س + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$$

ابحث نوع كلا من الدوال الأتية من حيث كونها زوجية او فردية او غير ذلك

١٢)د (س) = ٢س^{٤} + س^{٢} - ١

١٣) د (س) = ٣

١٤) د (س) = $\frac{س^{٢}+٩}{س^{٤}-٣}$

١٥)د (س) = س^{١٧} + ٧ س^{٥} + س

١٦) د (س) = (٣ - س)^{٢}

١٧)د (س) = س^{٢} – جا ٣ س

١٨)د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{س - جاس}}{س}$

١٩) د (س) = $\frac{٥}{٥ س}$ + ٥ × ٥^{س}

٢٠) د (س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$

obeikandl.com

٢١) د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٣}+\text{س}}$

٢٢) د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٣}+\text{س}}$

٢٣) د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}-٩}$

٢٤) د (س) = $\frac{١}{\text{س}+٣}$ + $\frac{١}{\text{س}-٣}$

٢٥) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}\text{حتا}٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+٥}$

٢٦) د(س) = $\frac{\text{س حتا}٣\text{س}}{\text{س}^{٢}+٥}$

٢٧) د(س) = $٥^{\text{س}} \ln ٥ - ٥^{-\text{س}}$

٢٨) د (س) = { س − ١ عندما س < ٠ ؛ س+١ عندما س > ٠ }

٢٩) د(س) = $\text{س}^{٢}$ + ط س

٣٠) د (س) = ٤ $\text{س}^{٢}$ + هـ$^{\text{س}}$

obeikandl.com

الدوال كثيرات الحدود والتمثيل البيانى لها

- **الصورة العامة للدوال كثيرة الحدود :**

د (س) = أ. + أ ١ س١ + أ ٢ س٢ + ...+ أ ن سنحيث أ ن ≠ ٠

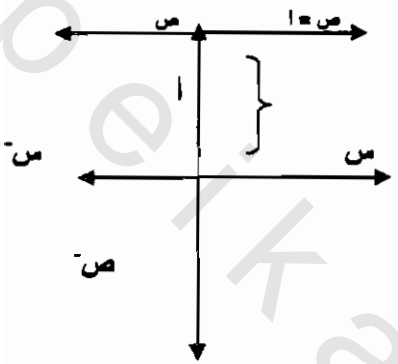
♦كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية من ح ..... لذك فهى دالة حقيقية

اولاً : الدالة الثابتة

الصورة العامة : د (س) = أ

لكل س ∈ ح . حيث أ عدد ثابت

- المجال ـــ ح ، المدى ـــ { أ }
- وهى دالة كثيرة حدود من الدرجة صفر



التمثيل البياني للدالة الثابتة :

تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ)

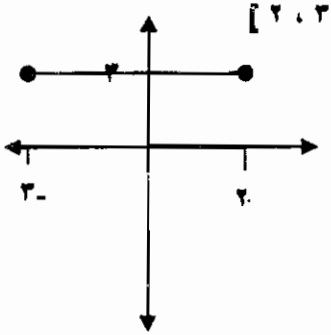
ملاحظة : .

معادلة المحور السينى ص = صفر

، معادلة المحور الصادى س = صفر

مثال :

مثل بيانياً د (س) = ٣ عندما س [- ٣ ، ٢]



الحـل

المجال = [-٣ ، ٢] ، المدى = { ٣ }

ملاحظة :

اذا كان المجال فترة محدودة [ ]

فإن الشكل البيانى يكون عبارة عن قطعة مستقيمة .

مثال :

مثل بيانياً د (س) = -٣ عندما س ≤ صفر

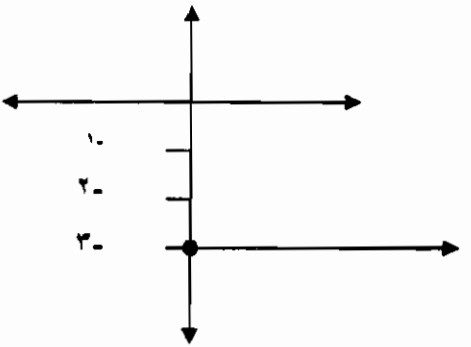
obeikandl.com

الحـــل

∴ المجال س ≥ صفر ـــ [٠ ، ∞ [

، المدى ـــ { -٣}

د (٠) = -٣ ، د (١) = -٣ ، د (٢) = -٣



ملاحظة :

اذا كان مجال الدالة متباينة (> أو <)

فإنه الشكل البياني سيكون عبارة عن شعاع

مثال

ارسم الدالة الآتية وأوجد المجال والمدى وابحث الأطراد

ونوع الدالة .

د (س) = { ١ عندما س > ٠ ، -١ عندما س < ٠ }

الحـــل

المجال ـــ ح ـ { صفر } **، المدى ـ { -١ ، ١ }**

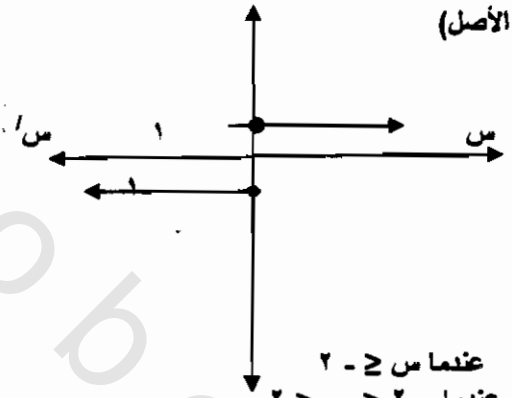
عندما س > صفر	عندما س < صفر
د (٠) = ١	د (٠) = -١
د (١) = ١	د (-١) = -١
د (٢) = ١	د (-٢) = -١

obeikandl.com

النوع ـــــ فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

الأطراد ـــــ عندما س > ٠ ثابتة

، عندما س < ٠ ثابتة



مثال

: مثل بيانياً الدالة د [-٤ ، ٤] ـــ ح

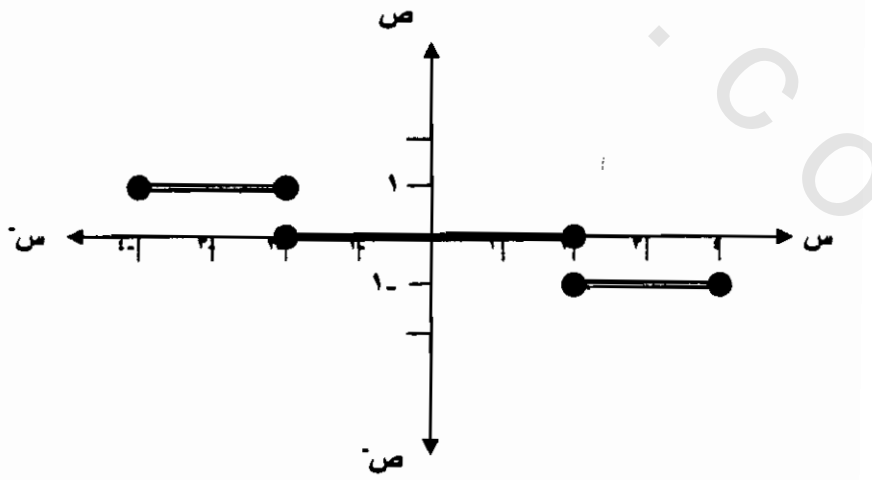
د (س) = { ١ عندما س ≥ -٢ ؛ صفر عندما -٢ < س < ٢ ؛ -١ عندما س ≤ ٢ }

الحـــل

مجال القاعدة الثالثة | مجال القاعدة الثانية | مجال القاعدة الأولى

∴ المجال = [-٤ ، ٤] ، المدى = { ١ ، صفر ، -١ }

عندما س ≥ -٢	عندما -٢ < س < ٢	عندما س ≤ ٢
المجال [-٤ ، -٢]	المجال =] -٢ ، ٢ [	المجال = [٢ ، ٤]
د (-٢) = ١	د (-٢) = صفر	د (٢) = -١
د (-٤) = ١	د (٢) = صفر	د (٤) = -١



∴ المدى ← { ١ ، صفر ، -١ }

نوع الدالة ← ∴ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل ∴ فردية

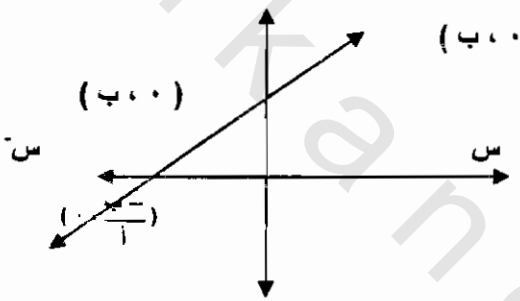
الاطراد ← [-٤ ، -٢] ثابتة ،] -٢ ، ٢ [، [٢ ، ٤] ثابتة

ثانياً :الدالـــــــة الخطيـــــــة

- الصورة العامة : د (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠
- التمثيل البياني للدالة الخطية :

تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) ص

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)



- المجال ← ح

المدى ← ح

مثال

مثل بيانياً د (س) = ٢ س + ٣ ، س ∈ ح

وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث الاطراد

الحـــل

∴ الدالة خطية ∴ المجال ← ح ، المدى ← ح

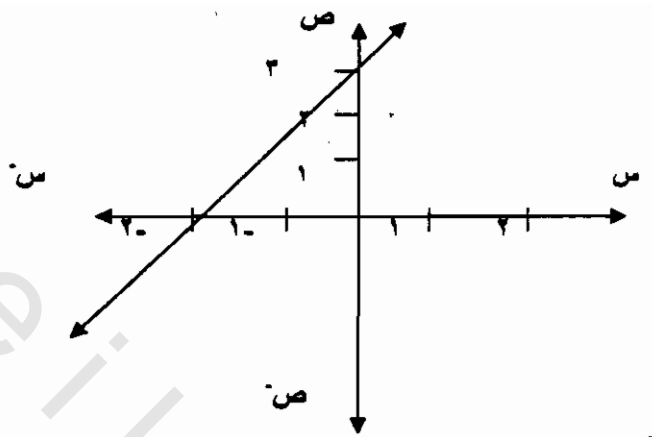
∴ ص = ٢ س + ٣

∴ تقطع محور السينات فى $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٣}{٢}$ ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

وتقطع محور الصادات فى (٠ ، ب) ← (٠ ، ٣)

الاطراد : متزايدة على مجالها (لأن أ > ٠)

النوع : ليست زوجية ولا فردية



ملاحظة :

١) الدالة الخطية د (س) = أ س + ب إذا كان :-

أ) أ > ٠ ← تكون الدالة تزايدية

ب) أ < ٠ ← تكزن الدالة تناقصية

٢) الدالة الخطية الخالية من الحد المطلق اى التى على الصورة د (س) = أ س هى دالة فردية

مثال

: - مثل بيانياً ٢ـ ٣ س ، س∈ ٠

واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

الحـــل

س	٠	١	٢
ص	٢	-١	-٤

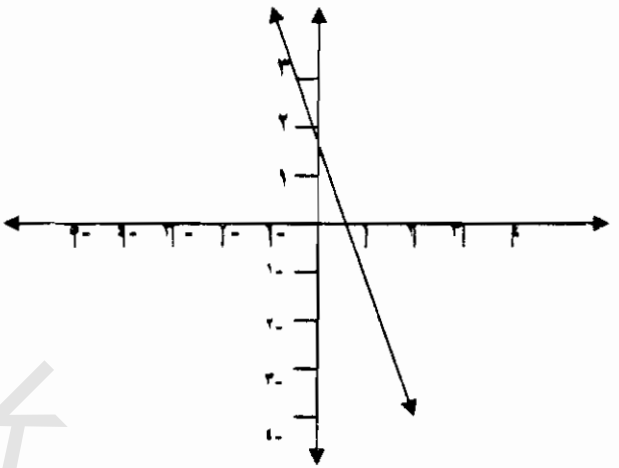
المجال ← [٠ ، ∞ [

المدى ←] -∞ ، ٢]

نوع الدالة ← ليست زوجية ولا فردية

أطراد الزاوية ← معامل س سالب :. الدالة متناقصة

obeikandl.com



مثال

مثل بيانيا :-

$$د(س) = \begin{cases} س+٢ & \text{حيث } س \in [-٢ ، ٣] \\ ٨- س & \text{حيث } س \in]٣ ، ٧] \end{cases}$$

وعين المجال والمدى وأبحث الأطراد ونوع الدالة

الحل

د (س) = س+٢ ، س ∈ [-٢ ، ٣]	د (س) = ٨ – س ، س∈] ٣، ٧]
د (-٢) = -٢ + ٢ = ٠	د (٣) = ٨ – ٣ = ٥
د (٣) = ٣ + ٢ = ٥	د (٧) = ٨ – ٧ = ١

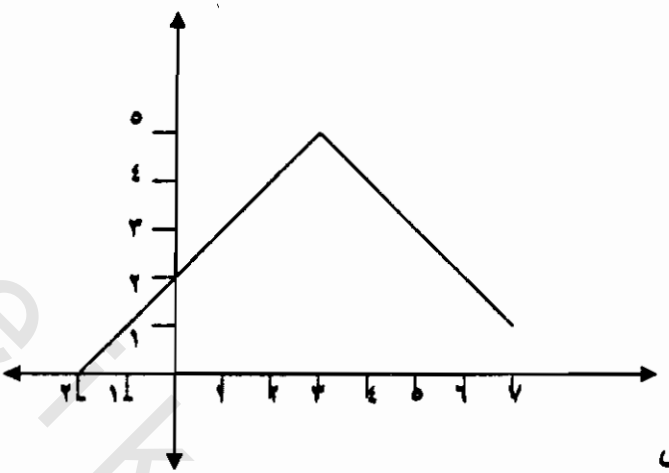
المجال (من رأس المسألة) [-٢ ، ٧]

المدى (من الرسم) [٠ ، ٥]

الأطراد : متزايدة فى [-٢ ، ٣] لأن معامل س موجب

متناقصة فى] ٣ ، ٧] لأن معامل س سالب

obeikandl.com

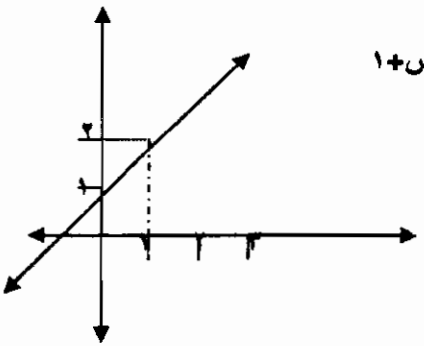


مثال

:- أذا كان د (س) = $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ أرسم الدالة

وأوجد المجال والمدى وأبحث أطرادها ونوعها .

الحل



:. د(س) = $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ = $\frac{(س-١)(س+١)}{س-١}$ = س+١

ولكن المجال = ح – { ١ }

المدى = ح – { ٢ }

:.معامل س موجب فهى متزايدة

ونوعها : ليست فردية ولا زوجية

مثال

أرسم الدالة

$$د(س) = \begin{cases} س+٥ & ، س \in [-٥ ، -٢] \\ ٣ & ، س \in]-٢ ، ٢[\\ ٥-س & ، س \in [٢ ، ٥] \end{cases}$$

وعين المجال والمدى وأبحث نوعها و أطرادها

الحل

القاعدة الأولى			القاعدة الثانية			القاعدة الثالثة		
ص=س+٥، س∈[-٥، -٢]			ص=٣ ، س∈]-٢، ٢[			ص= ٥- س، س∈ [٢ ، ٥]		
س	-٥	-٢	س	-٢	٢	س	٢	٥
ص	صفر	٣	ص	٣	٣	ص	٣	صفر

المدى (من الرسم) [٠ ، ٣]

المجال [-٥ ، ٥]

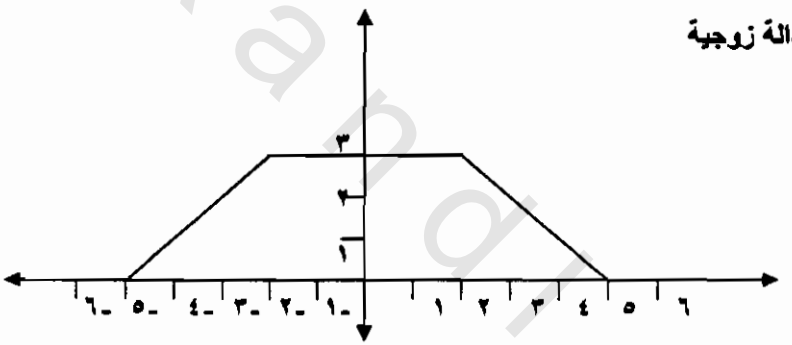
الأطراد : متزايدة فى [-٥ ، -٢]

ثابتة فى] -٢ ، ٢ [

ومتناقصة فى [٢ ، ٥]

النوع : حيث انها متماثلة حول محور الصادات

∴ الدالة زوجية



تمارين (١٤)

مثل بيانياً الدوال الآتية

١) د (س) = -١ : س < ٠ ، ٢ : س ≥ ٠

٢) د (س) = -٢ : -٣ < س < ١ ، ٢ : ١ < س < ٤

٣) د (س) = { ٤ : س > ٢ ، ٢- س : س < ٢ }

٤) د (س) = { ٤ س > ٠ ، س + ٤ س < ٠ }

٥) د (س) = { س – ٢ : س > ٢ ، ٢ – س : س < ٢ }

٦) د (س) = { س : س < ١ ، ٣ س – ٢ : س > ١ }

٧) ٢ د (س) = { س-١ : س < ٣ ، ٥ : س > ٣ }

٨) اذا كانت د : [-٢ ، ٤] – ح

حيث د (س) = { ٢ + س–٢ < س < ٢ ، ٢س ٢ < س < ٤ }

٩) د (س) = { ٤ – ٢ س : س > ٠ ، ٤ + ٢س : س < ٠ }

١٠) د (س) = { س+ ٢ : س < ٠ ، ٣ : ٠< س < ٢ ، ٢س –١ : س > ٢ }

١١) د (س) = { ٢ –س٢ : س < صفر ، - ٣ س + ٢ : س > ٠ }

obeikandl.com

تعريف مقياس العدد الحقيقي (القيمة المطلقة) ـ

يرمز لها |س| ويقرأ مقياس العدد الحقيقي ومعناه اكبر العددين (س، - س)

∴ مقياس (العدد) = { نفس العدد اذا كان موجباً او = ٠ ، -العدد اذا كان العدد سالباً

اى ان |س| = { س : س ≥ ٠ ، - س : س < ٠

∴ |-١٥| = ٥ ، |١٥١|=٥ ، |١٢,٤١| = ٢,٤ ، |-١,٥|=|١,٥| ، |١٠,٧١|=|٠,٧| ، |٠١٠|=٠

ملاحظة

|س| = [س] عندما س ∈ ط ={ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... }

خواص مقياس العدد الحقيقى

١) |س| > ٠ ، |س| = ٠ ↔ س= ٠

∴ مقياس العدد هو عدد غير سالب

مثال

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية : ـ

أ) |س| = -٢

ب) |س+١١+ ٥ = -

الحـــل

أ) |س| = -٢ مرفوض لأن |س| ≥ ٠

ب) |س+١١ + ٥ = -١ ∴ |س+١١ = -٥ ـ١ ∴ |س+١١ = -٦ مرفوض

obeikandl.com

مثال

عين مجال د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{اس}+1}$

الحـــل

∴ المجال = ح _ { اصفار المقام }

∴ اس+١ = ٠ ∴ س + ١ = ٠ ∴ س = -١

∴ المجال = ح _ { -١}

٢) |س| = |- س|

مثلاً : |١| = |-١| = ١

|س-١| = |-(س-١)|، |س-أ| = |أ - س|

مثال

عين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = س^{3} + $\frac{\text{اس}}{\text{س}^{2}+1}$

٢) د (س) = $\frac{\text{حا}^{2}\text{س}}{\text{اس}-1}$

الحـــل

د (س) = س^{3} + $\frac{\text{اس}}{\text{س}^{2}+1}$

∴ د(- س) = $(-\text{س})^{3}$ + $\frac{\text{اس}}{\text{س}^{2}+1}$ = $-\text{س}^{3}$ + $\frac{\text{اس}}{\text{س}^{2}+1}$

= - د (س) ∴ الدالة فردية

٢) د (س) = $\frac{\text{حا}^{2}\text{س}}{\text{اس}-1}$ د (- س) = $\frac{\text{حا}^{2}\text{س}}{\text{اس}-1}$ = د(س) الدالة زوجية

obeikandl.com

٣) إذا كان |س| = أ ⟵ س = ± أ

مثال

حل المعادلات الآتية : .

١) |س| = ٣ ٢) اس+١١ =٥

الحـــل

١) |س| =٣ ⟵ س =±٣

٢) اس+١١ = ٥

∴ س + ١ = ± ٥

∴ س + ١ = ٥ ⟵ س = ٤

أ ، س + ١ = -٥ ⟵ س = - ٦

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، -٦ }

٤) إذا كان |س| = |ص| فان س = ± ص

مثال : حل المعادلة اس-١١ = اس+١٣

الحـل

∴ س - ١ = ± (س + ٣)

∴ س – ١ = س + ٣ ⟵ س – ١ = - س – ٣

∴ – ١ = ٣ مرفوض ⟵ ٢ س = -١ ∴ س = -١/٢

∴ مجموعة الحـــل = { -١/٢ }

٥) |س| × |ص| = |س . ص|

مثلاً : |٣١| × |-١٤| = |-١١٢| = ١٢

|-٨س| = |-١٨| × |س| = ٨ |س|

obeikandl.com

٦) |س + ص| ≤ |س| + |ص|

ويحدث التساوى فى حالة س ، ص لهما نفس الأشارة

١١+١٦= ١١١ + ١٦١ ، ١-٤-١٣= ١-١٤+ ١-١٣

، ١٧١-١٤ < ١٧١ + ١-١٤

٧) $\sqrt{س^{٢}}$ = |س|

$\sqrt{٧^{٢}}$ =١٧١= ٧ ، $\sqrt{س^{٦}}$ = س٣

٨) اس ٢١= س٢

مثلا : اس١٢=اس ٢١=س٢

مثال

حل المعادلات الآتية : -

١) س٢ - ٤ |س| + ٣ = ٠

٢) |س| + ٢ س ٢ =٣

٣) (اس-١١)٢ + اس-١١ = ١٢

٤) |س| (|س|-٥) = ٢٤

الحل

١) (ا س ا)٢ - ٤ |س| + ٣ = ٠

∴ (|س| - ٣)(|س| - ١) = ٠

ا س ا = ٣ ← س=±٣ ، ا س ا =١ س=±١

مجموعة الحل = { -١، ١ ، -٣ ، ٣ }

٢) |س| + ٢ س ٢ =٣ نعيد الترتيب

ا س ا٢ + ا س ا-٣ =٠ (٢ ا س ا+٣)(ا س ا-١)=٠

٢ ا س ا = -٣ وهذا مرفوض

obeikandl.com

أ. |س| = ١ س= ±١

مجموعة الحل = { ١ ، -١ }

٣) (اس-١١)^{٢} + اس-١١ = ١٢

(اس-١١+٤)(اس-١١-٣)=٠

اس-١١ = -٤ مرفوض

اس-١١=٣ س= -٤

اس-١١=-٣ س=٢

مجموعة الحل = { -٢ ، ٤ }

٤) |س| (|س|-٥) = ٢٤

باستخدام خاصية التوزيع (ا س ا)^{٢} – ٥|س ا – ٢٤ =٠

(|س|-٨) (|س| + ٣) = ٠

|س| = ٨ |س| = ± ٨

مجموعة الحل = { -٨ ، ٨ }

تعريف

$$|س| = \begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

مثلا

$$|س^{٣}| \begin{cases} س^{٣} & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^{٣} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

بينما ا س^{٢} ا = س^{٢} ، ا س^{٤} ا = س^{٤} ، .....

تعريف

إذا كان أ ∈ ح$^{+}$ ، ب ∈ ح فإن

obeikandi.com

$$|أ\cdot س + ب| = \begin{cases} أس + ب & \text{عندما } س \geq \frac{-ب}{أ} \\ -أس - ب & \text{عندما } س < \frac{-ب}{أ} \end{cases}$$

فمثلا :

$$|س+٣| = \begin{cases} س+٣ & \text{عندما } س \geq -٣ \\ -س-٣ & \text{عندما } س < -٣ \end{cases}$$

$$|٣س-٧| = \begin{cases} ٣س-٧ & \text{عندما } س \geq \frac{٧}{٣} \\ -٣س+٧ & \text{عندما } س < \frac{٧}{٣} \end{cases}$$

$$|٣س-٧|\cdot|-٣| = |٣س-٧| = \begin{cases} ٣س-٧ & \text{عندما } س \geq \frac{٧}{٣} \\ -٣س+٧ & \text{عندما } س < \frac{٧}{٣} \end{cases}$$

ملاحظات

(١) عند إعادة تعريف المقياس يجب أن يكون معامل س موجبا
(٢) يعاد التعريف في حالة وجود س خارج المقياس

مثال

حل المعادلة

$|س + ٤| + ٢س + ٥ = ٠$

الحل

$$\text{الايمن} = \begin{cases} س+٤+٢س+٥ & \text{عندما } س \geq -٤ \\ -س-٤+٢س+٥ & \text{عندما } س < -٤ \end{cases}$$

obeikandl.com

٣ س +٩	عندما س ≤ -٤
=	
س+١	عندما س< -٤

عندما س ≤ -٤	عندما س< -٤
٣ س +٩	س+=١ ٠
٣ س=-٩	- س=-١ </ -٤
س = -٣ >-٤	
مقبول	مرفوض

مثال

حل المعادلة

٣١س-١١=١٣-٤س

الحل

٣١س-١١+٤س-١٣=٠

الايمن =	٣س – ١ + ٤س -١٣	عندما س ≤ $\frac{١}{٣}$
	- ٣ س + ١ + ٤ س – ١٣	عندما س < $\frac{١}{٣}$
=	٧س -١٤	عندما س ≥ $\frac{١}{٣}$
	س- ١٢	عندما س< $\frac{١}{٣}$

٧س -١٤ =٠	س – ١٢ = ٠
٧ س = ١٤	س = ١٢ < $\frac{١}{٣}$
س= ٢ < $\frac{١}{٣}$	
مقبول	مرفوض

مجموعة الحل = { ٢ }

obeikandl.com

مثال

حل المعادلة ٢س | س-٢ | -٣ س +٦=٠

الحل

٢س | س-٢ | -٣ س +٦=٠

الايمن =

٢س^{٢} – ٤س – ٣ س + ٦	عندما س ≤ ٢
- ٢س^{٢} + ٤س – ٣ س + ٦	عندما س > ٢

=

٢س^{٢} – ٧ س + ٦	عندما س ≤ ٢
- ٢س^{٢} + س + ٦	عندما س >٢

عندما س ≤ ٢

٢ س^{٢} – ٧ س + ٦ =٠

(٢س – ٣) (س – ٢) =٠

س= $\frac{٣}{٢}$ مرفوضة س = ٢

عندما س > ٢

- ٢س^{٢} + س + ٦

(٢س + ٣) (س – ٢) =٠

س= $\frac{-٣}{٢}$ مرفوضة س = ٢

مجموعة الحل = { ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ }

مثال

حل المعادلة ٥ – ٣ | س- ٢ | = ٠

الحل

الايمن =

٥ – ٣ (س – ٢)	عندما س ≤ ٢
٥ – ٣ (- س + ٢)	عندما س > ٢

=

٥ – ٣ س + ٦	عندما س ≤ ٢
٥ + ٣ س – ٦	عندما س >٢

=

١١- ٣ س	عندما س ≤ ٢
٣ س – ١	عندما س >٢

obeikandl.com

عندما س ≤ ٢	عندما س > ٢
١١ ـ ٣ س = ٠	٣ ـ ١ = ٠
١١ = ٣ س	٣ س = ١
س = $\frac{١١}{٣}$ < ٢	س = $\frac{١}{٣}$ < ٢
مقبول	مقبول

مجموعة الحل = { $\frac{١١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

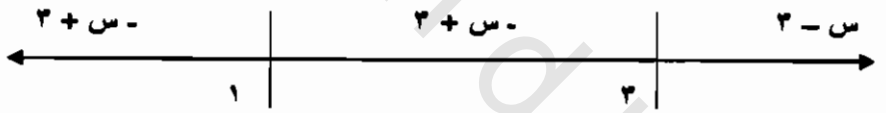
مثال

حل المعادلة

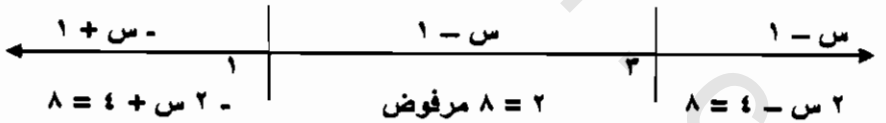
٣١- س ١ + اس-١١ = ٨

الحل

٣١- س ١ + اس-١١ = ٨



بالتجميع



٢ س ـ ٤ = ٨
٢ س = ١٢
س = ٦ > ٣
مقبول

٢ = ٨ مرفوض

- ٢ س + ٤ = ٨
- ٢ س = ٤
س = - ٢ < ١

مجموعة الحل = { ٦ ، -٢ }

obeikandi.com

نتيجة :-

إذا كان |س| < أ فإن ـ أ < س < أ

فمثلا |س| < ٣ ⟺ -٣ < س < ٣

|س| ≤ ٥ ⟺ ٥ ≤ س ≤ ٥

نتيجة :-

إذا كان |س| > أ فإن س > أ أ، س < -أ

فمثلا |س| > ١ ⟺ س > ١ أ ، س < -١

|س| ≤ ٣ ⟺ س ≤ ٣ أ، س ≥ -٣

س ∈ ح ـ [- ٣ ، ٣]

مثال

حل المتباينات الآتية

١) |س-١٢| ≤ ٣

٢) |س-١٢| ≥ ٣

٣) |٢س+١٤| > ١٠

٤) |٢س+١٤| < ١٠

obeikandl.com

الحل

ضع ± بدلا من | |

١) ± (س – ٢) ≤ ٣

س - ٢ ≤ ٣

س ≤ ٣ + ٢

س ≤ ٥

أو

س – ٢ ≥ -٣

س ≥ -٣ + ٢

س ≥ -١

س ∈ ح -] – ١ ، ٥ [

٣) ± (٢ س + ٤) > ١٠

٢س + ٤ > ١٠

٢س > ١٠ - ٤

٢س > ٦

س > ٣

أو

٢س + ٤ < -١٠

٢س < -١٠ - ٤

٢س < -١٤

س < - ٧

س ∈ ح – [– ٧ ، ٣]

علامة ≤ أو > يكون الحل هو الاتحاد

---

٢) ± (س – ٢) ≥ ٣

س - ٢ ≥ ٣

س ≥ ٣ + ٢

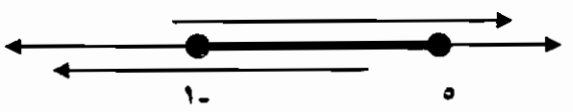
س ≥ ٥

أو

س – ٢ ≤ -٣

س ≤ -٣ + ٢

س ≤ -١

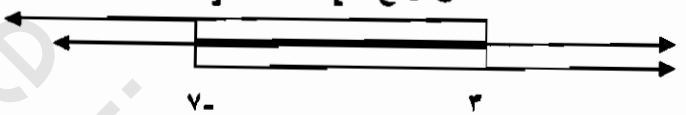


س ∈ [– ١ ، ٥]

± (٢ س + ٤) < ١٠

٢س + ٤ < ١٠	أو	٢س + ٤ >- ١٠
٢س < ١٠ - ٤		٢س >- ١٠ - ٤
٢س < ٦		٢س > -١٤
س < ٣		س > - ٧

س ∈ ح –] – ٧ ، ٣ [



علامة ≤أو < يكون الحل هو المشترك او التقاطع

التمثيل البياني لدالة المقياس

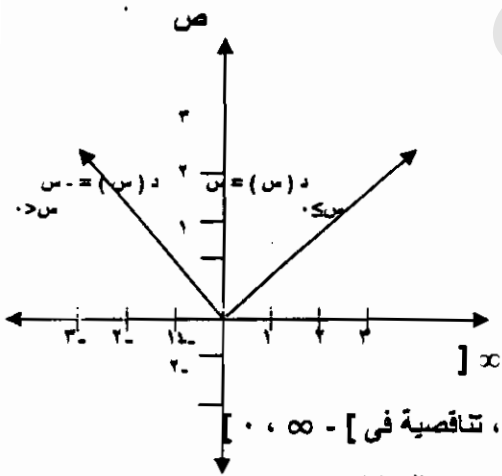
الحالة الأولى :

ارسم الشكل البياني للدالة د (س) = |س|

الحـــل

د (س) = { س : س ≥ ٠ ، - س : س < ٠

س	٠	١	٠	-١
د(س)	٠	١	٠	١



المجال — ح ، المدى — [٠ ، ∞ [

الاطراد : تزايدية فى [٠ ، ∞[، تناقصية فى] - ∞ ، ٠]

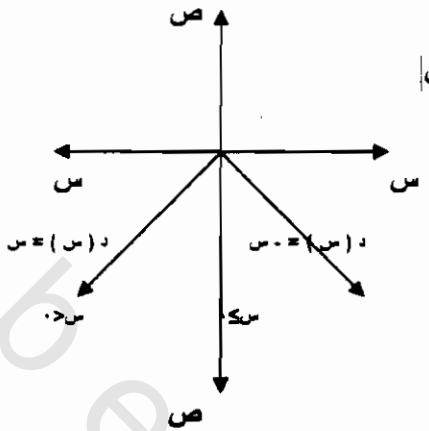
النوع : زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

بداية الشعاعين : (صفر ، صفر)

obeikandl.com

الحالة الثانية :

ارسم الشكل البياني لدالة د (س) = - |س|



الحل

د (س) = { - س ، س ≤ ٠ ؛ س ، س > ٠ }

المجال : ـ ح

المدى =] ∞ ، ٠]

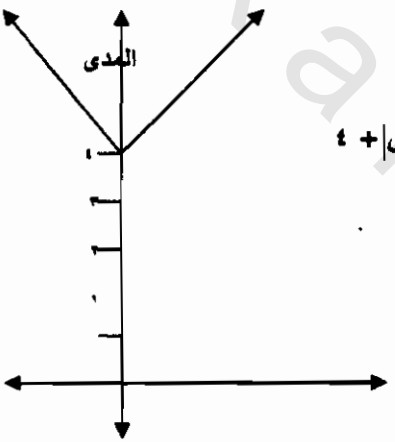
الأطراد : متزايدة عندما س ∈] -∞ ، ٠ [تناقصية عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية بداية الشعاعين (صفر ، صفر)

الحالة الثالثة :

|س| + ب (الإزاحة الصادية)

ارسم الشكل البياني للدالة : د (س) = |س| + ٤



الحل

س	٠	١	٢	٠	-١	-٢
د (س)	٤	٥	٦	٤	٥	٦

|س| = { س + ٤ : ≤ ٠ ؛ - س + ٤ : س > ٠ }

المجال = ح المدى= [٤ ، ∞ [

الدالة : زوجية ـ بداية الشعاعين (٠ ، ب) = (٠ ، ٤)

الدالة تزايدية في [٠ ، ∞ [ن تناقصية في] - ∞، ٠ [

الحالة الرابعة : -

- |س| + ب (الإزاحة الصادية)

obeikandl.com

ارسم الدالة د (س) = ٥ ـ ٢|س| ثم أوجد المدى والمجال

وألأطراد ونوع الدالة

الحـــل

٥ - ٢س

س	٠	١
ص	٥	٣

٥ + ٢س

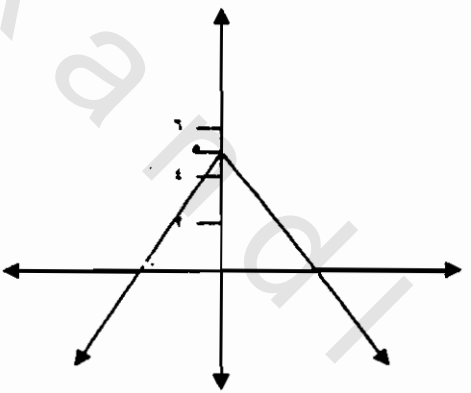
س	٠	١-
ص	٥	٣

المجال - س ح

المدى :] - ∞ ، ٥]

الأطراد : تزايدية س] -∞ ، ٠] وتناقصية س [٠ ، ∞ [

النوع ك زوجية :، بدية الشعاعين (٠ ، ٥)



الحالة الخامسة

د (س) =| أ س + ب |

مثل بيانيا د (س) = | ٢س -٣ |

الحـــل

د (س) = { ٢س ـ٣ عندما س ≤ ٣/٢ ؛ - ٢ س + ٣ عندما س > ٣/٢ }

obeikandl.com

بداية الشعاعين : ($\frac{ب}{أ}$ ، ٠)

الشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته س= $\frac{ب}{أ}$

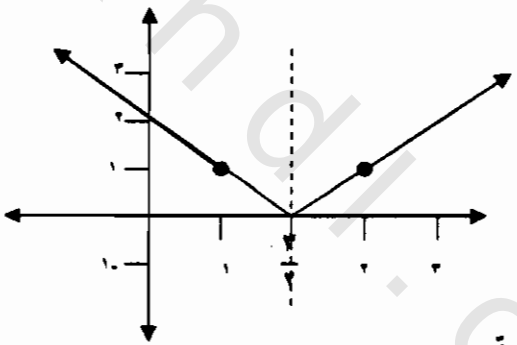
س	٢	١	٠
ص	١	١-	٣-

المجال = ح ، **المدى** = [٠ ، ∞ [

الأطراد : تناقصية عندما س ∈] - ∞ ، $\frac{٣}{٢}$] تزايدية عندما ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الشكل : متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته س = $\frac{٣}{٢}$



الحالة السادسة :

د (س) = ا س + ب ا

مثل بيانياً الدالة د (س) = ا س + ٢ ا

الحـل

س	١-	٢-	٣-
ص	١	٠	١

obeikandl.com

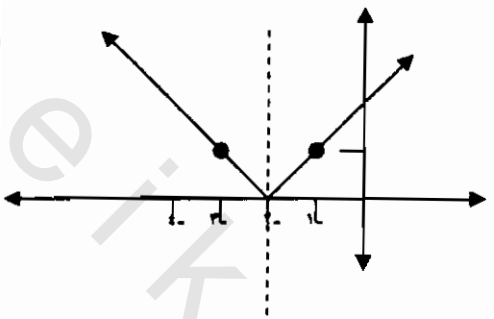
د (س) = { س+ ٢ ، - س + ٢

رأس الشعاعين ($\frac{ب}{أ}$ ، ٠) ، (-٢ ، ٠)

المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد تناقصية عندما س ∈]- ∞، - ٢ [تزايدية عندما س ∈]- ٢ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية ولا فردية



الحالة السابعة :

الإزاحة في اتجاه المحورين

د (س) = ا أس + ب ا + جـ حيث بداية الشعاعين

($\frac{-ب}{أ}$ ، جـ) والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذى معادلته س = $\frac{ب}{أ}$

مثال مثل بيانياً : -

د (س) = ا ٢ س -٥ ا + ١ وعين مداها وابحث أطرادها

الحـل

د (س) = { ٢س – ٥ + ١ عندما س ≥ $\frac{٥}{٢}$ ، - ٢ س + ٥ + ١ عندما س < $\frac{٥}{٢}$

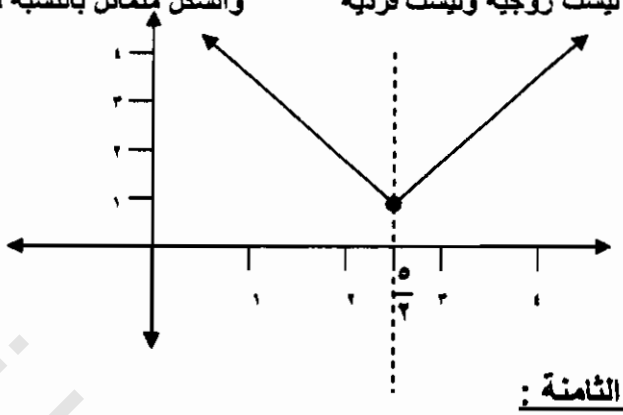
= { ٢س – ٤ : س ≥ $\frac{٥}{٢}$ ، -٢ س + ٦ س < $\frac{٥}{٢}$

المجال = ح المدى [١ ، ∞ [

obeikandi.com

الأطراد : متناقصة عندما س ∈] - ∞ ، $\frac{٥}{٢}$] متزايدة عندما س ∈ [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم س = $\frac{٥}{٢}$



الحالة الثامنة :

د (س) = |س + ب|

مثال

ارسم الدالة د (س) = - ١ |س + ٢| ١

ثم استنتج المجال : المدى ، وابحث الاطراد ونوع الدالة .

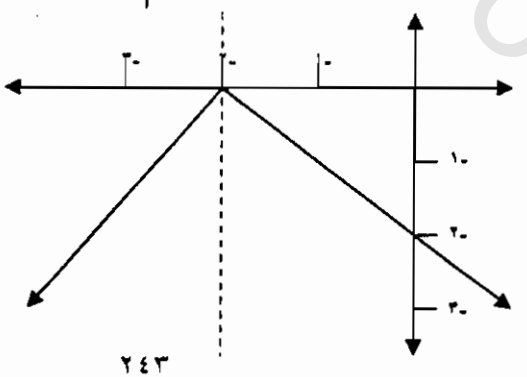
الحـــل

المجال = ح المدى =] - ∞ ، ٠]

الأطراد : تزايدية فى] - ∞ ، ٢] تناقصية فى [٢ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

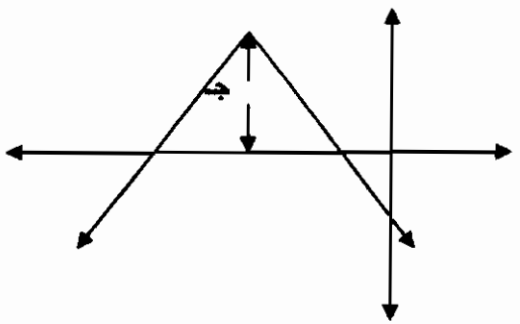
بداية الشعاعين (٢ ، ٠) حيث س = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٢}{١}$ = ٢



obeikandl.com

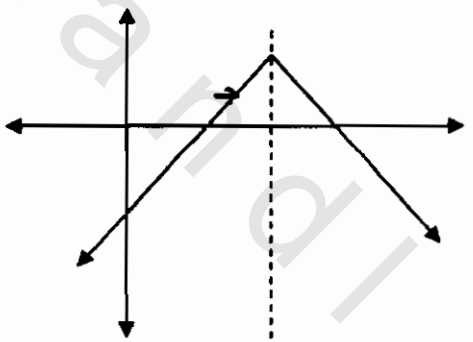
الحالة التاسعة :

د (س) = - |س + ب| + جـ



الحالة العاشرة :

د (س) = - |س - ب) + جـ



حل معادلات المقياس بيانياً

الحل البياني معناه إيجاد الأحداثى السيني لنقط تقاطع المنحنيات :

مثال

حل المعادلات الأتية : بيانيا : -

١) ا س - ١٢ = ٣

٢) ا س - ١١ = ا س + ١٢

٣) ا س - ١٢ + ٦ - ٢س = ٠

obeikandi.com

الحل رقم (١)

| ا س – ٢ ا = ٣

نضع د (س) = ا س – ٢ ا ، د، (س) = ٣

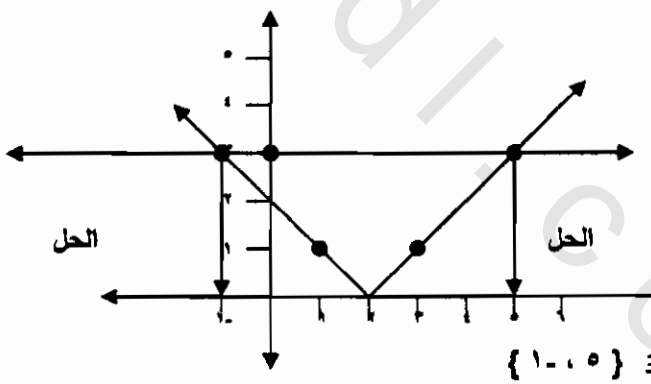
د ١ (س) = { س – ٢ س ≥ ٢ ؛ - س + س < ٢ }

س	٢	٣
ص	٠	١

ص=س-٢ ص=س+٢

س	٢	١
ص	٠	١

بالنسبة الى د (س) = ٣ نرسم خط مستقيم ص = ٣ يوازى محور السينات



الحل س∈ { ٥ ، -١ }

الحـل رقم (٢)

| ا س – ١ ا = ا س + ٢ ا

نضع د، (س) = ا س – ١ ا = { س- ١ س ≥ ١ ؛ - س + ١ س <١

obeikandl.com

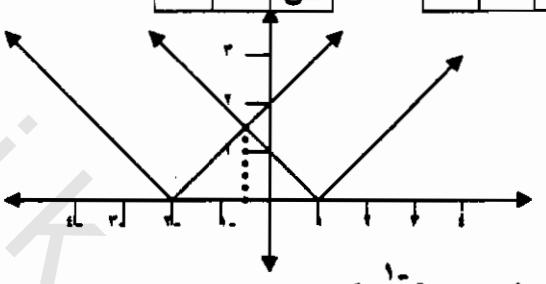
ص= س – ١ ص= - س + ١

نضع د ٢(س) = ا س + ٢ ا =
- س + ٢ س ≤ -٢
- س – ٢ س < -٢

ص= س +٢ ص= - س – ٢

س	-٢	-١
ص	٠	١

س	-٢	-٣
ص	٠	١



مجموعة الحل س ∈ { $\frac{-١}{٢}$ }

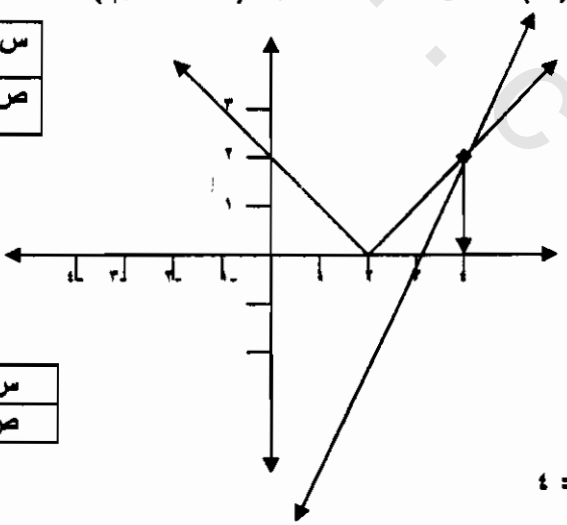
حل رقم (٣)

ا س –٢ ا + ٦ – ٢ س = ٠ ا س –٢ ا = ٢س –٦

د١ (س) = ا س – ٢ ا =
س – ٢ س ≥
- س + ٢ س < ٢

٢) د ٢ (س) = ٢س – ٦ دالة خطية (خط مستقيم)

س	١	٢
ص	٠	١



س	١	٠
ص	٠	١

الحل س = ٤

obeikandl.com

تمرين (١٥)

حل المعادلات الأتية جبرياً

١) | س – ٢ | = ٣

٢) | ٢س –٣ | = –٩

٣) | ٢س + ٤ | = | –٥ |

٤) | ٣س – ٤ | + ٧ = ٠

٥) | س – ٣ | = | س – ٧ |

٦) | ٢ س – ٣ | = | س + ٢ |

٧) | ٢ س – ٥ | + ٣ س – ٧ = ٠

٨) | ٣ س + ٤ | + ٩ – ٢ س = ٠

٩) س^{٢} – ٧ | س + ١٢ = ٠

١٠) س^{٢} – ٥ | س | – ١٤ = ٠

١١) س^{٢} – ٥ | س | – ١٤ = ٠

١٢) س^{٢} + ٨ | س | – ٢٠ = ٠

١٣) س^{٢} – | س | = ٠

١٤) س^{٢} | س | + ٣ س = ٠

ارسم الدوال الأتية واكتب المجال ، والمدى ، الطراد والنوع

١٥) د (س) = | ٢س – ٦ | + ٤

١٦) د (س) = | ٢س – ٣ | – ٤س + ٢

١٧) د (س) = | س | + س

١٨) د (س) = | ٢س – ٨ | + ٢س – ٧

١٩) د (س) = | ٣ س – ١ | + س- ٣

٢٠) د (س) = | ٢ س + ١ | + س + ٢

٢١) د (س) = ٣- | ٢ – س |

obeikandi.com

٢٢)د (س) = ا ٣ س ـ ١٤

٢٣)د(س) = س ا س ـ ١٢

٢٤) د (س) = س ا س ا

$$د (س) = \frac{|س|}{س}$$

اوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية بيانيا

٢٦) د (س) ا س ـ ١٦ = ٣

٢٧) د (س) = ا س + ١١ = ٣س ـ ٩

obeikandl.com

الدالـــــــة التربيعيـــــة

الصورة العامة

د (س) = ا س^{٢} + ب س + حـ ، ا ≠ ٠ وهى في متغير واحد

التمثيل البياني

تمثل بيانياً بمنحنى (قطع مكافئ) محوره يوازى محور الصادات

ونقطة رأسه ($\frac{-ب}{٢ا}$ ، د $\frac{-ب}{٢ا}$)

حيث أ معامل س^{٢} ، ب معامل س

حالات خاصة للدالة التربيعية

الحالة الأولى :-

١) الدالة د(س) = س^{٢}

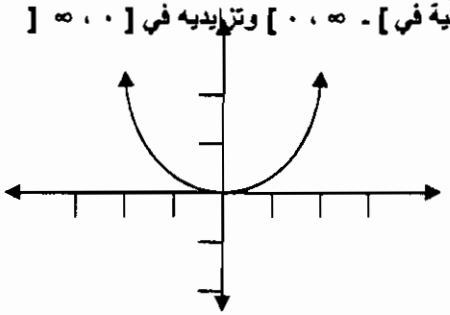
الخصائص

أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

ب) راسي المنحنى (٠ ، ٠)

ج) مدى الدالة [٠ ، ∞ [

د) الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠] وتزايديه في [٠ ، ∞ [



obeikandi.com

الحالة الثانية:-

٢) الدالة د (س) = - س^{٢}

الخصائص

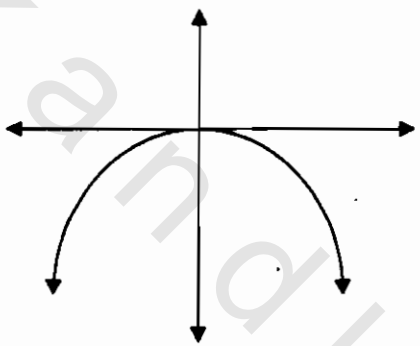
المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

راس المنحنى (٠،٠)

ج) مدى الدالة] - ∞ ، ٠]

د) الدالة تزايدية في] - ∞ ، ٠ [وتناقصية في] ٠ ، ∞ [

هـ) الدالة زوجية



الحالة الثالثة :-

٢) الدالة د (س) = أ س^{٢}

الخصائص

أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

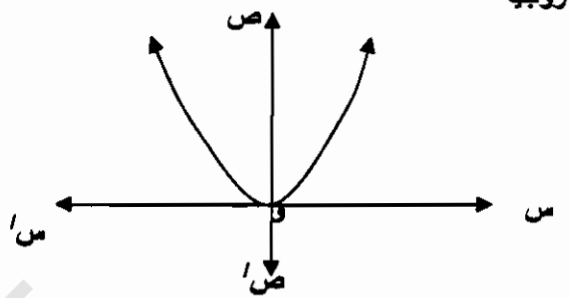
ب) رأس المنحنى (٠ ، ٠)

ت) المنحنى مفتوح إلى أعلى (إذا كانت أ > ٠) وفى هذه الحالة يكون المدى [٠ ، ∞ [وتكون الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠] وتزايدية في [٠ ،∞ [

obeikandl.com

د) المنحنى مفتوح إلى أسفل (إذا كانت أ < ٠) وفى هذه الحالة يكون المدى] - ∞ ، ٠] وتكون الدالة تزايدية في] - ∞ ، ٠] وتناقصية في[٠ ، ∞ [

هـ) الدالة زوجية



الحالة الرابعة : -

٤) الدالة د (س) = (س – م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص : -

(أ) رأس المنحنى (م ، ٠)

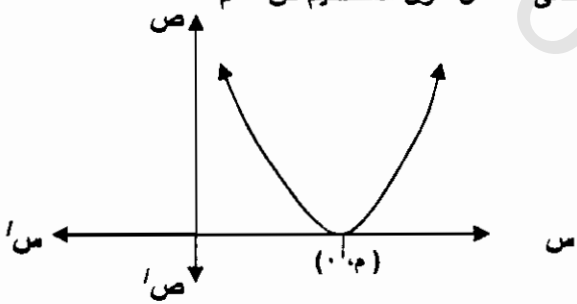
(ب) المدى [٠ ، ∞ [

(ج) الدالة تناقصية في] - ∞ ، م] وتزايديه في [م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجية ولا فرديه

(هـ) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = س^{٢} بإزاحة قدرها م في الاتجاه الموجبة لمحور السينات

(و) المنحنى متماثل حول المستقيم س = م



obeikandl.com

الحالة الخامسة: -

(٥) الدالة د (س) = (س + م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص : -

(أ) رأس المنحنى (- م ، ٠)

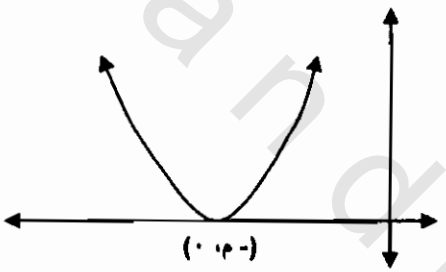
(ب) المدى [٠ ، ∞ [

(ج) الدالة تناقصية في] - ∞ ، - م] وتزايديه في [- م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = - م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = س^{٢} بإزاحة قدرها م في الاتجاه السالب لمحور السينات



الحالة السادسة : -

(٦) الدالة د (س) = - (س - م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص :-

(أ) رأس المنحنى (م ، ٠)

(ب) المدى] -∞ ، ٠]

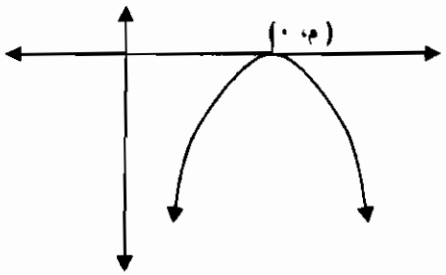
(ج) الدالة تزايديه في] -∞ ، م] وتناقصية في [م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

obeikandl.com

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = ـ س٢ بإزاحة قدرها م في الاتجاه الموجبة لمحور السينات



الحالة السابعة:ـ

(٧) الدالة د (س) = ـ (س + م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص: ـ

(أ) رأس المنحنى (ـ م ، ٠)

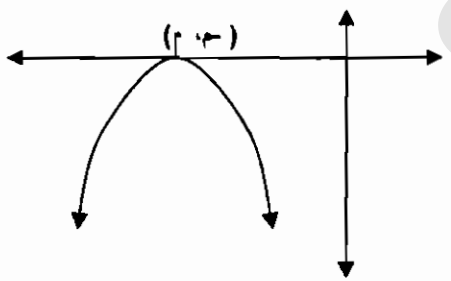
(ب) المدى] ـ∞ ، ٠]

(ج) الدالة تزايديه في] ـ ∞ ، ـ م] وتناقصية في [ـ م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = ـ م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = ـ س^{٢} بإزاحة قدرها م في الاتجاه السالب لمحور السينات



obeikandi.com

الحالة الثامنة : -

الداله د (س) = أ (س - ل)^{2} ، أ ≠ ٠

لها الخواص الآتية : -

أ – رأس المنحنى الذى يمثلها (ل ، ٠)

ب – المنحنى متماثل حول المستقيم س = ل

ج – إذا كانت أ > ٠ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أعلى وتكون الداله تناقصيه فى] -∞ ، ل] وتزايديه فى [ل ، ∞ [ومدى الداله [٠ ، ∞ [

د – إذا كانت أ < ٠ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أسفل وتكون الداله تزايديه فى] -∞ ، ل] وتناقصيه فى [ل ، ∞ [

هـ - الداله ليست زوجيه ولا فرديه إلا إذا كانت ل = ٠ فإن الداله تكون زوجيه

الحالة التاسعة :-

(٩) الداله د (س) = أ (س - ل)^{2} + ن ، أ ≠ ٠

نجد أن خواص الشكل البيانى :

أولا : إذا كانت أ > ٠ ، ل > ٠ ، ن > ٠

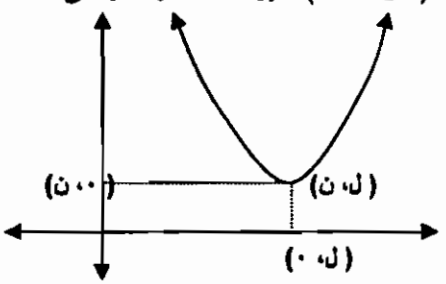
١- رأس المنحنى (ل ، ن)

٢- المدى [ن ، ∞ [

٣- الداله تناقصيه فى] -∞ ، ل] وتزايديه فى [ل ، ∞ [

٤- المنحنى متماثل حل المستقيم س = ل

٥- يمكن اعتبار ان الشكل البيانى لهذه الداله هو صوره لمنحنى الداله د (س) = أ (س – ل)^{2} بإزاحة مقدارها ن فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



ثانيا : إذا كانت أ < ٠ ، ل > ٠ ، ن > ٠

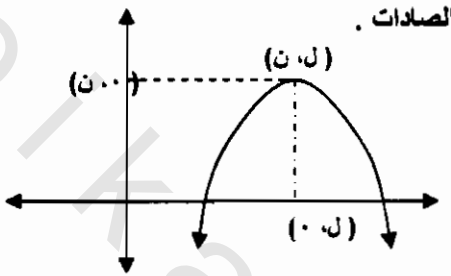
١- رأس المنحنى (ل ، ن)

٢- المدى] -∞ ، ن]

٣- الداله تزايديه فى] -∞ ، ل] وتناقصيه فى [ل ، ∞ [

٤- المنحنى متماثل حول المستقيم س = ل

٥- الشكل البيانى هو صوره لمنحنى الداله د (س) = أ (س - ل)٢ بإزاحة مقدارها ن فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



الحالة العاشرة :-

(١٠) الداله د (س) = أ س٢ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

ملاحظات :

(١) يمكن رسم الشكل البيانى بإيجاد رأس المنحنى حيث س $\frac{-ب}{٢أ}$ ثم نكون جدولاً

لبعض قيم س وقيم د (س) المناظره على أن يتضمن الجدول نقط تقاطع المنحنى مع

محور السينات حيث (ص = ٠)

(٢) يمكن أيضا رسم الشكل البيانى بطريقة أخرى وذلك بعد أن نجعل د (س) على الصوره د (س) = أ (س - ل)٢ + ن ، أ ≠ ٠ ثم نكون جدولاً كما فى (١)

(٣) بعد رسم المنحنى يمكن إيجاد المدى وكذلك بحث الداله من حيث كونها زوجيه أو فرديه .

(٤) إذا كان Δ = ب٢ - ٤ أ جـ > ٠ فإن المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين أما إذا كان Δ = ب٢ - ٤ أ جـ > ٠ فإن المنحنى يمس محور السينات عند رأس المنحنى

.وفى الحاله التى فيها ب^{٢} ـ ٤ أ حـ د ٠ فإن المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطه .

مثال :

ارسم منحنى الدوال الآتية موضحاًعلى الرسم الأطراد والمدى ونوعها من حيث الزوجية والفردية .

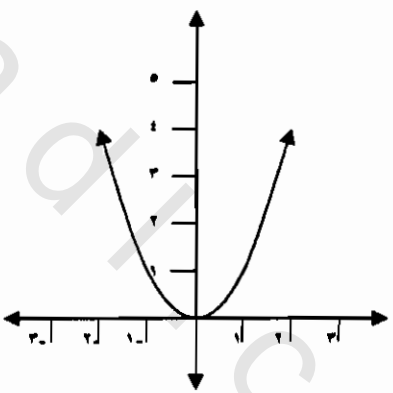
أ) د (س) = س^{٢} ب) د (س) = - س ^{٢}

جـ) د (س) = (س ـ ٢)^{٢} ء) د (س) = س ^{٢} ـ ٣

الحـــل

د (س) = س ^{٢}

س	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢
ص	٤	١	٠	١	٤



المدى [٠ ، ∞ [

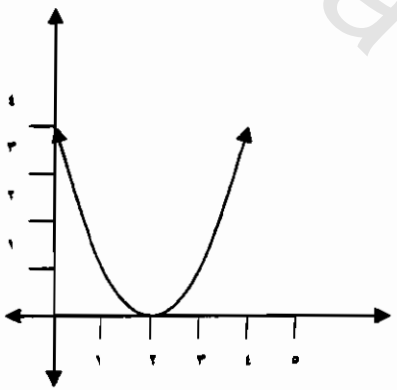
الأطرار : تناقص فى] ـ ∞ ، ٠]

تزايد فى [٠ ، ص [

الدالة زوجية

ج) د (س) = (س ـ ٢)^{٢}

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٤	١	٠	١	٤



المدى [٠ ، ∞ [

الأطرار : تناقص فى] ـ ∞ ، ٢]

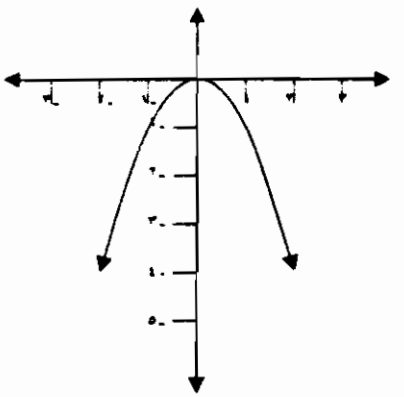
تزايد فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجية ولا فردية

obeikandl.com

حـ) د (س) = - س^{٢}

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	-٤	-١	٠	-١	-٤



المدى [- ∞ ، ٠]

الأطراد

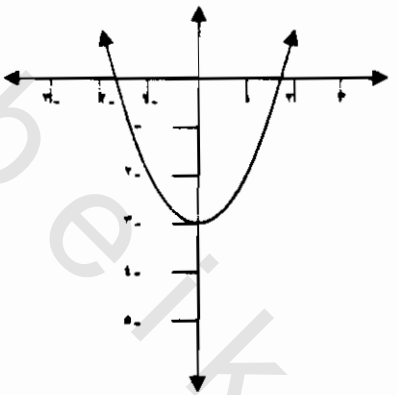
تزايد فى [- ∞ ، ٠]

وتناقص فى [٠ ، ∞]

الدالة زوجية

(د) د (س) = س^{٢} - ٣

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	١	-٢	-٣	-٢	١



المدى [- ٣ ، ∞]

الأطرار

تناقص فى] - ∞ ، ٠ [

تزايد فى [٠ ، ∞ [

الدالة زوجية

مثال

اسم الدوال الأتية ومن الرسم اوجد المدى وناقش الأطراد ونوع الدالة

أ) د (س) = س^{٢} ، س ∈ [- ٢ ، ٣]

ب) د (س) = س^{٢} ، - ٥ ، س ≤ ٠

ج) د (س) = (س - ٢)^{٢} ، ٠ ≤ ٠

obeikandl.com

الحـــل

أ) د (س) = س ٢ ، س ∈ [ـ ٢ ، ٣]

راس المنحنى = (٠ ، ٠)

د (ـ ٢) = ٤ د (٣) = ٩

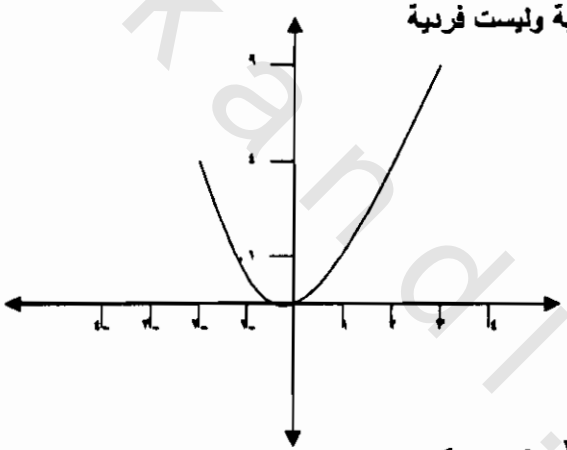
البداية رأس المنحنى النهاية

س	ـ ٢	٠	٣
ص	٤	٠	٩

المدى = [٠ ، ∞]

الأطراد : تناقصية فى [ـ ٢ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ٣]

ليست زوجية وليست فردية



ب) د (س) = س ٢ ـ ٥ ، س ≤ ٠

رأس المنحنى = (٠ ، ـ ٥)

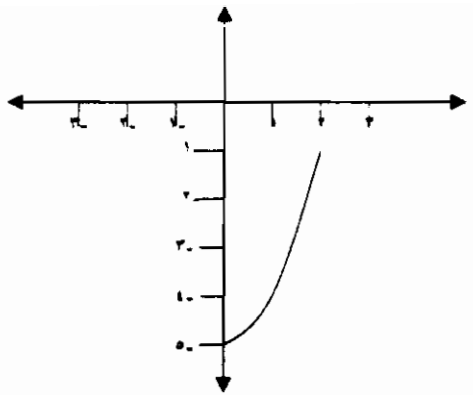
د (٠) = ـ ٥ د (١) = ـ ٤ د(٢) = ـ ١

س	٠	ـ ١	ـ ٢
ص	ـ ٥	٠	١

المدى = [ـ ٥ ، ∞[

الأطراد تزايدية فى [. ، ∞[ليست زوجية وليست فردية

obeikandl.com



ج) د (س) = (س - ٢) ٢ ، س ≤ ٠

رأس المنحنى = (٢ ، ٠)

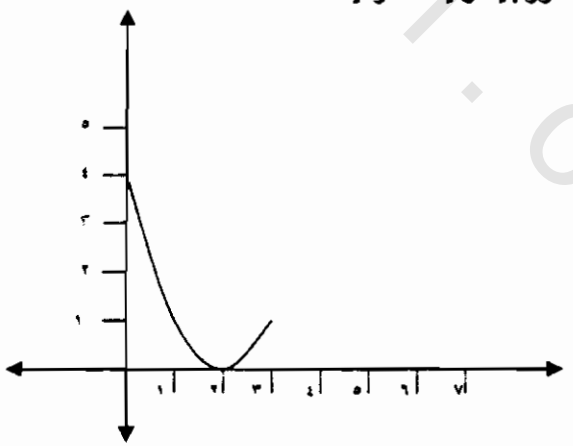
د (٠) = ٤ د (١) = ١ د (٢) = ٠ د (٣) = ١

س	٠	١	٢	٣
ص	٤	١	٠	١

المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد تناقصية فى [٠ ، ٢] وتزايدية فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجية وليست فردية



مثال

ارسم الدوال الآتية ومن الرسم اوجد المدى وناقش الأطراد ونوع الدالة

أ) د (س) = س | س - ١| + ٣

ب) د (س) = (س - ٢) ٢ - ٢ اس – ٢ ا+ ١

ج) د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٣}{\text{اس}-١١}$ س ≠ ١

الحـــــل

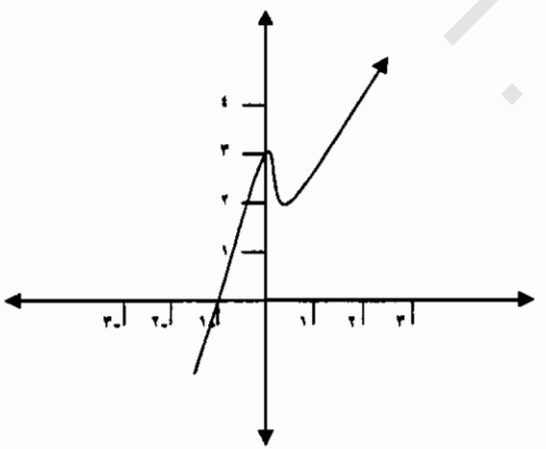
د (س) = س | س - ١| + ٣

د (س) = { (س - ١)٢ + $\frac{١١}{٤}$ س ≤ ١ ، $\frac{١٣}{٤}$ - (س _ $\frac{١}{٢}$)٢ س > ١

المدى ح االدالة تزايدية فى الفترة] - ∞ ، ٠ [وفي] $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [

الدالة تناقصية فى الفترة [٠ ، $\frac{١}{٢}$]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



obeikandl.com

د (س) = (س ـ ٢) ٢ ـ ٢ اس-١٢+ ١

د (س) = { (س ـ ٢)٢ - ٢(س – ٢) + ١ س ≤ ٢ ، (س ـ ٢)٢ + ٢(س – ٢) + ١ س > ٢ }

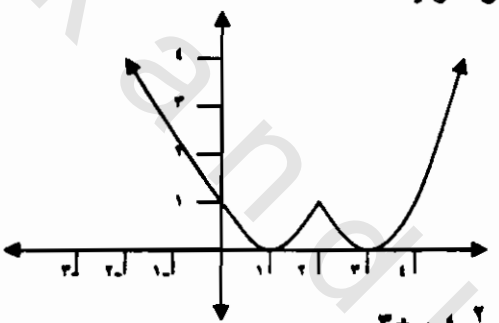
د (س) = { (س ـ ٣)٢ س ≤ ٢ ، (س ـ ١)٢ س > ٢ }

المدى = [٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على الفترة] -∞ ، ١ [، في] ٢ ، ٣ [

الدالة تزايدية على الفترة [١ ، ٢] وفي الفترة [٣ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولا فردية



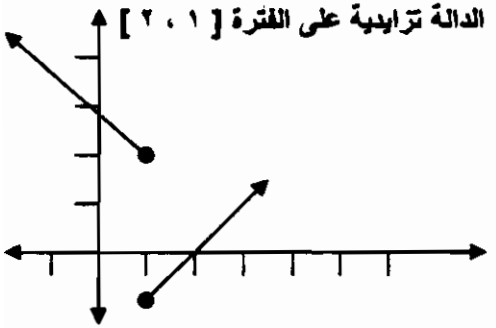
ج) د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}{\text{اس} - ١١}$ س ≠ ١

د (س) = { س – ٣ س >١ ، ـ س + ٣ س < ١ }

المدى = [٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على الفترة] -∞ ، ١ [الدالة تزايدية على الفترة [١ ، ٢]

الدالة ليست زوجية ولا فردية



obeikandl.com

تمرين (١٦)

١) ارسم في شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرادها

أ) ص = س ^{٢} ب) ص = (س - ١) ^{٢} ج) ص (س + ٢) ^{٢}

٢) ارسم في شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرادها

أ) ص = - س ^{٢} ب) ص = - (س - ٢) ^{٢} ج) ص = - (س+ ٣) ^{٢}

٣) ارسم منحنى الدالة د (س) = س ^{٢} + ٦ س + ٩

وبين رأس المنحنى ، والمدى ، اطراد الدالة ثم بين كيف يمكن الحصول على منحنى د (س) = س ^{٢}

٤) ارسم منحنى الدالة د (س) = س ^{٢} - ٤ س + ٣ واوجد نقط تقاطعه مع محورى اثم بين المدى والأطراد ومعادلة خط تماثل المنحنى

٥) مثل بيانياً د (س) = س ^{٢} - ٣ س عندما س [- ٣ ، ٢] وبين مداها وابحث اطرادها

٦) ارسم منحنى الدالة واستنتج مداها

$$د(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٢} & س \geq ٢ \\ ٢ س - ٤ & س < ٢ \end{cases}$$

٧) ارسم الدالة وبين مداها

ص = س |س|

٨) ارسم منحنى الدالة ص = س اس-١٢- ١

٩) ارسم منحنى الدالة ص = (س + ١) |س|+ ٢

١٠) ارسم منحنى الدالة

$$ص = \begin{cases} (س - ١)^{٢} + ٢ & \text{عندما } س \leq ٠ \\ ٣ - س^{٢} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

obeikandl.com

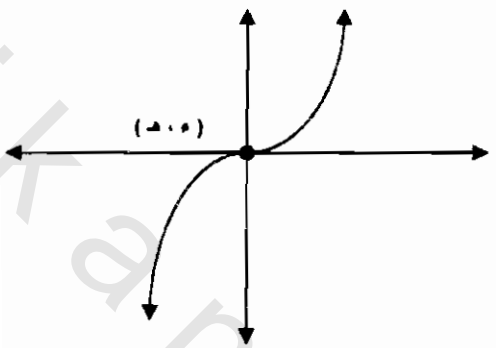
الدالـــــــة التكعيبيـــــة

قاعدة الدالة د (س) = ك (س – ء) ^{٣} + هـ حيث ك ≠ ٠

تسمى (ء ، هـ) نقطة تماثل للمنحنى

الشكل البياني للدالة :

١) اذا كانت ك > ٠ (موجب)



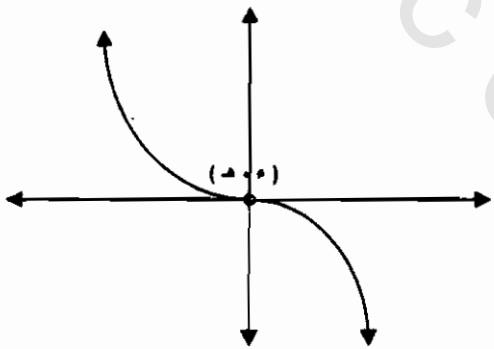
٢) اذا كانت ك < ٠ (سالب)

الخواص

المجال س ∈ ح والمدى ص ∈ ح

الأطراد : تزايد ك > ٠ ومتناقصة من ك < ٠

النوع : تكون فردية عندما (ء ، هـ) = (٠ ، ٠) فقط



obeikandl.com

مثال

ارسم الدوال الآتية ثم اكت المحال والمدى والأطراد ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = س ^{٣}

٢) د (س) =-٢س ^{٣}

٣) د (س) =س ^{٣}+ ٢

٤) د (س) = - س ^{٣} + ٢

٥) د (س) =(س –٢) ^{٣}

٦) د (س) = - (س + ٢) ^{٣}

٧) د (س) = - (س –١) ^{٣} + ٢

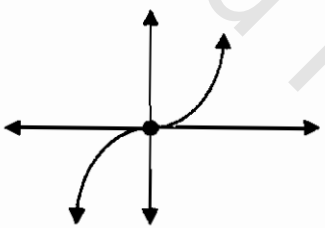
٨) د (س) = - (س – ٢)^{٣} + ٣

الحل

١) د (س) = س ^{٣} د(س) = (س-٠)^{٣}+٠

نقطة التماثل (٠ ، ٠) صاعد

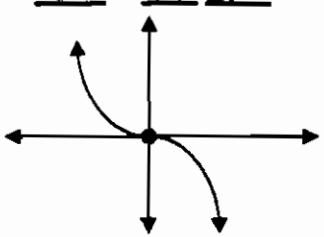
المجال س ∋ ح **المدى** ص ∋ ح **النوع** فردية **الاطراد** متزايد



٢) د (س) =-٢س ^{٣}

نقطة التماثل (٠ ، ٠) هابط

المجال س ∋ ح **المدى** ص ∋ ح **النوع** فردية **الاطراد** متناقصة

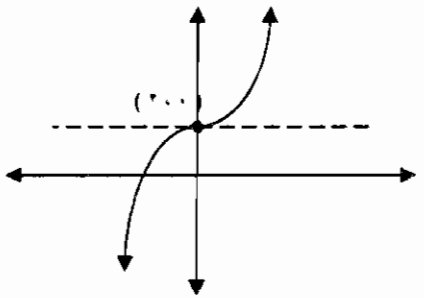


obeikandl.com

٣) د (س) =س ٣ + ٢

نقطة التماثل (٠ ، ٢) صاعد

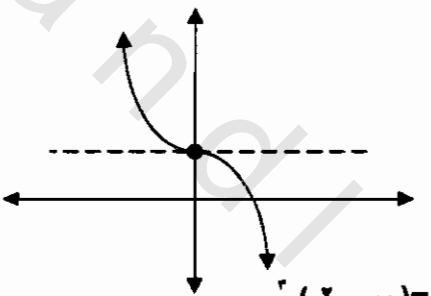
المجال س ∈ ح المدى ص ∈ ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



٤) د (س) = - س ٣ + ٢

نقطة التماثل (٠ ، ٢) هابط

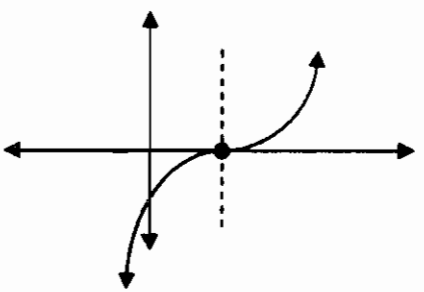
المجال س ∈ ح المدى ص ∈ ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متناقصة



٥) د (س) =(س ـ ٢) ٣

نقطة التماثل (٢ ، ٠) صاعد

المجال س ∈ ح المدى ص ∈ ح النوع ليست فردية ولا زوجية

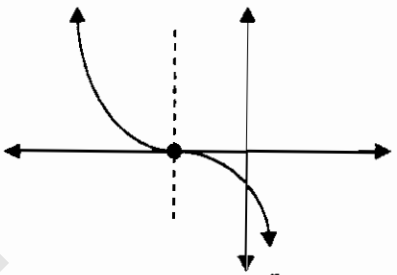


obeikandl.com

٦) د (س) = - (س + ٢) ^{٣}

نقطة التماثل (-٢، ٠) هابط

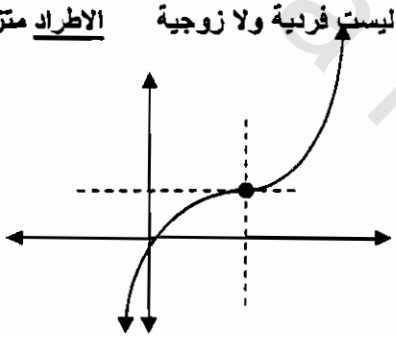
المجال س ∋ ح المدى ص ∋ ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متناقصة



٧) د (س) = (س –١) ^{٣} + ٢

نقطة التماثل (١ ، ٢) صاعد

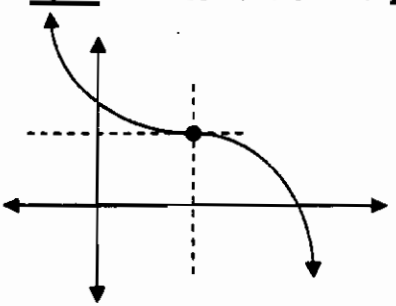
المجال س ∋ ح المدى ص ∋ ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



٨) د (س) = -(س – ٢)^{٣} + ٣

نقطة التماثل (٢، ٣) هابط

المجال س ∋ ح المدى ص ∋ ح النوع ليست فردية ولا زوجية الاطراد متزايد



obeikandl.com

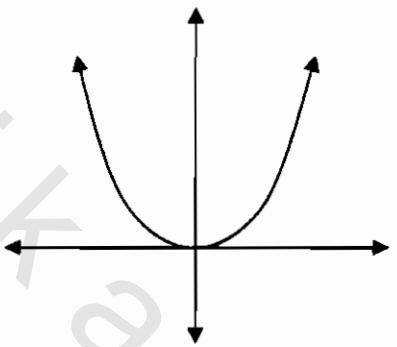
الدالـــــة التكعيبيـــــة مع المقيـــاس

القاعدة د (س) = ك ا س – ء ا^{٣} + هـ

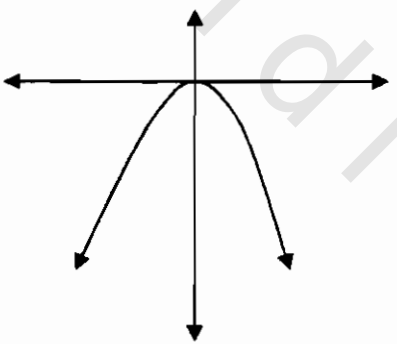
فى هذه الحالة (ء ، هـ) تعتبر راسى للمنحنى

وتعطى شكل الدالة الربيعية تماماً

اى ك > ٠ يكون الشكل



ك < ٠ يكون الشكل



مثال

ك ارسم الدوال الآتية ثم اكتب المدى والأطراد ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = ا س ^{٣} ا

٢) د (س) = - ا س ^{٣} ا

٣) د (س) = ا س^{٣} ا + ٢

obeikandl.com

٤) د (س) = | س − ١ |^{٣} + ٢

٥) د (س) = $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{ س}}{|\text{س}| + ١}$

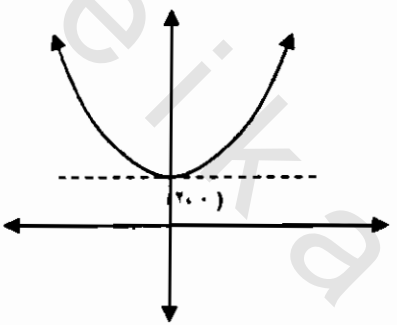
الحل

د (س) = | س |^{٣} + ٢

الرأس (٠ ، ٢) المدى ص ∈ [٢ ، ∞ [

الأطراد س > ٠ متزايدة

س < ٠ متناقصة



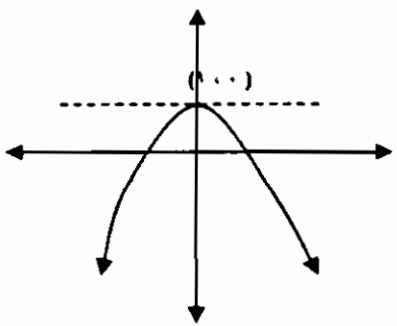
د (س) = - | س | + ١

الرأس (٠ ، ١) هابط المدى ص ∈] ص ، ١] النوع رفض

الاطراد

س > ٠ متناقصه

س < ٠ متزايدة



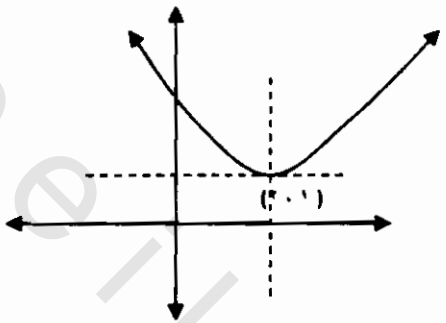
obeikandl.com

د (س) = | س - ١ |^{٢} + ٢

الرأس (١ ، ٢) ص ن المدى ص د [٢ ، ∞ [النوع ليست زوجيه ولا فرديه

الاطراد س > ١ متزايد

س < ١ متناقص

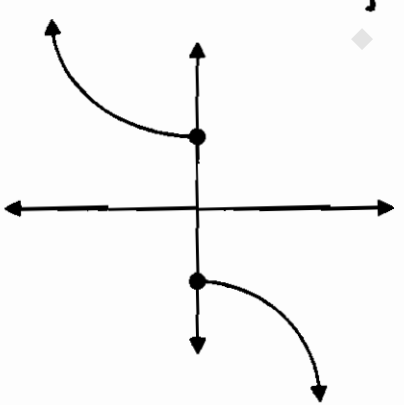


د(س) = $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{|\text{س}|}$

$$= \begin{cases} \frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{\text{س}} & \text{س} > ٠ \\ \frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{-\text{س}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{س}^{٣} - ٣ & \text{س} > ٠ \\ -\text{س} + ٣ & \text{س} < ٠ \end{cases}$$

المدى ص د] - ٣، ∞ [



obeikandi.com

مثال

أرسم الدوال الآتيه وعين المجال والمدى وناقش الاطراد ونوع الداله.

١ د(س) = { ـ س^{٣} عندما س ≤ ٠ ، س^{٣} عندما س > ٠ }

٢- ـ د(س) = { س^{٢} + ٢ عندما س ≤ ٠ ، ـ س^{٢} + ٢ عندما س > ٠ }

٣- د (س) = (س ـ ٢)^{٢} + ٣ ، س ≠ ٢

الحـــــل

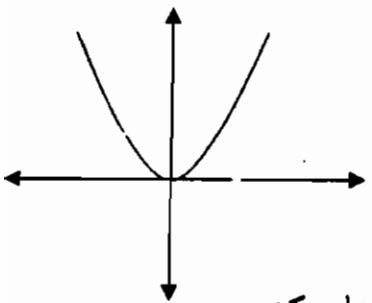
١ د(س) = { ـ س^{٣} عندما س ≤ ٠ ، س^{٣} عندما س > ٠ }

المجال = ح ، المدى =] ـ ∞ ، ٠]

الاطراد: متزايدة فى] ـ∞ ، ٠]

متناقصه فى [٠ ، ∞ [

النوع : زوجيه من التماثل حول محور الصادات



٢- ـ د(س) = { س^{٢} + ٢ عندما س ≤ ٠ ، ـ س^{٢} + ٢ عندما س > ٠ }

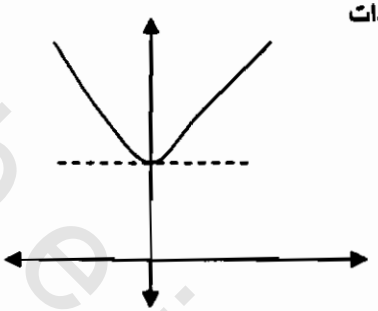
obeikandl.com

المدى =] ٢ ، ∞ [

الاطراد : متناقصه فى] -∞ ، ٠ [

ومتزايدة فى [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية من التماثل حول محور الصادات



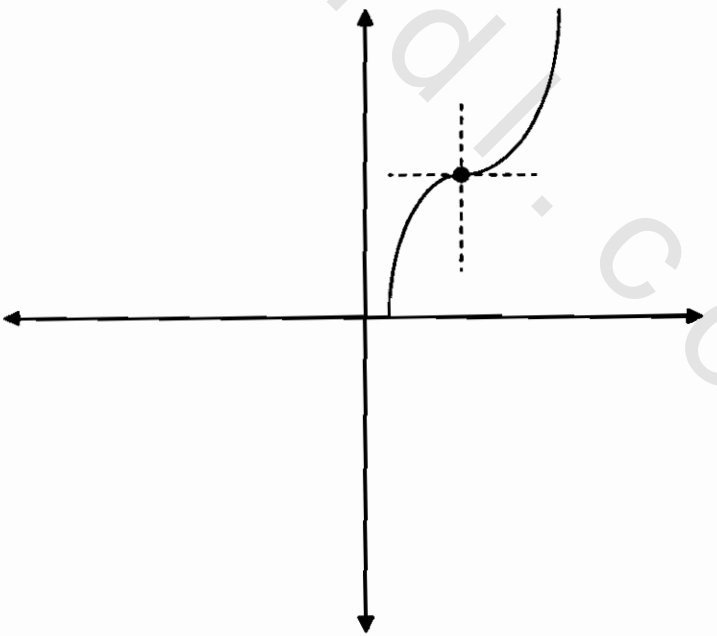
٣-د(س) = (س - ٢)^{٢} + ٣ ، س ≠ ٢

نقطة التماثل (٢ ، ٣)

المجال = ح - { ٢ } ، المدى = ح - { ٣ }

الاطراد : متزايدة على مجالها

النوع : ليست زوجية وليست فردية



obeikandl.com

تمرين (١٧)

ارسم الدوال الآتيه واستنتج المدي وناقش الاطراد ونوع الداله

١) ص = (س + ٢)^{٢}

٢) ص = ٣ - (س + ١)^{٢}

٣) ص = ا س^{٢} ا

٤) ص = ٢ - س^{٢} ا س ا

٥) ص = ٢ - ا (س - ١)^{٢} ا

٦) ص = ٢ - (س - ١)^{٢}

$$ص = \frac{س٤ - ٣س}{ا\ س\ ا}$$

٨) د (س) = { ٤ - س^{٢} عندما س < ٠ ؛ ٤ - ٢ س عندما س ≤ ٠ }

٩) د (س) = { س^{٢} - ١ عندما س ≥ ١ ؛ (س - ١)^{٣} عندما س < ١ }

١٠) د (س) = - ا س^{٢} ا - ٤

obeikandi.com

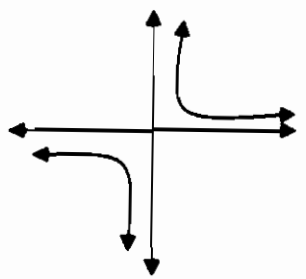
الدالـــــة الكسـريـــــة

قاعدة الدالة:- د(س) = $\frac{ك}{س - ء}$ + هـ حيث ك ≠ صفر

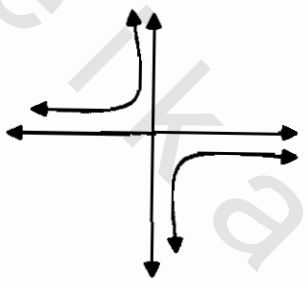
وتسمى (د ، هـ) نقطة تماثل للمنحنى

الشكل البيانى للدالة

ك > ٠ (+)



ك < ٠ (-)



الخواص :

المجال س ∈ ح - { د }

المدى ص ∈ ح - { هـ }

الاطراد متناقصة فى كل من

الفترتين] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

الخواص:

ا لمجال س ∈ ح - { د }

المدى ص ∈ ح - { هـ }

الاطراد متزايدة فى كل من

الفترتين] - ∞ ، ٠ [ ] ٠ ، ∞ [

النوع : فـــردية فقـط عندما (د ، هـ) = (٠ ، ٠)

أشكال الدالة الكسرية

(النوع الأول)

١)الحالة الأولى :-

مثال:-

أرسم الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ ثم عين المجال والمدى والاطراد ونوع الدالة

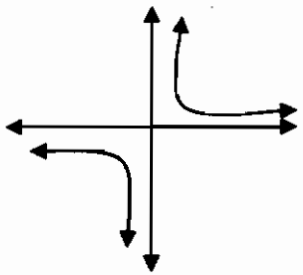
obeikandl.com

∴ د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ل = ١

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٠ }

الدالة فردية ومتناقصة فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [



٢) <u>الحالة الثانية :-</u>

مثال :-

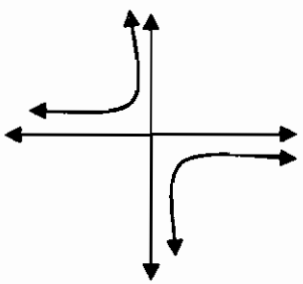
أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٢}{س}$

ل = -٢ .

∴ الدالة تقع فى الربع الثانى والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال= ح - { ٠ } \ المدى = ح - { ٠ }

وهى دالة متزايدة فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [النوع : فردية



obeikandl.com

٣) الحالة الثالثة:-

مثال :-

أرسم الدالة د(س) = $\frac{٣}{س+١}$

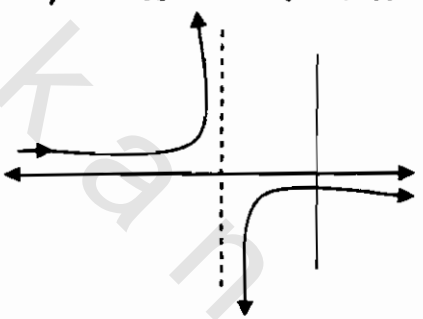
ك= ٣

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (-١ ، ٠) المجال = ح - { -١} المدى = ح - { -١}

الأطراف: متناقصة فى] - ∞ ، -١ [،] -١ ، ∞ [

النوع: ليست فردية ولا زوجية لأنها متماثلة حول النقطة (-١ ، ٠)



٤) الحالة الرابعة :-

مثال

أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٣}{س+١}$

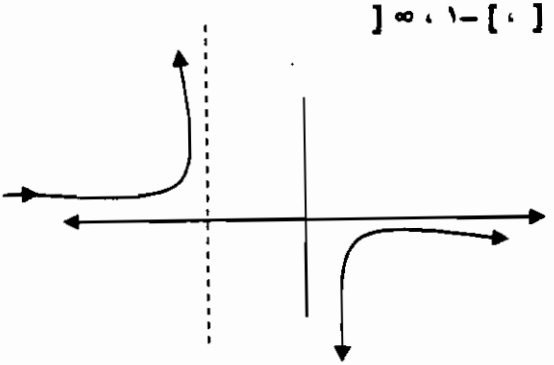
ك = -٣

∴ الدالة تقع فى الربع الثانى والرابع

نقطة التماثل (-١ ، ٠) المجال = ح - { -١ } المدى = ح - { ٠ }

الأطراف : متزايدة فى] - ∞ ، -١ [،] -١ ، ∞ [

النوع: ليست فردية ولا زوجية



obeikandi.com

٥) الحالة الخامسة :

مثال

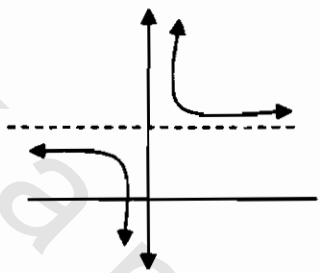
أرسم الدالة د(س) = $\frac{٢}{س}$ + ٣

ك = ٢

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ٣) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٣ }

الأطراد : تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



٦) الحالة السادسة :-

مثال

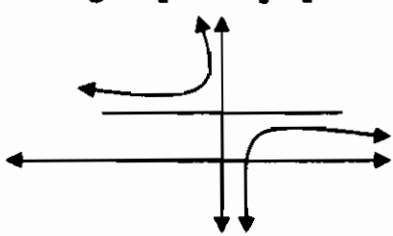
أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٢}{س}$ + ١

ك = -٢

∴ الدالة تقع فى الرع الثانى والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ١) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ١ }

الأطراد: متزايدة فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



obeikandl.com

٧) الحالة السابعة :-

مثال

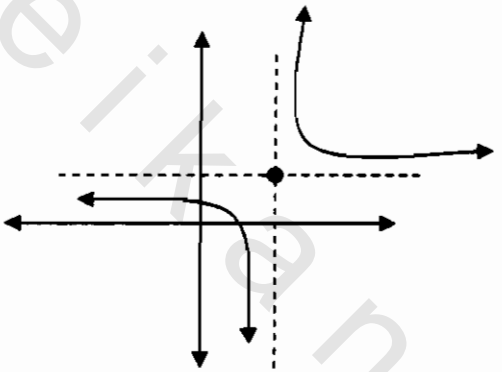
أرسم الدالة د(س) = $\frac{٣}{س-٢}$ + ١

ك = ٣

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٢ ، ١) المجال = ح - { ٢ } المدى = ح - { ١ }

الأطراد : تناقصية فى] - ∞ ، ٢ [،] ٢ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



٨) الحالة الثامنة :-

مثال

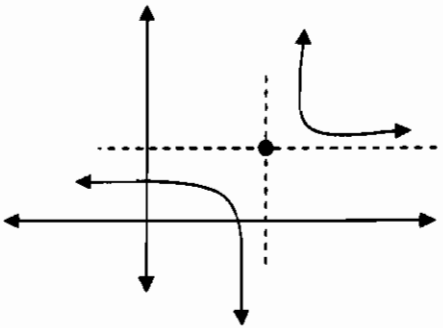
أرسم الدالة د (س) = $\frac{٣س+١}{س-١}$

∴ د (س) = $\frac{٤}{س-١}$ + ٣

٣ س + ١	س - ١
٣ س – ٣	
٣ ، هـ	
ك = ٤	

الدالة تقع فى الربع الأول والثالث نقطة التماثل (١ ، ٣)

obeikandl.com



ملاحظة :

لاحظ فى الحالة رقم (٨)

كل من البسط ، والمقام دالة خطية

(النوع الثانى)

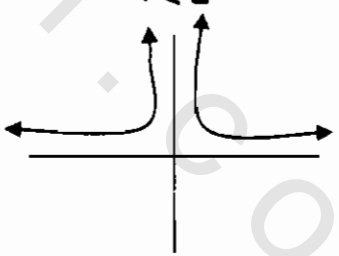
من أشكال الدالة الكسرية **هو دالة مقياس مع دالة كسرية**

القاعدة : د (س) = $\frac{ك}{|س - ء|} + هـ$

وتسمى (د ، هـ) نقطة البداية

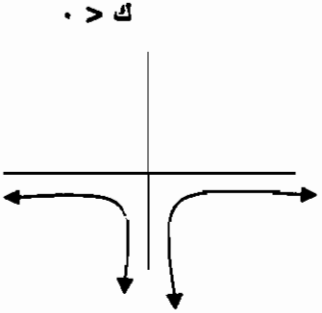
الشكل البيانى :-

ك > ٠



الربع الأول والثانى

ك < ٠



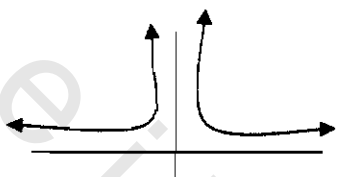
الربع الثالث والرابع

obeikandl.com

١) **الحالة الأولى:-**

مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{١}{\text{اس}^{١}}$



∴ د (س) = $\frac{١}{\text{اس}^{١}}$ { $\frac{١}{\text{س}}$ س > ٠ ، $-\frac{١}{\text{س}}$ س < ٠ }

نقطة البداية (٠ ، ٠)

الدالة تقع فى الربع الأول و الثانى المجال س ∈ ح - { ٠ }

المدى ص ∈] ٠ ، ∞ [النوع : زوجية

الأطراد : س > ٠ متناقصة وعند س < ٠ متزايدة

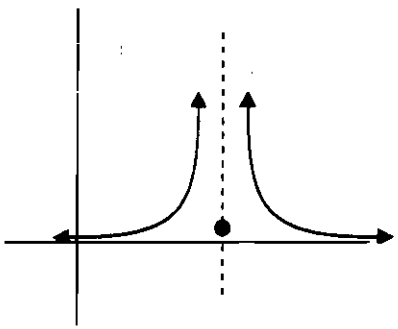
ملاحظة

الدوال الآتية لها نفس الشكل البياني للدالة ص = $\frac{١}{\text{اس}^{١}}$

د(س) = $\frac{\text{ا س}^{١}}{\text{س}^{٢}}$ ، د (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{اس}^{١٢}}$ ، د (س) = $\frac{\text{اس}^{١٣}}{\text{س}^{٤}}$

٢) **الحالة الثانية :-**

مثال ارسم الدالة د(س) = $\frac{٢}{\text{اس-١٣}}$



∴ د (س) = $\frac{٢}{\text{اس-١٣}}$ { $\frac{٢}{\text{اس-١٣}}$ س > ٣ ، $\frac{-٢}{\text{اس-١٣}}$ س < ٣ }

obeikandl.com

نقطة البداية (٣ ، ٠)

الدالة تقع فى الربع الأول و الثاني

المجال ح - { ٢ } المدى ص ∈] ٠ ، ∞ [

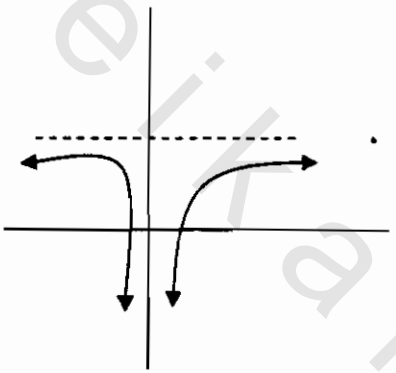
النوع : ليست زوجية ولا فردية

الاطراد : س > ٣ متناقصة وعند س < ٣ متزايدة

٣) **الحالة الثالثة :-**

مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{-٣}{\text{اس ا}}$ + ٢



∴ د (س) = $\frac{-٣}{\text{اس ا}}$ + ٢ ، س > ٠

$\frac{-٣}{\text{اس ا}}$ + ٢ ، س < ٠

ك = -٣ (الثالث و الرابع)

نقطة البداية (١ ، ٢)

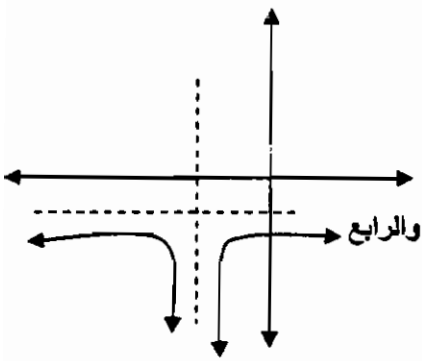
الدالة تقع فى الربع الثالث والرابع المدى ص ∈] -∞ ، ٢ [

النوع : زوجية الأطراد : س > ٠ متزايدة وعند س < ٠ متناقصة

٤) **الحالة الرابعة:-**

مثال

أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٤}{\text{اس+١ ا}}$ - ٢



ك = -٤ الدالة تقع فى الربع الثالث والرابع

نقطة البداية (-١ ، -٢)

٥) الحالة الخامسة :-

مثال

أرسم الدالة د(س) = $\frac{(س-٢)^{٢}}{اس-٢س+١}$ + ١

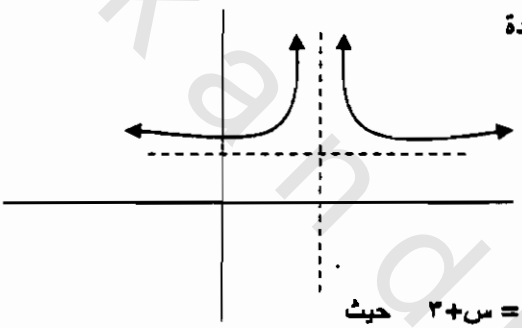
د(س) = $\frac{(س-٢)^{٢}}{اس-٢س+١}$ + ١ = $\frac{١}{اس-١٢}$ + ١

ك = ١ نقطة البداية (٢ ، ١)

الدالة تقع فى الربع الأول والثانى المدى ص ∈] ١ ، ∞ [

الأطراد عند س > ٢ متناقصة

عند س < ٢ متزايدة



مثال

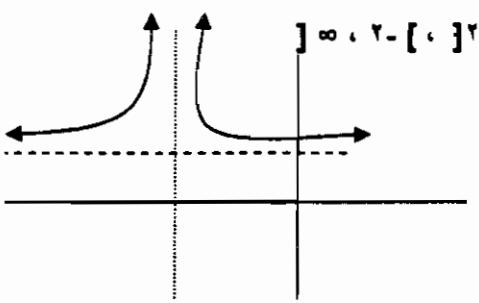
أرسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{س+٣}{س+٢}$ حيث

س ≠ ٢ ثم عين مجال ومدى هذه الدالة وأبحث أطرادها

الحل

د(س) = $\frac{س+٢}{س+٢}$ + $\frac{١}{س+٢}$ = ١ + $\frac{١}{س+٢}$

وهى دالة تناقصية فى كل من] - ∞ ، -٢[،] -٢ ، ∞ [



oberikandi.com

تمرين (١٨)

أرسم الدوال الآتيه وأستنتج المدى والأطراد

١) $د(س) = \frac{٢س+٤}{س-٣}$

٢) $د(س) = \frac{٢س+١}{س-٣}$

٣) $د(س) = \frac{(س-١)^{٢}}{١ (س-١)^{١٣}}$

٤) $د(س) = \frac{س+٤}{س^{٢}-١١٦}$ $س \neq \pm ٤$

٥) $د(س) = \frac{١}{اس-١٣}$

٦) $د(س) = \frac{١}{اس+١١}$

٧) $د(س) = \frac{-١}{اس-١٢}$

٨) $د(س) = \frac{١}{اس-١٣} + ١$

٩) $د(س) = \frac{س^{٢}}{اس^{١٣}} + ١$

١٠) $د(س) = \frac{١٢}{اس^{١+٢}}$

obeikandl.com