(٢) : حساب المثلثات

- قاعدة الجيب ومساحة المثلث
- قاعدة جيب التمام
- حل المثلث
- تطبيقات على حل المثلث (زوايا الارتفاع والانخفاض)
- الدوال المثلثية لمجموع او فرق قياسي زاويتين
- الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

حساب المثلثات

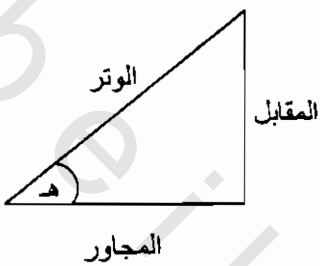
تذكر أن :

١- الدوال المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم :-

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ || قتا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ || قا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ || ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$



٢- العلاقات الأساسية للدوال المثلثية :-

١) قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ ، قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$

٢) ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$.

٣) جا ^{٢} هـ + جتا ^{٢} هـ = ١ ⇐ { جا ^{٢} هـ = ١ – جتا ^{٢} هـ ، جتا ^{٢} هـ = ١ – جا ^{٢} هـ }

٤) ١ + ظا ^{٢} هـ = قا ^{٢} هـ ، ١ + ظتا ^{٢} هـ = قتا ^{٢} هـ

٣- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين:-

جا (٩٠ – هـ) = جتا هـ جا ١٥° = جتا ٧٥ °

جتا (٩٠ – هـ) = جا هـ ظا ٥٨° = ظتا ٣٢°

ظا (٩٠ – هـ) ظتا هـ قا ١٧° = قتا ٧٣°

جا (٩٠° + هـ) = جتا هـ   **مثال**   جا ٩٨° = جا (٩٠° + ٨°) = جتا ٨°

جتا (٩٠° + هـ) = - جا هـ   **مثال**   جتا ١٠٠° - جتا (٩٠° + ١٠°) = - جا ١٠°

ظا (٩٠° + هـ) = - ظتا هـ

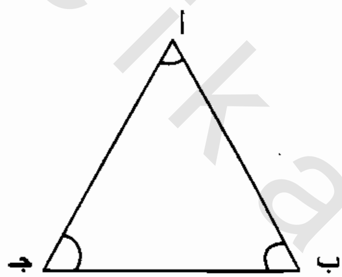
٤- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين:-

جا (١٨٠ – هـ) = جـ هـ   جا ١٦٥ = جا ١٠

جتا (١٨٠ – هـ) = - جتا هـ   جتا ١٤٠° = - جتا ٤٠°

ظا (١٨٠ – هـ) – ظا هـ   ظا ١٣٥°= - ظا ٤٥°

➢ في أي مثلث أ ب جـ يكون :-



ق(أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠°

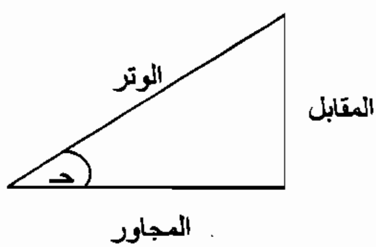
∴ ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠ – ق(جـ)

∴ **جا (أ + ب) = جا جـ**

جتا (أ + ب) = - جتا جـ

ظا (أ + ب) = - ظا جـ

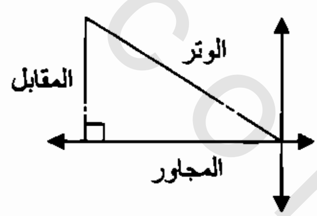
- تحديد الربع :

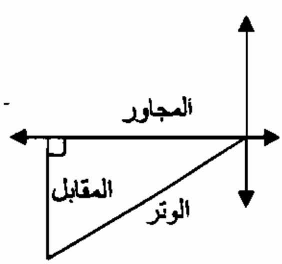


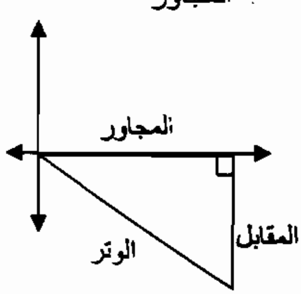
<u>الربع الأول : -</u>

٠ < هـ < ٩٠° ، ٠ < هـ < $\frac{ط}{٢}$

نرسم أي مثلث قائم







٩٠° < هـ < ١٨٠°   ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°   ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

$\frac{ط}{٢}$ < هـ < ط   ط < هـ < $\frac{٣ط}{٢}$ $\frac{٣ط}{٢}$ < هـ < ٢ ط

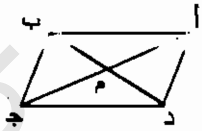
<u>الثاني</u>   **<u>الثالث</u>**   **<u>الرابع</u>**

- بعض المساحات المستخدمة :-

* مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

* أو = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول أي ضلعين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة ▱ = القاعدة × الارتفاع



= ٢ مساحة المثلث أ ب جـ = ٤ مساحة Δ أ ب م

* مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين في الارتفاع

* مساحة الشكل الرباعي نوجده كمجموع مساحة أي مثلثين

أو = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول القطرين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة الدائرة = ط نق^{٢} * محيط الدائرة = ٢ ط نق

- يكون الشكل الرباعي دائري :-

(١) إذا كان فيه زاويتين مرسومتين علي قاعدة واحد متساويتا في القياس .

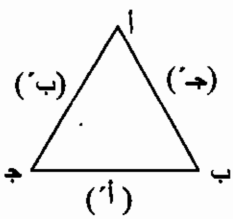
(٢) إذا كان فيه زاويتين متقابلين متكاملتين .

- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = أحدي النسب

$\therefore$ $\frac{أ + جـ + هـ}{ب + د + و}$ = أي نسبة من النسب مطلوب إيجادها

قاعدة الجيب

- في أي مثلث أ ب جـ يكون



$\frac{أ´}{جا أ} = \frac{ب´}{جا ب} = \frac{جـ´}{جا جـ}$ = ٢ نق

أي : أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها

الإثبات :-

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جيب الزاوية بينهما

$\therefore \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{بَ جـَ جا أ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{أَ جـَ جا ب} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{أَ بَ جا جـ}$

بالقسمة علي $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جـَ

$$\frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جاب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جـَ}}$$

$$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$$

ملاحظات :

١. نق هو نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث من الخارج .
٢. محيط المثلث = أَ + بَ + جـَ
٣. محيط الدائرة = ٢ ط نق
٤. مساحة الدائرة = ط نق$^{\text{٢}}$
٥. تستخدم قاعدة الجيب إذا علم زاويتان وضلع .

تمرين مشهور :-

في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق}$ ، نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

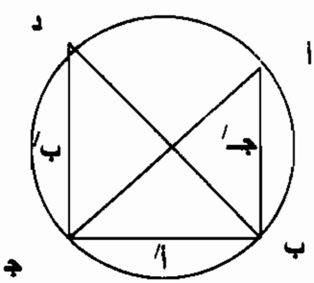
البرهان

أرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ ثم صل $\overline{\text{ء جـ}}$

∴ أ ب جـ ء رباعي دائري

∴ ق (ء) = ق (أ)

لكن (ب جـ ء) ٩٠° في نصف دائرة



$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}} = \text{جا ء}$

$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{٢ نق}} = \text{جا أ} \qquad \therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \text{٢ نق}$

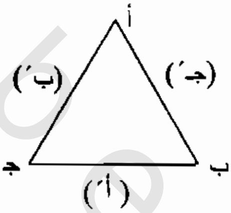
$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢ نق}$

مثال : أ ب جـ مثلث فيه ق (أ) = ١٨´ ٥٦° ، ق (ب) = ١١´ ٤٧° ، جـ´ = ١٦ سم

أوجد ما يلي :-

١) أ´ ، ب´   ٢) نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

الحـــــــل



أولاً : نوجد ق (جـ)

ق (جـ) = ١٨٠ – ١٨´ ٥٦° - ١١´ ٤٧°

الآلة : ,, Sh = ,,١١,,٤٧ -,,١٨,,٥٦ – ١٨٠

ق (جـ) = ٣١´ ٧٦°

$\therefore \frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ´}}{\text{جا١٨´ ٥٦°}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ١١´ ٤٧°}} = \frac{١٦}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$

$\frac{\text{أ´}}{\text{جا١٨´ ٥٦°}} = \frac{١٦}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$ ، $\frac{\text{ب´}}{\text{جا ١١´ ٤٧°}} = \frac{١٦}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$

أ´ = $\frac{\text{١٦ × جا١٨´ ٥٦°}}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$ ، ب´ = $\frac{\text{١٦ × جا ١١´ ٤٧°}}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$

Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ١٦ × Sin,,١٨,,٥٦ =   Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ١٦ × Sin,,١١,,٤٧ =

أ´ = ١٣,٣ سم   ، ب´ = ١٢

إيجاد نق : نضع $\frac{١٦}{\text{جا ٣١´ ٧٦°}}$ = ٢ نق

نق = ٨,٢ سم   ١٦ ÷ Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ٢ =

مثال : أ ب جـ مساحه سطحه = ٣٣٦ سم٢ فيه أ´ = ٢٨سم ، ب´ = ٢٦ سم ، جـ´ = ٣٠ سم أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسه ؟

الحـــــــل

$\therefore$ مساحة سطح Δ = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

$\therefore$ ٣٣٦ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ × ٢٦ × جا جـ

= ٣٦٤ × جا جـ $\therefore$ جا جـ = $\frac{٣٣٦}{٣٦٤}$

$\therefore$ جا جـ = ٠,٩٣٢ $\therefore$ ق (جـ) = ٢٣´ ٦٧°

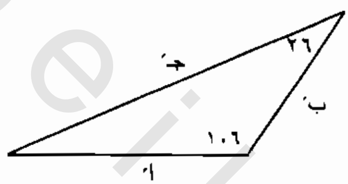
∴ $\frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{٣٠}}{\text{جا ٢٣´ ٥٦٧}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٣٢,٤ ⟵ نق = ١٦,٢ سم

∴ مساحة الدائرة = ٣٠١٤ × (١٦٠٢)^{٢} = ٨٢٤,٤ سم^{٢}

<u>مثال</u> : أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٥٢٦ ، ق (جـ) = ٥١٠٦ ، جـ´ ـ أ´ = ٥ سم أوجد أ´

الحـــــــل



∴ $\frac{\text{أ´}}{\text{جا جـ}}$ = $\frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{جـ´ ـ أ´}}{\text{جا جـ ـ جا أ}}$ = $\frac{\text{أ´}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{٥}}{\text{جا ١٠٦ ـ جا ٢٦}}$ = $\frac{\text{أ´}}{\text{جا ٢٦}}$ ∴ أ´ = $\frac{\text{٥ جا ٢٦}}{\text{جا ١٠٦ ـ جا ٢٦}}$ = ٤,٢ سم

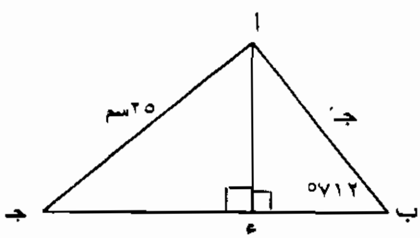
<u>مثال :</u>

أب جـ مثلث فيه ق (أ) = ٣٨´ ٥٥٦ ، ق (ب) = ١٢´ ٥٧١ ، ب´ = ٢٥ سم

<u>أحسب</u> : ١) طول جـ´ ٢) نصف قطر الذي تمر بروؤس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من أ علي $\overline{\text{ب جـ}}$

الحـــــــل



ق(جـ) = ١٨٠ ـ ٣٨´ ٥٥٦ ـ ١٢´ ٥٧١

∴ ق(جـ) = ١٠´ ٥٥٢

$\frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ = $\frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

$\frac{\text{جـ´}}{\text{جا ١٠´ ٥٥٢}}$ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ٢ نق

جـ´ = $\frac{\text{٢٥ × جا ١٠´ ٥٥٢}}{\text{جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ٢٠,٨ سم

نق = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٢× جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ١٣,٢ سم ٢٥ ÷ ٢ ÷ ٧١,,١٢,,Sin = ١٣,٢

إيجاد طول العمود : في Δ أ ء ب $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٧١° ١٢'} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ء}}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٧١° ١٢'} = \frac{٢٠,٨}{\text{جا } ٩٠}$ ∴ أ ء = $\frac{٢٠,٨ \times \text{جا } ٧١° ١٢'}{١}$

∴ أ ء = ١٩.٦ سم

مثال : برهن أن مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ = $\frac{\text{ط أ' ب'}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

البرهان

∴ مساحة سطح الدائرة = ط نق^{٢}

∴ $\frac{\text{أ'}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب'}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ'}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$

∴ نق = $\frac{\text{أ'}}{\text{٢جا أ}}$ أو $\frac{\text{ب'}}{\text{٢جا ب}}$

∴ مساحة الدائرة = ط نق × نق

$= \text{ط} \times \frac{١}{\text{٢جا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{٢جا ب}} = \frac{\text{ط أ' ب'}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

مثال : أ ب جـ Δ محيطه ١٨ سم فإذا كان ق (أ) = ٤٧° ، ق (ب) = ٥٣° . أوجد اطوال أضلاعه ثم أوجد مساحة سطحه .

الحـــــــل

ق (جـ) = ١٨٠ – (٤٧ + ٥٣) = ٨٠°

∵ $\frac{\text{أ'}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب'}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ'}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ'}}{٠,٧٣١٤} = \frac{\text{ب'}}{٠,٧٩٨٦} = \frac{\text{جـ'}}{٠,٩٨٤٨}$

∵ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدي النسب

∴ $\frac{\text{أ' + ب' + جـ'}}{٠,٧٣١٤ + ٠,٧٩٨٦ + ٠,٩٨٤٨} = \frac{١٨}{٢,٥١٤٨}$ حيث المحيط (أ' + ب' + جـ')

∴ أ' = $\frac{١٨ \times ٠,٧٣١٤}{٢,٥١٤٨}$ = ٥,٢٣ سم

∴ ب' = $\frac{١٨ \times ٠,٧٩٨٦}{٢,٥١٤٨}$ = ٥,٧٢ سم

∴ جـَ = $\frac{١٨ \times ٠,٩٨٤٨}{٢,٥١٤٨}$ = ٧,٠٥ سم

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ

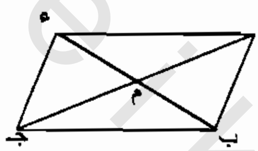
= $\frac{١}{٢}$ × ٥,٢٣ × ٥,٧٢ جا ٨٠ = ١٤,٧٣ سم^{٢}

مثال :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم ، ق < ب أ جـ = ٤٧° ، ق < أ ب ء = ٥٦°

احسب : ١) طول $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ٢) مساحة سطح متوازي الأضلاع .

الحـــــــل



في Δ أ م ب

ق(< م) = ١٨٠ ـ ٤٧ ـ ٥٦

ق(< م) = ٧٧°

$\frac{أ ب}{جا م}$ = $\frac{أ م}{جا ٥٦}$ = $\frac{م ب}{جا ٤٧}$ ∴ $\frac{١٨}{جا ٧٧}$ = $\frac{أ م}{جا ٥٦}$ = $\frac{م ب}{جا ٤٧}$

أ م = $\frac{١٨ \times جا ٥٦}{جا ٧٧}$ = ١٥,٣ سم ∴ م ب = $\frac{١٨ \times جا ٤٧}{جا ٧٧}$ = ١٣,٥ سم

أ جـ = ٢ أ م = ٢ × ١٥,٣ = ٣٠,٦ سم

ب ء = ٢ ب م = ٢ × ١٣,٥ = ٢٧ سم

مساحة Δ أ م ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ م جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ١٥,٣ × جا ٤٧ = ١٠٠,٧ سم^{٢}

مساحة متوازي الأضلاع = ٤ × ١٠٠,٧ = ٤٠٢,٨ سم^{٢}

مثال:

ـ في أي مثلث أ ب جـ اثبت أن مساحته = $\frac{أَ \ بَ \ جـَ}{٤ \ نق}$ حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

الحـــــــل

نرمز لمساحة المثلث م

∴ م = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ

= $\frac{أَ \ بَ \ جا \ جـ}{٢}$ (الطرفين × الوسطين)

∴ أَ بَ × جا جـ = ٢ م   بالقسمة على أَ بَ

جا جـ = $\frac{\text{٢م}}{\text{أَ بَ}}$ بضرب الطرفين × $\frac{\text{١}}{\text{جـَ}}$

$\frac{\text{جا جـ}}{\text{جـَ}}$ = $\frac{\text{٢م}}{\text{أَ بَ جـَ}}$ ، ∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جـَ}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{١}}{\text{٢ نق}}$ = $\frac{\text{٢م}}{\text{أَ بَ جـَ}}$ ∴ ٤ م نق = أَ بَ جـَ ÷ ٤ نق

∴ م = $\frac{\text{أَ بَ جـَ}}{\text{٤ نق}}$

حل آخر: ∵ مساحة Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جا جـ

، ∵ $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق   ∴ جا جـ = $\frac{\text{جـَ}}{\text{٢ نق}}$

∴ مساحة Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ × $\frac{\text{جـَ}}{\text{٢ نق}}$

= $\frac{\text{أَ بَ جـَ}}{\text{٤ نق}}$

مثال : **اثبت أن مساحة سطح المثلث = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ**

الحل

م Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جا جـ ---------- (١)

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

أَ = ٢ نق جا أ   بَ = ٢ نق جا ب   بالتعويض في (١)

∴ م Δ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٢ نق جا أ × ٢ نق جا ب × جا جـ

م Δ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ

تمارين (٦)

١- أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٥٤٨ ، ق(> ب) = ٥٧٣ ، أَ = ١٥٠ سم

اوجد محيط Δ أ ب جـ.

٢- أ ب جـ ∆ فيه ق (أ) = ١٠٥°، ق(< ب) = ٤٥°، جـ´ = ٢٠ سم أوجد أ´ ، ب´.

٣- أ ب جـ ∆ فيه (جـ´) = ٤٢,٤ سم ، ق(< أ) = ٨٢°، ق (< جـ) ٥٨°

أوجد ب´ ، مساحة ∆ أ ب جـ وكذا طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ .

٤- أوجد محيط ∆ أ ب جـ الذي فيه ق(< أ) = ٢١´ ٦٢° ، ق(< ب) = ٣٩´ ٥٤°

أوجد مساحة سطحه إذا كان جـ´ = ٩,٢٥ سم .

٥- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٢,٥ سم ، ق (< أ ب جـ) = ١١٠°،

ق (< ب أ جـ) = ٤٥° أوجد أ جـ ، أ ء .

٦- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ٢٠سم وقطراه أ جـ ، ب ء يصنعان مع الضلع أ ب الزاويتين ٢٢´ ٣٦° ، ٥٨´ ٤٤° علي الترتيب . أوجد طول القطرين ثم اوجد مساحة المتوازي .

٧- ∆ أ ب جـ فيه أ´ = ١٣,٥ سم ، ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = $\frac{٨}{١٥}$ أوجد ب´ ، جـ´

٨- أ ب جـ ∆ فيه ب´ = ١٢,٦ سم ، ق(< أ) = ١٥´ ٦٤°، ق (< جـ) ١٨´ ٤٢°

أوجد ما يلي : ١) محيط ∆ أ ب جـ ومساحته.

٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ .

٩- ∆ أ ب جـ فيه ق (< أ) = ٥٠° ، ق (< ب) = ١٢٠° ، جـ´ = ٨ سم أوجد : ب´ ، وكذلك طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ وكذلك مساحة المثلث .

١٠- أ ب جـ ∆ فيه جـ´ = ٧,٦ سم ، ق(< أ)= ٨٠° ، ق(< ب) = ٤٧° أحسب محيط المثلث وكذا طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

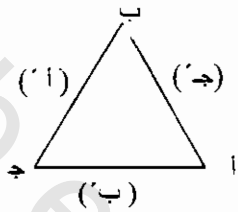
قاعدة جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

أ´ ^{٢} = ب´ ^{٢} + جـ´ ^{٢} − ٢ ب´ جـ´ جتا أ

ب´ ^{٢} = أ´ ^{٢} + جـ´ ^{٢} − ٢ أ´ جـ´ جتا ب

جـ´ ^{٢} = أ´ ^{٢} + ب´ ^{٢} − ٢ أ´ ب´ جتا جـ



الإثبات :−

جـ ب = جـ أ + أ ب

∴ || جـ ب ||^{٢} = || جـ أ ||^{٢} + || أ ب ||^{٢} + ٢ جـ أ ن أ ب

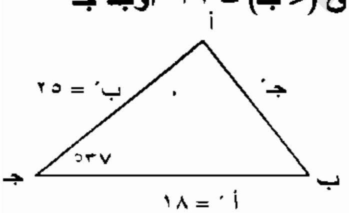
أ´ ^{٢} = ب´ ^{٢} + جـ´ ^{٢} − ٢ أ جـ ن أ ب

أ´ ^{٢} = ب´ ^{٢} + جـ´ ^{٢} - ب´ جـ´ جتا أ

ملاحظة :

− تستخدم هذه الصورة إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

مثال : أ ب جـ △ فيه أ´ = ١٨ سم ، ب´ = ٣٥ سم ، ق (< جـ) = ٣٧° أوجد جـ´



الحـــل

جـ´ ^{٢} = أ´ ^{٢} + ب´ ^{٢} - أ´ ب´ جتا جـ

= (١٨)^{٢} +(٣٥)^{٢} − ٢ × ١١٨ × ٣٥× جتا ٣٧

√ = ١٨ Sh ×^{٢} +٣٥ Sh ×^{٢} − ٢ ×١٨ ×٣٥ ×٣٧ Cas

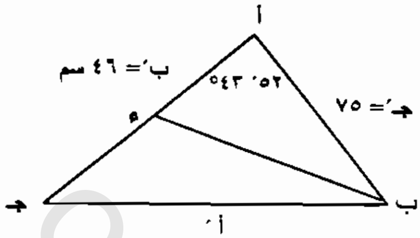
جـ´ = ٢٣٫٣ سم

مثال ٢ : أ ب جـ △ فيه ب´ = ٤٦سم ، جـ´ = ٧٥ سم ، ق (< أ) = ٤٣° ٥٢´ ٢٠ أوجد :

١) أ´ ، محيط المثلث .

٢) طول نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ



الحـــــل

١) أ'^{٢} = ب'^{٢} + جـ'^{٢} – ٢ ب' جـ' جتا أ

= (٤٦)^{٢} + (٧٥)^{٢} – ٢ × ٤٦ × ٧٥ × جتا ٥٢´ ٤٣°

أ' = ٥٢,٥ سم

٢) **محيط المثلث** = أ' + ب' + جـ' = ٥٢,٥ + ٤٦ + ٧٥ = ١٧٣,٥ سم

٣) أ' / جا أ = ٢ نق   ٥٢,٢ / جا ٥٢´ ٤٣° = ٢ نق   نق = ٣٧,٩ سم

ثالثا : في Δ أ ب ء

ب ء / جا أ = أ ب / جا ء

ع / جا ٥٢´ ٤٣° = ٧٥ / جا ٩٠

ع = ٧٥ × جا ٥٢´ ٤٣° = ٥١,٩ سم

مثال : في Δ أ ب ء إذا كان [(أ' + ب') - جـ') (ب' + جـ') - أ'] = ٣ ب' جـ'

أوجد ق (> أ) .

الحـــــل

∴ [(أ' + ب') - جـ') (ب' + جـ') - أ'] = ٣ ب' جـ'

فرق مربعين

∴ (ب' + جـ')^{٢} - أ'^{٢} = ٣ ب' جـ'

ب'^{٢} + جـ'^{٢} + ٢ ب' جـ' - أ'^{٢} = ٣ ب' جـ'

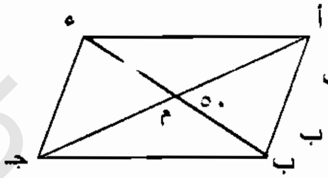
ب'^{٢} + جـ'^{٢} - أ'^{٢} = ب' جـ'   بالقسمة علي ٢ ب' جـ'

∴ (ب'^{٢} + جـ'^{٢} - أ'^{٢}) / ٢ ب' جـ' = ١ / ٢

∴ جتا أ = ١ / ٢   ∴ ق (> أ) = ٦٠°

مثال : أ ب جـ ء متوازي أضلاع طولا قطريه أ جـ ، ب ء يساوي ٢٤ سم ، ١٨ سم ، قياس الزاوية بين القطرين ٥٠° احسب محيط متوازي الأضلاع .

الحــــــل



في ∆ أ ب م

(أ ب)^2 = (م أ)^2 + (أ ب)^2 – ٢ م أ × م ب جتا ب

(أ ب)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 – ٢ × ١٢ × ٩ × جتا ب

∴ (أ ب) = ٩,٢ سم

في ∆ أ م ء

ق (< م) = ١٨٠ – ٥٠ = ١٣٠°

(أ ء)٢ = (م أ)٢ + (م ء)٢ – ٢ م أ × م ء جتا ١٣٠

(أ ء)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 – ٢ × ١٢ × ٩ جتا ١٣٠

∴ أ ء = ١٩

محيط متوازي الأضلاع = (١٩ + ١٩ + ٩,٢ + ٩,٢)

= ٥٦,٤ سم

الحالة الثانية من قاعدة جيب التمام :

في أي ∆ أ ب جـ يكون

جتا أ = $\frac{ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2}{٢ ب' جـ'}$

جتا ب = $\frac{أ'^2 + جـ'^2 - ب'^2}{٢ أ' جـ'}$

جتا جـ = $\frac{أ'^2 + ب'^2 - جـ'^2}{٢ أ' ب'}$

الإثبات :

∴ أ'^{2} = ب'^{2} + جـ'^{2} – ٢ ب' جـ' جتا أ

∴ ٢ ب' جـ' جتا أ = ب'^{2} + جـ'^{2} - أ'^{2}

جا أ = $\frac{ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2}{٢ ب' جـ'}$

ملاحظات :

١) تستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علم الأضلاع الثلاثة أ، النسب بين أطوال أضلاعه .

٢) أكبر زاوية تكون مقابلة لأكبر ضلع وأصغر زاوية تكون مقابلة لأصغر ضلع .

مثال : أ ب جـ Δ فيه أ = ٢٦ سم ، ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٤١ سم – أوجد أكبر قياسات زوايا المثلث وما هي مساحة سطحه .

الحــــــل

جـ´ أكبر ضلع ∴ جـ´ = أكبر زاوية

جتا جـ = $\frac{أ^{\prime 2} + ب^{\prime 2} - جـ^{\prime 2}}{٢ أ´ ب´}$ = $\frac{(٢٦)^2 + (١٥)^2 - (٤١)^2}{٢ \times ٢٦ \times ٣٥}$

٢٦ Sh ×٢ + ٣٥ Sh ×٢ – ٤١ Sh ×٢ = ÷ ٢ ÷ ٢٦ ÷ ٣٥ = Sh Cos Sh ,,

ق (< جـ) = ٣´ ٣ ٨٣°

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٦ × ٣٥ × جا ٣´ ٣ ٨٣°

= ٤٥١,٦ سم٢

مثال : أ ب جـ Δ فيه أ´ = ٣٢ سم ، ب´ = ٣٩ سم . جـ´ = ٥٢ سم أوجد :

١) ق (< أ) ٢) مساحة سطح المثلث

٣) طول نصف قطر الدائرة الذي تمر برؤوس المثلث .

٤) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ .

الحــــــل

جتا أ = $\frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{٢ ب´ جـ´}$

جتا أ = $\frac{(٣٩)^2 + (٥٢)^2 - (٣٢)^2}{٢ \times ٣٩ \times ٥٢}$

∴ ق (< أ) = ٥٣´ ٣٧°

إيجاد نق : $\frac{أ´}{جا أ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٣٢}{جا٥٣´ ٣٧°}$ = ٢ نق

نق = ٢٦ سم

مثال : في Δ أ ب جـ إذا كانت جتا ب = جـَ / ٢ أَ أثبت أن المثلث متساوي الساقين وإذا كان جا جـ / جا أ = √٣ أوجد : ق (< ب) ، ق (< جـ) .

الحــــل

∵ بَ² = جـَ² + أَ² − ٢ أَ جـَ جتا ب

= جـَ² + أَ² − ٢ أَ جـَ جتا جـَ / ٢ أَ

بَ² = جـَ² + أَ² − جـَ²

∴ بَ² = أَ² ∴ بَ = أَ ∴ Δ متساوي الساقين

∵ جا جـ / جا أ = √٣ ∴ جـَ / أَ = √٣

∴ جـَ = أ√٣

∴ جتا ب = جـَ / ٢ أَ = أ√٣ / ٢ أَ = √٣ / ٢

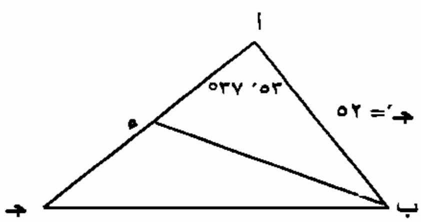
∴ ق (< ب) = ٣٠° ∴ ق (< أ) = ٣٠°

∴ ق(< جـ) = ١٢٠°

مساحة سطح المثلث = ١/٢ بَ جـَ جا أ

= ١/٢ × ٣٩ × ٥٢ × جا ٥٣َ ٣٧°

= ٦٢٢,٦ سم²



Δ أ ب ء : أ ب / جا ٩٠ = ب ء / جا ٥٣َ ٣٧°

٥٢ / ١ = ب ء / جا ٥٣َ ٣٧°

ب ء = ٥٢ × جا ٥٣َ ٣٧°

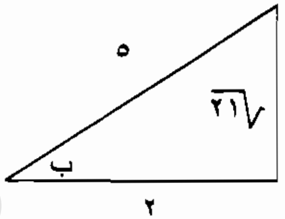
ب ء = ٣١,٩ سم

مثال : أ ب جـ Δ فيه جا ب = √٢١ / ٥ ، بَ = ١٠سم ، جـَ = ٨ سم أثبت أن:

المثلث متساوي الساقين وأوجد : جا أ ، جتا جـ

الحــــل

∴ $\text{جا ب} = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$ ⟵ $\text{جتا ب} = \frac{٢}{٥}$



∴ $\text{ب}'^{٢} = \text{جـ}'^{٢} + \text{أ}'^{٢} - ٢\text{أ}'\,\text{جـ}'\ \text{جتا ب}$

$١٠٠ = ٦٤ + \text{أ}'^{٢} - ٢ \times ٨ \times \text{أ}' \times \frac{٢}{٥}$

$٣٦ = \text{أ}'^{٢} - \frac{٣٢}{٥}\,\text{أ}'$ بضرب الطرفين في ٥

$١٨٠ = ٥\text{أ}'^{٢} - ٣٢\text{أ}'$ ∴ $٥\text{أ}'^{٢} - ٣٢\text{أ}' - ١٨٠ = ٠$

$(٥\text{أ}' + ١٨)\ (\text{أ}' - ١٠) = ٠$

إما $٥\text{أ}' + ١٨ = ٠$ ⟵ مرفوض أو $\text{أ}' - ١٠ = ٠$ ⟵ $\text{أ}' = ١٠$

∴ $\text{أ}' = ١٠$ ، $\text{ب}' = ١٠$ ، $\text{جـ}' = ٨$

$\text{جا أ} = \text{جا ب} = \frac{\sqrt{٢٠}}{٥}$

، $\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{جـ}'^{٢}}{٢\,\text{أ}'\,\text{ب}'} = \frac{(١٠)^{٢} + (١٠)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٠ \times ١٠} = ٠,٩٦$

تمارين (٧)

١- أ ب جـ Δ فيه (ب') = ١١,٣ سم ، (جـ') = ١٥,٢ سم ، ق(< أ) = ٧٠° - احسب: أ'

٢- أ ب جـ Δ أ' = ٥٠ سم ، ب' = ٦٠سم ، جـ' = ٨٠ سم – أوجد : قياس أكبر زاوية في المثلث.

٣- أ ب جـ ء متوازي أضلاع ق (< أ) = ٦٠° ومحيطه ٢٢ سم وطول قطره الأصغر = ٧ سم

أوجد : أب ، ب جـ

٤- أ ب جـ Δ فيه جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، ب' = ١٠سم ، جـ = ٨ سم اثبت ان Δ أ ب جـ متساوي الساقين .

٥- خطأ! ارتباط غير صالح.ب جـ = ٢٠ سم و ق(< ب) = ٢٩° ، ق(< جـ) = ٧٣° ، ء منتصف ب جـ - أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$.

٦- أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ ء= ٨ سم ، أ جـ = ١١ سم – أثبت ان : الشكل أ ب جـ ء دائري .

٧- أ ب جـ ∆ فيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٥ سم ، جـ أ = ٢٤ سم – أوجد : طول المتوسط المنصف للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

٨- في ∆ أ ب جـ إذا علم ان :

$\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٦}$ جا جـ أوجد ق (< ب) ثم اثبت ان جتا جـ = $\frac{-١١}{٢٤}$

كذلك أوجد ق (< جـ)

٩- أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، أ جـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (< أ م ب) = ٥٠ ° - إحسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

١٠- أ ب جـ ∆ فيه أ َ : ب َ : جـ َ = ٣ : ٥ : ٧ - احسب قياس أكبر زاوية فيه .

حل المثلث

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه الثلاثة وقياس زواياه الثلاثة .

ملاحظات هامة :-

١) إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين

أستخدم القانون : $\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

٢) إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

أستخدم القانون : $\text{أ}'^2 = \text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - ٢\,\text{ب}'\,\text{جـ}'\,\text{جتا أ}$

٣) إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة

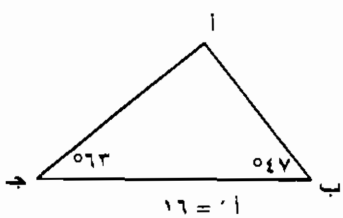
أستخدم القانون : $\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{أ}'^2}{٢\,\text{ب}'\,\text{جـ}'}$

أولاً : إذا علم زاويتان وضلع يكون المطلوب ضلعين وزاوية لذلك تستخدم قاعدة الجيب

$\left(\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} \right)$

مثال١: حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أ' = ١٦ سم ، ق (< ب) = ٤٧° ، ق (< جـ) ٦٣°

الحـــــل



- المعلوم : زاويتان وضلع
- المطلوب : ضلعين وزاوية

ق (< أ) = ١٨٠ – ٤٧ – ٦٣

ق(< أ) = ٧٠°

$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

$\frac{١٦}{\text{جا } ٧٠°} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}}$

$$\text{ب}' = \frac{\text{١٦ × جا ٤٧}}{\text{جا ٧٠}} = \text{١٢,٤ سم}$$

$$\text{جـ}' = \frac{\text{١٦ × جا ٦٣}}{\text{جا ٧٠}} = \text{١٥ سم}$$

<u>ثانياً</u> : إذا علم الأضلاع الثلاثة يكون المطلوب الزوايا الثلاثة لذلك تستخدم :

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{أ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ جـ}'} \qquad \text{جتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{ب}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ جـ}'}$$

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{جـ}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ ب}'}$$

<u>مثال</u>:- حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ َ = ١٨ سم ، ب َ= ٢٥ سم ، جـ َ = ٣٧ سم

<u>الحـــــل</u>

- **المعلوم : الأضلاع الثلاثة**
- **المطلوب : الزوايا الثلاثة**

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{أ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ جـ}'} = \frac{(٢٥)^2 + (٣٧)^2 - (١٨)^2}{٢ \times ٢٥ \times ٣٧} \quad \therefore \text{ق (< أ) = ٢٥° ٢٩´}$$

= ,, Sh Cos Sh = ٣٧ ÷ ٢٥ ÷ ٢ ÷ = Sh×٢ ١٨ − Sh×٢ ٣٧ + Sh×٢ ٢٥

$$\text{جتا ب} = \frac{\text{أ}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{ب}'^2}{\text{٢ أ}' \text{ جـ}'} = \frac{(٨)^2 + (٣٧)^2 - (٢٥)^2}{٢ \times ١٨ \times ٣٧} \quad \therefore \text{ق (< ب) = ٣٦° ٤١´}$$

ق (< جـ) = ١٨٠ - ٢٥° ٢٩´ - ٣٦° ٤١´

ق (< جـ) = ١١٧° ٥٠´

<u>ثالثا</u>: إذا علم ضلعين و قياس الزاوية المحصورة بينهما يكون المطلوب ضلع وزاويتان لإيجاد الضلع نستخدم :

$$\text{أ}'^2 = \text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{٢ ب}' \text{ جـ}' \text{ جتا أ}$$
$$\text{، ب}'^2 = \text{أ}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{٢ أ}' \text{ جـ}' \text{ جتا ب}$$
$$\text{، جـ}'^2 = \text{أ}'^2 + \text{ب}'^2 - \text{٢ أ}' \text{ ب}' \text{ جتا جـ}$$

ثم نستخدم $\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{أ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ جـ}'}$ **وهكذا ....**

مثال : حل المثلث أ ب جـ الذي فيه ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٥٤ سم ، ق (< أ) = ٥٣°

الحــــل

أ´٢ = ب´٢ + جـ´٢ – ٢ ب´ جـ´ جتا أ

أ´٢ = (٣٥)٢ + (٥٤)٢ – ٢ × ٣٥ × ٥٤ جتا ٥٣

٣٥ Sh ×٢ + ٥٤ Sh ×٢ -٢O٣٥O٥٤O٥٣ Cos =√

∴ أ´ = ٤٣ سم

جتا ب = (أ´٢ + جـ´٢ – ب´٢) / (٢ أ´ جـ´) = ((٤٣)٢ + (٥٤)٢ – (٣٥)٢) / (٢ × ٤٣ × ٥٤)

∴ ق (< ب) = ٤٠° ٢٠´

ق (< جـ) = ١٨٠ – ٥٣ – ٤٠° ٢٠´ = ٨٦° ٤٠´

تمارين (٨)

١- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : (ب´) = ٤٠سم ، (أ´) = ٣٢ سم ، ق (< جـ) = ١١٢° ٢٨´

٢- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (جـ´) = ٧٢ سم ، (ب´) = ٨٠ سم ، (أ´) = ٥٠ سم

٣- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٣٧سم ، (ب´) = ٥٦سم ، ق(< جـ) = ٤٣° ١٦´

٤- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : ق (< أ) = ٥٧° ٢´ ، ق(< ب) = ١٠٨° ٥´ ، (أ´) = ١٨,٩٥ سم

٥- حل Δ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٢٦ سم ، (ب´) = ١٨ سم ، (جـ´) = ١٤ سم

٦- حل Δ س ص ع حيث : (س´) = ٣ سم ، (ص´) = ٥ سم ، (ع´) = ٧ سم

٧- حل Δ أ ب جـ حيث : (أ´) = ٢٧سم ، (ب´) = ٣٦سم ، ق(< جـ) = ٤٣° ١٦´

٨- حل Δ س ص ع حيث : (سَ) = ٥ سم ، ق (< ع) = ٦٠° ، مساحة سطحه =

١٥ $\sqrt{٣}$ سم٢

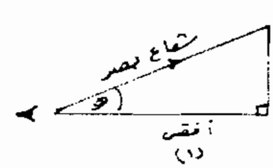
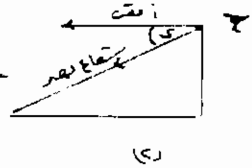
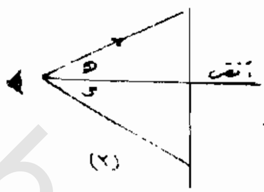
٩- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : (أَ) = ١٧ سم ، (بَ) = ٢٠ سم ، (جـَ) = ٢٩ سم

١٠- حل Δ س ص ع الذي فيه : (سَ) = ١٠ سم ، ق(< ص) = ٦٢° ، ق (< ع)

= ٤٨°

زوايا الارتفاع والانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين شعاع البصر والخط الأفقي الذي يمر بشعاع البصر .

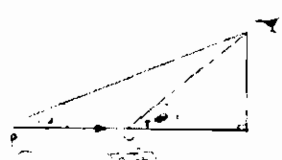
شكل (١) هـ زاوية ارتفاع
شكل (٢) ى زاوية انخفاض
شكل (٣) هـ ، ى زاويتي ارتفاع وانخفاض .

كيف تفكر في حل مسائل زوايا الارتفاع والانخفاض ؟

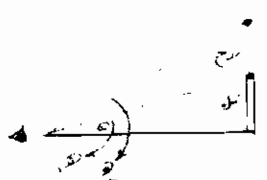
(١)ارسم المسالة جيدا .
(٢) من الرسم يتكون مثلثين مشتركان في ضلع واحد – احد المثلثين معلوم فيه طول ضلع والآخر مطلوب إيجاد طول ضلع فيه .
(٣) نبدأ بالمثلث المعلوم فيه طول ضلع ونستخدم قاعدة الجيب وبذلك توجد طول الضلع المشترك .
(٤) نستخدم قاعدة الجيب مرة أخرى في المثلث المطلوب إيجاد طول الضلع المجهول فيه .

أنواع المسائل

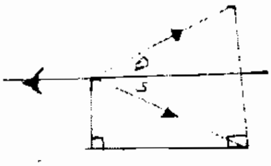
النوع الأول : -
رصد زاوية ارتفاع من مكانين مختلفين
أو زاوية انخفاض لجسم متحرك .



النوع الثاني :-
رصد زاوية ارتفاع قمة وقاعدة برج
فوق تل .



النوع الثالث :-
رصد زاوية انخفاض لجسم منخفض من
مكان أعلى .



النوع الرابع :-

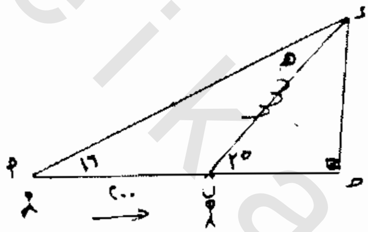
رصد زاويتي ارتفاع وانخفاض من مكان واحد
(تستخدم قاعدة الجيب) .

النوع الأول

مثال١

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاوية ارتفاع من برج فكانت ١٦° وإذا تحرك الشخص جهة قاعدة البرج مسافة ٢٠٠ متر ورصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فكانت ٣٥° احسب ارتفاع البرج .

الحـــــــل



في Δ أ ب ء

هـ = ٣٥ ـ ١٦ = ١٩°

Δ أ ب ء

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا أ}}$$

$$\frac{٢٠٠}{\text{جا}١٩} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا}١٦}$$

$$\therefore \text{ ب ء} = \frac{٢٠٠ \times \text{جا } ١٦}{\text{جا } ١٩} \qquad \therefore \text{ ب ء} = ١٦٩,٣٠ \text{ م}$$

في Δ ب ج ء

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا}٣٥} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا}٩٠}$$

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا}٣٥} = \frac{١٦٩,٣}{\text{جا } ٩٠} \qquad \text{د ج} = \frac{١٦٩,٣ \times \text{جا } ٣٥}{١}$$

∴ ء ج = ٩٧ م

مثال:

من نقطة أ في المستوى الأفقي المار بقاعدة برج رأسي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = س° وحين تقدم الراصد في اتجاه قاعدة البرج مسافة ف وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ص°

أثبت أن : ارتفاع البرج = $\frac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص- س)}}$

الحـــــــل

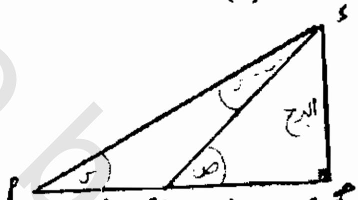
Δ ء ب أ

$$\frac{\text{ف}}{\text{جا (ص- س)}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}}$$

$\therefore$ ء ب = $\dfrac{\text{ف جا س}}{\text{جا (ص - س)}}$ ⟵ (١)

Δ ء جـ ب

$\dfrac{\text{ء ب}}{\text{جا س}} = \dfrac{\text{ء ب}}{\text{جا س}}$ $\therefore$ ء ب جا ص = ء جـ ⟵ (٢)



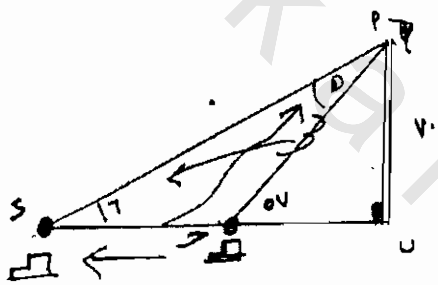
من ١ ، ٢

$\therefore$ ء جـ (ارتفاع البرج) = $\dfrac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص - س)}}$

مثال:

برج ارتفاعه ٧٠م رصدت زاوية انخفاض سيارة من قمة البرج في لحظة ما فكانت ٥٧° وبعد ٣ دقائق أصبحت زاوية ارتفاع السيارة هي ١٦° احسب سرعة السيارة (علما بان البرج والسيارة في الحالتين تقعان في مستوى رأسي واحد)

الحـــــــــل



Δ أ ب جـ

$\dfrac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}}$

$\dfrac{٧٠}{\text{جا٥٧}} = \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠}}$

$\therefore$ أ جـ = $\dfrac{\text{٧٠ × جا٩٠}}{\text{جا ٥٧}}$ = ٨٣,٤ م

في Δ أ جـ ء   هـ = ٥٧ ـ ١٦ = ٤١

$\dfrac{\text{جـ ء}}{\text{جا هـ}} = \dfrac{\text{أ جـ}}{\text{جا ء}}$

$\dfrac{\text{جـ ء}}{\text{جا ٤١}} = \dfrac{\text{٨٣,٤}}{\text{جا ١٦}}$

$\therefore$ جـ ء = $\dfrac{\text{٧٣,٤ × جا٤١}}{\text{جا ١٦}}$ = ١٩٨,٥ م

السرعة = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \dfrac{١٩٨,٥}{٣}$ = ٦٦,١ م / ق

مثال:

من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر عن سطح الأرض رصد رجل زاويتي انخفاض قاربين يقعان في مستوى رأسي مار بالرجل فوجد أن قياسهما ٣٠َ ٤٨° ، ٢٥َ ٣٢° . أوجد البعد بين القاربين .

الحـــــل

Δ أ ب جـ

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٩٠} = \frac{١٨٠}{\text{جا } ٣٠´٤٨°} \qquad \text{أ جـ} = \frac{١٨٠ \times \text{جا } ٩٠}{\text{جا } ٣٠´٤٨°} = ٢٤٠,٣ \text{ متر}$$

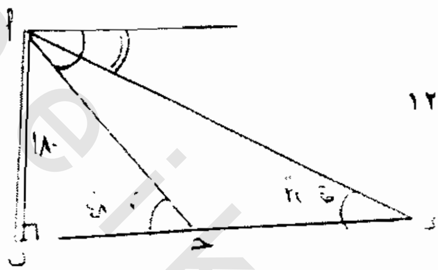
Δ أ جـ ء

ق (∠ ء أ جـ) = ٣٠ ´٤٨° ـ ٢٥ ´٣٢° = ٥ ´١٦°

$$\therefore \frac{\text{ء جـ}}{\text{جا } ٥´ ١٦°} = \frac{٢٤٠,٣}{\text{جا } ٢٥´ ٣٢°}$$

$$\therefore \text{ء جـ} = \frac{٢٤٠,٣ \times \text{جا } ٥´ ١٦°}{\text{جا } ٢٥´ ٣٢°} = ١٢٤,٢$$

∴ البعد بين القاربين = ١٢٤,٢ متر

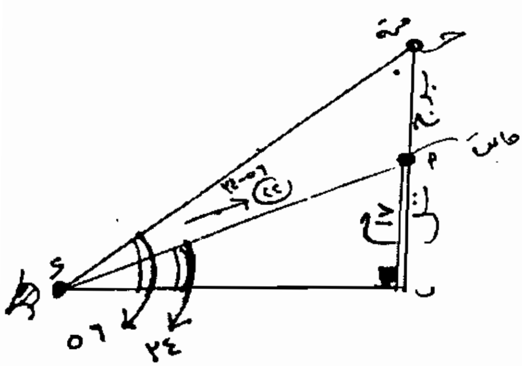


النوع الثاني

مثال:

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاويتي ارتفاع قمة وقاعدة برج مقام فوق تل ارتفاعه ١٧ متر فكانتا ٥٦°، ٣٤° احسب ارتفاع البرج .

الحـــــل



Δ أ ب ء

$$\frac{١٧}{\text{جا } ٣٤} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٩٠}$$

$$\therefore \text{أ ء} = \frac{١٧ \times \text{جا } ٩٠}{\text{جا } ٣٤} \qquad \therefore \text{أ ء} = ٣٠,٤ \text{ م}$$

Δ أ جـ ء :

$\angle$ (جـ) = ٩٠ ـ ٥٦ = ٣٤°

$$\frac{أ ء}{جا جـ} = \frac{أ جـ}{جا ء}$$

$$\frac{٣,٤}{جا ٣٤} = \frac{أ جـ}{جا ٢٢}$$

$$أ جـ = \frac{٣٠,٤ \times جا ٢٢}{جا ٣٤}$$

أ جـ = ٢٠,٣ م

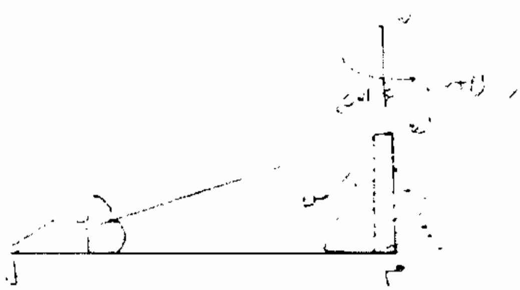
$\therefore$ ارتفاع البرج = ٢٠,٣ م

مثال:

برج ارتفاعه (ع) مقام على قمة جبل ارتفاعه س عن سطح الأرض ومن نقطة على سطح الأرض وجد أن الجبل يقابل زاوية مقدارها أ والبرج يقابل زاوية مقدارها ب

اثبت أن : ارتفاع الجبل = $\frac{جا أ \; جتا (أ + ب) \; ع}{جا ب}$

الحــــــــــل



Δ ن م ل

ق ($\angle$ ن) = ٩٠ ـ (أ + ب)

Δ ن هـ ل

$$\frac{هـ ل}{جا (٩٠ - (أ + ب))} = \frac{ع}{جا ب}$$

$$\therefore \frac{هـ ل}{جتا (أ + ب)} = \frac{ع}{جا ب}$$

$$\therefore هـ ل = \frac{جتا (أ + ب) ع}{جا ب} \leftarrow (١)$$

∴ Δ هـ م ل :

$\text{جا أ} = \frac{\text{س}}{\text{هـ ل}}$

∴ س = جا أ × هـ ل

بالتعويض في (١)

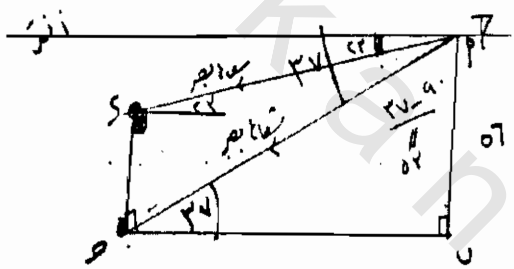
$\therefore \text{س} = \frac{\text{جا أ} \times \text{ع} \times \text{جتا}(\text{أ} + \text{ب})}{\text{جا ب}}$

النوع الثالث

مثال:

رصد زاويتي انخفاض لجسم منخفض من مكان أعلى من قمة برج ارتفاع ٥٦ متر رصدت زاوية انخفاض قمة وقاعدة برج آخر فكانت ٢٣° ، ٣٧° احسبي ارتفاع البرج الثاني والبعد الأفقي بين البرجين .

الحـــــــل



Δ أ ب جـ

$\frac{\text{٥٦}}{\text{جا ٣٧}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\text{ب جا}}{\text{جا ٥٣}}$

$\text{أ جـ} = \frac{\text{٥٦} \times \text{جا ٩٠}}{\text{جا ٣٧}} = \text{٩٣ م}$

$\text{ب جـ} = \frac{\text{٥٦} \times \text{جا ٥٣}}{\text{جا ٣٧}} = \text{٧٤,٣ م}$

في Δ أ جـ ء

ق (<أ) = ٣٧ ـ ٢٣ = ١٤° ق (<ء) = ٩٠ + ٢٣ = ١١٣°

$\therefore \frac{\text{ء جـ}}{\text{جا ١٤}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ١١٣}}$ $\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا ١٤}} = \frac{\text{٩٣}}{\text{جا ١١٣}}$

$\therefore \text{ء جـ} = \frac{\text{٩٣} \times \text{جا ١٤}}{\text{جا ١١٣}}$ ∴ ء جـ = ٢٤,٤ م

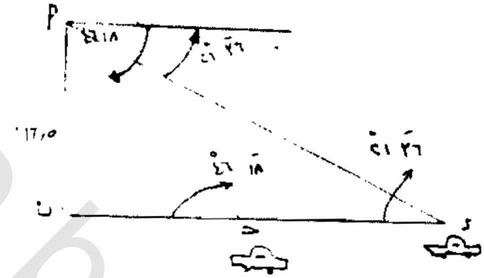
مثال:

من قمة برج ارتفاعه ١١٦,٥ مترا عن سطح الأرض وجد أن زاويتي انخفاض سيارتين على الطريق الأفقي المار بقاعدة البرج هما ١٨´ ٤٦° ، ٣٦´ ٢١° أوجد البعد بين السيارتين .

الحـــــــل

جـ أ ء = ١٨´ ٤٦° ـ ٣٦´ ٢١°

= ٤٢´ ٢٤°



Δ أ ب جـ القائم في ب

جا جـ = ١١٦,٥ / أ جـ

∴ أ جـ = ١١٦,٥ / جا ١٨´ ٤٦°

Δ أ جـ ء :

جـ ء / جا ٤٢´ ٢٤° = أ جـ / جا ٣٦´ ٢١°

∴ جـ ء = ١١٦,٥ × جا ٤٢´ ٢٤° / جا ٣٦´ ٢١°

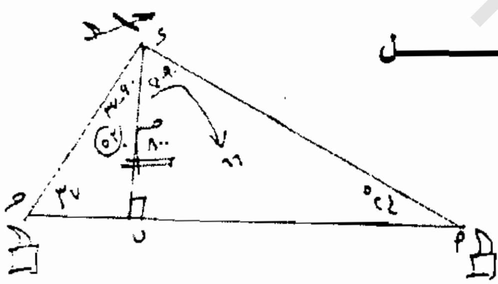
= ١١٦,٥ × جا ٤٢´ ٢٤° / جا ١٨´ ٤٦° × جا ٣٦´ ٢١°

= ١٨٢,٩

∴ البعد بين السيارتين = ١٨٣ متر تقريبا

مثال:

طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر من سطح البحر رصدت زاويتي انخفاض سفينتان فكانتا ٢٤° ، ٣٧° احسب البعد بين السفينة إذا علمت أن مسقط الطائرة يقع بين السفينتين .



الحـــــــل

Δ أ ب ء

أ ب / جا ٦٦ = ٨٠٠ / جا ٢٤

ا ب = ٨٠٠ × جا ٦٦ / جا ٢٤ = ١٧٩٦,٨ متر

Δ ء ب جـ   ب جـ / جا ٥٣ = ٨٠٠ / جا ٣٧

ب جـ = ٨٠٠ × جا ٥٣ / جا ٣٧ = ١٠٦١,٦ متر

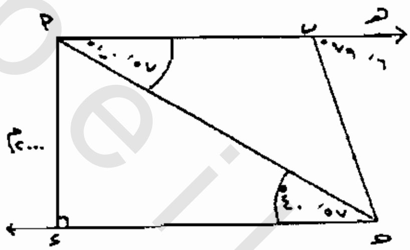
البعد بين السفينتين = أ ب + ب جـ = ١٧٩٦,٨ + ١٠٦١,٦

= ٢٨٥٨,٤ متر

مثال:

رصد طيار معسكرا وهو على ارتفاع ٢٠٠٠ م عن سطح البحر فوجد أن قياس زاوية انخفاض ٥٧´ ٤٠° وبعد أن سار دقيقتين وهو على نفس الارتفاع متجها نحو المعسكر وقبل أن يصله وجد أن قياس زاوية انخفاض المعسكر أصبحت ٧´ ٧٩° . فما سرعة الطيار بالمتر / الثانية ؟

الحــــــــل



أ موضع الطيار الأول.

ب موضع الطيار بعد دقيقتين ، جـ المعسكر

ب أ جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الأول

هـ ب جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الثاني

ق(ب أ جـ) = ق (أ جـ ء) = 57´ ٤٠° بالتبادل

ق (ب جـ ء) = ق (جـ ب هـ) = ٦´ ٧٩° بالتبادل

∴ ق (أ جـ ب) = ٦´ ٧٩° - ٥٧´ ٤٠° = ٩´ ٣٨°

Δ أ ء جـ القائم فيه جا (أ جـ ء) = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا (< أ جـ ء)}}$ = $\frac{٢٠٠٠}{\text{جا (٥٧´ ٤٠°)}}$ = ٣٠٥١,٦

ق (أ ب جـ) = ١٨٠ - (٦´ ٧٩°) = ٥٤´ ١٠٠°

Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا (< أ ب جـ)}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا (< أ جـ ب)}}$ = $\frac{٣٠٥١,٦}{\text{جا (٥٤´ ١٠٠°)}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا (٩´ ٣٨°)}}$

أ ب = $\frac{\text{٣٠٥١,٦ جا ٩´ ٣٨°}}{\text{جا ٥٤´ ١٠٠°}}$ = ١٩٢٠

سرعة الطيار بعد دقيقتين = $\frac{١٩٢٠}{٢ \times ٦٠}$ = ١٦ م / ث

مثال:

برج به فتحتان أ ، ب في مستوى رأسي واحد المسافة بينهما ٣,٥ م رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج فكان قياسا زاويتي ارتفاعهما هما ٣٠´ ٥٧ ، ٤٨´ ١٢° على الترتيب . أوجد بعد النقطة جـ عن قاعدة البرج (أ ب قطعة مستقيمة راسية)

الحـــــــــل

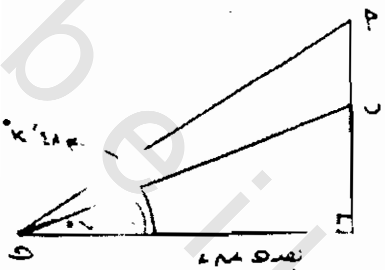
ق (< أ) = ١٨٠ ـ (٩٠ + ٤٨′ ١٢°) = ١٢′ ٧٧°

ق (< أ جـ ب) = ٤٨′١٢° ـ ٣٠′ ٥٧° = ١٢′ ٥٥°

Δ أ ب جـ فيه أ ب / جا (< أ جـ ب) = ب جـ / جا (< أ)

٣,٥ / جا ١٢′ ٥٥° = ب جـ / جا ١٢′ ٧٧°

∴ ب جـ = ٣,٥ جا ١٢′ ٧٧° / جا ١٢′ ٥٥° = ٣٧,٧ م



Δ ب جـ ء القائم

∴ جتا (< ب جـ ء) = ء جـ / ب جـ

∴ ء جـ = ب جـ جتا (< ب جـ ء)

= ٣٧,٣ جتا ٣٠′ ٥٧° = ٣٧ م .

النوع الرابع

مثال:

رصد زاوية ارتفاع وانخفاض معا من شرفة منزل يرتفع عن سطح الأرض ٨ متر رصدت زاويتي ارتفاع وانخفاض برج مقابل فكانتا ٣٧° ، ١٨° احسب :

ـ البعد بين المنزل والبرج ـ ارتفاع البرج

الحـــــــــل

Δ أ ب جـ

أ جـ / جا ب = أ ب / جا جـ = ب جـ / جا أ

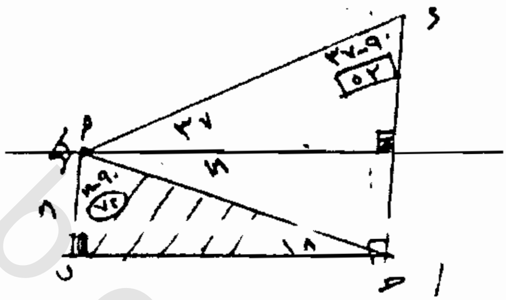
أ جـ / جا ٩٠ = ٨ / جا ١٨ = ب جـ / جا ٧٢

ا جـ = ٨ جا ٩٠ / جا ١٨ = ٢٤,٦ متر (البعد بين المنزل والبرج)

في Δ أ جـ ء

$$\frac{د\ جـ}{جا\ ا} = \frac{ا\ جـ}{جا\ د}$$

$$\therefore \frac{ء\ جـ}{جا\ ٥٥} = \frac{٢٥,٨}{جا\ ٥٣}$$



$$\therefore ء\ ج = \frac{٢٥,٨ \times جا\ ٥٥}{جا\ ٥٣}$$

∴ ء ج = ٢٦,٤ متر

ارتفاع البرج = ٢٦,٤ متر

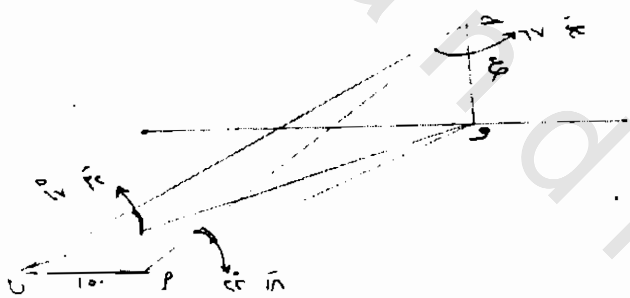
مثال:

شاهد رجل قمة منذنة تقع شماله فوجد أن زاوية ارتفاعها 18َ ٢٢° ولما سار مسافة ١٥٠متر جنوبا وجد أن زاوية ارتفاع قمة المنذنة أصبحت 32َ ١٧° فما ارتفاع المنذنة .

الحـــــــــل

و ا = ع طا 42َ ٦٧°

= ٢,٤٣٨٢ ع



و ب = ع طا 28َ ٧٢°

= ٣,١٦٥٨ ع

ب ا ⊥ ا و

Δ و ا ب قائم :

∴ و ب^{٢} = و ا^{٢} ــ ا ب^{٢}

ع^{٢} (٣,١٦٥٨)^{٢} = ع^{٢} (٢,٤٣٨٢)^{٢} + ١٥٠^{٢}

$$ع^{٢} = \frac{٢٢٥٠٠}{٤,٠٧٧٢} = ٥٥١٨,٠٤٩$$

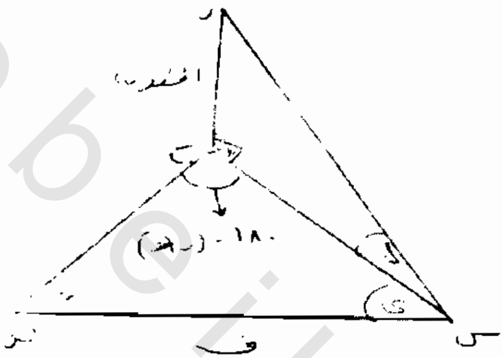
∴ ع = ٧٢,٢٨

مثال:

س ، ص نقطتان في المستوى الأفقي المار بنقطة ع حيث ع قاعدة منذنة قمتها ن ، ع ∉ صَ سَ وكـــان س ص = ف ، ق (< س ص ع) = هــ ، ق (< ص س ع) = ى وقياس زاوية ارتفاع قمة المنذنة من س = ل°

اثبت أن : ارتفاع المئذنة = $\frac{\text{ف جا هـ طا ل}}{\text{جا(ى + هـ)}}$

الحـــــــل



Δ س ع ن :

طا ل = $\frac{\text{ع}}{\text{س ع}}$

∴ ع = س ع طا ل ← ١

Δ س ص ع :

$\frac{\text{ف}}{\text{جا(ى + هـ)}} = \frac{\text{س ع}}{\text{جا هـ}}$

∴ س ع = $\frac{\text{ف جا هـ}}{\text{جا(ى + هـ)}}$ ← ٢

من ١ ، ٢

∴ ع (ارتفاع البرج) = $\frac{\text{ف جا هـ طا ل}}{\text{جا(ى + هـ)}}$

مثال:

شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٢´ ٢٧° ولما صعد نجو التل مسافة ٢٠٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ١٧° وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٥´ ٢٦° . احسب ارتفاع التل .

الحـــــــل

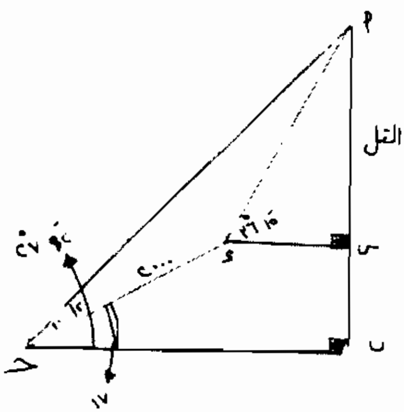
ق (س ء جـ) = ١٨٠ ـ ١٧ = ١٦٣

ق (أ ء جـ) = ٣٦٠ ـ (١٦٣ + ١٥´ ٢٦°)

= ٤٥´ ١٦٠°

ق (ء أ جـ) = ١٨٠ ـ (٤٥´ ١٦٠° + ١٢´ ١٠°)

= ٣´ ٩°



Δ أ جـ ء

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٤٥´ ١٦٠°}} = \frac{\text{٢٠٠٠}}{\text{جا ٣´ ٩°}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{٢٠٠٠× جا ٤٥´ ١٦٠°}}{\text{جا ٣´ ٩°}}$ = ٤١٠١,٩٧

Δ أ ب جـ

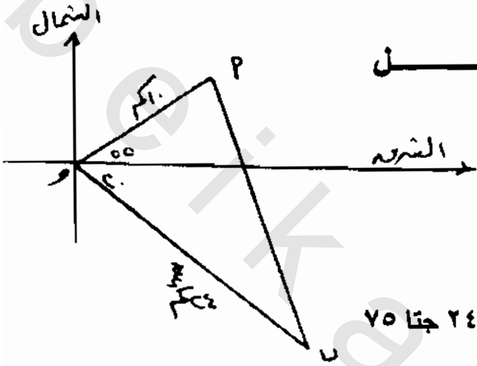
$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا٩٠}} = \frac{\text{٢٠٠٠}}{\text{جا ١٢´ ٢٧°}}$

∴ أ ب = ٤١٩١,٩٧ × جا ١٢´ ٢٧°

= ١٩١٦ وهو ارتفاع البرج

مثال:

تحركت سفينة من نقطة ما في اتجاه ٧٠° شرق الجنوب مسافة ٢٤ كم وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٥٥° شمال الشرق مسافة ١٠ كم . أوجد المسافة بين السفينتين .



الحـــــــل

Δ أ ب و

(أ ب)^{٢} = (أ و)^{٢} + (و ب)^{٢}

- ٢ (أ و) (ب و) جتا أ و ب

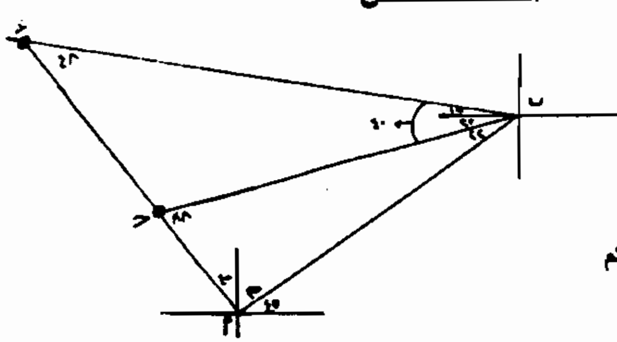
= (١٠٠)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢ × ١٠ × ٢٤ جتا ٧٥

∴ أ ب ⟵ ٢٣,٤٩ كم

مثال:

سفينة تسير نحو الشمال الشرقي بسرعة ٢٤ كم / ساعة شاهد راكب فيها نقطتين ثابتين تجاه ٢٥° غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت في اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى في اتجاه ١٧° شمال الغرب - أوجد البعد بين النقطتين علما بأن النقطتين والرجل في مستوى أفقي واحد .

الحـــــــل



السرعة = ٢٤ كم / س

الزمن = ٤ ساعات

∴ المسافة = السرعة × الزمن

= ٢٤ × ٤ = ٩٦ كم

Δ أ ب جـ :

ب جـ / جا ٧٠ = ٩٦ / جا ٨٨

∴ ب جـ = (٩٦ × جا ٧٠) / جا ٨٨ = ٩,٣ ← ١

Δ ب جـ ء :

ب جـ / جا ٤٨ = جا ء / جا ٤٠

∴ جـ ء (البعد بين النقطتين) = (ب جـ جا ٤٠) / جا ٤٨ ← ٢

بالتعويض من ١ في ٢

∴ جـ ء = (٩,٣ × جا ٤٠) / جا ٤٨ = ≅ ٨

تمارين (٩)

١- قاس شخص زاوية ارتفاع قمة منزل فوجدها ١٢َ ٢٧° ثم سار مسافة ١٦ متر متجهاً نحو المنزل وقاس زاوية ارتفاع قمة المنزل مرة أخري فوجدها ٤٩َ ٣٥° - أوجد ارتفاع المنزل .

٢- من نقطة في المستوي الأفقي المار بقاعدة تل رصد شخص قمة تل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٥َ ٤٢° ولما سار جهة التل مسافة ٢٣٥ متر ورصد قمة التل مرة ثانية فوجد زاوية ارتفاعها ٣٠َ ٦٧° - أحسب ارتفاع التل .

٣- من قمة صخرة ارتفاعها ٧٠ متر رصد قاربين بزاويتي انخفاض ٢٠° ، ٤٥°- أوجد البعد بين القاربين علماً القاربين وقاعدة الصخرة في مستوي أفقي واحد.

٤- رصد شخص من نقطة علي سطح الأرض قمة برج رأسي فوجد أن قياس زاويةارتفاع قمة البرج تساوي ٣٥َ ١٢° وعندما سار مسافة ٧٥ متر نحو البرج وجد أن زاوية ارتفاع قمة البرج أصبح مقاسها ٢٨َ ١٧° - أوجد ارتفاع البرج من سطح الأرض .

٥- من نقطة علي سطح الأرض رصد رجل زاويتا ارتفاع أعلي وأسفل نقطة من سارية علم مثبتة رأسياً فوق سطح منزل فوجدهما ٢٦َ ٥٤° ، ١٢َ ٤٣° فإذا كان طول السارية ٨,٢٥ متر - فأوجد ارتفاع المنزل .

٦- قلعة ارتفاعها ٢٠ متر فوق قمة تل فإذا كان قياس زاويتا قمة القلعة وقاعدتها من نقطة علي سطح الأرض هما ٢٤´ ٥٦٥ ، ٥٣٨ - إحسب ارتفاع التل .

٧- برجان رأسيان البعد الأفقي بينهما ٦٠متر وزاوية أنخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثاني هي ٥٣٠ - أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثاني ١٥٠متر .

٨- برج ارتفاعه ٣٠متر مقام فوق جبل – فإذا كانت زاويتاارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة علي سطح الأرض هما ١٢´ ٥٦٧ ، ٥٣٥ - أوجد ارتفاع الجبل .

٩- رصد طيار في وقت واحد محطتين علي سطح الأرض أ ، ب المسافة بينهما ١٥٠٠متر فوجد أن قياس زاويتي أنخفاضيتهما ٥٤٨ ، ٥٥٧ فإذا كانت الطائرة والمحطتين في مستوي رأسي واحد – أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض علماً بأن مسقط الطائرة علي الأرض يقع علي أ ب .

١٠- من قمة برج قيست زاويتي أنخفاض قمة منذنة وقاعدتها فكانتا ٢٧´ ٥٣، ٥٢´ ٥٥٧ علي الترتيب – اوجد ارتفاع البرج إذا كان ارتفاعع المنذنة ٣٧متر .

١١- من قمة صخرة قيست زاويتا أنخفاض علامتين علي الأرض البعد بينهما كيلو متر واحد فوجدتا ٥٧٤ ، ٥٥٢ علي الترتيب وفي نفس الأتجاه شرق الصخرة – أوجد ارتفاع الصخرة .

١٢- برج به فتحتان س،ص في خط رأسي واحد المسافة بينهما ١٥متر رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوي الأفقي المار بقاعدة البرج فكانت زاويتا ارتفاعهما ٢٨´ ٥١١ ، ١٩´ ٥١٥ - أوجد بعد جـ عن قاعدة البرج .

١٣- أراد رجل أن يعين ارتفاع قمة تل فأختار نقطتين ب ، جـ في مستوي قاعدة التل البعد بينهما ٥٠٠متر ثم رصد نقطة أ علي قمة التل فكانت < أ ب جـ=٥١٢٧ ، < أجـ ب=٥٣٣ وزاوية ارتفاع نقطة أ من الموقع ب هي ١٤´ ٥٥ - أحسب ارتفاع التل .

١٤- أ ، ب نقطتان المسافة بينهما ١٢٠قدماً ، جـء برج قاعدته جـ تقع في المستوي الأفقي المار بالنقطتين أ ، ب . رصدت قمة البرج ء من نقطة أ فكانت زاوية ارتفاعها ٣٨´ ٥١٢ فإذا كانت < ب أ جـ = ١٢´ ٥٧٧ ، < أ ب جـ = ٣٠´ ٥٦٥ فأوجد ارتفاع البرج لأقرب قدم .

١٥- من قمة منزل ارتفاعه ١٥متر كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٦٧° ، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٥° - أوجد ارتفاع البرج علماً بأن قاعد البرج وقاعدة المنزل في مستوي أفقي واحد .

١٦- شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٤٢° ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠متر علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ٥٨° - احسب ارتفاع التل .

١٧- وقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسم عند نقطة جـ التي تبعد ٦٠متر شرق ب عندما سار من ب إلي أ في أتجاه ١٠° شمال الشرق وجد أن النقطة جـ في اتجاه ١٥° جنوب الشرق من أ – أوجد بعد جـ من أ .

١٨- بدأت قاذفة قنابل رحلة لها من مدينة (أ) قاصدة مدينة (ب) فطارت في مستوي أفقي في إتجاه ٣٢° ٤٢´ شرق الشمال فوصلت (ب) بعد أن قطعت مسافة ٣٨٥ ميلاً ثم غيرت اتجاهها بعد ذلك وطارت في اتجاه ٤١° ٣٦´ غرب الشمال فوصلت إلي مدينة (جـ) بعد أن قطعت مسافة ٥١٠ ميلاً فإذا أرادت العودة من (جـ)إلي (أ) من أقصر طريق ففي أي أتجاه تطير ؟ .

النسب المثلثية للزاوية المركبة (أ - ب) ، (أ + ب)

١) جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٢) جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

٣) ظا (أ - ب) = $\dfrac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

٤) جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

٥) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

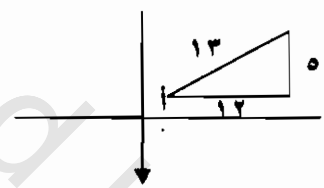
٦) ظا (أ + ب) = $\dfrac{\text{ظا أ + جا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

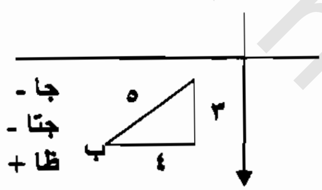
النوع الأول من المسائل إيجاد النسب المثلثية:

مثال: إذا كانت ظا أ = $\dfrac{\text{٥}}{\text{١١}}$ ، ظا ب = $\dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$

حيث: ٠ < أ < $\dfrac{\text{ط}}{\text{٢}}$ ، ١٨٠° < ب < ٢٧٠°

الحل:





ظا أ = $\dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\dfrac{\text{٥}}{\text{١٢}}$ ، ظا ب = $\dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\dfrac{\text{٣}}{\text{٤}}$

جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب = $\dfrac{\text{٥}}{\text{١٣}}$ × $\dfrac{\text{-٤}}{\text{٥}}$ - $\dfrac{\text{١٢}}{\text{١٢}}$ × $\dfrac{\text{-٣}}{\text{٥}}$

جا (أ - ب) = $\dfrac{\text{-٢٠}}{\text{٦٥}}$ + $\dfrac{\text{٣٦}}{\text{٦٥}}$ ∴ جا (أ - ب) = $\dfrac{\text{١٦}}{\text{٦٥}}$

∴ قتا (أ - ب) = $\dfrac{\text{٦٥}}{\text{١٦}}$

جتا (أ - ب) = جتا أ . جتا ب + جا أ جا ب

$$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{-٣}{٥}$$

$$= \frac{-٤٨}{٦٥} \quad \frac{-١٥}{٦٥}$$

جتا (أ - ب) = $\frac{-٦٣}{٦٥}$ ومنها قا (أ - ب) = - $\frac{٦٥}{٦٣}$

ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$ = $\dfrac{\frac{٥}{١٢} + \frac{٣}{٤}}{١ + \frac{٥}{١٢} \times \frac{٣}{٤}}$

ظا (أ - ب) = $\frac{٢٠ - ٣٦}{٤٨ + ١٥}$ ظا (أ - ب) = $\frac{-١٦}{٦٣}$

ملاحظات:-

١) قتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ + ب)}}$

٢) قا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جتا (أ + ب)}}$

٣) ظتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{ظا (أ + ب)}}$ = $\frac{\text{١ - ظا أ ظا ب}}{\text{ظا أ + ظا ب}}$

٤) جتا أ ي زاوية = - جتا المكملة لها

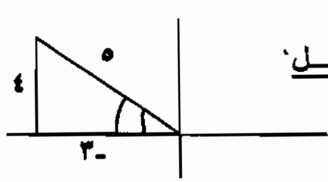
٥) جا أي زاويـة = جا مكملتها

٦) ظا أي زاويـة = - ظا المكملة لها

مثال: إذا كان: جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢} < أ < ب < ط$

أوجد: قتا (أ - ب)

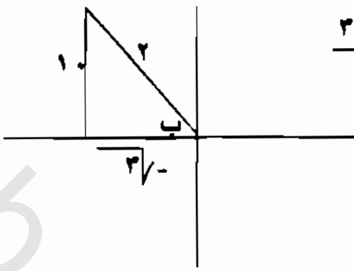
الحـــــل



∵ قتا (أ - ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ - ب)}}$

∴ جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

$$= \frac{٤}{٥} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \left(\frac{-٣}{٥}\right)\frac{١}{٢}$$



$$= \frac{٤\sqrt{٣}}{١٠} + \frac{٣}{-(١٠)} = \frac{-٤\sqrt{٣} + ٣}{١٠}$$

∴ قتا (أ - ب) = $\frac{١٠}{-٤\sqrt{٣} + ٣}$

<u>مثال</u>: أ ب جـ مثلث حاد الزاوية فيه جتا أ = $\frac{١}{٣}$ ، جتا ب = $\frac{١}{٤}$

أوجد جتا (أ + ب) ، جتا جـ

<u>الحــــــل</u>

∵ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا أ

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٨}}{٣} \times \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$$

$$= \frac{١}{١٢} - \frac{١٢٠}{١٢} = ١ - \frac{\sqrt{١٢٠}}{١٢}$$

∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ أ + ب تكمل جـ

∴ جتا (أ + ب) = - جتا جـ

∴ جتا جـ = $\frac{-١ + \sqrt{١٢}}{١٢}$

<u>النوع الثانى من المسائل:-</u>

إيجاد النسب المثلثية لـ بعض الزاويا بأستخدام الزوايا الخاصة الزوايا:

١٥° ، ٧٥° ، ١٠٥

١) $١٥ = ٤٥ - ٣٠ = ٦٠ - ٤٥$

٢) $٧٥ = ٤٥ + ٣٠$

٣) $١٠٥ = ٦٠ + ٤٥$

<u>مثال</u>: بدون <u>الحاسبة</u> أوجد قيمة جا١٥ ، جتا١٥ ، ظا١٥

<u>الحل</u>: جا١٥ = جا (٦٠ - ٤٥) = جا٦٠ جتا٤٥ - جتا٦٠ جا٤٥

$$\therefore \ ١) \ \text{جا}١٥ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\therefore \ \text{جا}١٥ = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

٢) جتا١٥ = جتا (٦٠ - ٤٥) = جتا ٦٠ جتا ٤٥ + جا ٦٠ جا ٤٥

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$\text{جتا}١٥ = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$٣) \ \text{ظا} \ ١٥ = \text{ظا} \ (٦٠ - ٤٥) = \frac{\text{ظا} \ ٦٠ - \text{ظا} \ ٤٥}{١ + \text{ظا}٦٠ \ \text{ظا} \ ٤٥}$$

$$\text{ظا} \ ١٥ = \frac{\sqrt{٣} - ١}{١ + \sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} + ١} \times \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} - ١} = \frac{(\sqrt{٣} - ١)^{٢}}{٣ + ١}$$

$$\text{ظا} \ ١٥ = \frac{٣ + ١ - ٢\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٢} = ٢ - \sqrt{٣}$$

مثال: برهن أن: ٢$\sqrt{٢}$ جتا ٧٥ = $\sqrt{٣}$ - ١

الحـــــل

∵ جتا ٧٥ = جتا (٤٥ + ٣٠)

= جتا ٤٥ جا ٣٠ - جا ٤٥ جتا ٣٠

= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$ - $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$

∴ الأيمن = ٢$\sqrt{٢}$ جتا ٧٥ = ٢$\sqrt{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$

= $\sqrt{٣}$ - ١ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٣٥ + جتا ٦٥ = جتا ٥

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ٥) + جتا (٦٠ + ٥)

= جا ٣٠ جتا ٥ + جتا ٣٠ جا ٥ + جتا ٦٠ جتا ٥ - جا ٦٠ جا ٥

= $\frac{١}{٢}$ جتا ٥ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٥ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا ٥

= جتا ٥ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٢٠ + جا ٤٠ = جا ٨٠

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ - ١٠) + جا (٣٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ - جتا١٠ جا٣٠ + جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠

= $\frac{١}{٢}$ جتا ١٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا ١٠ = جتا ١٠ ⇦ (١)

الطرف الأيسر = جا ٨٠ = جا (٩٠ - ١٠) = جتا ١٠ ⇦ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال: بدون الحاسبة

أثبت أن مهما كانت قيمة أ يكون $\sqrt{٢}$ جتا ($\frac{ط}{٤}$ - أ) = جتا أ + جا أ

الحـــل

$\sqrt{٢}$ [جتا ٤٥ - أ] = $\sqrt{٢}$ [جتا أ جتا ب + جا أ جا ب]

= $\sqrt{٢}$ [جتا ٤٥ جتا أ + جا ٤٥ جا أ]

= $\sqrt{٢}$ [$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جتا أ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جا أ]

= جتا أ + جا أ

مثال: بدون الحاسبة أثبت أن: جا ٤٠ + جتا ٧٠ = جتا ١٠

الحـــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ١٠) + جتا (٦٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠ + جتا٦٠ جتا١٠ - جا٦٠ جا١٠

= $\frac{١}{٢}$ جتا١٠ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا١٠ + $\frac{١}{٢}$ جتا١٠ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جا١٠

= جتا١٠ = الأيسر

النوع الثالث: التطبيق العكسي للقوانين:

بدون الحاسبة أوجد قيمة.

١) جا ٧٥ جتا ١٥ - جتا ٧٥ جا ١٥

٢) جتا ٣٨ جتا ٨ + جا ٣٨ جا ٨

٣) $\frac{\text{ظا ٦٥ - ظا ٢٠}}{\text{١ + ظا ٦٥ ظا ٢٠}}$

الحـــل

مفكوك ١) جا (٧٥ - ١٥) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مفكوك ٢) جتا (٣٨ - ٨) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مفكوك ٣) هو ظا (٦٥ - ٢٠) = ظا ٤٥ = ١

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جا ٤٠ جتا ١٠ + جا ٥٠ × جا ١٠

الحل: تعدل إلى جا ٤٠ جتا ١٠ + جتا ٤٠ جا ١٠

= جا (أ + ب)

= جا (٤٠ + ١٠) = جا ٥٠

مثال: أثبت أن: ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$ بدون الحاسبة

الحل: ظا ٥٠ = ظا (٤٥ + ٥) = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٤٥ ظا ٥}}$

ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$

مثال: أثبت أن: جا (س + ٧٠) + جتا (٣٠ - س) + جتا (س + ٧٠) جا (٣٠ - س)

لا تتوقف على قيمة س.

الحل: المقدار = جا [(س + ٧٠) + (٣٠ - س)]

= جا (أ + ب)

= جا (س + ٧٠ + ٣٠ - س) = جا ١٠٠

∴ المقدار لا يتوقف على قيمة س.

مثال: برهن أن:

جتا (س - ١١٠) جتا (س + ٧٠) + جا (س - ١١٠) جا (س + ٧٠) = -١

الحل: المقدار على صورة جتا (أ - ب)

∴ جتا [(س - ١١٠) - (س + ٧٠)]

= جتا (س - ١١٠ - س - ٧٠)]

= جتا (-١٨٠) = جتا ١٨٠

= -١ = الأيسر

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جتا ٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ × جا ٧٥

الحـــــل

= جتا٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ جا ١٥

= جتا (٧٥ + ١٥) = جتا ٩٠ = صفر

النوع الرابع: إثبات صحة علاقات:

مثال: أثبت أن: $\frac{\text{جا}(أ+ب) + \text{جا}(أ-ب)}{\text{جتا}(أ+ب) + \text{جتا}(أ-ب)} = \text{ظا}\ أ$

الحل: $\frac{\text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب} + \text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب} + \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}}$

$= \frac{2\,\text{جا أ جتا ب}}{2\,\text{جتا أ جتا ب}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \text{ظا أ} = \text{الأيسر}$

مثال: إذا كانت أ ، ب قياسا زوايتين حادتين، ظا أ = $\frac{4}{5}$ ، ظا ب = $\frac{1}{9}$

أثبت بدون أستخدام الآلة الحاسبة أن: أ + ب = ٤٥

الحل: إذا أمكن أثبات أن ظا (أ + ب) = ١ فإن أ + ب = ٤٥°

$\text{ظا}(أ+ب) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{9}}{1 - \frac{4}{5} \times \frac{1}{9}}$

$= \frac{\frac{36+5}{45}}{\frac{45-4}{45}} = \frac{41}{41} = 1$

مثال: أثبت أن: $\text{ظا}(45 - \text{جـ}) = \frac{\text{جتا جـ} - \text{جا جـ}}{\text{جتا جـ} + \text{جا جـ}}$

الحل: الأيمن = $\frac{\text{ظا } 45 - \text{ظا جـ}}{1 + \text{ظا } 45\ \text{ظا جـ}}$

$= \frac{1 - \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}{1 + 1 \times \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}$ بضرب البسط والمقام في جتا جـ

∴ ظا (٤٥ - جـ) = $\dfrac{\text{جتا جـ - جا جـ}}{\text{جتا جـ + جا جـ}}$ = الأيسر

<u>مثال:</u> أوجد قيمة أ ∈ [٠ ، ٣٦٠] التي تحقق المعادلة:

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$

<u>الحـــــل</u>

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$

جا (أ + ١٥) = $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$

∵ جا موجب ∴ أ + ١٥ في الربع الأول

أ + ١٥ في الربع الثاني

∴ أ + ١٥ = ٣٠° أو أ + ١٥ = ١٥٠°

∴ أ = ١٥° أ = ١٣٥°

<u>مثال:</u> إذا كان: جا ١٠٥ جتا هـ - جتا ١٠٥ جا هـ = ١

أوجد قيمة هـ حيث هـ ∈] ٠ ، $\dfrac{\text{ط}}{\text{٢}}$ [

<u>الحـــــل</u>

الأيمن هو مفكوك جا (١٠٥ - هـ) = ١

الزاوية التي جيبها ١ هي ٩٠°

١٠٥ - هـ = ٩٠

١٠٥ - ٩٠ = هـ

هـ = ١٥°

تمرين (١٠)

١) إذا كان قا أ = $\frac{١٧}{٨}$ ، قتا ب = $\frac{٥}{٤}$ برهن: قتا (أ + ب) = $\frac{٨٥}{٧٧}$

٢) أ ب جـ مثلث فيه ظا أ = ٣ ، جا ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

أوجد: جتا (أ + ب) ثم برهن ق (جـ) = ٤٥°

٣) إذا كانت: أ ∈]٠ ، $\frac{ط}{٢}$[حيث جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ب ∈]ط ، $\frac{٣ط}{٢}$[

حيث ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ أوجد قيمة: ظا (أ + ب) ، ظا (أ - ب)

٤) إذا كان: ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$ برهن أن: أ + ب = ٤٥°

٥) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{١}{٨}$

برهن: (أ) + (ب) + (جـ) = ٤٥°

٦) إذا كان ٥ جا أ + ٣ = ٠ ، حيث أ ∈]ط ، ٣ط[، جتا ب = $\frac{٧}{٢٥}$

حيث ب ∈] $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٢ط[أوجد قيمة: قتا (أ - ب) ، قا (أ - ب) ، ظتا (أ - ب)

٧) المثلث أ ب جـ الحاد الزاوية إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$

اثبت أن: أَ : بَ : جَ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

٨) أثبت أن: جا ٢٣ + جتا ٥٣ = جتا ٧

٩) اثبت أن: ظا ٧٥ - ظا ٣٠ - ظا ٧٥ ظا ٣٠ = ١

١٠) أوجد قيمة: ظا $\frac{٧ط}{١٢}$

١١) أوجد قيمة: ظا ١٥ ، ظا $\frac{٧ط}{١٢}$

١٢) برهن أن: ظا ٥٥ = $\frac{١ + ظا ١٠}{١ - ظا ١٠}$

١٣) أوجد قيمة: جا ٣٧ جتا ٨ + جتا ٣٧ جتا ٨٢

١٤) جتا ١٠٥ جتا ١٥ + جا ١٠٥ جتا ٧٥

١٥) أوجد قيمة: $\frac{١ + ظا ٤٠ ظا ١٧٥}{ظا ٤٠ - ظا ١٧٥}$

١٦) جتا $\frac{٥ط}{١٢}$ جتا $\frac{ط}{١٢}$ - جا $\frac{٥ط}{١٢}$ جا $\frac{ط}{١٢}$

١٧) اختصر: $\frac{١ + ظا ١٥ ظا ١٥٠}{ظا ١٥ - ظا ١٥٠}$

١٨) أوجد قيمة: جا ٣٤ جتا ١١ + جتا ٣٤ جتا ٧٩

١٩) أوجد قيمة: $\frac{جتا ٤٢ جتا ١٢ + جا ٤٢ جا ١٢}{جا ٢٥ جتا ٣٥ + جتا ٢٥ جا ٣٥}$

٢٠) برهن: $\frac{جتا ٤٣ جتا ١٣ + جا ٤٣ جا ١٣}{جا ٣٠ ٢ ١٢° جتا ٣٠ ٢ ٣٢° + جتا ٣٠ ٢ ١٢° جا ٣٠ ٢ ٣٢°} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١) أثبت أن: ظا (٤٥ + أ) = $\frac{جتا أ + جا أ}{جتا أ - جا أ}$

٢٢) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا مثلث فأثبت أن:
ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

٢٣) إذا كان جا (س + ص) = $\frac{٣}{٤}$ ، جا (س - ص) = $\frac{١}{٢}$

برهن أن: ظا س = ٥ ظا ص

٢٤) أثبت أن جا (أ + ب) جا (أ - ب) = جا^{٢}أ - جا^{٢}ب

٢٥) إذا كان ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) + ق(جـ) = $\frac{ط}{٢}$ فأثبت أن:

ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ١

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

(١) جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ

الأثبات: ∵ جا (ا + ب) = جا أ جتا ب + جتا ا جا ب   بوضع أ = ب

∴ جا (أ + ب) = جا ا جتا ا + جتا أ جا أ

جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

∴ جا ضعف أي زاوية = ٢ جا الزاوية × جتا الزاوية

ملحوظة: إذا وضعنا $\frac{أ}{٢}$ بدلاً من أ

∴ جا أ = ٢جا $\frac{ا}{٢}$ جتا $\frac{ا}{٢}$

(١) جتا٢ا = جتا^{٢}ا - جا^{٢}ا

= ١ - ٢جا^{٢}ا

= ٢جتا^{٢} - ١

الأثبات: جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب   بوضع أ = ب

جتا (ا + ا) جتا ا جتا ا - جا أ جا أ

∴ جتا٢ا = جتا^{٢}ا - جا^{٢}ا

، ∵ جا^{٢}ا = جتا^{٢}ا - ١

∴ جتا ضعف الزاوية = (١) جتا^{٢} الزاوية - جا^{٢} الزاوية

(٢) ٢جتا^{٢} الزاوية - ١

(٣) ١ - ٢ جا^{٢} الزاوية

ملحوظة: بوضع $\frac{أ}{٢}$ بدلا من أ   ∴ جتا أ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

= ٢جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١

= ١ - ٢جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

(٣) $\text{ظا}٢\text{أ} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$

<u>الإثبات:</u> ظا٢أ = ظا (أ + أ)

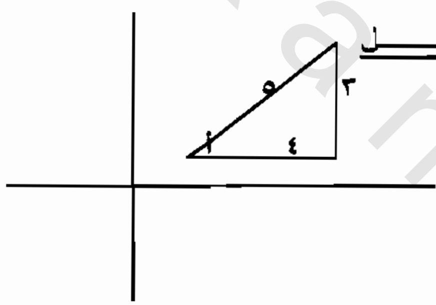
$$= \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ ظا أ}} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}}$$

<u>ملحوظة:</u> بوضع $\frac{\text{أ}}{٢}$ بدلاً من أ $\therefore$ $\text{ظا أ} = \dfrac{٢\text{ظا} \frac{\text{أ}}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢} \frac{\text{أ}}{٢}}$

<u>مثال:</u> إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$ [

أوجد: ١) جا٢أ ٢) جتا ٢أ ٣) ظا٢أ

<u>الحـــــل</u>



(١) جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

$$= ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

(٢) جتا٢أ = جتا^{٢}أ - جا^{٢}أ

$$= \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$$

(٣) $\text{ظا}٢\text{أ} = \frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}} = \dfrac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}}$

$$= \dfrac{\frac{٦}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \dfrac{\frac{٩}{٤}}{\frac{١٦ - ٩}{١٦}} = \dfrac{\frac{٦}{٤}}{\frac{٧}{١٦}}$$

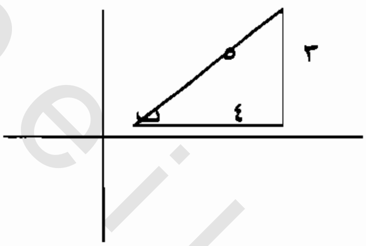
<u>مثال:</u> إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ١٨٠ < أ < ٢٧٠

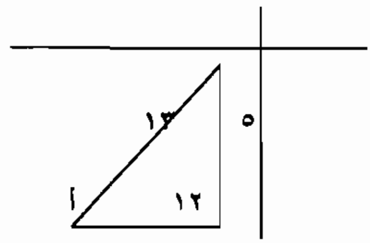
جا ب = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{ط}{٢}$

احسب قيمة ما يلي (١) جا(٩٠ + ٢جـ) (٢) جتا (١٨٠ - ٢ب)

(٣) جا (أ + ٢ب) (٤) ظا (٢أ + ب)

الحـــــــل





(١) جا(٩٠ + ٢أ) = جا٩٠ جتا٢أ + جتا ٩٠ جا٢أ

= ١ × جتا٢أ + صفر × جا٢أ

= جتا٢أ + ٠

= جتا٢أ - جا^{٢} أ

$= \left(\frac{-١٢}{١٣}\right)^{٢} - \left(\frac{-٥}{١٣}\right)^{٢} = \frac{١٤٤}{١٦٩} - \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١١٩}{١٦٩}$

(٢) جتا (١٨٠ - ٢ب) = جتا١٨٠ جتا٢ب + جا١٨٠ جا٢ب

= -١ جتا٢ب + صفر × جا٢ب

= - جتا٢ب

= - [جتا^{٢}ب - جا^{٢}ب]

$= -\left[\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}\right] = -\left[\frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥}\right] = \frac{-٧}{٢٥}$

(٣) جا (أ + ٢ب) = جا أ جتا٢ب + جتا أ جا٢ب

∵ جتا ٢ب = جتا^{٢} ب - جا^{٢}ب = $\frac{٧}{٥}$

$$\text{جا}٢\text{ب} = ٢\text{جا ب جتا ب} = ٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$\therefore \text{جا}(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{-٥}{١٣} \times \frac{٧}{٢٥} + \frac{-١٢}{١٣} \times \frac{٢٤}{٢٥}$$

$$= \frac{-٣٥}{١٣ \times ٢٥} - \frac{٢٨٨}{١٣ \times ٢٥} = \frac{-٣٢٣}{٣٢٥}$$

$$(٤)\ \text{ظا}(٢\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا}٢\text{أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا}٢\text{أ ظا ب}} =$$

$$\text{ظا}٢\text{ب} = \frac{٢\text{ظاب}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{٥}{١٢}}{١ - (\frac{٥}{١٢})^{٢}} = \frac{\frac{١٠}{١٢}}{١ - \frac{٢٥}{١٤٤}}$$

$$= \frac{\frac{١٠}{١٢}}{\frac{١١٩}{١٤٤}} = \frac{١٠}{١٢} \times \frac{١٤٤}{١١٩} = \frac{١٢٠}{١١٩}$$

$$\therefore \text{ظا}(٢\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\frac{١٢٠}{١١٩} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١٢٠}{١١٩} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{٨٣٧}{١١٦}$$

مثال: إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب زوايا حادة

اثبت ان (أ + ب) = ٤٥°

الحل

نثبت ان ظا(أ + ٢ب) = ظا ٤٥ = ١

$$\text{ظا}(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا}٢\text{ب}}{١ - \text{ظا أ ظا}٢\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - (\frac{٣}{٤})^{٢}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٨}{٩}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \text{ظا }٢\text{ب} = \frac{٢\text{ظا ب}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ب}}$$

$$\therefore \text{ظا}(\text{أ}+2\text{ب}) = \frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4+21}{28}}{\frac{28-3}{28}} = \frac{25}{25}$$

$\therefore$ ظا (أ + ٢ب) = ١ $\therefore$ أ + ٢ب = ٤٥°

مثال: إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{7}{6}$ أوجد قيمة جا٢أ ، جتا٢أ

الحـــــل

(جا أ + جتا أ)^2 = $\left(\frac{7}{6}\right)^2$

جا^2 أ + جتا^2 أ + ٢جا أ جتا أ = $\frac{49}{36}$

١ + ٢ جا أ جتا أ = $\frac{49}{36}$

$\therefore$ جا٢ أ = $\frac{49}{36}$ - ١ = $\frac{49-36}{36}$ = $\frac{13}{36}$

إيجاد جتا٢ أ $\because$ جا^2 ٢أ + جتا^2 ٢أ = ١

$\therefore$ جتا^2 ٢أ = ١ - جا^2 ٢أ = ١ - $\left(\frac{13}{36}\right)^2$

= $\frac{(36)^2-169}{(36)^2}$ = $\frac{1127}{1296}$

$\therefore$ جتا ٢أ = $\frac{1127}{1296}$

مثال: إذا كان جتا أ + جا أ = $\frac{6}{5}$ أوجد: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ

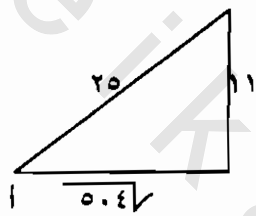
الحـــــــــل

∵ (جا أ + جتا أ) = $\frac{٦}{٥}$ بتربيع الطرفين

(جتا أ + جا أ)^{٢} = $\frac{٣٦}{٢٥}$ ∴ جتا^{٢} + جا^{٢}أ + ٢جا أ جتا أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

١ + جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

∴ جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$ - ١ = $\frac{٣٦ - ٢٥}{٢٥}$ = $\frac{١١}{٢٥}$



جا٢أ = $\frac{١١}{٢٥}$

∴ جتا٢أ = $\frac{\sqrt{٥٠٤}}{٢٥}$ ، ظا٢أ = $\frac{١١}{\sqrt{٥٠٤}}$

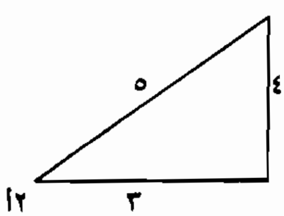
مثال: إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

أوجد قيمة: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ ، جتا أ ، جا أ

الحـــــــــل

∵ جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ بضرب الطرفين × ٢

∴ ٢جا أ + جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ .. جا٢أ = $\frac{٤}{٥}$ (جا٢أ = ٢جا أ جتا أ)



جتا٢أ = $\frac{٣}{٥}$

∵ جتا٢أ = ١ - ٢جا^{٢}أ

∴ $\frac{٣}{٥}$ = ١ - ٢ جا²أ

٢جا²أ = ١ - $\frac{٣}{٥}$ ⇐ ٢جا²أ = $\frac{٢}{٥}$ ⇐ جا²أ = $\frac{١}{٥}$

∴ جا أ = $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

جتا٢أ = ٢جتا²أ - ١

$\frac{٣}{٥}$ = ٢جتا²أ - ١ ∴ ٢جتا²أ = ١ + $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٨}{٥}$

∴ جتا² أ = $\frac{٤}{٥}$ ⇐ جتا أ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

التطبيق العكسي لقوانين ضعف الزاوية

نعلم أن: ١) ٢جا أ جتا أ = جا٢أ ٢) جتا²أ - جا²أ = جتا٢أ

٣) ٢جتا²أ - ١ = جتا٢أ ٤) ١ - ٢جا²أ = جتا٢أ

٥) $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا²أ}}$ = ظا٢أ

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة = $\frac{\text{جا٣٥ جا١٠ + جتا٣٥ جا١٠}}{\text{٢جا 30´ ٢٢° جتا 30´ ٢٢°}}$

الحــــل

∵ المقدار على صورة $\frac{\text{جا(٣٥ + ١٠)}}{\text{جا٢ × 30´ ٢٢°}}$ = $\frac{\text{جا٤٥}}{\text{جا٤٥}}$ = ١

مثال: أوجد قيمة = $\frac{\text{جتا٧٠ جتا١٠ + جا٧٠ جا١٠}}{\text{جا١٥ جتا١٥}}$ بدون استخدام الحاسبة

الحـــــــل

نوضع المقدار على الصورة = $\dfrac{٢[\text{جتا}٧٠\ \text{جتا}١٠ + \text{جا}٧٠\ \text{جا}١٠]}{٢\text{جا}١٥\ \text{جتا}١٥}$

$= \dfrac{٢ \times \text{جتا}(٧٠ - ١٠)}{\text{جا}٣٠}$

$= \dfrac{٢ \times \text{جتا}٦٠}{\text{جا}٣٠} = \dfrac{٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

١) $\text{جتا}^{٢}\ ١٥ - \text{جا}^{٢}\ ١٥$ ٣) $٢\text{جتا}\ \dfrac{\text{ط}}{٨} - ١$

٢) $١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\ \dfrac{\text{ط}}{٨}$ ٤) $\dfrac{\text{ظا}\ ٢٢^\circ\ 30'}{١ - \text{ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'}$

الحـــــــل

١) $\text{جتا}^{٢}\ ١٥ - \text{جا}^{٢}\ ١٥ = \text{جتا}٢ \times ١٥$

$= \text{جتا}٣٠ = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢) $١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\ \dfrac{\text{ط}}{٨} = ١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'$

$= \text{جتا}\ ٢ \times ٢٢^\circ\ 30' = \text{جتا}٤٥ = \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) $٢\text{جتا}^{٢}\ \dfrac{\text{ط}}{٨} - ١ = ٢\text{جتا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30' - ١ = \text{جتا}٤٥ = \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

٤) $\dfrac{\text{ظا}\ ٢٢^\circ\ 30'}{١ - \text{ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'} = \dfrac{١}{٢} \times \left(\dfrac{٢\text{ظا}\ ٢٢^\circ\ 30'}{١ - \text{ظا}^{٢}\ ٢٢^\circ\ 30'}\right)$

$= \dfrac{١}{٢} \times \text{ظا}٤٥ = \dfrac{١}{٢} \times ١ = \dfrac{١}{٢}$

إثبات صحة بعض العلاقات

نعلم أن: $\text{١ - ٢ جا}^{\text{٢}}\text{أ = جتا٢أ}$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{أ - ١ = جتا٢أ}$

مثال: أثبت أن: $\dfrac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}} = \text{ظتا جـ}$ ومن ذلك أوجد قيمة ظا 30َ ٥٢٢

الحـــــــل

أولاً:

$$\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}} = \frac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - [١ - ٢ جا}^{\text{٢}}\text{جـ]}}$$

$$= \frac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - ١ + ٢ جا}^{\text{٢}}\text{جـ}} = \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{ظتا جـ}$$

ثانيا: $\text{ظتا جـ} = \dfrac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}}$

نضع جـ = 30َ ٥٢٢

$$\therefore \text{ظتا } 30' \text{ ٥٢٢} = \frac{\text{جا٤٥}}{\text{١ - جتا٤٥}}$$

$$= \frac{\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}}{\text{١ - } \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}} = \frac{\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}}{\frac{\sqrt{\text{٢}} \text{ - ١}}{\sqrt{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}} \text{ - ١}}$$

مثال: برهن: $\dfrac{\text{٢جا جـ - جا٢أ}}{\text{٢جا}^{\text{٣}}\text{أ}} = \dfrac{\text{١}}{\text{١ + جتا أ}}$

الحـــــــل

$$\text{الأيمن} = \frac{\text{٢جا أ - ٢جا أ جتا أ}}{\text{٢جا}^{\text{٣}}\text{أ}} = \frac{\text{٢جا أ (١ - جتا أ)}}{\text{٢جا}^{\text{٣}}\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{جا}^{٢}\text{أ}} = \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{١ + جتا}^{٢}\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{(١ - جتا أ) (١ + جتا أ)}} = \frac{\text{١}}{\text{١ + جتا أ}} = \text{الأيسر}$$

مثال: برهن: $\frac{\text{٢جا}^{٢}\text{ أ - ١}}{\text{جا أ جتا أ}} = \text{ظا أ - ظتا أ}$

الحـــــل

الطرف الأيمن: البسط صورة - جتا٢أ

بينما المقام $\frac{١}{٢}$ جا٢أ

$$= \frac{\text{- جتا٢أ}}{\frac{١}{٢}\text{جا٢أ}} = \frac{\text{-٢ جتا٢أ}}{\text{جا٢أ}} = \text{-٢ ظتا٢أ}$$

$$= \text{-٢} \times \frac{١}{\text{ظا٢أ}} = \text{-٢} \frac{١}{\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{أ}}} = \frac{\text{-(١ - ظا}^{٢}\text{أ)}}{\text{ظا أ}}$$

$$= \frac{\text{-١}}{\text{ظا أ}} + \frac{\text{ظا}^{٢}\text{أ}}{\text{ظا أ}} = \text{- ظتا أ + ظا} \qquad = \text{ظا أ - ظتا أ}$$

مثال: برهن أن: $\text{جا أ} = \frac{\text{٢ظا} \frac{\text{أ}}{٢}}{\text{١ + ظا}^{٢} \frac{\text{أ}}{٢}}$

الحـــــــل

$$= \frac{2 \times \dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}}}{\dfrac{\text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}} + 1} = \frac{2 \times \dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{\dfrac{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2} + \text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}}$$

$$= \frac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}}{\dfrac{1}{\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}}} = 2\,\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}$$

= صورة جا٢أ

$$= \text{جا}2 \times \frac{\text{أ}}{2} = \text{جا أ} = \text{الأيسر}$$

<u>مثال:</u> برهن أن: $\dfrac{\text{جا جـ}}{1 + \text{جتا جـ}} = \text{ظا}\,\dfrac{\text{جـ}}{2}$

الحـــــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{1 + \left(2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2} - 1\right)} = \frac{2\,\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\,\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{2\,\text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2}}$$

$$= \frac{\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}} = \text{ظا}\,\frac{\text{جـ}}{2} = \text{الأيسر}$$

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا أ} + \text{جتا ٢ أ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ أ}} = \dfrac{١ + ٢\text{ جا أ}}{١ + \text{جا أ}}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جا أ} + (١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{أ})}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{ أ}} = \dfrac{١ + \text{جا أ} - ٢\text{جا}^{٢}\text{ أ}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{ أ}}$

$= \dfrac{(١ + ٢\text{جا أ})\,(١ - \text{جا أ})}{(١ + \text{جا أ})\,(١ - \text{جا أ})} = \dfrac{١ + ٢\text{ جا أ}}{١ + \text{جا أ}}$

= الطرف الأيسر

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا أ} + \text{جا ٣ أ} + ٢\text{ جا ٤ أ جتا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جتا ٣ أ} - ٢\text{ جتا ٤ أ جتا أ}} = \text{ظتا أ}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{(\text{جا ٣أ} + \text{جا أ}) + (٢\text{جا ٤أ جتا أ})}{(\text{جتا ٣أ} + \text{جتا أ}) - ٢\text{جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \dfrac{٢\text{ جا ٢أ جتا أ} + ٢\text{جا ٤أ جتا أ}}{٢\text{جتا ٢أ جتا أ} - ٢\text{جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \dfrac{\text{جا ٢أ} + \text{جا ٤أ}}{\text{جتا٢أ} - \text{جتا ٤أ}} = \dfrac{٢\text{جا ٣أ جتا أ}}{٢\text{جا ٣أ جا أ}}$

$= \dfrac{\text{جتا أ}}{\text{أجا}} = \text{ظتا أ} =$ الأيسر

مثال: اثبت أن: $\dfrac{\text{جا ب} + \text{جا ٢ب}}{١ + \text{جتا ب} + \text{جتا ٢ب}} = \text{ظا ب}$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جا ب} + ٢\text{جا ب جتا ب}}{١ + \text{جتا ب} + (٢\text{جتا}^{٢}\text{ ب} - ١)}$

$= \dfrac{\text{جا ب}\,(١ + ٢\text{جتا ب})}{\text{جتا ب}\,(١ + ٢\text{ جتا ب})} = \dfrac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}} = \text{ظا ب} =$ الأيسر

تمرين (١١)

١) أثبت أن: جا٣جـ = ٣ جا جـ - ٤ جا^{٣} جـ

٢) ظا (٤٥ + س) - ظا٢س = قا٢س

٣) (١ - جتا٤س) = ٨ جا^{٢}س جتا^{٢}س

٤) قا^{٢} ب ÷ (٢ - قا^{٢} ب) = قا ٢ب

٥) $$\frac{\text{١ + ٢جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ + جتا ٢هـ}} = \text{قا هـ}$$

٦) إذا كان جتا هـ = حا هـ = $\frac{١}{٢}$ أوجد قيمة جا ٢هـ ، جتا ٤هـ

٧) $$\frac{\text{١ - جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}} = \text{ظا}^{٢}\,\frac{\text{هـ}}{٢}$$

٨) (١ + جتا هـ) ظا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ = جا جـ

٩) إذا كانت س ∈] ٠ ، ٣٦٠ [أوجد مجموعة حل المعادلة:
١ - ٢جا^{٢}س = جتا س

١٠) جتا (أ + ب) جتا (أ - ب) = جتا^{٢} أ - جا^{٢} ب

١١) $$\text{ظا}\left(\frac{\text{ط}}{٤} + \text{س}\right) = \frac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ - ظا س}}$$

١٢) قتا س + ظتا س = ظتا $\frac{١}{٢}$ س

١٣) $$\frac{١}{٢}\,(\text{١ - جتا هـ})\ \text{قا}^{٢}\,\frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{\text{٢جا هـ - جا ٢هـ}}{\text{٢جا هـ + جا ٢هـ}}$$

١٤) $$\frac{\text{١ + جتا أ + جتا ٢أ}}{\text{١ + ٢ جتا أ}} = \text{جتا أ}$$

١٥) أثبت أن: جا ٤أ - ٢جا ٢أ = -٨ جا^{٣} أ جتا أ

١٦) جتا ٢أ - ٤ جتا أ = ٨ جا^{٤} ($\frac{١}{٢}$ أ)

١٧) جا ٢هـ (ظتاهـ - ظتا ٢هـ) = ١

١٨) $\frac{\text{جتا ٢هـ}}{\text{١ + جا ٢هـ}} = \frac{\text{١ - ظا هـ}}{\text{١ + ظا هـ}}$

١٩) (١ - جتا ٢أ) = ظا^{٢}أ (١ + جتا ٢أ)

٢٠) ١ + جتا ٢جـ + ٢ جا^{٢} جـ = ٢

٢١) (١ + جتا٢س) ظا س = جا٢س

٢٢) إذا كان: جا جـ جتا^{٣} جـ - جا^{٣} جـ جتا جـ = $\frac{١}{٤}$ أوجد قيمة جا ٤جـ

٢٣) $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا س}}$ = قتا س

٢٤) $\frac{\text{١ + جتا جـ + جتا ٢جـ}}{\text{جا جـ + جا ٢جـ}}$ = ظتا جـ

٢٥) ١ - ٢ جا^{٢} ($\frac{\text{ط}}{٤}$ - $\frac{\text{٥س}}{٢}$) = جا ٥س

٢٦) $\frac{\text{جا (أ + ب) + جا (أ س)}}{\text{جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)}}$ = ظا أ

٢٧) $\frac{\text{جا ٣جـ}}{\text{جا جـ}} - \frac{\text{جتا ٣جـ}}{\text{جتا جـ}}$ = ٢

٢٨) جتا^{٢} ٢جـ + ٤ جتا^{٢} جـ = ١ + ٤جتا^{٤}جـ

٢٩) جتا^{٤} جـ - جا^{٤} جـ = جتا ٢جـ

٣٠) $\frac{\text{جتا هـ + جا هـ}}{\text{جتا هـ - جا هـ}} + \frac{\text{جا هـ - جتا هـ}}{\text{جتا هـ + جا هـ}}$ = ٢ ظا ٢هـ