اولا التفاضل وحساب المثلثات

(١) التفاضل

النهايات

- نهاية دالة عند نقطة
- نهاية الدالة عند اللانهاية
- نهاية الدوال المثلثية

الاشتقاق

- دالة التغير
- المشتقة الاولى للدالة
- المعنى الهندسي للمشتقة الاولى(ميل المماس للمنحنى)
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة خارج قسمة دالتين
- مشتقة دالة الدالة
- مشتقة الدوال المثلثية

obeikandl.com

النهايات

مقدمة:

لمفهوم النهايات أهمية أساسية للرياضيات حيث تعتبر متطلبا رئيسيا لعدة موضوعات فيه ،من ذلك موضوعي التفاضل والتكامل حيث أن النهايات تشكل البداية والوسيلة في دراسة هذين الفرعين. وقبل ان نبدأ في معنى النهايات وطرق حسابها لابد أن نتعرف على بعض الأساسيات المختصة بهذا الموضوع:

إذا كان أ عددا حقيقيا موجبا فان قسمة هذا العدد على الصفر تعطي كمية كبيرة جدا لا حد لها هي ($+\infty$) أي ان:

$$\frac{\text{أ}}{\text{صفر}} = +\infty \qquad \frac{\text{أ}_-}{\text{صفر}} = -\infty$$

$$\frac{\text{أ}}{\infty} = \text{صفر} \qquad \frac{\text{صفر}}{\text{أ}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\infty \pm}{\text{أ}} = \infty \qquad (\text{أ})^{\text{صفر}} = ١$$

$$\infty = {}^{\infty}(١)$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} = \infty \text{ اذا كانت } \text{أ} > \text{ب} \qquad \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} = \text{صفر اذا كانت } \text{ب} > \text{أ}$$

هناك قيم أخرى غير معينة وهي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$.

فالكسر $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢}$ يكون غير معرف (غير معين) اذا كانت س=٢ أي انه لا يمكن اختصاره اذا كانت س=٢ فنقول ان $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} = ١$ بشرط ان س $\neq$ ٢

obeikandl.com

معنى النهاية

لفهم النهاية سوف ندرس المثال التالي:

مثال (١):

ارسم الشكل البياني للدالة د= (س ، ص) : ص= $\frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ ؟

الحل

نلاحظ ان نطاق الدالة هو فئة الاعداد الحقيقية ما عدا س=٣ ، وقد سبق رسم الشكل البياني لهذه الدالة وهو عبارة عن خط مستقيم محذوفا منه نقطة واحدة عندما س=٣.

عندما س=٣ فإن $\frac{٣^{٢}-٩}{٣-٣}$ = $\frac{٩-٩}{٣-٣}$

ص= $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا كسر غير معروف.

∴ المشكلة التي نبحثها هنا اذا كان من المستحيل ايجاد قيمة ص عندما س=٣ فما هي اقرب قيمة تاخذها ص عندما تكون س قريبة جدا من العدد ٣ ؟

- نكون جدولين : نحسب قيمة ص لبعض قيم س التي تقترب من العدد ٣ سواء من يمين او من يسار العدد.

س تقترب من ٣ من اليمين	
س	ص
٣,٥	٦,٥
٣,١	٦,١
٣,٠١	٦,٠١
٣,٠٠١	٦,٠٠١
٣,٠٠٠١	٦,٠٠٠١
↓	↓
٣	٦

س تقترب من ٣ من اليسار	
س	ص
٢,٥	٥,٥
٢,٩	٥,٩
٢,٩٩	٥,٩٩
٢,٩٩٩	٥,٩٩٩
٢,٩٩٩٩	٥,٩٩٩٩
↓	↓
٣	٦

obeikandl.com

من الجدولين نرى ان ص تقترب من العدد ٦ كلما اقتربت س من العدد ٣ ، وهذا يتضح من الشكل البياني للدالة إذ نرى انه كلما اقترب الاحداثي السيني من القيمة ٣ اقترب الاحداثي الصادي من القيمة ٦ سواء كان الاقتراب من اليمين او من اليسار .

∴ العدد ٦ هو اقرب قيمة تاخذها الدالة ص عندما تكون س اقرب ما يمكن للعدد ٣ أي ان العدد ٦ يسمى نهاية الدالة ص= د(س) عندما س تقترب من العدد ٣ ويعبر عنه رمزيا :

نهـــا ص = ٦ وتقرا نهاية الدالة ص عندما س تقترب من ٣ = ٦ .
س←٣

او نها $\frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ =٦
س←٣

النظريات والقواعد الاساسيه في النهايات

(١) نهـــا [د(س) + ر(س)] = نهـــا د(س) + نهـــا ر(س) .
س←أ س←أ س←أ

(٢) نهـــا ك د(س) = ك نهـــا د(س) حيث ك ثابت . .
س←أ س←أ

(٣) نهـــا [د(س) × ر(س)] = نهـــا د(س) × نهـــا ر(س) .
س←أ س←أ س←أ

(٤) نهـــا [د(س) ÷ ر(س)] = نهـــا د(س) ÷ نهـــا ر(س) .
س←أ س←أ س←أ

وهذه الخواص صحيحة ايضا عندما س ← ∞ .

قد تكون د(أ) معرفة ، نهـــا د(س) معرفة ولكن د(أ) ≠ نهـــا د(س)
س←أ س←أ

∴ تكون الدالة غير متصلة عند س= أ ولكنها معرفة عند س= أ.

طرق حساب النهايات:

اولا: اذا كانت س تقترب من عدد حقيقي محدود (س ← أ) .

١- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها دالة حدودية وكان أ عدد حقيقي فان

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow\text{أ}} \; د(س) = د(أ) \; .$$

امثلة :

(١) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \; س^{٢} + ٢س + ٣ = (١)^{٢} + ٢(١) + ٣ = ١ + ٢ + ٣ = ٦$

(٢) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow٠} \; س^{٣} - ١ = (٠)^{٣} - ١ = -١$

(٣) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow\frac{١}{٢}} \; ٢س + ٧ = ٢\frac{١}{٢} + ٧ = ١ + ٧ = ٨$

(٤) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow-٢} \; (س) = -٢$

(٥) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow٠} \; (٣) = ٣$

(٦) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \; (س^{٧} + س^{٣} + ١) = (١)^{٧} + (١)^{٣} + ١ = ٣$

٢- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها مكونة من بسط ومقام وكانت س ← أ فاننا نعوض تعويضا مباشرا في الدالة د(أ) فاذا كانت :

أ- د(أ)= كمية حقيقية فان $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow\text{أ}} \; د(س) = د(أ)$

ب- $د(أ) = \frac{\text{عدد حقيقي}}{٠} = \infty$ (النهاية ليس لها وجود).

ج - $د(ا) = \frac{٠}{٠}$ (فإننا نلجأ إلى عدة طرق للتخلص من القيمة المسببة للصفر وهي) :

obeikandl.com

١- تحليل البسط والمقام إن أمكن ثم الاختصار .

٢- بالضرب في مرافق المقام أو البسط إذا كانت الدالة تحتوي على جذور للمتغير .

٣- استخدام طريقة القسمة المطولة إذا صعب التحليل .

٤- استخدام قاعدة معينة في النهايات إذا لم نتمكن من الحل بالطرق السابقة .

وسوف نتناول كل الملاحظات السابقة بالتفصيل من خلال الأمثلة الآتية:

أمثلة:

اوجد النهايات الآتية إن أمكن:

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

بالتعويض المباشر د(س)= $\frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

د(١) = $\frac{١^٢ + ١}{١ - ٣} = \frac{٢}{-٢} = -١$ (عدد حقيقي) .

∴ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣} = -١$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + ١}{س - ٣}$

بالتعويض المباشر د(٣) = $\frac{٣^٢ + ١}{٣ - ٣} = \frac{١٠}{٠} = \infty$

∴ النهاية ليس لها وجود [غير معرفة] .

أمثلة على التحليل:

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ بالتعويض المباشر د(٣) = $\frac{٣^٢ + ١}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ ان البسط هو فرق مربعين ∴ يمكن تحليله .

obeikandl.com

$$\text{نها}_{س\to ٣} \frac{س^٢-٩}{س-٣} = \text{نها}_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س-٣}$$ نختصر ثم نعوض

$$= \text{نها}_{س\to ٣} س+٣ = ٣+٣ =$$

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٣} \frac{س^٢-٩}{س-٣} = ٦ .$$

٤) $$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{س^٢-٣س}{س}$$ بالتعويض المباشر د(٠) $= \frac{٠-٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ انه يمكن اخراج عامل مشترك من البسط وهو س .

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٠} \frac{س^٢-٣س}{س} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{س(س-٣)}{س} = ٠-٣ = -٣$$

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٠} \frac{س^٢-٣س}{س} = -٣$$

٥) $$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{٢س^٣-س^٢}{س}$$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) $= \frac{٠}{٠}$

بأخذ عامل مختصر من البسط وهو $س^٢$.

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{س^٢)٢س-١)}{س} = \text{نها}_{س\to ٠} س(٢س-١) = ٠(٢(٠)-١) =$$ صفر.

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٢س^٣-س^٢}{س} =$$ صفر

٦) $$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{٣س^٢-س}{س^٣-٢س^٢}$$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) $= \frac{٠}{٠}$

يمكن إخراج عامل مشترك من البسط والمقام .

$$\text{نها}_{س\to ٠} \frac{س(٣س-١)}{س^٢(س-٢)} = \text{نها}_{س\to ٠} \frac{٣س-١}{س(س-٢)} = \frac{٣(٠)-١}{(٠-٢)٠} = \frac{-١}{٠} = \infty$$

النهاية ليس لها وجود .

obeikandl.com

٧) $\lim_{س\to-١} \frac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣}$. بالتعويض المباشر :

$د(-١) = \frac{(-١)^٢-(-١)-٢}{(-١)^٢+٤(-١)+٣} = \frac{١+١-٢}{١-٤+٣} = \frac{٠}{٠}$ (نلجأ للتحليل) .

نلاحظ أن البسط والمقام مقادير ثلاثية يمكن تحليلها حيث :

$س^٢ - س - ٢ = (س-٢)(س+١)$.

$س^٢ + ٤س + ٣ = (س+٣)(س+١)$.

$\therefore \lim_{س\to-١} \frac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣} = \lim_{س\to-١} \frac{(س-٢)(س+١)}{(س+٣)(س+١)} = \lim_{س\to-١} \frac{س-٢}{س+٣} = \frac{-١-٢}{-١+٣} = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore \lim_{س\to-١} \frac{س^٢-س-٢}{س^٢+٤س+٣} = \frac{-٣}{٢}$

٨) $\lim_{س\to٢} \frac{س^٣-٨}{س^٢-٤}$ ⇐ بالتعويض المباشر : $د(٢) = \frac{٢^٣-٨}{٢^٢-٤} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ أن البسط عبارة عن فرق بين مكعبين أي يمكن تحليله :

$س^٣-٨=(س-٢)(س^٢+٢س+٤)$

والمقام هو فرق بين مربعين $س^٢-٤ = (س-٢)(س+٢)$

$\therefore \lim_{س\to٢} \frac{س^٣-٨}{س^٢-٤} = \lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{(س-٢)(س+٢)} = \lim_{س\to٢} \frac{س^٢+٢س+٤}{س+٢}$

$= \frac{٢^٢+٢\times٢+٤}{٢+٢} = \frac{٤+٤+٤}{٤} = ٣$

٩) $\lim_{س\to-٢} \frac{س^٣+٨}{س+٢}$ ⇐ بالتعويض المباشر : $د(-٢) = \frac{(-٢)^٣+٨}{-٢+٢} = \frac{٠}{٠}$

نلجأ إلى تحليل البسط

$\lim_{س\to-٢} \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{(س+٢)}$ ثم الاختصار

$= \lim_{س\to-٢} س^٢ - ٢س + ٤ = (-٢)^٢-٢(-٢)+٤ = ٤+٤+٤ = ١٢$

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٢} \frac{س^٣+٨}{س+٢} = ١٢$$

١٠) $\text{نها}_{س\to ٢ك} \frac{س^٢+ك\,س-٦ك^٢}{٢س-٤ك}$ ⇐ بالتعويض المباشر : د(٢ك)=

$$\frac{٠}{٠} = \frac{٤ك^٢+ك(٢ك)-٦ك^٢}{٢ك-٤ك}$$

نلجأ إلى تحليل البسط حيث هو عبارة عن مقدار ثلاثي:

$س^٢ + ك\,س - ٦ك^٢ = (س-٢ك)(س+٣ك)$

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٢ك} \frac{س^٢+ك\,س-٦ك^٢}{٢س-٤ك} = \text{نها}_{س\to ٢ك} \frac{(س-٢ك)(س+٣ك)}{٢(س-٢ك)} = \text{نها}_{س\to ٢ك} \frac{س+٣ك}{٢} = \frac{٥ك}{٢}$$

$$\therefore \text{نها}_{س\to ٢ك} \frac{س^٢+ك\,س-٦ك^٢}{٢س-٤ك} = \frac{٥ك}{٢}$$

أمثلة على القسمة المطولة :

نستخدم هذه الطريقة عندما يصعب التحليل في البسط او المقام .

مثال : اوجد $\text{نها}_{س\to ٢} \frac{٢س^٣-٣س^٢-٤}{س^٣-٢س-٤}$ ⇐ بالتعويض المباشر

$$= \frac{١٦-١٢-٤}{٨-٤-٤} = \frac{٠}{٠}$$

بالقسمة على (س−٢) بسطا ومقاما

obeikandl.com

البسط

$٢س^{٣}+س+٢$

$٢س^{٣}-٣س^{٢}-٤$ | $(س-٢)$

$س^{٣}-٤س^{٢}$ بالطرح

$س^{٢}-٤$

$س^{٢}-٢س$ بالطرح

$٢س-٤$

$٢س-٤$ بالطرح

...

المقام

$س^{٢}+٢س+٢$

$س^{٣}-٢س-٤$ | $(س-٢)$

$س^{٣}-٢س^{٢}$ بالطرح

$٢س^{٢}-٢س-٤$

$٢س^{٢}-٤س$ بالطرح

$٢س-٤$

$٢س-٤$ بالطرح

...

$$\therefore \text{نهـا}_{س\to٢} \frac{٢س^{٣}-٣س^{٢}-٤}{س^{٣}-٢س-٤} = \text{نهـا}_{س\to٢} \frac{٢س^{٢}+س+٢}{س^{٢}+٢س+٢} = \frac{٨+٢+٢}{٤+٤+٢} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{٦}{٥}$$

مثال :

اوجد $\text{نهـا}_{س\to٢} \frac{٣س^{٣}-٢س^{٢}-٧س-٢}{س^{٢}-٤}$ ⇐ بالتعويض المباشر

$$= \frac{٢٤-٨-١٤-٢}{٤-٤} = \frac{٠}{٠}$$

بالقسمة على العامل الصفري(س-٢) وتحليل المقام

$$\begin{array}{r|l} 3س^3 + 4س + 1 & \\ \hline 3س^3 - 2س^2 - 7س - 2 & (س-2) \\ \hline 3س^3 - 6س^2 \quad \text{بالطرح} & \\ \hline 4س^2 - 7س - 2 & \\ 4س^2 - 8س \quad \text{بالطرح} & \\ \hline س - 2 & \\ س - 2 \quad \text{بالطرح} & \\ \hline \end{array}$$

...

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(3س^2+4س+1)}{(س-2)(س+2)} = \lim_{س \to 2} \frac{3س^2+4س+1}{س+2} = \frac{12+8+1}{2+2} = \frac{21}{4}$$

امثلة على الضرب في المرافق للجذر

١١) $\lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س-3}}{س-9}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٩) $= \frac{\sqrt{9-3}}{9-9} = \frac{\sqrt{6}}{0} = \div$

نلاحظ أن هناك جذر للمتغير س ∴ بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{س} + 3$.

$$\frac{\sqrt{س-3}}{(س-9)} \times \frac{\sqrt{س}+3}{\sqrt{س}+3} = \frac{(س-9)}{(س-9)(\sqrt{س}+3)}$$

$$\therefore \lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س-3}}{س-9} = \lim_{س \to 9} \frac{(س-9)}{(س-9)(\sqrt{س}+3)} =$$

$$\frac{1}{6} = \lim_{س \to 9} \frac{\sqrt{س-3}}{س-9} \quad \therefore \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \lim_{س \to 9} \frac{1}{\sqrt{س}+3}$$

obeikandi.com

١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{س+١} - \sqrt{١}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ بضرب كلا من

البسط والمقام في مرافق

المقام وهو $\sqrt{س+١} + \sqrt{١}$ حاصل ضرب المقام في مرافقه يساوي (مربع الأول – مربع الثاني) .

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{س+١} - \sqrt{١}} \times \frac{(\sqrt{س+١} + \sqrt{١})}{(\sqrt{س+١} + \sqrt{١})}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س (\sqrt{س+١} + \sqrt{١})}{(س+١) - (١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س (\sqrt{س+١} + \sqrt{١})}{س} = \sqrt{٠+١} + \sqrt{١} = ٢\sqrt{١}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{س+١} - \sqrt{١}} = ٢\sqrt{١}$$

١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢+٣س} - \sqrt{٢}}{س}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٠) =

$$\frac{\sqrt{٢+٠} - \sqrt{٢}}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{٢+٣س} + \sqrt{٢}$.

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢+٣س} - \sqrt{٢}}{س} \times \frac{\sqrt{٢+٣س} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢+٣س} + \sqrt{٢}}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٢+٣س) - (٢)}{س(\sqrt{٢+٣س} + \sqrt{٢})}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{س(\sqrt{٢+٣س} + \sqrt{٢})} = \frac{٣}{\sqrt{٢+٠} + \sqrt{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$$

obeikandi.com

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\leftarrow\text{٠}} \frac{\sqrt{٢+٣\text{س}} - \sqrt{٢}}{\text{س}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}} .$$

١٤) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥}$ ⇐ بـــــالتعويض المباشـــــر د(١) =

$$\sqrt[٣]{(١)^{٢}+٢(١)+٥} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٥} = ٢ .$$

١٥) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{١ - \text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^{٣}}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$

بضرب البسط والمقام في $\sqrt{١- \text{س}^{٢}}$ للتخلص من الجذر في المقام .

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{١ - \text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^{٣}}} \times \frac{\sqrt{١- \text{س}^{٢}}}{\sqrt{١- \text{س}^{٢}}} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{(١ - \text{س})(\sqrt{١- \text{س}^{٢}})}{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{(١ - \text{س})(\sqrt{١- \text{س}^{٢}})}{(١- \text{س})(١+ \text{س})} = \frac{\sqrt{٠}}{٢} = \text{صفر} .$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{١ - \text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^{٣}}} = \text{صفر} .$$

١٦) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{\sqrt{٣- \text{س}} - \sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{٢\text{س}-١} - \sqrt{٣\text{س}-٢}}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق البسط وفي مرافق المقام .

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow١} \frac{\sqrt{٣- \text{س}} - \sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{٢\text{س}-١} - \sqrt{٣\text{س}-٢}} \times \frac{\sqrt{٣- \text{س}} + \sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{٣- \text{س}} + \sqrt{\text{س}+١}} \times$$

$$\frac{\sqrt{٢\text{س}-١} + \sqrt{٣\text{س}-٢}}{\sqrt{٢\text{س}-١} + \sqrt{٣\text{س}-٢}}$$

obeikandl.com

$$= \lim_{س \to ١} \frac{[\,(٣- س) - (س+١)\,]\ [\sqrt{٢س-١} + \sqrt{٣س-٢}]}{[\,(٢س-١) - (٣س-٢)]\ [\sqrt{٣- س} + \sqrt{س+١}]}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{٢(١- س)}{(١- س)} \times \frac{\sqrt{٢س-١} + \sqrt{٣س-٢}}{\sqrt{٣- س} + \sqrt{س+١}} = \frac{٤}{\sqrt{٢}\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

نظرية

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فان :

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١} \quad ، \quad س \neq أ$$

نتائج

١) $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}(أ)^{ن-م}$

٢) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(أ+هـ)^{ن} - أ^{ن}}{هـ} = ن\, أ^{ن-١}$

ملاحظات:

أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = ن$

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س^{م} - ١} = \frac{ن}{م}$

أمثلة على النظرية ونتائجها

١) أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

الحـــــــل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٤} - (٣)^{٤}}{س - ٣} = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨$$

obeikandl.com

٢) اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+ب)^{٣} - ب^{٣}}{س}$

الحـــــــل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س+ب)^{٣} - ب^{٣}}{س} = \lim_{س+ب \to ب} \frac{(س+ب)^{٣} - ب^{٣}}{(س+ب) - ب} = ٣ ب^{٢}$$

ملاحظة : عندما $س \to ٠$ فان $س + ب \to ب$

٣) اوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٤} - ٨١}$

الحـــــــل

نجد انه يمكن كتابة $٢٧ = (٣)^{٣}$ ، $٨١ = (٣)^{٤}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٤} - ٨١}$ على صورة النتيجة .

$$= \frac{٣}{٤} (٣)^{٣-٤} = \frac{٣}{٤} (٣)^{-١} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٤}$$

٤) اوجد $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + ١}{س^{٥} + ١}$

الحـــــــل

نلاحظ انه من التعويض المباشر أن د(−١) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجةمع ملاحظة أن

$$(-١)^{٣} = (-١)^{٥} = -١$$

$$\therefore \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} - (-١)^{٣}}{س^{٥} - (-١)^{٥}} = \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} - (-١)^{٣}}{س^{٥} - (-١)^{٥}} = \frac{٣}{٥} (-١)^{٣-٥}$$

$$= \frac{٣}{٥} (-١)^{-٢} = \frac{٣}{٥} \times \frac{١}{(-١)^{٢}} = \frac{٣}{٥}$$

obeikandl.com

$$\therefore \text{ نهـــا}_{س \to -1} \frac{س^{3} + 1}{س^{5} + 1} = \frac{3}{5}$$

٥) اوجد $\text{ نهـــا}_{س \to 1} \frac{7س^{3} - 7}{س^{7} - 1}$

الحـــــــل

بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{0}{0}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة حيث تصعب كل الطرق الأخرى مع ملاحظة إخراج العامل المشترك من البسط وهو (٧) وان

$(1)^{7} = (1)^{2} = 1$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{س \to 1} \frac{7(س^{3} - 1)}{س^{7} - 1} = 7 \text{ نهـــا}_{س \to 1} \frac{(س^{3} - 1)}{س^{7} - 1} = 7 \times \frac{3}{7} (1)^{3-7} = 7 \times \frac{3}{7} (1)^{-4} = 3 \times 1$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{س \to 1} \frac{7س^{3} - 7}{س^{7} - 1} = 3$$

٦) اوجد $\text{ نهـــا}_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س^{4}} - \frac{1}{16}}{س - 2}$

الحـــــــل

نلاحظ أن د(٢) = $\frac{0}{0}$ نلجأ إلى استخدام النظرية بعد تغيير صورة النهاية .

$$\frac{1}{س^{4}} = (س)^{-4} \quad ، \quad \frac{1}{16} = (2)^{-4}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to 2} \frac{(س)^{-4} - (2)^{-4}}{س - 2} \quad \frac{-4}{1} = (2)^{-4-1} = -4(2)^{-5} = \frac{-4}{(2)^{5}} = \frac{-4}{32}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ٢} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٤}} - \frac{١}{١٦}}{\text{س} - ٢} = \frac{-٤}{٣٢} = \frac{-١}{٨}$$

٧) اوجد $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{\frac{٤}{\sqrt{\text{س}}} - ٤}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحـــــــل

د(١) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة مع مراعاة انه يجب اخراج العامل المشترك ٤ من البسط لأنه ثابت .

$$٤\ \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} = ٤\ \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{(\text{س})^{-\frac{١}{٢}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} =$$

$$٤\ \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{(\text{س})^{-\frac{١}{٢}} - (١)^{-\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{٢} - (١)^{٢}} \times \frac{-\frac{١}{٢}}{١} \times (١)^{-\frac{١}{٢}-٢} = ٤ \times \frac{-١}{٢} \times ١ = -٢$$

٨) إذا كانت د(س) = $\frac{٣\ \text{أ}\sqrt[٣]{\text{س} + ٣\ \text{أ}}}{\text{س}+١}$ فاثبت أن :-

أ) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow -١}$ د(س) = أ

ب) $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow ١}$ د(س) = د(١)

ج) $\frac{\text{د}(٠)}{٣}$ $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow -١}$ د(س) = صفر

الحـــــــل

أ) د(س) = $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow -١} \frac{٣\ \text{أ}\sqrt[٣]{\text{س} + ٣\ \text{أ}}}{\text{س}+١}$ بالتعويض المباشر .

$$د(-١) = \frac{أ٣ + \sqrt[٣]{-١}\ أ٣}{-١+١} = \frac{أ٣ - أ٣}{-١+١} = \frac{٠}{٠}$$

نستخدم القاعدة لإيجاد النهاية $= أ٣ = \lim_{س \to -١} \frac{\sqrt[٣]{س+١}}{س+١} = أ٣$

$$\lim_{س \to -١} \frac{(س)^{\frac{١}{٣}} - (-١)^{\frac{١}{٣}}}{س^{١} - (-١)^{١}} = أ٣ \times \frac{١}{٣}(-١)^{-\frac{٢}{٣}} = أ \times \frac{١}{(-١)^{\frac{٢}{٣}}} = أ \times ١$$

$$\therefore \lim_{س \to -١} د(س) = أ$$

ب) $\lim_{س \to ١}$ د(س) بالتعويض المباشر $د(١) = \frac{أ٣ + \sqrt[٣]{١}\ أ٣}{١+١} = \frac{أ٦}{٢} = أ٣$

$$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = أ٣ = د(١)$$

ج) $د(٠) = \frac{أ٣ + ٠ \times أ٣}{١+٠} = أ٣ \Leftarrow \frac{د(٠)}{٣} = \frac{أ٣}{٣} = أ$

$$\therefore \lim_{س \to -١} د(س) = أ - أ = \text{صفر} - \frac{د(٠)}{٣}$$

٩) اوجد $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٣٢ س^{٥} - ١}{٢ س - ١}$

الحل

$$د\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{٠}{٠} \quad ، \quad \therefore س \to \frac{١}{٢} \quad \therefore ٢س \to ١$$

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 1} \frac{\text{س}^{٥}-١}{\text{٢س}-١} = \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 1} \frac{(\text{٢س})^{٥}-(١)^{٥}}{\text{٢س}-١}$$ على صورة النظرية

$$\frac{٥}{١}(١)^{٥-١} = ٥ \times ١ = ٥$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow \frac{١}{٢}} \frac{\text{٣٢س}^{٥}-١}{\text{٢س}-١} = ٥$$

١٠) اوجد $\text{نهـــا}_{\text{و}\leftarrow ٠} \frac{\sqrt{\text{و}+٤}-٢}{\text{و}}$ ؟

الحل

بالتعويض المباشر : د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ نجعل المعادلة على صورة النظرية $\Leftarrow$ ٢ = $(٤)^{\frac{١}{٢}}$

$$\text{نهـــا}_{\text{و}\leftarrow ٠} \frac{\sqrt{\text{و}+٤}-٢}{\text{و}} = \text{نهـــا}_{\text{و}+٤\leftarrow ٤} \frac{(\text{و}+٤)^{\frac{١}{٢}}-(٤)^{\frac{١}{٢}}}{(\text{و}+٤)-(٤)} = \frac{١}{١}(٤)^{\frac{١}{٢}-١}$$

$$= \frac{١}{٢}(٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{(٤)^{\frac{١}{٢}}٢} = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{و}\leftarrow ٠} \frac{\sqrt{\text{و}+٤}-٢}{\text{و}} = \frac{١}{٤}$$

١١) اوجد $\text{نهـــا}_{\text{و}\leftarrow ٠} \frac{\frac{١}{(\text{س}+\text{و})^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}}{\text{و}}$

الحل

د(٠) = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، نجعل المعادلة على صورة النظرية :

$\therefore \frac{١}{(\text{س}+\text{و})^{٤}} = (\text{س}+\text{و})^{-٤}$ ، $\frac{١}{\text{س}^{٤}} = (\text{س})^{-٤}$

$\therefore$ نهـــا $\frac{(\text{س}+\text{و})^{-٤} - \text{س}^{-٤}}{\text{و}}$ = نهـــا

و ← ٠ ، س + و ← س

$\frac{(\text{س}+\text{و})^{-٤} - \text{س}^{-٤}}{(\text{س}+\text{و}) - (\text{س})}$

$= \frac{-٤}{١} (\text{س})^{-٤-١} = -٤\text{س}^{-٥} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$

$\therefore$ نهـــا $\frac{\frac{١}{(\text{س}+\text{و})^{٤}} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}}{\text{و}} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$

و ← ٠

١٢) اوجد نهـــا $\frac{(\text{أ} + \text{ب س})^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س}}$ ؟

س ← ٠

الحل

د(٠) = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، بضرب البسط والمقام في ب .

نهـــا $\frac{\text{ب}}{\text{ب}} \left(\frac{(\text{أ} + \text{ب س})^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س}} \right)$ = ب

س ← ٠

نهـــا $\frac{(\text{أ} + \text{ب س})^{٣} - \text{أ}^{٣}}{(\text{أ} + \text{ب س}) - \text{أ}}$

(ب) س ← ٠

$$= \text{ب} \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow \text{ا}+(\text{ب})} \frac{(\text{ا}+\text{ب س})^{\frac{3}{1}} - \text{ا}^{\frac{3}{1}}}{(\text{ا}+\text{ب س}) - \text{ا}} = \text{ب} \times \frac{3}{1} (\text{ا})^{3-1} = 3\,\text{ب}(\text{ا})^{2}$$

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 0} \frac{(\text{ا}+\text{ب س})^{\frac{3}{1}} - \text{ا}^{\frac{3}{1}}}{\text{س}} = 3\,\text{ب}(\text{ا})^{2}$$

١٣) اوجد $\text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{\text{ا}+\text{ب س}} - \sqrt[3]{\text{ا}}}{\text{س}}$

الحل

د(٠) = $\frac{\text{ب}}{0}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط اولا وهو (٣)

$= 3 \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 0} \dfrac{(\text{ا}+\text{ب س})^{\frac{1}{3}} - \text{ا}^{\frac{1}{3}}}{\text{س}}$ بضرب البسط والمقام في (ب)

$= 3\text{ب} \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 0} \dfrac{(\text{ا}+\text{ب س})^{\frac{1}{3}} - \text{ا}^{\frac{1}{3}}}{\text{ب}(\text{س})}$ باضافة (ا) وطرح (ا) من المقام .

$$= 3\text{ب} \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow \text{ا}+\text{ب}(\text{س})} \frac{(\text{ا}+\text{ب س})^{\frac{1}{3}} - \text{ا}^{\frac{1}{3}}}{(\text{ا}+\text{ب س}) - \text{ا}} = 3\,\text{ب} \times \frac{1}{3} (\text{ا})^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \text{ب} (\text{ا})^{-\frac{2}{3}} = \frac{\text{ب}}{\sqrt[3]{\text{ا}^{2}}}$$

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{\text{س}\leftarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\text{ا}+\text{ب س}} - \sqrt[3]{\text{ا}}}{\text{س}} = \frac{\text{ب}}{\sqrt[3]{\text{ا}^{2}}}$$

obeikandl.com

١٤) اوجد $\lim_{س \to \frac{٨}{٥}} \frac{٤ \sqrt[٣]{٥س - ٨}}{٥س - ٨}$

الحل

$د\left(\frac{٨}{٥}\right) = \frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (٤) .

$$\text{نهـــا}_{س \to \frac{٨}{٥}} \frac{٤ \sqrt[٣]{٥س - ٨}}{٥س - ٢} = ٤ \text{ نهـــا}_{٥س \to ٨} \frac{(٥س)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(٥س) - (٨)} = ٤ \times \frac{١}{\frac{٢}{٣}(٨)^{\frac{١}{٣}-}}$$

$$= \left(\frac{٤}{٣}\right) \times (٨)^{\frac{٢}{٣}-} = \left(\frac{٤}{٣}\right) \times \frac{١}{(٨)^{\frac{٢}{٣}-}} = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س \to \frac{٨}{٥}} \frac{٤ \sqrt[٣]{٥س - ٨}}{٥س - ٨} = \frac{١}{٣}$$

١٥) اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{٨ - \sqrt{س + ٤}^{\frac{١٦}{}}}{س}$

الحل

$د(٠) = \frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (١٦).

$$١٦ \text{ نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{٢} - \sqrt{س + ٤}^{\frac{٦١}{}}}{س} = ١٦ \text{ نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(س + ٤)^{\frac{١}{٢}-} - (٤)^{\frac{١}{٢}-}}{س}$$

$$= ١٦ \quad \text{نهـــا}_{س+٤ \leftarrow ٤} \frac{(س+٤)^{\frac{١}{٢}} - (٤)^{\frac{١}{٢}}}{(س+٤) - (٤)} \times ١٦ = \frac{١}{(٤)^{\frac{١}{٢}}} \times ١٦ = (٤)^{\frac{١}{٢}-} \times ١٦$$

$$= -٨ (٤)^{\frac{٢}{٣}-} = -٨ \times \frac{١}{٨} = -١$$

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{-٨ - \sqrt{س+٤}}{س} = -١$$

ثانيا : إذا كان المتغير س يقترب من المالانهاية أي أن س ← ∞ .

١- إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية حدودية فان $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ د(س) = ∞

فمثلا $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ ٢س+١= ∞ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ ٣ س^{٢}+س^{٣}= ∞ وبصفة عامة فان :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} س^{ن} = \infty \qquad \text{حيث ن عدد حقيقي موجب :}$$

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \sqrt{س} = \infty \ ، \quad \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} س^{\frac{٤}{٣}} + ١ = \infty \ .$$

وهكذا ....

٢- إذا كان الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية مكونة من بسط ومقام فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أس للمتغير س .

مع ملاحظة أن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س^{ن}} = ٠$ حيث ن عدد حقيقي موجب .

فمثلا : $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س} = \frac{١}{\infty} =$ صفر ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{س^{٢}} = \frac{١}{\infty} =$ صفر

، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١}{\sqrt{س}} =$ صفر .

obeikandl.com

أمثلة

١) اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س + ٣}{٢س + ٥}$

الحل

نلاحظ أن الدالة مكونة من بسط ومقام ∴ نقسم البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر اس وهو س . ثم الاختصار .

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤س}{س} + \frac{٣}{س}}{\frac{٢س}{س} + \frac{٥}{س}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٤ + \frac{٣}{س}}{٢ + \frac{٥}{س}} = \frac{٤ + ٠}{٢ + ٠} = ٢$$

٢) اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٣ + ٢س - ١}{٩ - ٢س - ٣س^٣}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على $س^٣$.

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{س^٣}{س^٣} + \frac{٢س}{س^٣} - \frac{١}{س^٣}}{\frac{٩}{س^٣} - \frac{٢س}{س^٣} - \frac{٣س^٣}{س^٣}} = \lim_{س \to \infty} \frac{١ + \frac{٢}{س^٢} - \frac{١}{س^٣}}{\frac{٩}{س^٣} - \frac{٢}{س^٢} - ٣}$$

$$= \frac{١ + \frac{٢}{\infty} - \frac{١}{\infty}}{\frac{٩}{\infty} - \frac{٢}{\infty} - ٣} = \frac{١ + ٠ - ٠}{٠ - ٠ - ٣} = \frac{١}{-٣} = -\frac{١}{٣}$$

٣) اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ - ٣س^٣ + ١}{١ + ٢س^٢}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $س^٣$ ، والاختصار .

$$\therefore \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{1}{س^2} + \frac{3س^2}{س^3} - \frac{1}{س^3}}{\frac{2س^2}{س^3} + \frac{1}{س^3}} = \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{1}{س} + 3 - \frac{1}{س^3}}{\frac{2}{س} + \frac{1}{س^3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\infty} + 3 - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 3 - 0}{0 + 0} = \frac{3}{0} = \infty \text{ (النهاية ليس لها وجود)}$$

∴ النهاية ليس لها وجود . (لاحظ ان درجة البسط اعلى من درجة المقام) .

٤) اوجد $\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{س^2 + 4}{2س^4 + 2س}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر اس وهو $س^4$

$$\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{س^2}{س^4} + \frac{4}{س^4}}{\frac{2س^4}{س^4} + \frac{2س}{س^4}} = \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{1}{س^2} + \frac{4}{س^4}}{2 + \frac{2}{س^3}} = \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{2 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1}$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{س^2 + 4}{2س^4 + 2س} = \text{ صفر .}$$

ملاحظات :

أ) إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فان $\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ د(س) = عدد حقيقي≠ صفر .

ب) إذا كانت درجة البسط < درجة المقام فان $\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ د(س) = صفر .

جـ) إذا كانت درجة البسط > درجة المقام فان $\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ د(س) غير معرفة (ليس لها وجود) .

٥) اوجد $\text{ نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{2س + \sqrt{س + 1}}{1 - س}$

openkandil.com

الحل

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{\frac{٢س}{س}+\frac{\sqrt{س}}{س}+\frac{١}{س}}{\frac{س}{س}-\frac{١}{س}} \quad \therefore$$

بقسمة البسط والمقام على س

$$= \frac{\frac{٢}{١}+\frac{\sqrt{س}}{س}+\frac{١}{س}}{\frac{١}{١}-\frac{١}{س}} = \frac{٢+\frac{١}{\sqrt{س}}+\frac{١}{\infty}}{١-\frac{١}{\infty}} = \frac{٢+٠+٠}{١-٠} = \frac{٢}{١}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٢س+\sqrt{س}+١}{١-س} = -٢$$

٦) اوجد $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٣س+٢س\sqrt{س}+٣}{٥س+٣س\sqrt{س}-١}$

الحل

لاحظ ان اكبر اس للمتغير س هو س $\sqrt{س}$ اي $(س)^{\frac{٣}{٢}}$

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{\frac{٣س}{س\sqrt{س}}+\frac{٢س\sqrt{س}}{س\sqrt{س}}+\frac{٣}{س\sqrt{س}}}{\frac{٥س}{س\sqrt{س}}+\frac{٣س\sqrt{س}}{س\sqrt{س}}-\frac{١}{س\sqrt{س}}}$$

$$= \frac{\frac{٣}{\infty}+٢+\frac{٣}{\infty}}{\frac{٥}{\infty}+٣-\frac{١}{\infty}} = \frac{٠+٢+٠}{٠+٣-٠} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{٣س+٢س\sqrt{س}+٣}{٥س+٣س\sqrt{س}-١} = \frac{٢}{٣}$$

٧) اوجد $\text{نهـــا}_{س\leftarrow\infty} \frac{\sqrt{١+س^{٣}}}{٢س+٣}$

الحل

لاحظ أن اكبر أس للمتغير هو (س) حيث أن $\sqrt[3]{س^3}$ = س .

بقسمة البسط و المقام على $\sqrt[3]{س^3}$

$$\frac{\sqrt[3]{1+س^3}}{\sqrt[3]{س^3}} \text{ نهـــا } = \frac{\sqrt[3]{1+س^3}}{س} \text{ نهـــا }$$
$$س \to \infty \qquad\qquad س \to \infty$$
$$\frac{\frac{3}{س}+2}{} \qquad\qquad \frac{\frac{3}{س}+\frac{2س}{س}}{}$$

$$= \text{ نهـــا } \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{س^3}+\frac{س^3}{س^3}}}{\frac{3}{س}+2}$$
$$س \to \infty$$

$$= \text{ نهـــا } \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{س^3}+1}}{\frac{3}{س}+2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{\infty}+1}}{\frac{3}{\infty}+2} = \frac{\sqrt[3]{1}}{2} = \frac{1}{2}$$
$$س \to \infty$$

$$\therefore \text{ نهـــا } \frac{\sqrt[3]{1+س^3}}{2س+3} = \frac{1}{2}$$
$$س \to \infty$$

٨) اوجد $\text{ نهـــا }_{س \to \infty} \frac{5-3س}{\sqrt[3]{4س^3+2س-1}}$ ؟

الحل

اكبر أس للمتغير س ه[س = $\sqrt[3]{س^3}$] بقسمة البسط على س والمقلم على $\sqrt[3]{س^3}$

$$\therefore \text{ نهـــا } \frac{\frac{5}{س}-\frac{3س}{س}}{\sqrt[3]{\frac{4س^3}{س^3}+\frac{2س}{س^3}+\frac{1}{س^3}}} = \text{ نهـــا } \frac{\frac{5}{س}-3}{\sqrt[3]{4-\frac{2}{س}-\frac{1}{س^3}}}$$
$$س \to \infty \qquad\qquad س \to \infty$$

$$= \frac{\frac{5}{\infty}-3}{\sqrt[3]{4-\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}} = \frac{0-3}{\sqrt[3]{4+0}} = \frac{-3}{2}$$

$$\therefore \text{ نهـــا } \frac{5-3س}{\sqrt[3]{4س^3+2س-1}} = \frac{-3}{2}$$
$$س \to \infty$$

obeikandl.com

٩) اوجد $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{\sqrt{س - ١}}{\frac{١}{س} + ١} \times \frac{\sqrt{س + ١}}{(س + ١)}$ ؟

الحل

بضرب المقادير الجبرية التي في البسط والمقام :

$\sqrt{س - ١} \times \sqrt{س + ١} = \sqrt{(س - ١)(س + ١)}$ البسط $= \sqrt{س^٢ - ١}$

المقام $= (\frac{١}{س} + ١)(س - ١) = ١ - \frac{١}{س} + س - ١ = س - \frac{١}{س}$

∴ $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{\sqrt{س^٢ - ١}}{س - \frac{١}{س}}$ بقسمة البسط والمقام على اكبر اس للمتغير وهو س

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{س^٢}{س^٢} - \frac{١}{س^٢}}}{\frac{س}{س} - \frac{١}{س}} = \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{١ - \frac{١}{س^٢}}}{١ - \frac{١}{س^٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{١ - ٠}}{١ - ٠} = \frac{\sqrt{١}}{١} = ١$$

∴ $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{\sqrt{س - ١}}{\frac{١}{س} + ١} \times \frac{\sqrt{س + ١}}{(س + ١)} = ١$

١٠) اوجد $\lim_{س \to \infty}$ $\sqrt{س^٢ + ٣س} - س$

الحل

عند التعويض المباشر نجد أن د $(\infty) = \infty - \infty$ وهي كمية غير معرفة .

obeikandl.com

نلاحظ أن هذه الدالة تحتوي على كسور و هي مكونة من بسط فقط .

∴ بضرب المقدار في مرافقه حتى يتكون بسط ومقام للدالة .

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} + ٣س} - س\right) \times \frac{\sqrt{س^{٢} + ٣س} + س}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} + س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{(س^{٢} + ٣س) - (س^{٢})}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} + س} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} + ٣س} + س}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على س .

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س}{س}}{\sqrt{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٣س}{س^{٢}}} + \frac{س}{س}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣}{\sqrt{١ + \frac{٣}{س}} + ١} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{٣}{\sqrt{١ + ٠} + ١} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{س \to \infty} \sqrt{س^{٢} + ٣س} - س = \frac{٣}{٢}$$

١١) اوجد $\text{نهـــا}_{س \to \infty} \sqrt{س + \sqrt{س}} - \sqrt{س}$ ؟

الحل

نحول الدالة إلى بسط و مقام بضربها في المرافق .

$$\therefore \quad \text{نهـــا}_{س \to \infty} \left(\sqrt{س + \sqrt{س}} - \sqrt{س}\right) \times \frac{\sqrt{س + \sqrt{س}} + \sqrt{س}}{\sqrt{س + \sqrt{س}} + \sqrt{س}}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{(س + \sqrt{س}) - (س)}{\sqrt{س + \sqrt{س}} + \sqrt{س}} = \text{نهـــا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س + \sqrt{س}} + \sqrt{س}}$$

بقسمة البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أس وهو $\sqrt{\text{س}}$.

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}}{\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}}} = \lim_{\text{س} \to \infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

ثالثا : إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها هي دالة اسية (غير جبرية) والتي يكون فيها الأساس ثابت والأس متغير فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس للمتغير س مع ملاحظة أن :

* $\lim_{\text{س} \to \infty} (1)^{\text{س}} = (1)^{\infty} = 1$

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty}$ = صفر، إذا كان أ < ب (أي إذا كان الكسر اقل من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{\text{س}}$ = صفر .

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty}$ = ∞ ، إذا كان أ > ب (أي إذا كان الكسر اكبر من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{\text{س}}$ = ∞ .

لاحظ ان $\frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{ب}^{\text{س}}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}}$.

مثال

اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}}$ ؟

الحل :

نلاحظ ان هذه الدالة اسية حيث أن الأس متغير .

∴ نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو ($٥^{س}$) .

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times \left(\frac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٤ \times \frac{٣^{س}}{٥^{س}}}{\left(\frac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٧ \times \frac{٣^{س}}{٥^{س}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times ١ + ٤ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س}}{١ + ٧ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س}}$

نلاحظ ان $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س}$ = صفر . $= \frac{٢}{١} = \frac{٢ \times ١ + ٤ \times ٠}{١ + ٧ \times ٠}$ = ٢ .

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}}$ = ٢

مثال :

اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٢^{س+٥} \times ٣^{س+٧}}{٦ \times ٢^{س} + ١٠ \times ٣^{س}}$

الحل :

نجد ان الحد المشتمل على اكبر اساس هو $(٣)^{س}$ حيث ان $(٧)^{٣}$ يعتبر ثابتا .

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{\text{٢}^{\text{س}}}{\text{٣}^{\text{س}}} + ٥ \times \frac{\text{٣}^{\text{س}}}{\text{٣}^{\text{س}}} + \frac{\text{٣}^{\text{٧}}}{\text{٣}^{\text{س}}}}{\frac{\text{٣}^{\text{س}}}{\text{٣}^{\text{س}}} \times ١٠ + \frac{\text{٢}^{\text{س}}}{\text{٣}^{\text{س}}} \times ٦} = \text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} + ٥ + \frac{\text{٣}^{\text{٧}}}{\text{٣}^{\text{س}}}}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} \times ٦ + ١٠}$$

لاحظ ان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}$ = صفر

$$= \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} + ٥ + \frac{\text{٣}^{\text{٧}}}{\infty}}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} \times ٦ + ١٠} = \frac{٠ + ٥ + ٠}{٠ \times ٦ + ١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{٢}^{\text{س}} + ٥ \times \text{٣}^{\text{س}} + \text{٣}^{\text{٧}}}{\text{٢} \times \text{٢}^{\text{س}} + ١٠ \times \text{٣}^{\text{س}}} = \frac{١}{٢}$$

مثال :

اوجد $\text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٦ \times ٢^{\text{س}+١} + ٥ \times ٣^{\text{س}+٢}}{٢^{\text{س}+٢} + ١٠ \times ٣^{\text{س}+١}}$

الحل :

قبل البدء في حل المثال تذكر ان :

$$٢^{\text{ن}+١} = ٢^{\text{ن}} \times (٢)^{١} = ٢ \times ٢^{\text{ن}}$$

$$٢^{\text{ن}+٢} = ٢^{\text{ن}} \times (٢)^{٢} = ٤ \times ٢^{\text{ن}}$$

$$٣^{\text{ن}+٢} = (٣)^{٢} \times ٣^{\text{ن}} = ٩ \times ٣^{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٦ \times ٢^{\text{س}} \times ٢ + ٥ \times ٩ \times ٣^{\text{س}}}{٤ \times ٢^{\text{س}} + ١٠ \times ٣^{\text{س}}} = \text{ نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{١٢ \times ٢^{\text{س}} + ٤٥ \times ٣^{\text{س}}}{٤ \times ٢^{\text{س}} + ٣٠ \times ٣^{\text{س}}}$$

obeikandi.com

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $(٣^{ن})$.

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} \times ١٢ + ٤٥ \times \frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}}}{\frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} \times ٤ + \frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} \times ٣٠}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{١ \times ٤٥ + ١٢ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}}}{١ \times ٣٠ + ٤ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}}}$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{٤٥}{٣٠} = \frac{٤٥ + ١٢ \times ٠}{٣٠ + ٠ \times ٤}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٦ \times ٢^{\text{س}+١} + ٥ \times ٣^{\text{س}+٢}}{٢^{\text{س}+٢} + ١٠ \times ٣^{\text{س}+١}} = \frac{٣}{٢}$$

مثال :

اوجد $\text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢ \times (٩)^{\text{س}+١} + ٣ \times (٢)^{٢\text{س}}}{(٣)^{٢\text{س}+١} + ٥ \times (٤)^{\text{س}}}$

الحل :

لاحظ أن $(٩)^{\text{س}+١} = (٣^{٢})^{\text{س}+١} = (٣)^{٢\text{س}+٢}$

$(٤)^{\text{س}} = (٢^{٢})^{\text{س}} = (٢)^{٢\text{س}}$

$$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢ \times (٣)^{٢\text{س}+٢} + ٣ \times (٢)^{٢\text{س}}}{(٣)^{٢\text{س}+١} + ٥ \times (٢)^{٢\text{س}}}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢ \times (٣)^{٢} \times (٣)^{٢\text{س}} + ٣ \times (٢)^{٢\text{س}}}{(٣)\ (٣)^{٢\text{س}} + ٥ \times (٢)^{٢\text{س}}}$$

obeikandl.com

بالقسمة على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو $(٣)^{٢س}$.

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١٨ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٣ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}{٣ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٥ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{١٨ \times ١ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}}{٣ \times ١ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}} = \frac{١٨ \times ١ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}{٣ \times ١ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}$$ ، لاحـــظ ان

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}$ = صفر

$$= \frac{١٨ + ٠}{٣ + ٠} = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ \times (٩)^{س+١} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١} + ٥ \times (٤)^{س}} = ٦$$

مثال :

اوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} \frac{(٥)^{س+٣}}{(٢٥)^{س+١}}$ ؟

الحل :

لاحظ ان : $(٢٥)^{س+١} = (٥^{٢})^{س+١} = (٥)^{٢س+٢}$

obeikandl.com

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{(٥)^{س} \times (٥)^{٣}}{(٥)^{٢س} \times (٥)^{٢}} = \lim_{س \to \infty} \frac{١٢٥ \times (٥)^{-س}}{٢٥}$$

$$= \lim_{س \to \infty} ٥ \times (٥)^{٢س} = ٥ \times (٥)^{-\infty} = \text{صفر} \text{ ، لاحظ أن } (٥)$$

$$(٥)^{-\infty} = \text{صفر}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{(٥)^{س+٣}}{(٢٥)^{س+١}} = \text{صفر}$$

مثال :

اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{(٧)^{س+٢}}}{(٧)^{س-١}}$

الحل :

بتبسيط البسط وذلك بتحويل الجذر الى اس :

$$\sqrt{(٧)^{س+٢}} = (٧)^{\frac{س+٢}{٢}} = (٧)^{\frac{س}{٢}+١}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{(٧)^{\frac{س}{٢}+١}}{(٧)^{س-١}} = \lim_{س \to \infty} (٧)^{\frac{س}{٢}+١-س+١}$$

$$= \lim_{س \to \infty} (٧)^{\frac{-س}{٢}+٢} = \lim_{س \to \infty} (٧)^{\frac{-س}{٢}+٢} \times (٧)^{٢}$$

$$= (٧)^{-\infty} \times ٤٩ = \text{صفر}$$

obeikandl.com

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{(٧)^{س+١}}}{(٧)^{س-١}} = \text{صفر}$$

مثال :

اذا كانت د(س) = $\frac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$ فاوجد :

(١) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) ، (٢) $\lim_{س \to \infty}$ د(س)

الحل :

(١) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$

= $\frac{أ \times (٣)^{٠} + ب \times (٣)^{٠}}{جـ \times (٣)^{٠} + د \times (٣)^{٠}}$

$\therefore \lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\frac{أ + ب}{جـ + د}$.

(٢) $\lim_{س \to \infty}$ د(س) = $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{أ \times ٣^{س} + ب \times ٣^{٢س}}{جـ \times ٣^{س} + د \times ٣^{٢س}}$

بقسمة البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس واس وهو $(٣)^{٢س}$.

$\lim_{س \to \infty}$ $\frac{أ \times \frac{٣^{س}}{٣^{٢س}} + ب \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}}}{جـ \times \frac{٣^{س}}{٣^{٢س}} + د \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}}}$ = $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{أ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + ب}{جـ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} + د}$

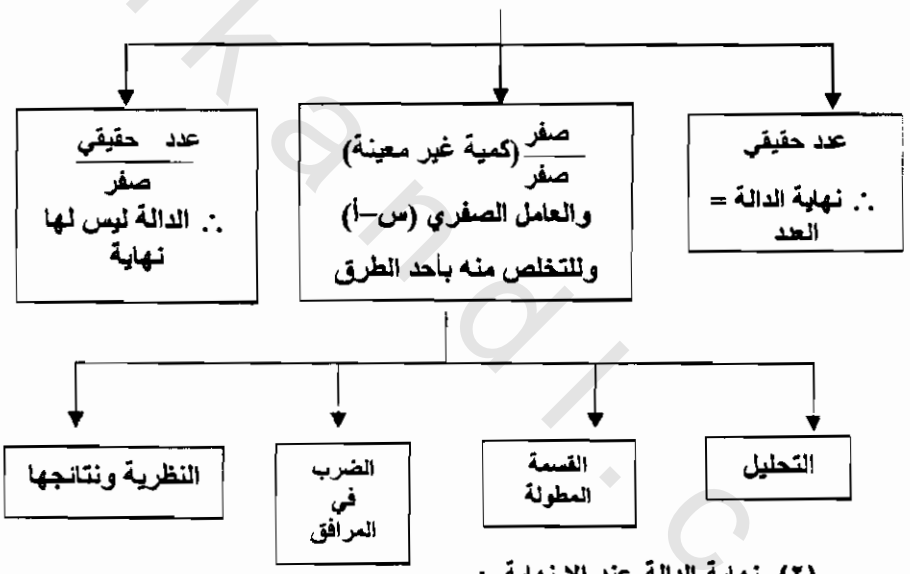
$$= \frac{أ \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} + ب}{\text{جـ} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} + د} = \frac{أ \times (0) + ب}{\text{جـ} \times (0) + د} = \frac{ب}{د}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} د(س) = \frac{ب}{د}$$

الخلاصة

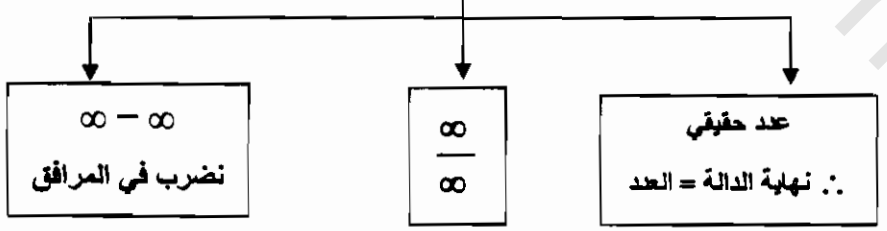
(١) نهاية الدالة الكسرية :-

$\lim_{س \to أ} د(س)$ ⇐ نعوض عن س بالقيمة أ فنحصل على :-

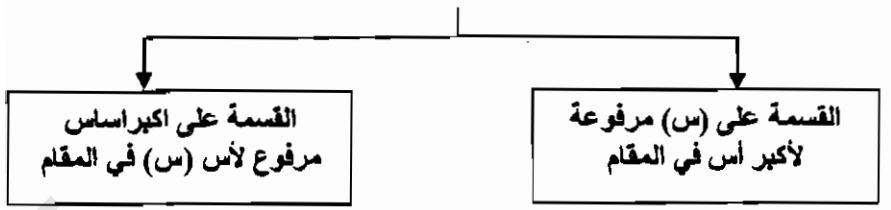


(٢) نهاية الدالة عند الا نهاية :-

$\lim_{س \to \infty} د(س)$ ⇐ نعوض عن س بالقيمة ∞ فنحصل على



obeikandi.com



تمرين (١)

المجموعة الأولى :

اوجد:

(١) $\lim_{س \to ٣} (س^{٢} - ٤س + ٣)$

(٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س}{س^{٢} + ٤}$

(٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

(٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{س^{٢} - س - ١٢}$

(٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$

(٦) $\lim_{س \to ٧} \frac{س^{٢} - ٤٩}{س^{٢} - ٩س + ١٤}$

(٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٧س + ١٢}$

(٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

(٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

(١٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}$

(١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣} + ٧س}{س}$

(١٢) $\lim_{س \to ∞} \frac{٢س^{٢} - س}{٢س^{٢} + س}$

(١٣) $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٢} + س + ١٠ ٩}{س^{٣} + ٩}$

(١٤) $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٣} + ٨}{١٢س^{٢} + ٩}$

(١٥) $\lim_{ن \to ∞} \frac{ن^{٢} + ٣ن + ١٠٠٠}{٢ن^{٢} + ن + ٧}$

(١٦) $\lim_{س \to ∞} \frac{س^{٣} + ٩س}{٣س^{٣} - ٧س + ٤}$

(١٧) $\lim_{س \to ∞} \frac{٣س - ٢}{٩س + ٧}$

(١٨) $\lim_{س \to ∞} \frac{٦س^{٢} + ٢س + ١}{٦س^{٢} - ٣س + ٧}$

obeikandl.com

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢}+س-٢}{٤س^{٣}-١}$

(٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}+١}$

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٤}+س^{٣}-س^{٢}-٥س+٤}{س^{٣}-س^{٢}-س+١}$

(٢٢) $\lim_{ن \to \infty} (\frac{٣}{٥})^{ن}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^{٤} + ب س^{٢} + جـ}{ء س^{٥} + هـ س^{٣} + و س}$

(٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢ - ٣س)^{٢} - ٤}{٣ س}$

(٢٦) $\lim_{ن \to \infty} \frac{٣ن^{٢}-٥×٢ن+٧×٢ن}{٢ ن^{٢} + ٨ × ٣ ن+٥×٧ ن}$

(٢٧)اوجد $ح_{ن}$ في المتسلسلة : $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٥} + \frac{٥}{٨} + ...$

ثم اثبت أن $\lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = \frac{٢}{٣}$

(٢٨)اثبت أن مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية هو الواحد الصحيح :

$د(س) = \frac{س^{٢}}{س^{٢}+١} + \frac{س^{٢}}{[س^{٢}+١]^{٢}} + \frac{س^{٢}}{[س^{٢}+١]^{٣}} + ...$

اوجد د(٠) ، $\lim_{س \to ٠}$ د(س) لترى أن د(٠) $\neq \lim_{س \to ٠}$ د(س)

المجموعة الثانية :

اوجد:

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٦}-٦٤}{س-٢}$

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-١}{س-١}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} \frac{٢٧س^{٣}-١}{٣س-١}$

(٤) $\lim_{س \to \frac{١}{٥}} \frac{٦٢٥س^{٤}-١}{٥س-١}$

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+س)^{٢}-١}{س}$

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٨+ص)^{\frac{١}{٣}}-٢}{ص}$

obeikandl.com

(٧) $\lim_{س \to ب} \frac{س^{م} - ب^{م}}{س^{ن} - ب^{ن}}$

(٨) $\lim_{و \to ٠} \frac{(س + و)^{٤} - س^{٤}}{(س + و) - س}$

(٩) من تعريف النهاية اثبت ان :

$\lim_{س \to ١} (٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٢٤س + ٢٢) = ٤$

اوجد $\lim_{و \to ٠}$ د(و) في كل من الحالات آلاتية :

(١٠) د(و) = $\frac{\sqrt{٣ + و} - \sqrt{و}}{و}$

(١١) د(و) = $\frac{(٢+و)^{٣} - ٨}{و}$

(١٢) د(و) = $\frac{(٢+و)^{٣} - ٤}{و}$

(١٣) د(و) = $\frac{(س+و)^{٢} س^{٢}}{و}$

(١٤) د(و) = $\frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{س+و}}{و}$

اوجد $\lim_{و \to ٠}$ $\frac{د(س+و) - د(س)}{و}$ في كل من الحالات آلاتية :

(١٥) د(س) = ٢س^{٢}

(١٦) د(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٣}

(١٧) د(س) = $\frac{١}{س}$

(١٨) د(س) = س^{٤}

(١٩) د(س) = $\sqrt{س}$

(٢٠) د(س) = س^{٢} − ٣س

اوجد كلا من النهايات الآتية :

(٢١) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{١}{(س - ٢)^{٣}}$

(٢٢) $\lim_{س \to ∞}$ $\frac{س}{س + ١}$

obeikandl.com

(٢٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}}{س - ١}$

(٢٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + س - ٦}{(س - ٢)^{٢}}$

(٢٥) $\lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{٥س + ٣و} - \sqrt{٥س}}{٢و}$

(٢٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ٥} - ٣}$

(٢٧) $\lim_{ن \to \infty} \frac{ن + ١}{ن}$

(٢٨) $\lim_{ن \to \infty} \frac{(ن + ١)(٢ن + ١)}{ن^{٢}}$

(٢٩) $\lim_{ن \to \infty} \frac{(ن + ١)(٢ن + ١)(٣ن + ١)}{ن^{٣}}$

(٣٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{\frac{٥}{٣}} - ٣٢}{س - ٨}$

(٣١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[ن]{س} - ١}$

(٣٢) $\lim_{ن \to \infty} \frac{١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن}{ن^{٢}}$

(٣٣) $\lim_{ن \to \infty} \frac{١ + ٢ + ٥ + \cdots + (٢ن - ١)}{ن^{٢} + ٤}$

obeikandl.com

(٣٤) $$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن}}{١ + ٥ + ٩ + \cdots + (٤\text{ن} - ٣)}$$

(٣٥) $$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + \text{ن}^{٢}}{١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن}}$$

(٣٦) $$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty} \frac{١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + \cdots + \text{ن}^{٢}}{١^{٣} + ٢^{٣} + ٣^{٣} + \cdots + \text{ن}^{٣}}$$

(٣٧) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{مجـ}_{١}^{\infty} \text{س}^{٢}}{(٢\text{س} + ٣)\ \text{مجـ}_{١}^{\infty} \text{س}}$$

obeikandl.com

نهاية الدوال المثلثية

مفاهيم أساسية هـ

١- $\lim_{س \to 0} \frac{حا س}{س} = ١$

٢- $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س} = ١$

٣- $\lim_{س \to 0} جتا س \neq ١$

٤- $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{ن}(م س)}{(م س)^{ن}} = ١$

٥- $\lim_{س \to 0} \frac{ظا^{ن}(م س)}{(م س)^{ن}} = ١$

٦- $١ - حتا س = ٢ جا^{٢} \frac{س}{٢}$

٧- $١ - حتا ٢ س = ٢ جا^{٢} س$

٨- $١ - جتا ٤ س = ٢ جا^{٢} ٢ س$

أمثلة

١) $\lim_{س \to ط} \frac{حا س}{س} = ٢٠٠ (١ ، -١ ، ٥)$

$\lim_{س \to ط} \frac{حا ط}{ط} = ٥ \Leftarrow \lim_{س \to ط} \frac{حا س}{س} = ٠$

٢) أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{١}{س \, قتا س}$ ؟!

obeikandi.com

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{١}{س \, ق\!ت\!ا \, س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{ح\!ا \, س}{س} = ١$$

٣) **أوجد** $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س + ط\!ا \, س}{س}$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س + ط\!ا \, س}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \text{نها}_{س \to ٠} \frac{ط\!ا \, س}{س} = ١ + ١ = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س + ط\!ا \, س}{س} = ٢$$

٤) **أوجد** $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{ج\!ا^{٢} \, ٣ س}{س^{٢}}$ ؟!

$$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{ج\!ا^{٢} \, ٣ س}{س^{٢}} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{ج\!ا^{٢} \, (٣ س)}{\left(\frac{٣ س}{٣}\right)^{٢}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{ج\!ا^{٢} \, (٣ س)}{س^{٢}} = ٩ \Leftarrow ١ \times ٩ =$$

٥) $\text{نها}_{س \to ٠} ٥ \, و \, ق\!ت\!ا \, و = ٥ \, \text{نها}_{س \to ٠} \frac{و}{ح\!ا \, و} = ١$

$$\text{نها}_{س \to ٠} ٥ \, و \, ق\!ت\!ا \, و = ٥$$

٦) **أوجد** $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{ج\!ا(س-٢)}{٧ س^{٢} - ١٤} = \frac{١}{٧} \, \text{نها}_{س \to ٢} \frac{ج\!ا(س-٢)}{س - ٢}$

obeikandl.com

$\frac{١}{٧}$ نهـا $\frac{جا(س-٢)}{٧س - ١٤} = \frac{١}{٧}$
س←٢

٧) أوجد نهـا $\frac{س^{٢} - ٦س + ٩}{ظا^{٢}(س - ٣)}$
س←٣

نهـا المقدار = نهـا $\frac{(س - ٣)^{٢}}{ظا^{٢}(س - ٣)} = ١$
س←٣

٨) نهـا $\frac{ظا (س - ٣)}{س^{٣} - ٢٧}$ ؟!
س←٣

نهـا المقدار = نهـا $\frac{ظا (س - ٣)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}$
س←٣ س←٣

نهـا المقدار = نهـا $\frac{ظا (س - ٣)}{(س - ٣)}$ × نهـا $\frac{١}{(س^{٢} + ٣س + ٩)}$
س←٣ س←٣ س←٣

نهـا المقدار = $\frac{١}{٢٧}$
س←٣

٩) أوجد نهـا $\frac{١ - حتا س}{س^{٢}}$
س←٠

١ - حتا = ٢ جا$^{٢}\frac{س}{٢}$

نهـا المقدار = $\frac{٢جا\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}}{\left(٢ \times \frac{س}{٢}\right)^{٢}}$
س←٠

$\frac{١}{٤}$×٢ نهـا $\frac{٢حا\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}}{\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}} = ٢ \times \frac{١}{٤} \times ١ = \frac{١}{٢}$
س←٠

obeikandl.com

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^{٢} س - حتا ٢ س}{س^{٣}} = \frac{١}{٣} \lim_{س \to 0} \frac{١ + طا^{٢} س - حتا ٢ س}{س^{٢}}$

$\frac{١}{٣} [\lim_{س \to 0} ١ - حتا ٢ س + \lim_{س \to 0} \frac{طا^{٢} س}{س^{٢}}] = \frac{١}{٣} [\lim_{س \to 0} ٢ \frac{حا^{٢} س}{س^{٢}} + ١]$

$\lim_{س \to 0}$ المقدار $= \frac{١}{٣} (٢ + ١) = ١$

١١) أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{قتا هـ - طتا هـ}{هـ}$ ؟!

$\lim_{س \to 0}$ المقدار $= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{١}{جا هـ} - \frac{جتا هـ}{حا هـ}}{هـ}$

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - حتا هـ}{هـ جا هـ} = \lim_{س \to 0} \frac{٢ حا^{٢} \frac{هـ}{٢}}{هـ \times حا \frac{هـ}{٢} حتا \frac{هـ}{٢}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{طا \frac{هـ}{٢}}{٢ \times \frac{هـ}{٢}} = \frac{١}{٢}$ $\lim_{س \to 0} \frac{طا \frac{هـ}{٢}}{\frac{هـ}{٢}} = \frac{١}{٢}$

١٢) أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{حتا ٢ س - ٢ حتا س + ١}{س^{٢}}$

$\lim_{س \to 0}$ المقدار $= \lim_{س \to 0} \frac{٢ حتا^{٢} س - ١ - ٢ حتا س + ١}{س^{٢}}$

$\lim_{س \to 0}$ المقدار $= -٢ [\lim_{س \to 0} حتا س \times \lim_{س \to 0} ١ - \frac{حتا س}{س^{٢}}]$

obeikandl.com

نهـا المقدار = -٢ [١ × $\frac{١}{٢}$] ⇐ نهـا المقدار = - ١
س←٠ س←٠

١٣) **أوجد** نهـا $\frac{\sqrt[٣]{\text{جا س}} - \text{حتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٦}}$
س←$\frac{\pi}{٦}$

جا (س - $\frac{\pi}{٦}$) = جا س حتا $\frac{\pi}{٦}$ - حتا س حا $\frac{\pi}{٦}$

حا (س - $\frac{\pi}{٦}$) = حا س × $\sqrt[٣]{\frac{٣}{٢}}$ - حتا س × $\frac{١}{٢}$

حا (س - $\frac{\pi}{٦}$) = $\sqrt[٣]{}$ حا س – حتا س (البسط)

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{حا (س - } \frac{\pi}{٦})}{\text{س} - \frac{\pi}{٦}}$ × ٢
س←$\frac{\pi}{٦}$ س←$\frac{\pi}{٦}$

نهـا المقدار = ٢
س←$\frac{\pi}{٦}$

١٤) **أوجد** نهـا $\frac{\text{١ - حتاس}}{\text{س}}$ ؟!
س←٠

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{٢جا}^{٢} \frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$ ⇐ ٢ نهـا ٢٠٠٦/٠٧/٢٩ $\frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$ × جا $\frac{\text{س}}{٢}$
س←٠ س←٠ س←٠

نهـا المقدار = ٢ نهـا $\frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$ × حا ٠
س←٠ س←٠ ٢ × $\frac{\text{س}}{٢}$

obeikandl.com

نهـا المقدار = ١ × ٠ = ٠
س←٠

١٥) أوجد نهـا $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص حا ص}}$ ؟!
ص←٠

بقسمة حدي الكسر على ص^{٢}

نهـا $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص حا ص}}$ = نهـا $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص}^{٢}}$ + نهـا $\frac{\text{ص حا ص}}{\text{ص}^{٢}}$
ص←٠ ص←٠ ص←٠

نهـا $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص حا ص}}$ = ١
ص←٠

١٦) أوجد نهـا $\frac{٣\text{س} - \text{حا س}}{\text{ظا س} + \text{س}}$ ؟!
س←٠

بقسمة حدود الكسر على س :

نهـا المقدار = $\frac{\text{نهـا}_{\text{س←٠}} \frac{٣\text{س}}{\text{س}} - \text{نهـا}_{\text{س←٠}} \frac{\text{حا}\cdot\text{س}}{\text{س}}}{\text{نهـا}_{\text{س←٠}} \frac{\text{ظا}\cdot\text{س}}{\text{س}} + \text{نهـا}_{\text{س←٠}} \frac{\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٣-١}{١+١} .$ ⇐ نهـا المقدار = ١
س←٠ س←٠

١٧) أوجد نهـا $\frac{\text{ظا(حاس)}}{\text{س}}$ ؟!
س←٠

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{ظا(حاس)}}{\text{س}} \times \frac{\text{حا س}}{\text{حا س}}$
س←٠ س←٠

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{ظا حا س}}{\text{حا س}} \times$ نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = ١
س←٠ س←٠ س←٠

obeikandl.com

١٨) أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{\sqrt[3]{س}}$ ؟

$$\lim_{س \to 0} \frac{حا\ س}{\sqrt[3]{س}} = \lim_{س \to 0} \frac{حا\ .\ س}{س^{\frac{1}{3}}} \times \frac{س^{\frac{2}{3}}}{س^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{المقدار} = \lim_{س \to 0} \frac{حا\ .\ س}{س} \times \lim_{س \to 0} س^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{المقدار} = ١ \times ٠ = ٠$$

$$\lim_{س \to 0}$$

١٩) أوجد $\lim_{س \to 0} \frac{-٤طا^{٢}س}{\sqrt{٢حتاس - ٤سحاس + ٤}}$

$$\text{المقدار} = \lim_{س \to 0} \frac{-٤طا^{٢}س}{\sqrt{٢حتاس - ٤سحاس + ٤}} \times \frac{\sqrt{٢حتاس + ٤س\ حاس + ٤}}{\sqrt{٢حتاس + ٤س\ حاس + س}}$$

(المرافق)

$$= -٤ \lim_{س \to 0} \frac{طا^{٢}س\ (٢حتاس + \sqrt{٤س\ حاس + ٤})}{٤حتا^{٢}س - ٤س\ حاس - ٤}$$

(بأخذ ٤ عامل مشترك) ، (حتا^{٢} س - ١) = - حا^{٢} س

$$\text{المقدار} = - \lim_{س \to 0} \frac{طا^{٢}س\ (٢حتاس + \sqrt{٤س\ حاس + ٤})}{-(حا^{٢}س + س\ حاس)}$$

$$\text{المقدار} = ١ \times \frac{٢حتاه + \sqrt{٤ \times ٥ + ٤}}{١ + ١}$$

$$\text{المقدار} = ٢$$

٢١) أوجد نها $\frac{\text{حا س طا س - }\sqrt{٣}\text{طا س حتا س - }\sqrt{٣}\text{حا س + ٣حتا س}}{(١+\sqrt{٣}\text{ طا س})(\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣})^{٢}}$ عندما س $\to \frac{\text{ط}}{٣}$

نها المقدار $\frac{\text{حا س (طا س - }\sqrt{٣})(-\sqrt{٣}\text{حتا س (طا س - }\sqrt{٣})}{)١ +\sqrt{٣}\text{طا س})(\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣})^{٢}}$ عندما س $\to \frac{\text{ط}}{٣}$

$= \text{نها}_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٣}} \frac{\text{طاس -}\sqrt{٣}}{)١ +\sqrt{٣}\text{طا س})(\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣})} \times \text{نها}_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٣}} \frac{\text{حتا س }\sqrt{٣}\text{ - حا س}}{\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣}}$

$\text{طا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \frac{\text{طا س - طا }\frac{\text{ط}}{٣}}{١+\text{طا س طا }\frac{\text{ط}}{٣}}$ ، $\text{جا}(\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣}) = \text{حا س حتا}\frac{\text{ط}}{٣} - \text{حتاس حا}\frac{\text{ط}}{٣}$

$\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \frac{١}{٢}\text{ حا س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ حتا س}$

$٢\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣}) = \text{حا س} - \sqrt{٣}\text{ حتا س}$

نها المقدار $= \text{نها}_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٣}} \frac{\text{ط}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})}{\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣}} \times ٢ \text{ نها}_{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{٣}} \frac{\text{حا}(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٣})}{\text{س}-\frac{\text{ط}}{٣}}$

نها المقدار = ٢
س $\to \frac{\text{ط}}{٣}$

٢٢) أوجد نها س حا $\frac{١}{\text{س}}$ ؟!
س $\to \infty$

بوضع $\frac{١}{\text{س}} = \text{ص}$ عندما س $\to \infty$

obeikandl.com

ص = $\frac{١}{\infty}$ ← ٠

نهـا $\frac{\text{حا ص}}{\text{ص}}$ = ١
س←٠

٢٣) **أوجد** نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س - ص}}$ ؟!
س←ص

بوضع س – ص = ص عندما س ← ط

س = ص + ط ص ← ط

نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س - ص}}$ = نهـا حا $\frac{\text{ص + ط}}{\text{ص}}$
س←ط ص←٠

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{حاص حتا ص + حتاص حا ط}}{\text{ص}}$
س←ط ص←٠

نهـا المقدار = نهـا - $\frac{\text{حا ص}}{\text{ص}}$ = -١
س←ط ص←٠

٢٤) **أوجد** نهـا $\frac{\text{طتاس}}{\text{ط}}$ ؟!
س←$\frac{ط}{٢}$ $\frac{ط}{٢}$ - س

بوضع $\frac{ط}{٢}$ - س = ص ، عندما س ← $\frac{ط}{٢}$

نهـا المقدار = نهـا طتا $\frac{\frac{ط}{٢} - ص}{ص}$
س←$\frac{ط}{٢}$ ص←٠

نهـا المقدار = نهـا $\frac{\text{طا ص}}{\text{ص}}$ = ١
س←$\frac{ط}{٢}$ ص←٠

obeikandl.com

٢٥) أوجد نها $\frac{|س|}{س}$ ؟!
س←٠

نها $\frac{|س|}{س}$ = نها $\frac{س}{س}$ = ١
س←٠ س←٠

نها $\frac{-س}{س}$ = -١
س←٠

ليس لها وجود

٢٦) أوجد نها $\frac{حا \cdot س}{|س|}$ ؟!
س←٠

نها $\frac{حا \cdot س}{|س|}$ = نها $\frac{حا \cdot س}{س}$ = ١
س←٠ س←٠

نها $\frac{حا \cdot س}{-س}$ = -١
س←٠

ليس لها وجود

٢٧) أوجد نها $\frac{هـ^{ظا^{٢}س} - ١}{س^{٢}}$ ؟!
س←٠

هـ^{ظا(س)} = د(س) ⇐ نها المقدار
س←٠

نها $\frac{حا^{٢}س}{س^{٢}}$ =١
س←٠

تذكر أن

١) حا أ ـ حا ب = ٢حتا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ حا $\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

obeikandl.com

٢) حتا أ − حتاب = −٢حا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ حا $\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

٢٨) <u>أوجد</u> نها $\frac{\text{حا}\left(\frac{ط}{٤}+هـ\right)-\text{حا}\frac{ط}{٤}}{هـ}$ هـ ← ٠

حا أ − حا ب = ٢حتا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ حا $\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

نها $\frac{\text{حتا}\left(\frac{ط}{٤}+\frac{هـ}{٢}+\frac{ط}{٤}\right)\text{حا}\left(\frac{ط}{٤}+\frac{هـ}{٢}-\frac{ط}{٤}\right)}{هـ}$ هـ ← ٠ = المقدار = ٢ نها هـ ← ٠

نها هـ ← ٠ المقدار = ٢ [نها هـ ← ٠ حتا $(\frac{ط}{٤}+\frac{هـ}{٢})$ × نها هـ ← ٠ $\frac{\text{حا}\frac{هـ}{٢}}{\frac{هـ}{٢}\times ٢}$]

نها هـ ← ٠ المقدار = حتا $(\frac{ط}{٤}+٥)$ ⇐ نها هـ ← ٠ المقدار = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٢٩) <u>أوجد</u> نها $\frac{\text{حتا}(٣س+٣هـ)-\text{حتا}٣س}{هـ}$ هـ ← ٠

حتا أ − حتاب = −٢حا $\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ حا $\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)$

البسط = −٢حا (٣س + $\frac{٣}{٢}$ هـ) حا $\frac{٣هـ}{٢}$

$$\text{نها}_{هـ\to 0} \text{ المقدار} = -2 \quad \text{نها}_{هـ\to 0} \text{ حا}(3س + \frac{3}{2}هـ) \times \text{نها}_{هـ\to 0} \frac{\text{حا}\frac{3}{2}هـ}{\frac{3}{2}هـ \times \frac{3}{3}}$$

$$\text{نها}_{هـ\to 0} \text{ المقدار} = \text{حا}(3س + 5) \times 3$$

$$\text{نها}_{هـ\to 0} \text{ المقدار} = -3\text{حا}3س$$

٣٠) أوجد $\text{نها}_{س\to 0} \frac{س \text{ حا } س}{1 - \text{حتا } س}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على $س^2$

$$\text{نها}_{س\to 0} \frac{\frac{س \cdot \text{حا} \cdot س}{س^2}}{\frac{1 - \text{حا} \cdot س}{س^2}} = \text{نها}_{س\to 0} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2\text{حا}^2 \frac{س}{2}}{\left(2 \times \frac{س}{2}\right)^2}}$$

$$\text{نها}_{س\to 0} \text{ المقدار} = 2$$

٣١) أوجد $\text{نها}_{س\to 0} \frac{\text{طا}^{-1} س}{\text{حا}^{-1} س}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على س

$$\text{نها}_{س\to 0} \text{ المقدار} = \text{نها}_{س\to 0} \frac{\text{طا}^{-1} س}{س} \div \text{نها}_{س\to 0} \frac{\text{حا}^{-1} س}{س}$$

بوضع $\text{طا}^{-1} س = \alpha$ $\quad س = \text{طا } \alpha$

$\text{حا}^{-1} س = \beta$ $\quad س = \text{حا}\beta$

obeikandl.com

$$\text{نها}_{س\leftarrow 0} \text{ المقدار} = \text{نها}_{\alpha\leftarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha \text{ طا}} + \text{نها}_{\beta\leftarrow 0} \frac{\beta}{\beta \text{ حا}}$$

$$\text{نها}_{س\leftarrow 0} \text{ المقدار} = 1 + 1 = 1$$

تمرين (٢)

المجموعة الأولى :-

أوجد قيمة النهايات الآتية :-

(١) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{1 - \text{حتا } 2س}{3س^2}$

(٢) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{5 \text{ س} + \text{حا س}}{7 \text{ س} - \text{طا س}}$

(٣) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{1 - \text{حتا } 2 \text{ س}}{س^2}$

(٤) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{5}{س^2 \text{ قتا}^2 \text{ س}}$

(٥) $\text{نها}_{س\leftarrow \frac{\text{ط}}{2}} \frac{\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{2} - س\right)}{\frac{\text{ط}}{2} - س}$

(٦) $\text{نها}_{أ\leftarrow 0} \frac{1 - \text{حتا أ}}{أ^2}$ حيث أ بالتقدير الدائري

(٧) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{\text{حا س} + س^2}{\text{س}}$

(٨) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{\text{قا } 2 \text{ س طا } 3 \text{ س}}{3 \text{ س}}$

(٩) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{\text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{2} - س\right)}{\text{س}}$

(١٠) $\text{نها}_{س\leftarrow 0} \frac{\text{حا } 2 \text{ س}}{\text{س}}$

obeikandl.com

(١١) $\lim_{س \to 0} \frac{حا^{٢}(\frac{١}{٢}س)}{س^{٢}}$

(١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{حتا ٢س - ٢ حتا س + ١}{س^{٢}}$

(١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س^{٢} + حا٣س^{٢}}{س^{٢} + ظا٤س}$

(١٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٢ حا س + ٣ ظا س}{٥ س حتا ٢ س}$

(١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{٢ س^{٢} + حا ٢س^{٣}}{س^{٤} - ظا ٣٣ س}$

المجموعة الثانية :-

ضع علامة (√) أو (X)

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{حا س ظا س}{٢ س} =$ صفر ( )

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٢ س حا ٣ س}{٥ س^{٢}} = \frac{٤}{٥}$ ( )

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{٥}{س قتا ٣ س} = ٥$ ( )

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - حتا ٢ س}{س^{٢}} = ٣$ ( )

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{س + حا ٣ س}{٢ س} = ٢$ ( )

(٦) $\lim_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{حا ٣ س}{س}$ ( )

obeikandl.com

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٢ س \, طا ٣ س}{٥ س^{٢}} = ١$ ( )

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س \, حتا ٣ س}{٩ س} = ١$ ( )

(٩) $\lim_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{حا^{٢} س - حتا^{٢} س}{س^{٢}} = \frac{٤}{ط^{٢}}$ ( )

(١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{حتا(\frac{ط}{٢} - س)}{٢ س} = \frac{١}{٢}$ ( )

obeikandl.com

الاشتقاق

دالة التغير – دالة متوسط التغير – دالة معدل التغير

مفهوم التغير:

اذا كان المتغير الحقيقى س قيمته الابتدائية س، وزادت قيمته أو نقصت ر أصبحت س،

فان التغير فى س = س، - س،

(يرمز للتغير فى س بالرمز هـ أو △ س)

∴ هـ (△ س) = س، - س،

ملاحظات :

التغير فى س قد يكون موجبا أو سالبا

اذا كان س، > س، يكون موجبا

اذا كان س، < س، يكون سالبا

دالة التغير

- اذا كانت ص= د(س) وتغيرت س من س، الى س، + هـ

فان د(س) تتغير تبعا لها بمقدار د(س،+ هـ) – د(س)

و يكون

$$ت(هـ)_{س=س_1} = د(س_1+هـ) - د(س_1)$$

حيث ت (هـ) معناها التغير فى الدالة بمعنى أن ت (هـ) دالة تعين قيمة التغير الذى يتوقف على هـ

- ∴ دالة التغير = الدالة بعد التغير – الدالة قبل التغير
- ت (هـ) = د (س، + هـ) – د (س،)

△ص = د (س، + △س) – د (س،)

obeikandl.com

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ١ و تغيرت س من س الى س + هـ .

أوجد دالة التغير ، ثم احسب ت (٠,٥)

الحـل

∴ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= [٢ (س + هـ) + ١] - (٢ س + ١)

= ٢ س + ٢ هـ + ١ – ٢ س – ١ = ٢ هـ

∴ ت (هـ) = ٢ هـ

∴ ت (٠,٥) = ٢ × ٠,٥ = ٠,١٠

مثال : اذا كانت د (س) = س^{٢} و تغيرت س من س = ٣ الى س = ٣ + هـ .

أوجد ت (هـ)$_{س=٣}$ ثم أوجد قيمة ت (٠,١) ، ت (٠,٢٠)

الحـل

∴ ت (هـ) = د (س$_{١}$ + هـ) – د (س$_{١}$)

∵ د (س) = س^{٢} ، س$_{١}$ = ٣ ∴ ت (هـ) د (٣ + هـ) – د (٣)

∴ ت (هـ) = (٣ + هـ)^{٢} – ٣ = ٩ + ٦ هـ + هـ^{٢} – ٩ = ٦ هـ + هـ^{٢}

∴ ت (٠,١) = ٦ (٠,١) + (٠,١)^{٢} = ٠,٦ + ٠,٠١ = ٠,٦١

∴ ت (٠,١) = ٠,٦١

∴ ت (٠,١) = ٠,٦١ (مقدار تغير د (س) عندما تتغير س من ٣ الى ٣,١)

، ت(٠,٢٠) = ٦ (٠,٢٠) + (٠,٢٠)^{٢} = ١,٢٠ + ٠,٠٤ = ١,١٦

= مقدار تغير د(س) عندما تتغير س من ٣ الى ٣,٨

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ٣ فما قيمة التغير فى س ، قيمة التغير فى د(س) فيما يلى:

(أ) عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٠٢

(ب) عندما تتغير س من ٢ الى ١,٨

الحـل

(أ) س$_{١}$ = ٢ ، س$_{٢}$ = ٢,٠٢ ∴ △س = التغير فى س = س$_{٢}$ – س$_{١}$

obeikandi.com

∴ △س = ٢,٠٢ − ٢ = ٠,٠٢

التغير فى د(س) = △ ص = △(س^{٣}) − د (س$_{١}$)

د (س$_{٢}$) = د (٢,٠٢) ، د (س$_{١}$) = ٢

= د (٢,٠٢) − د (٢) = (٣×٢,٠٢+١) − (٣×٢+١)

= (٧,٠٦) − (٧) = ٠,٠٦

(ب) س$_{١}$= ٢ ، س$_{٢}$ = ١,٨

△س = التغير فى س = ١,٨ − ٢ = −٠,٢

△ص = د (س$_{٢}$) − د (س$_{١}$) = د(١,٨) − د(٢)

= (٣×١,٨+١) − (٣×٢+١)

= ٦,٤ − ٧ = − ٠,٦

(لاحظ △س فى (أ) موجبة ، و سالبة فى (ب))

دالة متوسط التغير

∴ ت(هـ) = د (س$_{١}$+ هـ) − د (س$_{١}$)

بالقسمة على هـ حيث هـ≠٠ نحصل على :

دالة متوسط التغير [م(هـ)] = $\frac{\text{ت(هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{△ ص}}{\text{△ س}}$

= $\frac{\text{د(س}_{١}\text{ + هـ) − د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$

∴ م(هـ)= $\frac{\text{الدالة بعد التغير − الدالة قبل التغير}}{\text{هـ}}$

مثال: اذا كانت د(س) = $\frac{٣}{(٢\text{ س} - ١)}$

احسب متوسط التغير عندما تتغير س من س$_{١}$ الى س$_{١}$ + هـ . ثم احسب المتوسط عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥

الحـــل

ت(هـ) = د(س$_{١}$ + هـ) − د(س$_{١}$)

obeikandi.com

$$= \frac{٣}{(٢+هـ)^{٢}-١} - \frac{٣}{٤-١} = \frac{٣}{٣+٢هـ+هـ^{٢}} - ١$$

$$ت(هـ) = \frac{-٣-٣-٢هـ}{٣+٢هـ+هـ^{٢}} = \frac{-٢هـ}{٣+٢هـ}$$

$$\therefore م(هـ) = \frac{ث(هـ)}{هـ} = \frac{-٢هـ}{٣+٢هـ} \times \frac{١}{هـ} = \frac{-٢}{٣+٢هـ}$$

وعندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥ فان هـ = ٠,٢٥

$$\therefore م(٠,٢٥) = \frac{-٢}{٣+٢\times٠,٢٥+٠,٢٥^{٢}} = \frac{-٢}{٣+٠,٥} = \frac{-٢}{٣,٥}$$

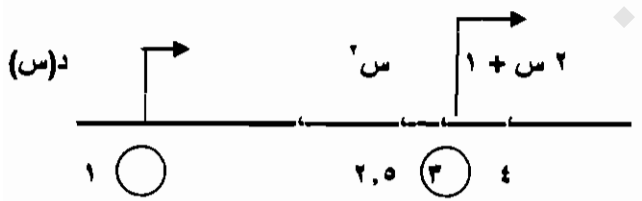
$$= - \frac{٢٠٠}{٣٥} = - ٠,٦٦$$

مثال : اذا كان د(س) = { س^{٢} اذا كان ١ ≤ س < ٣ ؛ ٢ س + ١ اذا كان س ≥ ٣ }

فأوجد متوسط الدالة د(س) عندما تتغير س

(أ) من ١ الى ٢,٥ (ب) من ٣ الى ٤

الحـــل



(أ) عندما تتغير س من ١ الى ٢,٥ : س = ١ ، هـ = ١,٥

$$\therefore م(١,٥) = \frac{د(٢,٥)-د(١)}{١,٥} = \frac{٧}{٢}$$

(ب) عندما تتغير س من ٣ الى ٤ : س = ٣ ، هـ = ١

obeikandi.com

$$\therefore م(1) = \frac{د(4) - د(3)}{1} = \frac{9 - 7}{1} = 2$$

مثال: أوجد متوسط معدل تغير حجم كرة عندما يتغير نصف قطرها من ٣ سم الى ٥ سم

الحل

حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ ط نق^3 حيث نق نصف قطر الكرة

نق = ٣ ، نق + هـ = ٥ $\therefore$ هـ = ٢

$$م(هـ) = \frac{د(5) - د(3)}{2}$$

$$\therefore د(5) = \frac{1}{3} ط (5)^3 ، د(3) = \frac{4}{3} ط (3)^3$$

$$\therefore م(هـ) = \frac{4}{3} ط (5)^3 - \frac{4}{3} ط (3)^3 = \frac{392}{6} ط سم^3 / ث$$

مثال: يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث كانت المسافة معطاة بالعلاقة

ف = ٢ن^2 + ٣ن + ٥ حيث ن الزمن بالثواني ، ف بالسم . أحسب متوسط تغير ن من ١ الى ٥

الحل

د(٥) = ٢(٥)^2 + ٣×٥ + ٥ = ٥٠ + ١٥ + ٥ = ٧٠

د(١) = ٢(١)^2 + ٣×١ + ٥ = ١٠

هـ = ٥ - ١ = ٤

$$\therefore م(هـ) = \frac{70 - 10}{4} = 15$$

مثال: احسب دالة متوسط التغير في د عند س = ٣ اذا كانت د(س) = $\sqrt{س + 8}$

obeikandi.com

الحـــل

ت(هـ) = د(١ + هـ) – د (١)

$$= \sqrt{١ + هـ + ٨} - \sqrt{١ + ٨}$$

$$= \sqrt{٩ + هـ} - \sqrt{٩} \quad \text{بالضرب} \times \text{المرافق}$$

$$= \frac{٩ + هـ - ٩}{\sqrt{٩ + هـ} + \sqrt{٩}} \times \frac{\sqrt{٩ + هـ} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٩ + هـ} + \sqrt{٩}} = \frac{٩ + هـ - ٩}{\sqrt{٩ + هـ} + ٣}$$

$$\therefore م(هـ) = \frac{هـ}{\sqrt{٩ + هـ} + ٣} \times \frac{١}{هـ} = \frac{١}{\sqrt{٩ + هـ} + ٣}$$

معدل تغير الدالة

$$\text{معدل تغير الدالة} = \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

مثال: اذا كانت د(س) = ٣ س^{٢} – ١ و تغيرت س من س الى س + هـ .

احسب معدل التغير عند س = ١

الحـــل

$$\therefore \text{معدل التغير} = \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{[٣(س + هـ)^{٢} - ١] - [٣ س^{٢} - ١]}{هـ}$$

$$= \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{[٣ س^{٢} + ٦ س هـ + ٣ هـ^{٢} - ١ - ٣ س^{٢} + ١]}{هـ}$$

$$= \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{٦ س هـ + ٣ هـ^{٢}}{هـ} = \text{نهـ}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦ س + ٣ هـ)}{هـ}$$

obeikandi.com

= نهـــــــــا ٦س+٣ هـ

هـ ← ٠

∴ معدل التغير = ٦ س عندما س = ١

∴ معدل التغير = ٦ × ١ = ٦

مثال: مكعب من المعدن يتمدد بانتظام محتفظا بشكله . أوجد متوسط معدل التغير فى حجم المكعب عندما يتغير طول حرفه من ٣ سم الى ٣,٢ سم . ثم احسب معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه = ٤ سم .

الحـــل

∴ ح = س^{٣}

∴ ت(هـ) = (س$_{١}$ + هـ)^{٣} − س$_{١}^{٣}$

= هـ (٣ س$_{١}^{٢}$ + ٣ س$_{١}$ هـ + هـ^{٢})

∴ م هـ = هـ (٣ س$_{١}^{٢}$ + ٣ س$_{١}$ هـ + هـ^{٢}) × $\frac{١}{هـ}$

= ٣ س$_{١}^{٢}$ + ٣ س$_{١}$ هـ + هـ^{٢}

و بوضع س$_{١}$ = ٣ ، هـ = ٣,٢ − ٣ = ٠,٢

∴ م(٠,٢) = ٢٧ + ٩ × ٠,٢ + ٠,٠٤ = ٢٨,٨٤

لايجاد معدل التغير :

نهـــــــــا م(هـ) = ٣ س$_{١}^{٢}$ + ٣ س$_{١}$ × ٠ + (٠)^{٢}

هـ ← ٠ = ٣ س$_{١}^{٢}$ = ٣ × ١٦ = ٤٨

مثال: اذا كانت د(س) = أ س^{٢} + ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح فأوجد دالة التغير ت(هـ) عندما س من ٢ الى ٢ + هـ . ثم أوجد كلا من أ ، ب ، حـ . علما بأن د (١) = ٠ ، د (٢) = ٥

، ت(٠,٢) = ٦,٢٤

الحـــل

∴ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= أ (س + هـ)^{٢} + ب(س + هـ) + جـ – أ س^{٢} – ب س – جـ

= ٢ أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب هـ

، ∴ د(١) = ٠ ∴ أ + ب + جـ = ٠ .....(١)

د(٢) = ٥ ∴ ٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥ .....(٢)

ت(٠,٢) = ٦,٢٤ ∴ ٢١ أ + ٥ ب = ٣١ .....(٣)

بطرح (١) من(٢)

٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥

أ + ب + جـ = ٠

٣ أ + ب = ٥.....(٤)

بضرب (٤) × ٧ و بطرح (٣) منها

∴ ٢١ أ + ٧ ب = ٣٥

٢١ أ + ٥ ب = ٣١

٢ ب = ٤ ∴ ب = ٢

من (٣) أ = ١ و من (١) جـ = – ٣

مثال: اذا كانت د(س) = ٣ س – ١ ، س ≥ ١

س^{٢} + س ، س > ١

أوجد تغير الدالة عندما س = ١

الحـــل

$$م(هـ) = \frac{د(١+هـ)-د(١)}{هـ} \quad \text{من س} = ١$$

$$= \begin{cases} \dfrac{٣(١+هـ)-١-٢}{هـ} & ، \ هـ < ٠ \\ \dfrac{(١+هـ)^{٢}+١+هـ-٢}{هـ} & ، \ هـ > ٠ \end{cases}$$

obeikanal.com

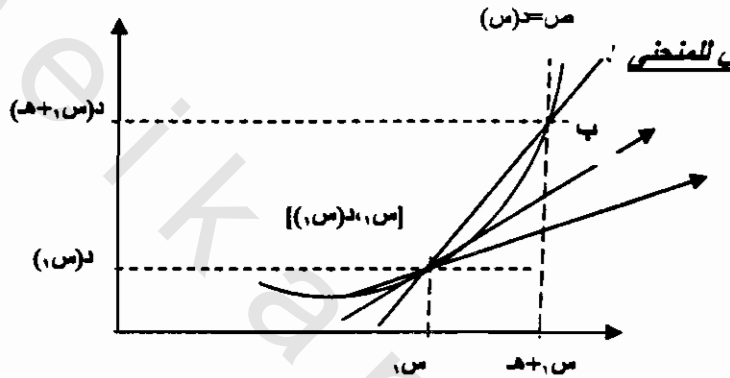
$$= \begin{cases} ٣ & ، \ هـ < ٠ \\ ٣ + هـ & ، \ هـ > ٠ \end{cases}$$

∴ نهـــــــا م(هـ) = ٣

هـ ← ٠

∴ (معدل التغير)س = ١ = ٣

التفسير الهندسى لمعدل التغير



لاحظ أن أ ب مستقيم قاطع للمنحنى و ميله يتعين بالمقدار

$$\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

أى أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، د(س١)) ع للمنحنى

هو ميل التماس = نهـــــــا $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = طا ى = د′ (س)

هـ ← ٠

∴ معدل التغير = ميل المماس = نهـــــــا $\frac{د(س+ هـ) - د(س)}{هـ}$

هـ ← ٠

اذا كان ص = د(س) فان المشتقة الأولى للدالة عند نقطة هو ميل المماس للمنحنى عند نقطة ويرمز لها $\frac{ص}{س}$ = ص' = د' (س) = $\frac{ص}{س}$ د(س)

مثال: اذا كانت د(س) = $س^2$ – ٣ س+ ٥ أوجد د' (س) ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه

الحـــل

د(س) = $س^2$ – ٣ س+ ٥

∴ د(س+هـ)= (س + هـ)^2- ٣ (س + هـ) + ٥

د(س + هـ) – (س) = (س + هـ)^2- ٣ (س + هـ) + ٥ – $س^2$ +٣ س -٥

= $س^2$ + ٢س هـ + $هـ^2$ -٣ س -٣ هـ +٥ – $س^2$ + ٣ س -٥

=٢س هـ + $هـ^2$ – ٣هـ

∴ د'(س) = نهـــــا $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

هـ ← ٠

= نهـــــا هـ $\frac{(٢س - ٣ + هـ)}{هـ}$ = ٢س – ٣

هـ ← ٠

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة [س ، د (س)] =٢س – ٣

= ٢ × ١ – ٣ = –١

∴ ميل المماس = –١ عند النقطة (١،٢)

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٢}{٢ س - ٣}$ عند أى نقطة عليه (س ، ص) ثم استنتج هذا الميل عند النقطة (–١ ، ٢) .

الحـــل

ملاحظة لاحظ أن الدالة غير معرفة عند س= $\frac{٣}{٢}$ أى أن المشتقة الأولى للدالة عند

obeikandi.com

س = $\frac{٣}{٢}$ ليس لها وجود .

د(س + هـ) = $\frac{٢}{٢ (س + هـ) - ٣}$

د(س + هـ) – د(س) = $\frac{٢}{٢ (س + هـ) - ٣}$ – $\frac{٢}{٢س - ٣}$

= $\frac{٢[٢س - ٣] - ٢[٢س + ٢هـ - ٣]}{(٢س + ٢هـ - ٣) (٢س - ٣)}$

د(س + هـ) – د(س) = $\frac{٤س - ٦ - ٤س - ٤هـ + ٦}{(٢س + ٢هـ - ٣) (٢س - ٣)}$

نهـــــا $\frac{د(س+ هـ) - د(س)}{هـ}$ = $\frac{- ٤}{(٢س - ٣) ٢}$ = د' (س)

هـ ← ٠

= $\frac{ع ص}{ع س}$

∴ $\left(\frac{ع ص}{ع س} \right)_{س = ١،٢}$ = $\frac{- ٤}{٢٥}$.

مثال: اذا كانت العلاقة التى تربط المسافة التى يتحركها جسيم و الزمن تعطى بالمعادلة

ف = ن^{٢} + ٢٠ ن + ١ فأوجد سرعته بعد مرور ٥ ثوان

الحـــل

السرعة هى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

∴ لايجاد السرعة نوجد معدل تغير ف بالنسبة لـ ن أى نهـــــا $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

$\Delta ن \leftarrow ٠$

∴ د(ن) = ف = ن^{٢} + ٢٠ ن + ١

د(ن + هـ) = (ن + هـ)^{٢} + ٢٠ (ن + هـ) + ١

∴ ف = د(ن + هـ) – د(ن)

= [(ن + هـ)^{٢} + ٢٠ (ن + هـ) + ١] – [ن^{٢} + ٢٠ ن + ١]

obeikandi.com

$= ن^2 + 2 ن هـ + هـ^2 + 20 ن + 20 هـ + 1 - ن^2 - 20 ن - 1$

$\therefore ف = 2 ن هـ + هـ^2 + 20 هـ$

$\therefore$ معدل التغير (السرعة) $= \text{نهـا}_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{2 ن هـ + هـ^2 + 20 هـ}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{هـ(2 ن + هـ + 20)}{هـ} = 2 ن + 0 + 20$

$\therefore$ السرعة $= 2 ن + 20$

عندما ن = ٥ ثوان فان ع $= 2 \times ٥ + 20 = 10 + 20 = ٣٥$ متر / ث

مثال: اثبت أن معدل التغير فى حجم مكعب بالنسبة لأحد أضلاعه هو ١٢ بوصة مكعبة لكل بوصة حينما يكون طول الضلع بوصتين .

الحـل

$\therefore$ حجم المكعب = (طول الضلع)^3

نفرض طول الضلع ل بوصة و أن حجم المكعب ح بوصة مكعبة

ح $= ل^3$ $\therefore د(ل) = ل^3$

$\therefore د(ل + هـ) = (ل + هـ)^3$

$\therefore$ معدل التغير فى حجم المكعب $\frac{\text{ء ح}}{\text{ء ل}} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{د(ل + هـ) - د(ل)}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(ل + هـ)^3 - ل^3}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(ل + هـ)^3 - ل^3}{(ل + هـ) - هـ}$

$= 3 (ل)^2$

$\therefore \frac{\text{ء ح}}{\text{ء ل}} = 3 ل^2$

و عندما يكون الضلع ل = ٢ بوصة فان $\frac{\text{ء ح}}{\text{ء ل}} = 3 (2)^2 \times 4 = 12$

obeikandi.com

$\therefore \frac{ح^{٢}}{ع_{ل}}$ = ١٢ بوصة مكعبة / بوصة

تمرين(٣)

(١) اذا كانت د(س) = س^{٢} + س وتغيرت س من ٢ الى ٢ + هـ أوجد :

(أ) دالة التغير ت ، ثم أوجد ت (٠,١)

(ب) دالة متوسط التغير م ، ثم أوجد م (٠,٠١)

(جـ) معدل التغير عند س = ٢

(٢) أوجد دالة متوسط معدل التغير للدالة د(س) = س^{٢} ـ ٣س + ١ عندما تتغير س من س$_{١}$ الى س$_{١}$ + هـ ومنها أوجد:

(أ) متوسط معدل التغير عندما س$_{١}$ = ٥ ، هـ = ٠,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما س$_{١}$ = ٨ ، هـ = ـ ٠,٥

(٣) للدالة د : س ⟵ $\sqrt{\text{س}}$ ، س ∋ ح . أوجد :

(أ) دالة التغير (ب) دالة متوسط معدل التغير عند س$_{١}$ = ١

(٤) اذا كانت د(س) معرفة كالآتى :

د(س) = س^{٢} عند س > ٣

٢ س + ٣ عند س ≤ ٣

أوجد متوسط تغير الدالة (س) عندما تتغير س :

(أ) من ٢ الى ٣ (ب) من ٤ الى ٤,٥

(٥) أوجد دالة التغير ت(هـ) للدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + ٤ وذلك عندما تتغير س من ٣ الى ٣ + هـ . واذا كانت د(٣) = ٤ ، ت(٠,٥) = ١,٧٥ . أوجد قيمتى أ ، ب

(٦) اذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ (س < ١)

٥ ـ ٢س (س ≤ ١)

أوجد :

(أ) متوسط معدل التغير للدالة عندما تتغير س من س = ١ الى س = ١,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما تتغير س من س = ١ الى س = ٠,٦٤

(٧) اذا كانت د(س) =
٢ س^{٢} + ٣ ، ١< س ≤١
٦ – ٥ س ، ١< س <٣
س – ٣ ، ١> س ≤٣

احسب متوسط معدل التغير اذا تغيرت س :

(أ) من س=١وتغيرت س بمقدار هـ حيث |هـ|< ١

(ب) من س =٣ وتغيرت س بمقدار هـ حيث |هـ|< ١

(٨) اذا كانت د(س) =
س^{٢} + ٢ س ، س ≥٠
س^{٢} + ٢ س ، س< ٠

أوجد معدل التغير للدالة عندما س = ٠

(٩) قرص دائرى من المعدن يتمدد بانتظام . أوجد معدل تغير مساحة سطح القرص بالنسبة الى طول نصف القطر وذلك عندما نصف القطر = ٧ سم

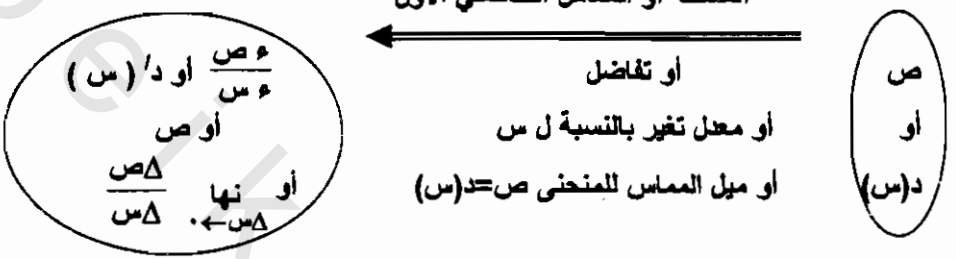
(١٠) اذا كانت الطاقة ق (بالأرج) فى سلك زنبركى تعطى بالمعادلة ق = ١٠٠٠ سم^{٢} حيث س هو التضاغط فى السلك بالسم . وكان الدفع فى السلك هو التغير فى الطاقة بالنسبة الى التضاغط. فأوجد كلا من : الطاقة و الدفع عند س = ٢ سم

obeikandl.com

المشتقة الأولى

تعرف المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = د(س) بأنه ميل المماس لهذه الدالة عند أي نقطة س في مجالها ويرمز إلى ذلك بالآتي

الدالة — مشتقة الدالة بالنسبة للمتغير س



قوانين مشتقة الدوال الجبرية

قاعدة

إذا كانت ص = س^{ن} فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ن س$^{ن-١}$ حيث ن عدد حقيقي

فمثلا

(١) ص = س^{٧} فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٧ س^{٦}

(٢) ص = س$^{-٥}$ فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = - ٥ س$^{-٦}$

ومن هذه القاعدة يمكن استنتاج الحالات الخاصة التالية

(١) ص= أ س^{ن} فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = أ ن س$^{ن-١}$

فمثلا ص = ٣س^{٥} فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١٥ س^{٤}

(٢) ص = أ س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = أ

فمثلا ١) ص = ٥ س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ ٢)ص = س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١

(٣) ص = أ (مقدار ثابت) فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

فمثلا ١) ص = ٧ فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ٢) ص = ٣ ، فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

(٤) ص = $\sqrt{س}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

فمثلا ١) ص = $\sqrt{س}$ ص = س $^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ س = س $^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{١}{٢}$. $\frac{١}{\sqrt{س}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

وبشكل عام ص = $\sqrt[ن]{س}$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$

البرهان

ص = $\sqrt[ن]{س}$ ∴ ص= س $^{\frac{١}{ن}}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{ن}$ س $^{\frac{١}{ن}-١}$ = $\frac{١}{ن}$ س $^{\frac{١-ن}{ن}}$ = $\frac{١}{ن}$ س $^{\frac{-(ن-١)}{ن}}$ = $\frac{١}{س^{\frac{ن-١}{ن}}}$ $\frac{١}{ن}$

= = $\frac{١}{ن}$ $\frac{١}{\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$ = $\frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$

obeikandl.com

فمثلا ١) ص = $\sqrt[3]{س}$ $\quad$ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٣ \sqrt[3]{س^{٢}}}$

٢) ص = $\sqrt[٥]{س}$ $\quad$ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٥ \sqrt[٥]{س^{٤}}}$

(٥) ص= $\frac{١}{س}$ $\quad$ فإن $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-١}{س^{٢}}$

البرهان

ص= $\frac{١}{س}$ $\quad$ ∴ ص = $س^{-١}$ $\quad$ ∴ $\frac{ع ص}{ع س} = (-١) س^{-٢} = \frac{-١}{س^{٢}}$

ملاحظة :

تفاضل حاصل ضرب دالتين = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

مثال

إذا كانت ص = (٢$س^{٢}$ + ١) (٣ س – ٥) أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل

$\frac{ع ص}{ع س}$ = (٢$س^{٢}$ + ١) X (٣) + (٣ س – ٥) X (٤ س)

الأول تفاضل الثاني الثاني تفاضل الول

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٦$س^{٢}$ + ٣+١٢ $س^{٢}$ - ٢٠ س = ١٨$س^{٢}$ - ٢٠ س + ٣

حل أخر

يمكن تبسيط المقدار ثم التفاضل كالتالي

ص= (٢$س^{٢}$ + ١) (٣ س – ٥)

obeikandl.com

∴ ص = ٦س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٣س – ٥

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ١٨س^{٢} - ٢٠ س + ٣ وهو نفس الناتج السابق

نتيجة

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال

= الأول × الثاني × تفاضل الثالث + الأول × الثالث × تفاضل الثاني + الثاني × الثالث × تفاضل الأول

فمثلا ص = (٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧س – ١)

فإن

$\frac{ع ص}{ع س}$ = = [(٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧)] [(٣س + ١) (٧ س – ١)

(٤ س)] + [(٢س^{٢} + ٥) (٧ س – ١) (٣)]

= [٤٢س^{٣} + ١٠٥س + ١٤س^{٢} + ٥] + [٨٤س^{٣} + ١٦س^{٢} - ٤س] + [٤٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٠٥س - ١٥]

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ١٦٨س^{٢} + ٢٤س^{٢} + ٢٠٦س - ٢٠

ملاحظة :

تفاضل خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - [\text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}]}{\text{مربع المقام}}$

فمثلا ص = $\frac{٢س^{٢}-١}{٣س+٥}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١٢س^{٢}+ ٢٠س-٦س^{٢}+٣}{(٣س+٥)^{٢}}$ = $\frac{٦س^{٢}+ ٢٠س+٣}{(٣س+٥)^{٢}}$

ملاحظة :

تفاضل دالة الدالة = تفاضل الدالة × تفاضل ما بداخل الدالة

إذا كانت في صورة قوس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخل القوس

إذا كانت في صورة جذر = تفاضل الجذر × تفاضل ما بداخل الجذر

مثال :

إذا كانت ص = (٣س^{٢} + ٥ س + ٣)^{٨} أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل

$$\frac{ع ص}{ع س} = ٨ (٣س^{٢}+٥س+ ٣)^{٧} \times [٦س+٥] = (٤٨س+٤٠)(٣س^{٢}+٥س+٣)^{٧}$$

مثال :

إذا كانت ص = $\sqrt[٢]{٥س^{٢}+١}$ فإن

$$\frac{ع ص}{ع س} = \underbrace{\frac{١}{٢\sqrt{٥س^{٢}+١}}}_{\text{تفاضل الجذر}} \times \underbrace{١٠س}_{\text{تفاضل ما تحت الجذر}} = \frac{٥س}{\sqrt{٥س^{٢}+١}}$$

أى أن تفاضل الجذر التربيعي = $\frac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$

وبشكل عام تفاضل الجذر النوني = $\frac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\sqrt[ن]{\text{ما تحت الجذر ن-١}}}$

فمثلا ص = $\sqrt[٧]{٣س^{٢} + ٥س +١}$ فإن $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٦س+٥}{\sqrt[٧]{(٣س^{٢}+ ٥س+١)^{٦}}}$

obeikandl.com

قاعدة السلسلة

إذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر(س) حيث د قابلة للأشتقاق عند ع ، ر قابلة للأشتقاق عند س

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$$ فإن

فمثلا إذا كانت ص = (٣ س ^{٢} + ٥س + ٣) ^{٨} أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ مستخدما قاعدة السلسلة

الحل

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س} = ٨ع^{٧} \times [٦ س + ٥]$$

ولكن ع = ٣س^{٢} + ٥ س + ٣

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٨ (٣س^{٢} + ٥ س + ٣)^{٧} (٦ س + ٥)$$

نتيجة

إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(م) ، م= ي (س)

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء م} \times \frac{ء م}{ء س}$$ فإن

فمثلا إذا كانت ٢ع^{٢} + ٥ ، ع = م^{٢} + ١ ، م = ٧س +١٢ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء م} \times \frac{ء م}{ء س}$$

= ٦ع^{٢} × ٢م ×٧ = ٨٤ع^{٢} م ولكن ع = م^{٢} +١

obeikandl.com

$= ٨٤(م^{٢} + ١)^{٢} م$

$= ٨٤[م^{٢} + ٢م + ١]م$

$= ٨٤[م^{٣} + ٢م^{٢} + م]$ ولكن م = ٧س + ١٢

$$\frac{ع ص}{ع س} = ٨٤[(٧س+١٢)^{٣} + ٢(٧س+١٢)^{٢} + (٧س+١)]$$

التفاضل الضمني

يجرى للدوال الضمنية وهى التي تكون في صورة د (س ، ص) = ٠ أي ارتباط س مع ص بعلاقة

فمثلا ١) س ص = $س^{٢} + ص^{٢} + ١$ ٢) س ص + $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

والطريقة العلمية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي

- هو تفاضل س ، ص معاً ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ع ص}{ع س}$ ثم

استخلاص $\frac{ع ص}{ع س}$ في الطرف الأيمن

مثال :

أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ إذا كانت $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

الحل

بالتفاضل ٢س + ٢ص $\frac{ع ص}{ع س} = ٠$

$٢ص(\frac{ع ص}{ع س}) = -٢س$

$$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-س}{ص}$$

obeikandl.com

مثال :

أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ اذا كانت $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$

الحل

بالتفاضل $\frac{-١}{ص^{٢}} (\frac{ع ص}{ع س}) - \frac{١}{س^{٢}} = ٠$

أو $\frac{-١}{ص^{٢}} (\frac{ع ص}{ع س}) = \frac{١}{س^{٢}}$ او $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

أمثلة محلولة على مشتقة الدوال الجبرية

١- **أوجد** $\frac{ع ص}{ع س}$ **في الحالات الاتية**

(أ) $ص = س^{-٨}$ (ب) $ص = \frac{\sqrt[٤]{س}}{س}$

(ج) $ص = \sqrt[٥]{س^{٣}}$ (د) $ص = س \sqrt[٣]{س}$

(هـ) $ص = \frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$

الحل

(أ) $\frac{ع ص}{ع س} = -٨ س^{-٩} = \frac{٨}{س^{٩}}$

(ب) $ص = \frac{س^{\frac{١}{٤}}}{س}$ $ص = س^{\frac{١}{٤}-١}$ $ص = س^{-\frac{٣}{٤}}$

$\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{٣}{٤} س^{-\frac{٧}{٤}} = \frac{-٣}{\sqrt[٤]{س^{٧}}}$

obeikandl.com

(ج) ص = $س^{\frac{٣}{٥}}$ $\quad \frac{ع ص}{ع س} = \frac{٣}{٥}$ $س^{-\frac{٢}{٥}} = \frac{٣}{٥س}$ $= \frac{٣}{٥ \sqrt{س^{٧}}}$

(د) ص = س $\sqrt[٣]{س}$ $\quad ص = س س^{\frac{١}{٣}}$

ص = $س^{\frac{٤}{٣}}$ $\quad \frac{ع ص}{ع س} = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣} \sqrt[٣]{س}$

(هـ) ص = $\frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ $\quad ص = ٢ س^{-\frac{٣}{٥}}$

$\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{٦}{٥} س^{-\frac{٨}{٥}} = \frac{-٦}{٥ \sqrt{س^{٨}}}$

٢ ـ أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ في كل من الحالات الآتية

(أ) ص = $\frac{س^{٣}-١}{س-١}$ $\quad$ (ب) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{٣ (\sqrt{س+١})}$

(ج) ص = (١ - $\sqrt{س}$) (١ + $\sqrt{س}$) (١ + س) (١ + $س^{٢}$) (١ + $س^{٤}$)

الحل

(أ) ص = $\frac{س^{٣}-١}{س-١}$ = $س^{٢}$ + س ـ ١

ص = $س^{٢}$ + س ـ ١ $\quad \frac{ع ص}{ع س}$ = ٢س + ١

لاحظ قانون الفرق بين مكعبين $أ^{٣} - ب^{٣}$ = (أ ـ ب) (^{٢} + أ ب + $ب^{٢}$)

(ب) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١} \sqrt{س+١} (\sqrt{س+١})} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{س+١} = (س + ١)^{-١}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = (-١) (س + ١)$^{-٢}$ (١) = $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$

(ج) ص = (١ - $\sqrt{س}$) (١ + $\sqrt{س}$) (١ + س) (١ + $س^{٢}$) (١ + $س^{٤}$)

obeikandl.com

ص = (١-س) (١+س) (١+س^{٢}) (١ + س^{٤})

= (١ -س^{٢}) (١+س ^{٢} (١+ س^{٤})

ص = (١- س^{٤}) (١+س^{٤})

س= ١-س^{١٢} $\frac{ع ص}{ع س}$ = -١٦س^{١٥}

لاحظ أستخدام في هذا المثال (أ – ب) (أ + ب) = أ^{٢} – ب ^{٢} بطريقة متتالية

٣- أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ إذا كانت :

(أ) ص= $\sqrt{س}$ + $\sqrt[٣]{س}$ + $\sqrt[٤]{س}$

(ب) ص = ١+ $\frac{١}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{س^{٣}}$

(ج) ص = $\frac{١}{١+س+س^{٢}+س^{٣}}$

(د) ص = $\sqrt{س+س^{٢}+س^{٣}}$

الحل

(أ) $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ + $\frac{١}{٤\sqrt[٤]{س^{٣}}}$

(ب) ص = ١+س$^{-١}$ +س$^{-٢}$ +س$^{-٣}$

$\frac{ع ص}{ع س}$ = (-١)س$^{-٢}$ +(-٢)س$^{-٣}$ + (-٣) س$^{-٤}$ = - $\frac{١}{س^{٢}}$ - $\frac{٢}{س^{٣}}$ - $\frac{٣}{س^{٤}}$

(ج) ص= $\frac{١}{١+س+س^{٢}+س^{٣}}$ = (١+س+س^{٢} +س^{٣})$^{-١}$

obeikandl.com

$$\frac{ع\,ص}{ع\,س} = -١(١+س+س^{٢}+س^{٣})^{-٢}\,(١+س+س^{٢}+س^{٣}) =$$

$$\frac{(-)١+٢س+٣س^{٢}}{(١+س+س^{٢}+س^{٣})^{٢}}$$

(د) $ص = \sqrt{س+س^{٢}+س^{٣}}$

$$\frac{ع\,ص}{ع\,س} = \frac{١+٢س+٣س^{٢}+٤س^{٣}}{٢\sqrt{س+س^{٢}+س^{٣}+س^{٤}}}$$

٤- أوجد مشتقة الدوال الآتية

(أ) $د(ن) = \frac{٢}{\sqrt{ن}} + \frac{٦}{\sqrt[٣]{ن}}$

(ب) $\theta = \frac{٢ر+٥}{٥ر+٢}$

(ج) $ف = \frac{\frac{٣}{٥ت}-١}{\frac{٢}{ت^{٢}}+٧}$

(د) $ف=(ن-١)\sqrt{ن^{٢}-٢ن+١}$

(ه) $ك(ع) = (٣ع)^{-٥}$

الحل

(أ) $د(ن) = ٢ن^{-\frac{١}{٢}} + ٦ن^{-\frac{١}{٣}}$

$$د'(ن) = -ن^{-\frac{٣}{٢}} - ٢ن^{-\frac{٤}{٣}} = \frac{-١}{ن\,\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{ن\,\frac{٤}{٣}} = \frac{-١}{\sqrt[٣]{ن^{٣}}} - \frac{٢}{\sqrt[٣]{ن^{٤}}}$$

obeikandl.com

(ب) $\frac{\theta_{ء}}{ء ر} = \frac{[٢٥ر+ ١٥ر٤-] ١٥ر+}{(٢+ ٥ر)^{٢}}$

$\frac{\theta_{ء}}{ء ر} = \frac{٢١-}{(٢+ ٥ر)^{٢}}$

(ج) بضرب البسط والمقام في $ت^{٢}$ $\quad ف = \frac{ت^{٢}\left(١- \frac{٣}{٥ت}\right)}{ت^{٢}\left(٧+ \frac{٢}{ت^{٢}}\right)}$

$ف = \frac{٠,٦ ت س ت^{٢}}{٢+ ٧ت^{٢}} = \frac{(٢+ ٧ت^{٢})(٠,٦)(٢- ٠,٦ت) - [(٠,٦ت - ت^{٢})(٤ ١ت)]}{(٢+ ٧ت^{٢})^{٢}}$

$\therefore \frac{ء ف}{ء ت} = \frac{١,٢ - ٤ت - ٤,٢ت^{٢}}{(٢+ ٧ت^{٢})^{٢}}$

(هـ) $\frac{ء ك}{ء ع} = -٥(ع٣)^{-٦} \times ٣$

$\frac{ء ك}{ء ع} = \frac{١٥-}{٦(ع ٣)} = \frac{١٥-}{٦ع٦٣} = \frac{١٥-}{٦ع٢٤٣}$

٥-(أ) إذا كانت ص=س^{٣}+$\frac{٩}{٢}$ س ^{٢} - ٣٠س+١٢ أوجد قيم س عندما $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

(ب) اذا كانت ص = $\sqrt{س+١}$ أوجد قيم س التي تجعل $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

الحل

(أ) $\frac{ء ص}{ء س} = ٣س^{٢} + ٩س - ٣٠$

عندما $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$ $\quad \therefore ٣س^{٢} + ٩س - ٣٠ = ٠$ بالقسمة على ٣

$س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$ $\quad \therefore (س-٣)(س+٥) = ٠$

$\therefore$ أما س = ٢ أ، س= -٥

(ب) $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$ ولكن $\frac{ع ص}{ع س} = ص$ $\therefore \frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

$ص = \sqrt{س+١}$ $\therefore \sqrt{س+١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

او $٢(\sqrt{س+١})^{٢} = ١$ $\therefore ٢(س+١) = ١$ $\therefore س+١ = \frac{١}{٢}$

$\therefore س = -\frac{١}{٢}$

٧- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

(أ) $د(س) = \sqrt[٩]{(٣-س-٢س^{٢})^{٢}}$

(ب) $د(س) = (\frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{س}{\sqrt{س}})^{٥}$

الحل

(أ) $د(س) = (٣-س-٢س^{٢})^{\frac{٥}{٩}}$

$د'(س) = \frac{٥}{٩}(٣-س-٢س^{٢})^{-\frac{٤}{٩}}(-١-٤س)$

(ب) $د(س) = [\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^{٥}$

$\therefore د(س) = [س^{-\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}}]^{٥}$

$\therefore د'(س) = ٥[س^{-\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}}]^{٤} \times (-\frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}})$

$= ٥[\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^{٤}(\frac{-١}{٢\sqrt{س^{٣}}} + \frac{١}{٢\sqrt{س}})$

مثال :

اذا كانت $ص = ع^{٥}$ ، $ع = ٣س^{٢} + ٥$ فاوجد $\frac{ع ص}{ع س}$

obeikandl.com

الحل

$\frac{ع ص}{ع ع} = ع^{٥}$ ——————— (١)

$\frac{ع ع}{ع س} = ٦ س$ ——————— (٢) بضرب ١ × ٢

$\frac{ع ص}{\cancel{ع ع}} \times \frac{\cancel{ع ع}}{ع س} = ٥ ع^{٤} \times ٦ س$

$\frac{ع ص}{ع س} = ٥ ع^{٤} \times ٦ س$

$= ٥ (٣ س^{٢} + ٥)^{٤} \times ٦ س$

حل آخر

ص = $ع^{٥}$ ——————— (١) ، ع = $٣ س^{٢} + ٥$ ——————— (٢)

من (١) ، (٢)

ص = $(٣ س^{٢} + ٥)^{٥}$

$\frac{ع ص}{ع س} = ٥ (٣ س^{٢} + ٥)^{٤} \times ٦ س$

مثال :

اذا كانت س = $ن^{٢} - ١$ ، ص = $ن^{٣}$ أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$

الحل

$\frac{ع س}{ع ن} = ٢ ن$ ——————— (١)

$\frac{ع ص}{ع ن} = ٣ ن^{٢}$ ——————— (٢) بالقسمة

$\frac{ع ص}{ع ن} \div \frac{ع س}{ع ن} = ٣ ن^{٢} \times \frac{١}{٢ ن} = \frac{٣}{٢} ن$

، س = $ن^{٢} - ١$

obeikandl.com

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣}{٢} (ن^{٢} - ١)$$

مثال :

اذا كانت ص =س^{٢} + ١ ، ع = $\sqrt{س^{٢} - ١}$ فاثبت ان

$$\frac{ء ص}{ء ع} = ٢ ع$$

الحل

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٢ س \quad ، ع^{٢} = س^{٢} - ١$$

$$٢ع \frac{ء ع}{ء س} = ٢ س$$

$$\frac{ء ص}{ء ع} = \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء س}{ء ع} = ٢س \times \frac{٢ع}{٢س} = ٢ ع$$

مثال :

اذا كانت ص = س^{٢} + س ، ع = $\frac{\sqrt{س - ١}}{س}$ اوجد $\frac{ء ص}{ء ع}$ عندما س = ١

الحل

ص = س^{٢} + س $\quad \frac{ء ص}{ء س} = ٢ س + ١$

ع = س$^{-\frac{١}{٢}}$ - س$^{-١}$

$$\frac{ء ع}{ء س} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{٣}{٢}} + س^{-٢}$$

$$\frac{ء ص}{ء ع} = \frac{١+٢}{١+٠,٥-} = ٦$$

obeikandl.com

مثال :

اذا كانت ص $= \left(\frac{ع+1}{ع-1}\right)^2$ ، ع $= س^2 + 2س$ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل

$$ص = \left(\frac{س^2+2س+1}{س^2+2س-1}\right)^2$$

$$\frac{ء ص}{ء س} = 2 \left(\frac{س^2+2س+1}{س^2+2س-1}\right) \times$$

$$\frac{(س+1)^2(2س+2)-(س+1)^2(2س+2)}{(س^2+2س-1)^2}$$

$$\frac{ء ص}{ء س} = -8$$

تمرين (٤)

المجموعة الأولى

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث

د = { (س ، ص) : ص = د (س) } وذلك بالنسبة إلى س في كل من الحالات الآتية

١) د (س) = ($س^3$ – س) ($س^4$ + ٤)

٢) د (س) = ($س^2$ + ٢ س + ٣) (٢ $س^2$ – ٥ س + ١)

٣) د (س) = (٤ $س^5$ – ٦$س^2$) (٣$س^2$ – $س^3$)

٤) د (س) = (٢س + ١) (٣ س – ٢) (٤ س – ١)

٥) د (س) = (٣ س – ١) (٢ س – ٣) (٤ س + ١)

٦) د (س) = (٣ س + ٢)^2

٧) د (س) = $\frac{٤}{س+١}$ بشرط أن س ≠ -١

٨) د (س) = $\frac{٢س}{س^2+٣}$

٩) د (س) = $\frac{\sqrt{س}}{١-س}$ بشرط ان س≠ ١

obeikandl.com

١٠) د (س) = $\frac{١-س+س^{٢}}{١+س+س^{٢}}$

١١) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى الذي معادلته

ص= (٢س^{٢} + ٣) (١- س^{٢}) عندما س = ١

١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى الذي معادلته :

ص= $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٥}$ والتي يكون المماس عند.ها موازيا المحور السيني

١٣) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته

ص = $\frac{٤س}{س^{٢}+٤}$ عند نقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١)

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٥س}{س^{٢}+١}$ عندما س = ٢

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٢س+١}{٣-س}$ عندما س = ٥

المجموعة الثانية

١- أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :-

أ - ص = (٧س – ٣) (٨ س + ٢)

ب - ص = (س^{٢} +١) (س +٢)

ج - ص = (س^{٢} -٢س +١) (٢س^{٣} +٥)

ء - ص = (س -١) (س+٢) (س – ٣)

ه - ص = (س^{٤} +٢س -٣) (س^{٦} -٧س^{٥} +٨ س^{٣} +٩س^{٢} +١)

و - ص= (س$^{-٢}$ -٢) (س-٤) (س^{٣})

ز – ص = $\frac{٢س^{٢}-٣س+٤}{س}$

ح - ص = $\frac{٢س^{٣}-٣س^{٢}+٤س-٢}{س^{٣}}$

ط- ص = $\frac{٥س-٢}{٤س+٣}$

ي - ص = $\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}$

ك - ص = $\frac{س}{س^{٢}+١}$

٢- إذا كانت د(س) = $\frac{س+أ}{س-١}$ وكان د/ (٢) = -٢ فأوجد قيمة الثابت أ

٣- إذا كانت د (س) = $\frac{س^{٢}+ب س+جـ}{س^{٢}+٣س+٢}$ وكان د (٠) = ٢ ، د/ (٠) = -٤ فأوجد

قيم ب ، جـ الحقيقية

٤- أوجد معادلتي المماس والعمودي لكل من المنحنيات الآتية

أ- ص = (س^{٢} – ١) (س+ ٥) عند س = -٥

ب – ص = $\frac{س}{١+٢س}$ عند النقطة (-١ ، ١)

جـ - ص = $\frac{١-٢س}{س-٣}$ عند س = ٢

المجموعة الثالثة

١- أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ في كل مما يأتي :

أ - ص= (س+٢)^{٧}

ب- ص = (٣س – ١)^{٥}

جـ - ص = (س^{٢} + ٣س – ٢)^{٤}

ء - ص = س^{٥} (س + ٣)^{٧}

هـ - ص = (س^{٢} + ٢ س – ٣)^{١٦} (٢ س + ٥)^{١٢}

ل - ص = $\frac{(٣+٢س^{٢})^{٥}}{(١-٤س^{٢})^{٧}}$

و - ص = $\frac{(س+١)^{٤}}{(س-١)^{٥}}$

م - ص = $\frac{(س^{٢}+١)^{٥} (٣س-٧)^{٨}}{(س^{٢}+٥س-٤)^{٦}}$

obeikandi.com

٢- أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ لكل الدوال الآتية

أ - ص= $(٢ س + ٥)^{١٢}$

ب- ص = $\sqrt{٢س + ٣}$

جـ - ص = $(\frac{٣س}{٢س+١})^{٥}$

ء - ص = $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})^{٨}$

٣- أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ بدلالة س ، ص في كل من الدوال الضمنية الآتية

أ - $س^{٤} + ٤ص^{٤} - ٢ = ٠$

ب- $٢س^{٢} - ٣س ص + ص^{٢} + س + ٢ ص - ٨ = ٠$

جـ - $س^{٣} + ٢س^{٢} ص - س ص^{٢} + ٢ص^{٣} = ٤$

ء - $س^{٥} - ٢س^{٣}ص^{٢} + ٣س ص^{٤} - ص^{٥} = ٥$

هـ - $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ حيث أ ، ب ثابتان

و - $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢} = ١٦$

م - $س^{٤} - ٢ سص^{٢} + س ص^{٣} = ١$ عند النقطة (١ ، ٢)

المجموعة الرابعة

١- اذا كانت ص = $(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١})^{ن}$ فاثبت ان (١ - $س^{٤}$) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٤ن س ص

٢- إذا كان د(س) = $س^{٣} - ٣س ٤ ٢^{س}$ أوجد قيم س التي تجعل د/(س) = صفر

٣- أوجد المشتقة الأولى لكل من :-

أ- ص = $\frac{(س^{٢}-١)^{٢}}{س+١}$ ب- ص = س $\sqrt{١-س^{٢}}$

٤) إذا كانت د(س) = $٢س^{٣} \sqrt{٣س - ٦}$ أوجد / (٠)

٥) أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ إذا كانت ص = ($س^{٢}$ + ١) ($س^{٣}$+٢س) ($س^{٤}$+٥$س^{٢}$)

obeikandl.com

٦) إذا كانت ص = (س^{٢} - ١)^{ن} حيث ن = عدد صحيح موجب اثبت أن

ن س ص + (١ – س^{٢}) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

٧) إذا كانت ص = $\frac{٣-٢س}{٣+٢س}$ فاثبت ان س ∈ { ٠ ، ٠ ، ٣ } وذلك عندما $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{-٤}{٣}$

٨) إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{س}$ + $\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ فاثبت أن

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{(٣س+١)\sqrt[٣]{٣س}}{٦س^{٢}}$

٩) إذا كانت $\sqrt[ن]{ص}$ = $\frac{س^{٢}-٢}{س^{٢}+١}$ فاثبت أن $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٦ن س ص}{(س^{٢}+١)(س^{٢}-٢)}$

١٠) اوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ لكل من

أ- ص = $\sqrt[٣]{٣س^{٢}-س-٦}$

ب - ص = $\sqrt[٣]{٣س^{٢}-س-٦}$

جـ - ص = $\frac{س}{\sqrt{س-١}}$

ء - ص = $\sqrt[٣]{(س^{٢}+س)^{٢}}$

١١) إذا كانت م = أ (ن – أ)^{٢} حيث أ ثابت

أثبت ان ($\frac{ع م}{ع ن}$)^{٢} – ٤ ن م ($\frac{ع م}{ع ن}$) + ٨ م^{٢} = صفر

١٢) أثبت ان : $\frac{ع}{ع س}$ (س^{ن}) = - ن س$^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب

١٣) إذا كانت (٥ ن – م)^{٥} (ن + م) = ٣

فاثبت أن $\frac{ع م}{ع ن}$ - $\frac{٥ ن}{م}$ = ٤

١٤) إذا كان (٤ ن – م)^{٤} (ن + م) = ١ فاثبت أن $\frac{ء م}{ء ن} - \frac{٤ن}{م} = ٣$ (م ≠ ٠)

١٥) إذا كان س ص = (س + ص)^{٢}

فاثبت أن س ص$^{/}$ = ص حيث ص $^{/}$ = $\frac{ء ص}{ء س}$

obeikandl.com

المشتقة الأولى لبعض الدوال المثلثية

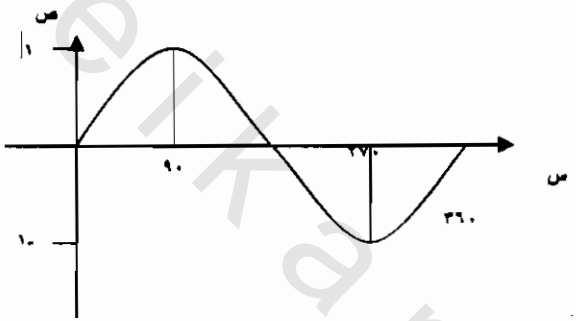
دالة الجيب

المجال ص = حا س

المنطق ح

المدى (-١ ، ١)

الدالة فردية



ملاحظات على دالة الجيب :-

ص = حا س ⟵ ص/ = حتا س

ص = حاأس ⟵ ص/ = أ حتا أ س

ص = حا د(س) ⟵ ص/ = حتا د(س) × تفاضل الدالة

ص = [حا(س)]ن ⟵ ن[حا(س)]ن-١ × حتاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = حا √ ⟵ ص/ = حتا √ × تفاضل الجذر

(قاعدة عامة)

(دالة مثلثية)ن ⟵ ن(دالة مثلثية)ن-١ × تفاضل الدالة × تفاضل الزاوية

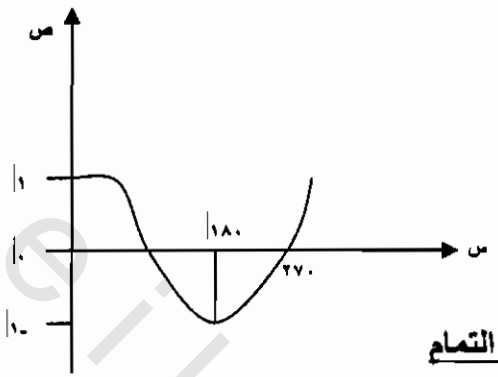
obeikandl.com

دالة جيب التمام

ص = حتا س

المجال ح

لمدى (-١ ، ١)



ملاحظات على قاعدة جيب التمام

ص = حتا س ص/ = - حا س

ص = حتاأس ص/ = - أحا أ س

ص = حتا د(س) ⟵ ص/ = حا د(س) × تفاضل الدالة

ص = [حتا(س)]^ن ⟵ ن[حتا(س)]^(ن-١) × - حاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = √(حتا) ⟵ ص/ = - حا / (2√(حتا)) × تفاضل الجذر

دالة الظل

ص= طا س ، س ∈ ح

المجال س ∈ [ح – (ط/٢ + ن ط)]

المدى ∈ ح

إيجاد المشتقة الأولى للدالة ص = طا س

ص = طا س

= حا س / حتا س

∴ ر ص / ر س = (حتا س × حتا س - حا س × -حا س) / حتا^٢ س

$$= \frac{\text{حتا}^2 س + \text{حا}^2 س}{\text{حتا}^2 س} = \frac{1}{\text{حتا}^2 س} = \text{قا}^2 س$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \text{ طا س} = \text{قا}^2 س$$

ملاحظات على دالة الظل

ص = طا س ⟵ ص/ = قا² س

ص = طا أس ⟵ ص/ = أ قا² أ س

ص = طا د(س) ⟵ ص/ = قا²د(س) × تفاضل الدالة

ص = [طا (س)]^ن ⟵ ن[د(س)]^(ن-١) × - قا²د(س) × تفاضل الزاوية

ص = طا √ ⟵ ص/ = - حا √ × تفاضل الجذر

مثال :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (٥ \text{ حا س}) = ٥ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{حا س}) = ٥ \text{ حتا س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\frac{١}{٢} \text{ حتا س}) = \frac{١}{٢} \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{حتا س}) = -\frac{١}{٢} \text{ حا س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (٣ \text{ حا س} + ٤ \text{ حتا س}) = ٣ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{حا س}) + ٤ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{حتا س})$$

$$= ٣ \text{حتا س} - ٤ \text{ حا س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (٢ \text{حا س} - ٧ س^٢) = ٢ \text{حتا س} - ٤١ س$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (٧ \text{ حتا س} + \frac{٢}{س^٢}) = -٧ \text{ حا س} - \frac{٦}{س^٤}$$

مثال :

إذا عرفت الدالة بالمعادلة

د(س) = س² حا س ، فاوجد د/ (س)

obeikandl.com

الحل

د(س) = س^{٢} حا س

د$'$ (س) = س^{٢}حتا س + حا س × ٢ س

= س(س حتا س + ٢ حا س)

مثال :

أوجد المشتقة الأولى للدالة د المعنية بالمعادلة

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

الحل

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

د$'$ (س) = حتا (٣ س +٥) × ٣

= ٣حتا(٣ س +٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

د$'$ (س) = - حا (س^{٢} – ١) × ٤ س

= -٢ س حا (س^{٢} - ١)

مثال :

إذا كان د(س) = (س٢ + ١) حا س^{٣}- فأوجد د$'$ (س)

الحل

د(س) = (س^{٢} + ١) حا س^{٣}

د$'$ (س)= (س^{٢} + ١) حتا س × ٣ س^{٣} + ٢ س حا س^{٣}

= ٣ س^{٢} (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ س حا س^{٣}

= س [٣ س (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ حا س^{٣}]

مثال :

أوجد المشتقة الاولى للدالة المعرفة بالمعادلة

د(س) = حا^{٣} (٥ س + ٣)

obeikandl.com

د(س) = حا^{٣} (٥ س + ٣) = [حا (٥ س + ٣)]^{٣}

= ٣[حا(٥س + ٣)]^{٢} × حتا (٥ س + ٣) × ٥

= ١٥ حا^{٢} (٥ س + ٣) حتا (٥ س + ٣)

مثال :

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا عرفت ص بالمعادلة :

٣ ص حا س + ٥ ص^{٢} حتا س – س^{٣} = صفر

الحل

٣ ص حا س + ٥ ص^{٢} حتا س – س^{٣} = صفر

٣(ص حتا س + حا س $\frac{ء ص}{ء س}$)+٥[ص^{٢}(-حا س)+حتاس×٢ص $\frac{ء ص}{ء س}$] -٣س^{٢} = ٠

(٣حاس+ ١٥ ص حتا س) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ ص^{٢} حا س – ٣ ص حتا س + ٣ س^{٢}

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٥ص^{٢}حا س - ٣ ص حتا س + ٣ ص^{٢}}{٣ حا س + ١٠ ص حتا س}$

مثال :

أوجد

(١) $\frac{ء}{ء س}$ (س طا $\frac{١}{٢}$ س)

(٢) $\frac{ء}{ء س}$ (طا^{٢} أ س)

الحل

(١) $\frac{ء}{ء س}$ (س طا $\frac{١}{٢}$ س)

= (س قا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س) ×$\frac{١}{٢}$ + (طا $\frac{١}{٢}$ س) × ١

obeikandl.com

$= \frac{1}{2}$ س قا^{2} $\frac{1}{2}$ س + طا $\frac{1}{2}$ س

(٢) $\frac{ء}{ر س}$ (طا^{2} ا س)

= [طا (ا س)]^{2} = ٢ طا (ا س) × قا^{2} (ا س) × ا

= ٢ ا طا (ا س) قا^{2} (ا س)

مثال :

اوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا علمت أن :-

(١) طا ص = $\frac{٢ س}{١ - س^{٢}}$

(٢) ص طا ٢ س = س

الحل

(١) طا ص = $\frac{٢ س}{١ - س^{٢}}$

قا^{2} ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٢(١ - س^{٢}) - ٢س(-٢س)}{(١ - س^{٢})^{٢}}$

= $\frac{٢ - ٢س^{٢} + ٤س^{٢}}{(١ - س^{٢})^{٢}}$ = $\frac{(٢ + ٢س^{٢})}{(١ - س^{٢})^{٢}}$ = $\frac{٢(١ + س^{٢})}{(١ - س^{٢})^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٢(١- س٢) جتا ٢ص}{(١- س٢)٢}$ = ٢

(٢) ص طا ٢ س = س

ص قا^{2} ٢ س × ٢ + $\frac{ء ص}{ء س}$ طا ٢ س = ا

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١- ٢ ص قا^{2} ٢ س}{طا ٢ س}$

obeikandl.com

مثال :

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا علمت أن :

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

الحل

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = (٢ س^{٢} – ١) (٣ طا^{٢} ٥ س) (قا^{٢} ٥ س) × ٥ + ٤ س طا^{٣} ٥ س

= ١٥ (٢ س^{٢} – ١) طا^{٢} ٥ س + ٤ طا^{٣} ٥ س

= طا^{٣} ٥س [١٥ (٢ س – ١) قا^{٢} ٥ س + ٤ س طا ٥ س]

مثال :

أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = طا $\frac{١}{٢}$ س ، عند س = $\frac{ط}{٢}$ (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

ص = طا $\frac{١}{٢}$ س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س عند س = $\frac{ط}{٢}$

ص = طا $\frac{ط}{٤}$ = ١

$\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} $\frac{ط}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١

معادلة المماس المطلوبة هي

ص – ١ = ١ (س - $\frac{ط}{٢}$) = س - $\frac{ط}{٢}$

ص = س + ١ - $\frac{ط}{٢}$ = س + ١ - $\frac{٢٢}{٢×٧}$

= س + ١ - $\frac{١١}{٧}$ = س - $\frac{٤}{٧}$

أي ٧ (ص – س) + ٤ = ٠

obeikandl.com

مثال :

إذا كان ص = ٢ س حا س حتا س فاثبت أن

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

الحل

ص =٢ س حا س حتا س

= س × ٢ حا س حا س = س حا ٢ س

ص/ = س × حتا ٢ س × ٢ + حا ٢ س × ١

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

مثال :

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

(٢) ص = $\frac{٦ س - حا ٢ س}{٨ س + حا ٢ س}$ عند س = $\frac{ط}{٤}$

الحل

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ س (حتا س – حا س) + ٣ (حا س + حتا س)

(٢) ص = $\frac{٦ س - حا ٢ س}{٨ س + حا ٢ س}$

ص/ = $\frac{-٢٨ س + ١٤ حا ٢ س}{(٨ س + حا ٢ س)^{٢}}$ = $\frac{١٤ (حا٢س - ٢ س)}{(٨ س + حا ٢ س)^{٢}}$

د/ ($\frac{ط}{٤}$) = $\frac{١٤) ١- \frac{ط}{٢})}{(٢ ط + ١)^{٢}}$

obeikandl.com

مثال :

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١) ص = $(\frac{س - حتا س}{حا س})^{٣}$

(٢) ص = ظتا س

(٣) ص = $\sqrt[٣]{حا^{٢} س} + \frac{١}{حتا^{٢} س}$

(٤) حا ص = $\frac{٢ س}{١ + س^{٢}}$

الحل

(١) ص = $(\frac{س - حتا س}{حا س})^{٣}$

$\frac{ء ص}{ء س} = ٣ (\frac{س - حتا س}{حا س})^{٢} \times \frac{حا س (١ + حا س) - حتا س (س - حتا س)}{حا^{٢} س}$

$= ٣ (\frac{س - حتا س}{حا س})^{٢} \times \frac{حا س + حا^{٢} س + حتا^{٢} س - س حتا س}{حا^{٢} س}$

$= ٣ ٣ (\frac{س - حتا س}{حا س})^{٢} \times \frac{١ + حا س - س حتا س}{حا^{٢} س}$

$= حا^{٢} س + حتا^{٢} س = ١$

(٢) ص = ظتا س

ص = $\frac{حتا س}{حا س}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{حا س \times - حا س - حتا س \times حتا س}{حا^{٢} س}$

obeikandl.com

$$= \frac{-\text{حا}^2 س - \text{حتا}^2 س}{\text{حا}^2 س} = \frac{-(\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س)}{\text{حا}^2 س}$$

$$= -\frac{1}{\text{حا}^2 س} = -\text{قتا}^2 س$$

$$(٣)\ ص = \sqrt[3]{\text{حا}^2 س} + \frac{1}{\text{حتا}^2 س}$$

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{2}{3} \text{حا}^{-1/3} \text{حتا} س - 2 \text{حتا}^{-3} س (-\text{حا} س)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\text{حتا} س}{\sqrt[3]{\text{حا} س}} + \frac{2 \text{حا} س}{\text{حتا}^3 س}$$

$$(٤)\ \text{حا} ص = \frac{2 س}{1 + س^2}$$

$$\text{حتا} ص \frac{ء ص}{ء س} = \frac{(1 + س^2)(-4 س^2)}{(1 + س^2)^2}$$

وحيث ان $\text{حا} ص = \frac{2 س}{1 + س^2}$ ، $\text{حا}' ص = \pm \sqrt{1 - \text{حا}^2 ص}$

فإن

$$\text{حتا} ص = \pm \sqrt{\frac{4 س^2}{(1 + س^2)^2}} = \pm \frac{(1 - س^2)}{1 + س^2}$$

$$= \frac{|1 - س^2|}{1 + س^2}$$

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{|1 - س^2|}{(1 + س^2)|1 - س^2|}$$

وهكذا فإن

$$\frac{ء ص}{ء س} \begin{cases} \frac{2}{1 + س^2} & \text{عندما } |س| < 1 \\ -\frac{2}{1 + س^2} & \text{عندما } |س| > 1 \end{cases}$$

obeikandl.com

وعندما ا س ا = ١ لا توجد مشتقة

تمرين (٥)

أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١) إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ + ٥ س – حتا س

(٢) إذا كانت ص = حا(٥$س^{٢}$ + ٣ س + ١)

(٣) إذا كانت ص = حتا (٥ س + ٣)

(٤) إذا كانت ص = $حتا^{٥}$ (٣س + ١)

(٥) $\frac{ء}{ء س}$ ($طا^{٦}$ ٢ س)

(٦) إذا كانت ص = حا (٣ س + ١) حتا ٧ س

(٧) إذا كانت ص = حتا ٥ س حا ٣ س أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ بطريقتين مختلفتين

(٨) أوجد

(أ) $\frac{ء}{ء س}$ ($طا^{\frac{ط}{٤}}$)

(ب) $\frac{ء}{ء س}$ حا٣ك حيث ك مقدار ثابت

(جـ) $\frac{ء}{ء س}$ ($حا^{٢}$ ٥ س + $حتا^{٢}$ ٥ س)

(٩) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للآتي :-

(أ) ص = $\sqrt[١٠]{حا ٣ س + حتا ٥ س}$

obeikandi.com

(ب) ص = حتا^{٥} $\sqrt[٧]{\text{س}^{٢}+١}$

(١٠) أثبت أن : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ [حا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ - حتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$] = حا س

(١١) إذا كانت ص = طا^{٣} (٢ س – ٥) فأوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١٢) إذا كان ص = حتا س فأوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١٣) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كان ص = حا س^{٣}

(١٤) إذا كان ص = حتا^{٣} (٣ – س) عند س = ٣٣° أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١٥) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كان حا س + حتا ص = س + ص

(١٦) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كان س حتاص = حا (س + ص)

(١٧) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ حيث د(ص) = حا^{٣} (س – ٦)^{٢} ومن ثم أثبت أن د/($\frac{\text{ط}}{٥}$)= صفر

(١٨) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت ص = حا $\frac{\text{ط}}{٢}$ + حتا $\sqrt{\text{س}}$

(١٩) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا كانت ص = حا س - $\frac{١}{٣}$ حا^{٣} س

(٢٠) إذا كانت س = ص طا ٢ س فأثبت أن

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ طا ٢ س + ٢ ص قا^{٢} ٢ س = ١