الباب الخامس

اهتزاز الأعمدة

1- يوجد ثلاثة أنواع للأهتزاز الحر للأعمدة وهي كالأتي:

أ-الأهتزازات الطولية Longitudinal vibrations

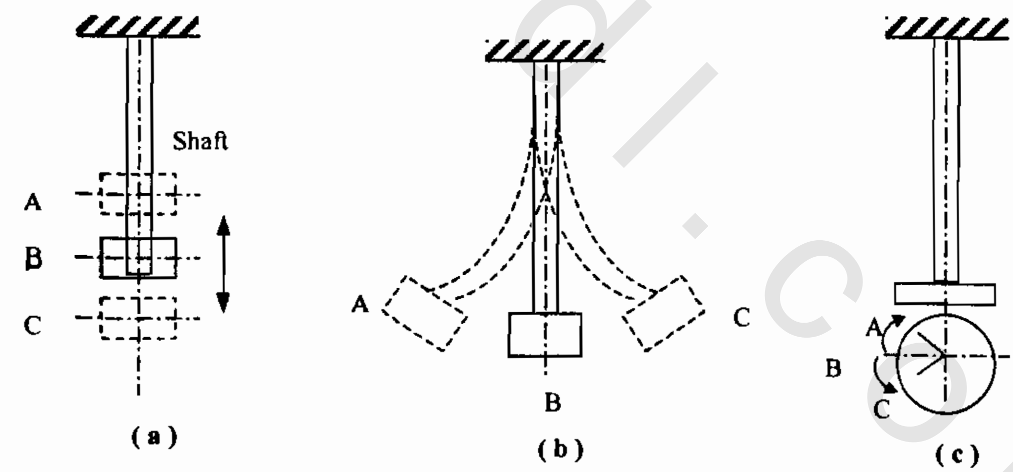
يبين الشكل (5-1a) أن القضيب (العمود) يتمدد أو ينكمش في أتجاه محوره ولذلك يقع العمود تحت إجهادي الشد والضغط the tensile and compressive stress.

ب-الأهتزازات العرضية Transverse vibrations

عندما يتحرك العمود أو القرص حركة إهتزازية عمودية تقريباً على محور طول العمود كما بالشكل (5-1b) يسمى ذلك بالاهتزازات العرضية وفي هذه الحالة يتمدد وينحني القضيب بالتناوب مما يؤدي إلى أن يقع القضيب تحت أجهادات الأنحناء the bending stresses.

ج-الأهتزازات الألتوائية Torsional vibrations

يبين الشكل (5-1c) أن القرص والعمود يقع تحت تأثير الأجهاد الألتوائي عندما يتحرك حركة دورانية في أتجاه عقرب الساعة من B إلى A وفي إتجاه ضد عقرب الساعة من B إلى C حيث الوضع B يمثل الوضع المتوسط وكل من الوضعين C و A يمثل وضعي التغيير أي الوضع الجديد للحركة الأهتزازية.

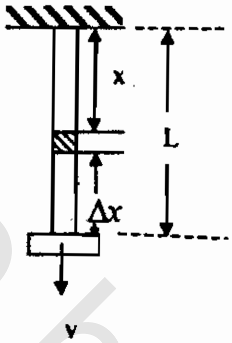


B=Mean position
A and C = Extreme position
الشكل (5-1)

2-تأثير القصور الذاتي للعمود في حالة الأهتزاز الطولي والعرضي

Effect of the inertia of the shaft in longitudinal and transverse vibrations

أولاً: الاهتزاز الطولي Longitudinal vibration



الشكل (5-2)

الشكل (5-2) يوضح عمود طوله (L) ومثبت من أحد طرفيه رأسياً وحر من الطرف الأخر ووزن العمود لوحدة الأطوال w فيكون الوزن الكلي للقضيب $W_C=wL$ فأذا ثبت في الطرف الحر للقضيب قرص (disc) وزنه W وبأخذ عنصر صغيرللعمود وعلى مسافة x من الطرف المثبت به وطول العنصر Δx فتكون كتلة العنصر $\frac{w.\Delta x}{g}$ وسرعة الطرف الحر من القضيب (v) وهي السرعة الطولية Longitudinal velocity وبذلك تكون السرعةالطولية للعنصر يعبر عنها بالعلاقة التالية:

The velocity of the small element = $\frac{x}{L}.v$ ....(5-1)

وتكون طاقة الحركه للعنصر هي

The kinetic energy possessed by the element = $\frac{1}{2}mv^2$

$$K.E=\frac{1}{2}\left(\frac{w.\Delta x}{g}\right)\left(\frac{x}{l}.v\right)^2=\frac{wv^2x^2}{2gl^2}.\Delta x \text{ ....(5-2)}$$

∴ Total kinetic energy possessed by the shaft =

$$\therefore \text{Total (K.E)}=\int_0^l \frac{w.v^2}{2gl^2}.x^2dx=\frac{w.v^2}{2gl^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{w.v^2}{2gl^2}.\frac{l^3}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{W_c}{3g}\right)v^2 \text{ .(5-3)}$$

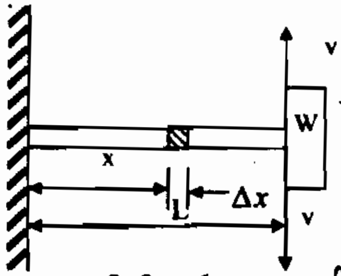
حيث $W_c=w.L$ = الوزن الكلي للعمود أي أنه إذا وضعنا الوزن $\frac{W_c}{3}$ عند الطرف الحر للعمود وأهملنا وزن العمود فتكون طاقة الحركة الكلية هي :

$$\text{Total (K.E)}=\frac{1}{2}\left(\frac{W_c}{3g}\right)v^2$$

لهذا نجد أن القصور الذاتي I للعمود يسمح بأضافة ثلث وزنه إلى القرص المثبت في الطرف الحر. ولذلك عندما يؤخذ وزن القضيب W_c ووزن القرص W في الحساب نجد أن التردد الطبيعي يعين من العلاقة التالية:

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{W+\frac{1}{3}W_c}{g}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\frac{m_c}{3}}} \text{ (c.p.s)..............(5-4)}$$

ثانياً الإهتزاز العرضي Transverse vibration



الشكل (5-3)

1- إيجاد التردد الطبيعي لعمود ذات حمل عند الطرف الحر

2- له بطريقة الطاقة:

الشكل (3-5) يبين عمود طوله (L) في وضع أفقي

ومثبت من أحد طرفيه وحر من الطرف الأخر ونفرض

إن الوزن الكلي للعمود $W_c = wL$ حيث w وزن العمود لوحدة الأطوال

وكانت السرعة في الاتجاه العرضي

للعمود Transverse velocity(v) وأذا أفترضنا عنصر صغير طوله Δx وعلى مسافة (x) من الطرف المثبت من العمود فيمكن التعبير عن سرعة العنصر بالعلاقة $v_{element} = \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}.v$ ويمكن التعبير عن طاقة العنصر من العلاقة:

$$\text{(K.E) of element} = \frac{1}{2}\frac{w.\Delta x}{g}\left[\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}v\right]^2$$

$$\therefore \quad \text{Total of (K.E) of the shaft} = \int_0^L \frac{1}{2}.\frac{w.\Delta x}{g}\left[\left(\frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}\right).v\right]^2$$

$$= \frac{w.v^2}{8gl^6}\int_0^L (9L^2x^4 - 6Lx^5 + x^6)dx = \frac{w}{8gl^6}.v^2\left[\frac{9L^2x^5}{5} - \frac{6Lx^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right]_0^l$$

$$\therefore \quad \text{Total of (K.E)} = \frac{33}{280}.\frac{W_c}{g}v^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{33}{140}.\frac{W_c}{g}\right].v^2 \quad \text{.........(5-5)}$$

فاذا وضعنا الوزن $\frac{33W_c}{140}$ عند الطرف الحر للعمود مع أهمال وزن العمود فأن طاقة الحركة الكلية للعمود يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\text{Total (K.E) possessed by the shaft} = \frac{1}{2}\left(\frac{33}{140}\frac{W_c}{g}\right)v^2$$

ومن ذلك يتضح أن القصور الذاتي للعمود يسمح بإضافة $\frac{33}{140}$ من كتلة العمود عند الطرف الحر.

ولذلك عند حساب التردد الطبيعي للعمود كتلة العمود بعد تثبيت قرص disc وزنه W بالطرف الحر للعمود فأن وزن العمود W_c ووزن القرص W يؤخذ في الأعتبار ويعبر عنه بالعلاقة الاتية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{33}{140}.\frac{W_c}{g}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{33}{140}m_c}} \quad \text{...............(5-6)}$$

ملاحظات:

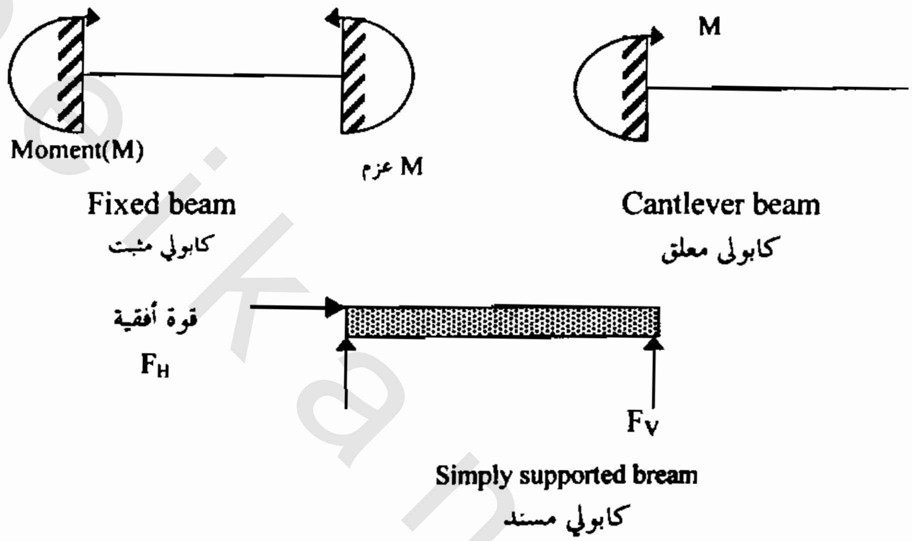
أ- أذا كان العمود مثبت من الطرفين والقرص مثبت بمنتصف العمود فأن التردد الطبيعي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{13}{35}m_c}} \quad \text{(c.p.s)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}7)$$

ب-أذا كان طرفي الكابولي أو العمود موضوعين علىحوامل وليس مثبتين مـــن طرفـــي الكـــابولي اي الكابولي من نوع supported beam فأن التردد الطبيعي يعبر عنه بالعلاقةالأتية:

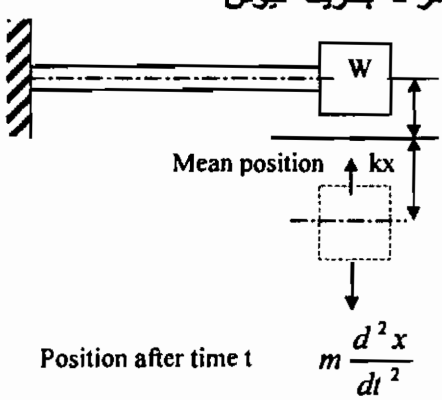
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + \frac{17}{35}m_c}} \quad \text{(c.p.s)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}8)$$

ج-لاحظ الأشكال التالية:



الشكل (5-3)

2- أيجاد التردد الطبيعي لعمود ذا حمل مركز عند الطرف الحر له بطريقة نيوتن



الشكل (5-4)

الشكل (5-4) يوضح عمود مهمل الوزن وفي وضـــــع أفقي ومثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر حر ومثبت به جسم وزنه W.

فإذا كانت جساءة العمود (K) حيث:

k= stiffness of the shaft

Δ = static deflation of the body

الانحناء الأستاتيكى للعمود (X):

x=displacement of the body from the mean position at time t.

الأزاحة للجسم من وضع الأتزان الاستاتيكي بعد زمن t:

The restoring force = القوة الكامنة =-kx

وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن حيث:

$$m\ddot{x} = \sum F_x = -kx \quad \therefore m\ddot{x} + kx = 0 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{..........} (5-9)$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

i.e

$$, f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \text{..} (5-10)$$

ومن علم مقاومة المواد نجد أن: $\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$

W= Load at the free end الحمل عند النهاية الحرة

L=Length of the shaft طول العمود

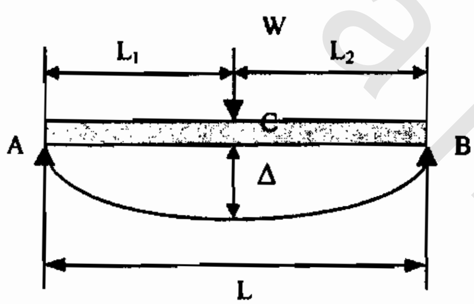
E= Young's modulus for the material shaft معامل المرونة لمعدن العمود

I= Moment of inertia of the shaft عزم القصور الذاتي للعمود

3-التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي الحر نتيجة حمل يؤثر على عمود مسند.

Natural frequency of free Transverse vibration due to a point load acting over a simply supported shaft.

نفرض أن العمود AB طوله L ومسند عند طرفيه وتحت تأثير حمل W عند نقطة (C) كما مبين بالشكل (5-5) فعند حدوث إنحناء للعمود ثم يترك فجأة فأنه يهتز إهتزاز عرضي ونجد أنحناء العمود Δ يتناسب مع الحمل W ، ويهتز العمود بحركة توافقية بسيطة (s.h.m) كما لو كان نابض حلزوني (a helical spring).



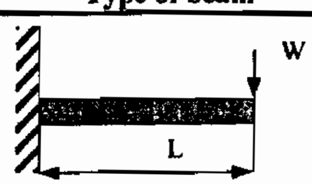
الشكل (5-5)

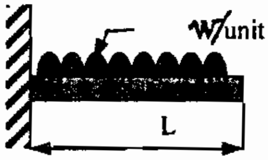
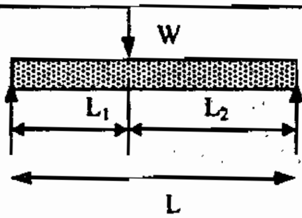
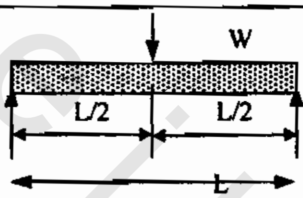
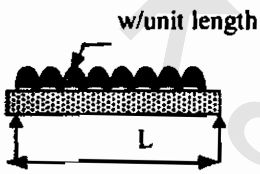
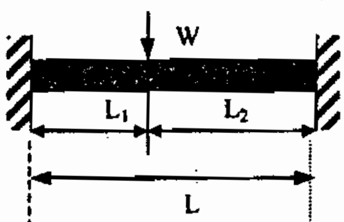
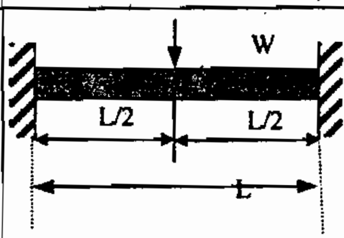
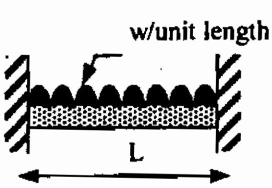
ويعين التردد الطبيعي للأهتزاز الحر العرضي من العلاقة التالية:

f_n = the natural frequency of the free Transverse vibration$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta}} \text{ (c.p.s)} \text{......................................} (5\text{-}11)$$

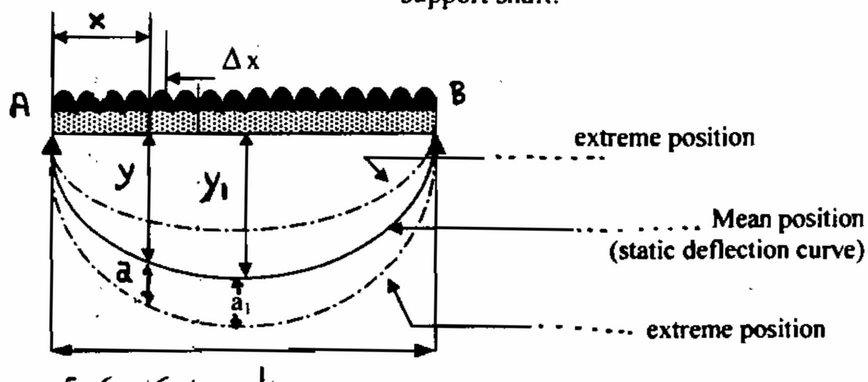
والجدول (5-1) التالي يوضح قيم الأنحناء الأستاتيكي لأنواع مختلفة من الكابولي وتحت أحمال مختلفة.

S.NO	Type of beam	Deflection (Δ)	The effecting point
1		$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$	at the free end عند الطرف الحر

S.NO	Type of beam	Deflection (Δ)	The effecting point
2		$\Delta = \frac{wL^4}{8EI}$	(at the free end)
3		$\Delta = \frac{WL_1^2 L_2^2}{3EIL}$	(at the free end)
4		$\Delta = \frac{WL^3}{48EI}$	(at the center) في منتصف العمود
5		$\Delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{wL^4}{EI}$	(At the center)
6		$\Delta = \frac{WL_1^3 L_2^3}{3EIL^3}$	(at the point load)
7		$\Delta = \frac{WL^3}{192EI}$	(at the center)
8		$\Delta = \frac{WL^4}{384EI}$	(at the center)

4-التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي الحر الناتج من حمل منتظم التوزيع على عمود مسند

Natural frequency of free Transverse vibration due to uniformly distributed load acting a simple support shaft.



الشكل (5-6)

العمود AB عليه حمل منتظم التوزيع uniformly distributed load (w) لكل وحده طول ونلاحـــظ مـــن الشكل (5-6) مايلي:

y_1= static deflection at the middle of the shaft الأنحناء الأستاتيكي عند منتصف العمود

a_1= سعة الأهتزاز amplitude of vibration عند منتصف العمود

$w_1 = \dfrac{w}{y_1}$ = Uniformly distributed load per unit static deflection at the middle of the shaft

الحمل منتظم التوزيع لكل وحدة من الأنحناء الأستاتيكي عند منتصف العمود

إعتبر أن مقطع العمود صغير وعلى مسافة x من أحدى طرفيه ولتكن A ويكون طول المقطع Δx ، y هي الأنحناء الأستاتيكي على مسافة x من A ، a هي سعة الأهتزاز عند هذه النقطة.

∴الشغل المبذول (W.D) لهذا المقطع (العنصر) يعين من العلاقة التالية:

$$\text{W.D on this small section} = \frac{1}{2} w_1 . a_1 . \Delta x . a = \frac{1}{2} \frac{w . a_1 . a . \Delta x}{y_1}$$

وبالتالي فأن أقصى طاقة وضع عند أقصى موضع at the extreme position يســاوي كميـــة الشـــغل المبذول (W.D) لحركة الكابولي من الوضع المتوسط إلى أقصى موضع كما يلي:

$$\therefore (P.E)_{max} \text{ at the extreme position} = \int_0^L \frac{w}{2} . \frac{a_1}{y_1} . a . dx \quad \text{.........(5-12)}$$

وباعتبار أن شكل منحنى أهتزاز العمود يكون متماثل مع منحنى الأنحناء الأستاتيكي للعتب (beam) أي أن:

$$\frac{a_1}{y_1} = \frac{a}{y} = const = c \quad \therefore a = yc = y_1 . c . = a_1 \text{..............(5-13)}$$

وبالتعويض في (5-12) ينتج أن:

$$\therefore (P.E)_{max} = \int_0^L \frac{1}{2} w . c . yc\, dx = \frac{1}{2} w c^2 \int_0^L y\, dx \quad \text{.......................(5-14)}$$

∴أقصى سرعة عند الوضع المتوسط يعبر عنه بالعلاقة ωa حيث ω هــي تــردد الأهــتزاز الدوري the circular frequency of vibration.

$$\therefore (P.E)_{max} = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{w\,dx}{g}(\omega a)^2 = \frac{1}{2}\frac{w}{g}\omega^2 c^2 \int_0^L y^2 dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}15)$$

ونظراً لان أقصى طاقة وضع عند الموضع المتوسط يساوي أقصى طاقة حركة عند نفس الموضع:

$$\therefore \frac{1}{2}\frac{w}{g}\omega^2 c^2 \int_0^L y^2 dx = \frac{1}{2} w c^2 \int_0^L y\,dx$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g\int_0^L y\,dx}{\int_0^L y^2 dx}} \qquad \therefore \omega^2 = \frac{g\int_0^L y\,dx}{\int_0^L y^2 dx}$$

$$\text{Natural frequency } f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\int_0^L y\,dx}{\int_0^L y^2 dx}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}16)\therefore$$

1- عندما يكون العمود مُسند (a simply supported) فإن الأنحناء الأستاتيكي عند مسافة x من النقطة A يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$y = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}17)$$

حيث w هى الحمل على وحدة الطول للعمود ، E معامل يانج لمعدن العمود Young's modulus for the material of the shaft ويمكن أستنتاج ذلك من مقاومة المواد حيث أن أقصى عــزم أنحنــاء عنــد المسافة x من النقطة (الطرف) A يعبر عنه بالعلاقة:

$$\therefore E.I.\frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{2(3)} - \frac{wLx^2}{2(2)} + c_1$$

بالتكامل نجد أن:

$$\therefore E.I.y = \frac{wx^4}{2(3)(4)} - \frac{wLx^3}{2(2)(3)} + c_1 x + c_2$$

$$= \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_1 x + c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5-18)$$

حيث c_2 و c_1 هي ثوابت التكامل ويمكن أيجادهم من الظروف أو الشروط المعطاه كما يلي:

at x=0 , y=0 $\quad \therefore c_2 = 0$

at x=L , y=0 , $\quad \therefore c_1 = \frac{wL^3}{24}$

وبالتعويض عن c_2 و c_1 في المعادلة (5) ينتج نفس المعادلة (4).

$$y=\frac{w}{24EI}\left[x^4-2Lx^3+L^3x\right]\ldots\ldots(5\text{-}18)$$

حيث w هي الحمل منتظم التوزيع لوحدة الطول.

E هي معامل يانج للمرونة لمادة العمود (young's modulus)

I عزم القصور الذاتي للعمود

∴وبتكامل المعادلة (5-17) نحصل على:

$$\int_0^L y\,dx=\frac{w}{24EI}\int_0^l (x^4-2lx^3+l^3x)dx$$

$$=\frac{w}{24EI}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2Lx^4}{4}+\frac{L^3x^2}{2}\right]\Bigg|_0^L$$

$$\therefore \int_0^L y\,dx=\frac{w}{24EI}\left[\frac{L^5}{5}-\frac{2L^5}{4}+\frac{L^5}{2}\right]=\frac{w}{24EI}\cdot\frac{L^5}{5}=\frac{wL^5}{120EI}\ldots\ldots(5\text{-}19)$$

$$\therefore \int_0^l y^2dx=\left(\frac{w}{24EI}\right)^2\int_0^L\left[\left(x^4-2Lx^3+L^3x\right)\right]^2dx$$

$$=\frac{w^2}{576E^2I^2}\left[\frac{x^9}{9}+\frac{4L^2x^7}{7}+\frac{L^6x^3}{3}-\frac{4Lx^3}{8}-\frac{4L^4x^5}{5}+\frac{2L^3x^6}{6}\right]\Bigg|_0^4$$

$$=\frac{w^2}{576E^2I^2}\left(\frac{31L^9}{630}\right)\ldots\ldots(5\text{-}20)$$

بالتعويض في f_n من المعادلة (5-16) في كل من المعادلتين (5-19) (5-20).

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{g\left(\frac{wL^5}{120EI}\times\frac{576E^2I^2(630)}{w^2\times 31L^9}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24EI}{wL^4}\times\frac{(630)}{155}(g)}\ldots\ldots(5\text{-}21)$$

وبذلك يمكن أستنتاج Δ_{st} من العلاقة

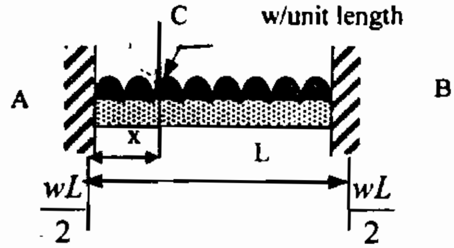
$$\Delta_{st}=\frac{5}{384}\cdot\frac{wL^4}{EI}\ldots\ldots(5\text{-}22)$$

$$\therefore f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{24\left(\frac{5}{384\Delta_s}\right)\times\frac{630}{155}g}$$

$$\therefore f_n=\frac{5.623}{\sqrt{\Delta_{st}}}\quad at\ \ g=981\ \ cm/\sec^2\ldots\ldots(5\text{-}23)$$

5-التردد الطبيعي للأهتزازات العرضية الحرة لعمود مثبت من طرفيه وتحت حمل منتظم التوزيع

Natural frequency of free transverse vibration of a shaft fixed at both ends carrying a uniformly distributed load.



الشـــــكل (5-7)

نعتبر أن العمود AB مثبت من طرفيه وتحت حمل منتظم التوزيع مقداره w لكل وحدة طول

$\therefore$ الأنحناء الأستاتيكي y_c عند مسافة x من الطرف A يعين من العلاقة:

$$y_c = \frac{w}{24EI}\left(x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3\right) \qquad \text{.................................(5-24)}$$

$\therefore$ بالتكامل نحصل على

$$\therefore \int_0^L y_c dx = \frac{w}{24EI}\int_0^L \left(x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3\right)dx$$

$$= \frac{w}{24EI}\left[\frac{x^5}{5} + \frac{L^2x^3}{3} - \frac{2Lx^4}{4}\right]_0^L = \frac{wL^5}{720EI}$$

ويكمن إستنتاج المعادلة (5-24)

بأعتبار أن عزم الانحناء M_c عند نقطة على مسافة x من الطرف A

$$M_c = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL^2}{12} + \frac{wx^2}{2} - \frac{wLx}{2}$$

وبالتكامل نحصل على:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL^2}{12}x + \frac{wx^3}{(2x^3)} - \frac{wLx^2}{(2)(2)} + c_1 \qquad \text{.................................(5-25)}$$

حيث c_1 ثابت التكامل وعندما x=0 فان $\frac{dy}{dx} = 0$ وبذلك نجد أن $c_1 = 0$.

$$\therefore EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL^2}{12}x + \frac{wx^3}{6} - \frac{wLx^2}{4}$$

وبالتكامل مرة أخرى:

$$\therefore EI.y = \frac{wL^2x^2}{(12)(2)} + \frac{wx^4}{(6)(4)} - \frac{wL}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right) + c_2$$

$$= \frac{wL^2x^2}{24} + \frac{wx^4}{24} - \frac{wLx^3}{12} + c_2 \quad \text{.....(5-26)}$$

حيث c_2 هي ثابت التكامل ونجد أن عندما x=0 فان y=0 وبذلك يكون $c_2 = 0$

$$\therefore EI.y = \frac{w}{24}\left[L^2x^2 + x^4 - 2Lx^3\right]$$

$$\therefore y = y_c = \frac{w}{24EI}\left(x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3\right)$$

$$\therefore \int_0^L y_c^2 dx = \left(\frac{w}{24EI}\right)^2 \int_0^L \left(x^4 + L^2x^2 - 2Lx^3\right)^2 dx$$

$$= \left(\frac{w}{24EI}\right)^2 \int_0^L \left(x^8 + L^4x^4 + 4L^2x^6 + 2L^2x^6 - 4Lx^7 - 2L^3x^9\right) dx$$

$$= \left(\frac{w}{24EI}\right)^2 \left[\frac{x^9}{2} + \frac{L^4x^5}{5} + \frac{6L^2x^7}{7} - \frac{4Lx^8}{8} - \frac{2L^3x^6}{6}\right]_0^L$$

$$= \left(\frac{w}{24EI}\right)^2 \left[\frac{L^9}{630}\right]$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g\int_0^L dx}{\int_0^L y^2 dx} = g\left(\frac{wL^5}{720\,EI}\right)\left[\frac{(24\,EI)^2 \times 630}{w^2L^9}\right]$$

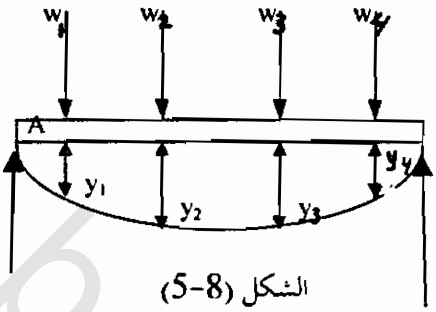
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{504EIg}{wL^4}} \quad \text{.....(5-27)}$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = 3.573\sqrt{\frac{EIg}{wL^4}} \quad \text{.....(5-28)}$$

$$\Delta_{st} = \frac{w.L^4}{384EI} \quad \text{.....(5-29)}$$

$$\therefore f_n = \frac{4.3117}{\sqrt{\Delta_{st}}} \quad \text{where } g=981\text{cm/sec}^2 \quad \text{.....(5-30)}$$

6-التردد الطبيعي للأهتزازات العرضية الحرة لعمود موضوع تحت عدد من الأحمال و المؤثر كل منــها في نقطة Natural frequency of free transverse vibration for a shaft subject to a number of point loads



الشكل (5-8)

نعتبر أن العمود AB مهمل الوزن وموضـــوع تحت عدد من الأحمال والتي تؤثر كل منها فـــي نقطة كما في الشكل (5-8) والمطلوب إيجاد التردد الطبيعي بطريقتين:

1-طريقة الطاقة أو طريقة رايلى Energy method or (Rayleigh's method).

2-طريقة دنكرلي Dunkerley's method.

أولاً: طريقة الطاقة أو طريقة رايلى.

نعتبر أن y_1, y_2, y_3, y_4 هي الأنحناء الكلي تحت تأثير الأحمال W_1, W_2, W_3, W_4 على الترتيب كمـا بالشكل (5-8) وبذلك فأن أقصى طاقة وضع يعبر عنها بالعلاقة:

$$(P.E)_{max} = \frac{1}{2}W_1y_1 + \frac{1}{2}W_2y_2 + \frac{1}{2}W_3y_3 + ... = \frac{1}{2}.\sum Wy.....$$

وأقصى حركة يعبر عنها بالعلاقة التالية

$$(K.E.)_{max} = \frac{1}{2}\frac{W_1}{g}(\omega.y_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}(\omega.y_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{W_3}{g}(\omega.y_3)^2 + ... =$$

$$= \frac{\omega^2}{2g}\left(W_1y_1^2 + W_2y_2^2 + W_3y_3^2 + ...\right) = \frac{\omega^2}{2g}\sum Wy^2$$

حيث ω هي التردد الدوري للأهتزاز circular frequency of vibration.

وطريقة الطاقة أو طريقة ريلايت توضح إن أقصى وضع تساوي أقصى طاقة حركة أي أن:

$$(P.E)_{max} = (K.E)_{max}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g.\sum Wy}{\sum Wy^2}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g\sum Wy}{\sum Wy^2}} \quad ....(5\text{-}31)$$

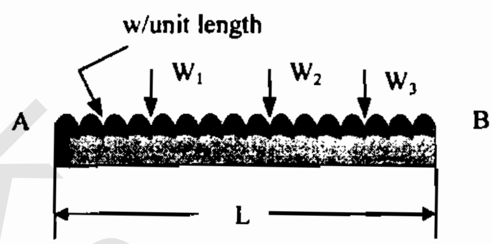
$$\therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sum Wy}{\sum Wy^2}} \quad ....(5\text{-}32)$$

ثانيا: طريقة دنكرلي Dunkerley's method

الترددالطبيعي للأهتزاز العرضي للعمود الموضوع تحت حمل منتظم التوزيع وعدد مـــن الأحمـــال التي يؤثر كل منها في نقطة.

$$\frac{1}{f_n^2}=\frac{1}{f_{n_1}^2}+\frac{1}{f_{n_2}^2}+\frac{1}{f_{n_3}^2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{f_{n_s}^2}$$

حيث f_n هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي للعمود الموضوع تحت حمل منتظم التوزيع وعدد مـــن الأحمال المؤثر كل منها في نقطة حيث $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3},\dots\dots etc$ هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضـــي لكل نقطة عليها حمل وأن f_{n_s} هي التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي للحمل منتظم التوزيع أو نتيجـــة لوزن العمود.



الشكل (5-9)

أعتبر أن $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\dots\dots etc$ هي الأنحناء الأستاتيكي نتيجة الأحمال W_1,W_2,W_3 ، Δ_s هي الأنحنـــاء الأستاتيكي نتيجة الحمل منتظم التوزيع أو وزن العمود.

∴يكون التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي نتيجة الحمل المنتظم الأول W_1 يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_{n_2}=\frac{4.987}{\sqrt{\Delta_2}}\dots\dots c.p.s,\ f_{n_1}=\frac{4.987}{\sqrt{\Delta_3}}\dots c.p.s,.\ f_{n_1}=\frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1}}\ c.p.s$$

وبذلك يكون التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي نتيجة الحمل الموزع أو وزن العمود

$$f_{n_s}=\frac{5.623}{\sqrt{\Delta_s}}\ c.p.s\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5\text{-}33)$$

لذلك فأنه طبقا لعلاقة دنكرلي Dunkerley's empirical formula فانة يمكـــن أيجـــاد الـــتردد الطبيعـــي للمنظومة بالعلاقة التالية:

$$\frac{1}{f_n^2}=\frac{1}{f_{n_1}^2}+\frac{1}{f_{n_2}^2}+\frac{1}{f_{n_3}^2}+\dots\dots\dots\dots\frac{1}{f_{n_s}^2}$$

$$\frac{1}{(4.987)^2}\left[\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\dots\dots\dots+\Delta_s\right]$$

$$f_n=\frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\dots\dots\dots\dots\frac{\Delta_s}{1.27}}}\ c.p.s$$

ملاحظات:

1- عندما لايوجد حمل منتظم التوزيع أو وزن للعمود فأن $\Delta_s = 0$ ويعين التردد الطبيعي من العلاقة:

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots\dots\dots}} \text{ c.p.s}$$

2- القيم $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots\dots etc$ لعمود بسيط مسند a simple supported shaft تعين من العلاقة:

$$\Delta = \frac{WL_1L_2}{3EIL} \qquad \dots\dots(5\text{-}34)$$

حيث:

Δ = Static deflection due to load W الأنحناء الأستاتيكي نتيجة الوزن

L_1 and L_2= distance of load from the two ends بعد الحمل عن كل من طرفيه

E= Young's modulus for the material of the shaft معامل يانج لمادة العمود

I =Area moment of inertia o the shaft عزم القصور الذاتي للعمود

L= Total length of the shaft = L_1+L_2 الطول الكلي للعمود

3- عزم اللي المؤثر (T) يعين من:

$$T = \frac{J.G}{L}.\theta \qquad \dots\dots(5\text{-}35)$$

J= Polar moment of inertia of the shaft cross-section

$J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ عزم المساحةالقطبى الثانى لمقطع العمود

G=Modulus of rigidity for the shaft material معاير أو معامل الصلادة لمادة العمود

T= عزم اللي المؤثر , θ = زاوية الانحراف, L= طول العمود , D= قطر العمود

(1)-A shaft 12 cm diameter and 140 cm long has one of its end fixed and the other end carries a disc of weight 600Kg. The young's modulus for the material of the shaft is $2\times10^6 kg/cm^2$. Determine the frequency of longitudinal.

1- عمود قطره 12 cm وطوله 140 cm مثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر يحمل قرص وزنه 600kg فأذا كان معامل المرونة (the young's modulus) $2\times10^6 kg/cm^2$ أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الطولي the longitudinal vibration والأهتزاز العرضي Transverse vibration

الحل:

$\because d = 14cm$ و I=the moment of inertia=$\dfrac{\pi}{4}d^4$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(12)^2 = 36\pi\ cm^2 \quad , \quad I = \frac{\pi}{4}d^4 = \frac{\pi}{4}(12)^2 = 1017.36\ cm^4$$

(i)-Frequency of longitudinal vibration التردد الطبيعي للأهتزاز الطولي

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \text{ c.p.s} \quad , \ g = 981 cm/\sec^2 \therefore f_n = \frac{\sqrt{981}}{2\pi\sqrt{\Delta}} = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta}}$$

$$, \quad \because \Delta = \frac{WL}{AE} \therefore \Delta = \frac{600\times 140}{36\pi\left(2\times 10^6\right)} = 0.00037cm \therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.00037}} = 258 \ c.p.s$$

(ii)-Frequency of transverse vibration التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي

$$\because \Delta = \frac{WL^3}{3EI} = \frac{600(140)^3}{3\left(2\times 10^6\right)(1017.36)} - 0.27cm \ , \ f_n = \frac{4.981}{\sqrt{0.27}} = 9.5 cycle/\sec$$

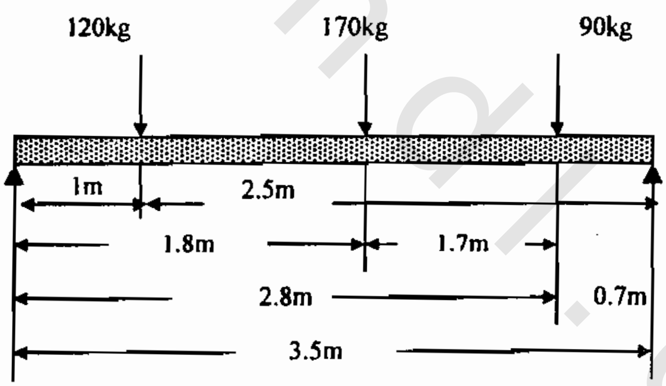
(2)-A shaft 6 cm diameter and 3.5 meters long is simply supported at the ends and carries three weights 120kg, 170kg, 90kg at 1m, 1.8m, and 2.8m from the left support. The young's modulus for shaft material is $2\times 10^6 kg/m^2$. Find the frequency of transverse vibration.

1- عمود قطره 6 cm ، وطوله 5m مسند عند طرفيه ومحمل عليه بثلاث قوى 120kg, 170kg, 90kg على مسافة 2.8 m، 1.8 m , 1 mعلى الترتيب وذلك من المسند الأيسر. معامل المرونة لمـــادة العمـــود $2\times 10^6 kg/m^2$ أوجد التردد للأهتزاز العرضي.

الحل:

$\because d = 6cm$ و I=Area moment of inertia of the shaft = $\frac{\pi}{64}d^4$

$$,\therefore \quad I = \frac{\pi}{64}(6)^2 = 63.6cm^4$$



الشـــــــكل (5-10)

$\because l = 3.5m$, Δ=The static deflection due to point load of $W = \dfrac{Wl_1^2 l_2^2}{3EIl}$

$$\text{Where } l_1 = 1.2m = 120cm$$

$$l_2 = l - l_1 = 350 - 100 = 250cm$$

$\therefore$ Static deflection due to 120kg= $\Delta_1 = \dfrac{120(100)^2(250)^2}{3\left(2\times 10^6\right)(63.6)(350)} = 0.56cm$

Δ_2 = Static deflection due to 170kg= $\dfrac{170(180)^2(170)^2}{3(2\times10^6)(63.6)(350)} = 1.2cm$

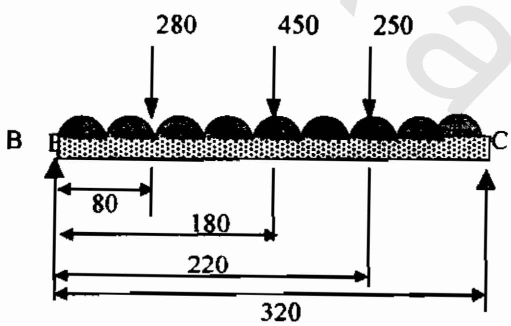
Δ_3 = Static deflection due to 90kg= $\dfrac{90(280)^2(70)^2}{3(2\times10^6)(63.6)(350)} = 0.26cm$

Frequency of transverse vibration= $f_n = \dfrac{4.987}{\sqrt{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}}$ with usual notations.

$$\because\ f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.56+1.2+0.26}} = \frac{4.987}{1.42} = 3.51 cycle/\sec$$

(3)-A shaft 16cm diameter is supported in two bearings 320cm apart. It carries three discs of weight 280kg, 450kg, and 250kg at 80cm, 180cm and 220cm from the left hand. Assuming the shaft to weight 2kg/cm length, determine the critical speed of the shaft. Young's modulus for the material of the shaft is $2.1\times10^6 kg/cm^2$.

3-عمود قطره 18cm مسند من طرفيه على كرسيين تحمـــل (two bearings) علـــى مســـافة 300cm ويحمل ثلاثة أقراص وزنهم على الترتيب 280kg ، kg450،kg250 وعلى مسافة 80cm،cm180،cm220 على الترتيب من الجانب الأيسر. أفرض أن وزن العمود 2kg/cm لكل وحدة طـــول. أوجـــد الســـرعة الحرجة للعمود أذا علم أن معامل المرونة لمعدن العمود $2.1\times10^6 kg/cm^2$.



الشكل (5-11)

$\because d = 16cm$

$$\therefore I = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{64}(16)^4 = 3215.4cm^4$$

$\because l = 320cm =$ طول العمود

$\therefore$ weight of the disc at 80cm from (B)= $W_1 = 280kg$.

weight of the disc at 180cm from (B)= $W_2 = 450kg$.

weight of the disc at 220cm from (B)= $W_3 = 250kg$.

$\because$ Weight of the shaft w=2kg/cm length, $E = 2.1\times10^6$ kg/cm

$\therefore$ The static deflection due to a weight $W = \Delta = \dfrac{Wl_1^2l_2^2}{3EIL}$

$\therefore \Delta_1$ due to 280kg $= \dfrac{280(80)^2(240)^2}{3(2\times10^6)(3215.4)(320)} = 0.017cm$

Where $l_1 = 80cm, l_2 = 240cm$

Δ_2 due to 450kg $= \dfrac{450(180)^2(140)^2}{3(2\times10^6)(3215.4)(320)} = 0.046cm$

Δ_3 due to 250kg $= \dfrac{250(220)^2(100)^2}{3(2\times10^6)(3215.4)(320)} = 0.0196cm$

وأيضا نجد أن الأنحراف الأستكاتيكي نتيجة الحمل منتظم التوزيع Δ_s uniformly distributed load

$$\therefore \Delta_s = \frac{5}{348} \cdot \frac{wl^4}{EI} = \frac{5}{458} \cdot \frac{2(320)^4}{2 \times 10^6 \times 3215.4} = 0.047cm$$

نعين السرعة الحرجة للعمود من العلاقة N_c =The critical speed in r.p.m= $f_n(60)$

Where f_n =Natural frequency of the transverse in rev./sec

$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \frac{\Delta_s}{1.27}}} \quad \text{with usual notations}$$

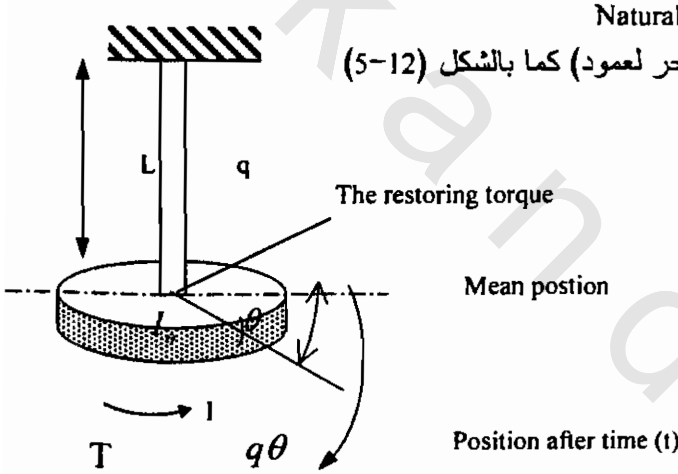
$$\therefore f_n = \frac{4.987}{\sqrt{0.017 + 0.046 + 0.0196 + \frac{0.047}{1.27}}} = \frac{4.987}{0.3458} = 14.42\, rev/\sec$$

$$\therefore N_c = f_n(60) = 14.42(60) = 865 r.p.m$$

ثالثا: الأهتزاز الألتوائي Torsional Vibration (التذبذبات الألتوائية لأعمدة الأدارة)

1- إيجاد التردد الطبيعي للأهتزازات الألتوائية الحرة

Natural frequency of free torsional vibrations



الشكل (5-12)

أذا أعطي جسم (قرص مثبت في الطرف الحر لعمود) كما بالشكل (5-12) أزاحة زاوية صغيرة (θ) فأنه يتولد داخله عزم كامن يسمى بعزم اللي الكامن the restoring torque وعند أعتاق القرص يتحول العزم الكامن إلى طاقة حركية تجعل العمود يتذبذب حول المحور الرأسي وبالتالي يتولد عزم لي أسترجاعي (رجوعي) يعمل على إيقاف القرص عند وضع التعادل الجديد نتيجة تحول الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة في القرص ويكون أتجاه عزم اللي الكامن مساوي في المقدار ومضاد في الأتجاه لعزم اللي الأسترجاعي، ومن ذلك نستنتج مايلي:

$\because$ عزم اللي الكامن= $q\theta$ ، عزم اللي الأسترجاعي= $I\ddot{\theta}$

$$\because I\ddot{\theta} = -q\theta \qquad \therefore I\ddot{\theta} + q\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{q}{I}\theta = 0 \quad \text{.........(5-36)}$$

where $\omega_n = \sqrt{\frac{q}{I}}$, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$

عزم القصور الذاتي للقرص Mass moment of inertia= $I = \frac{W}{g} R_g^2$ و معـــامل الألتـــواء للعمــود

q=Torsional stiffness of the shaft

و الأزاحة الزاوية للعمود θ=Angular displacement of the shaft , نصف قطر الحركة التدويميـــة

R_g =Radius of gyration

ويمكن إيجاد q من العلاقة التالية:

$$\because \frac{T}{J} = \frac{C\theta}{L} \quad \therefore \frac{T}{\theta} = \frac{CJ}{L} = q \quad , \quad \because q = \frac{I_b E}{L} = \frac{\pi d^4 E}{32L}$$

$$\therefore q = \frac{T}{\theta} = \frac{CJ}{L} = \frac{\pi d^4 E}{32L} \quad \text{......(5-37)}$$

J= Polar moment of inertia of the shaft cross-section
L=Length of the shaft
E or C=Modulus of rigidity for the shaft materialمعامل الجساءة لمادة العمود

ملاحظات:

أ-في حالة القرص المنتظم السمك وقطره D يكون عزم القصور الذاتي له I ويكمن تعينه من العلاقة

$$I = \frac{WD^4}{8g} \quad \text{......(5-38)}$$

حيث W وزن القرص، D قطر القرص

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi g d^4 . E}{4WD^2}}$$

حيث d قطر العمود ، D قطر القرص.

ب-أذا كان العمود يتكون من جزئين طولهما L_2, L_1 وأقطارهما d_2, d_1 ويكون تحت تاثير عزم M_t فـــان زاوية اللي ϕ وطول العمود يمكن تعينهم من العلاقتين :-

$$\phi = \frac{32M_t}{\pi d_1^4 E}\left[L_1 + L_2 \frac{d_1^4}{d_2^4}\right] \quad \text{......(5-39)}$$

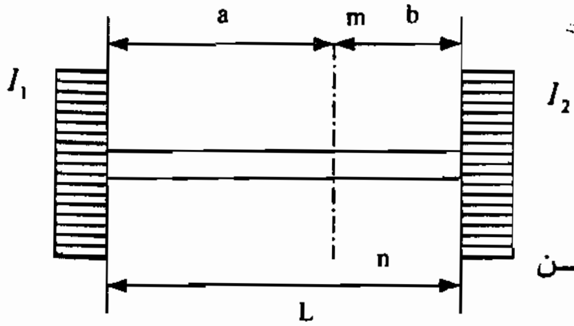
$$L = L_1 + L_2 \frac{d_1^4}{d_2^4} \quad \text{......(5-40)}$$

ج- أذا كان العمود يتكون من عدة أجزاء مختلفة الأقطار وبدون تغيير في معامل اللي للعمود فأننا نستبدل أي وضع للعمود عند طول L_n وقطره d_n ويمكن تعيين طول العمود من العلاقة:

$$L = L_n . \frac{d^4}{d_n^4}$$

ويمكن تطبيـــق ذلك في حالة العمود الذي به جزئيــن دورانييــن فـــي نهايتيــه كمـــا بالشـــكل

المقابل (5-13) حيث:



الشكل (5-13)

$$\therefore \frac{q_1}{q_2}=\frac{I_1}{I_2}\sqrt{\frac{I_1}{q_1}}=\sqrt{\frac{I_2}{q_2}}$$

حيث q_1,q_2 هما معاملات اللي لكل من الجزئين للعمود

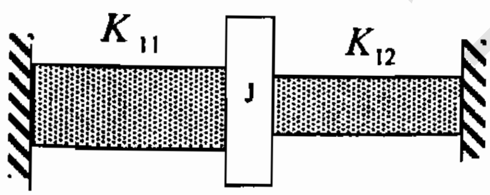
$$\frac{a}{b}=\frac{I_2}{I_1},L=a+b$$

$$\therefore a=\frac{LI_1}{I_1+I_2} \quad , \quad b=\frac{LI_2}{I_1+I_2} \quad ,$$

$$\therefore f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4E(I_1+I_2)}{32LI_1I_2}} \quad \text{..........(5-41)}$$

$$t_p=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{I_1}{q_1}}=2\pi\sqrt{\frac{32LI_1I_2}{\pi d^4E(I_1+I_2)}} \quad \text{..........(5-42)}$$

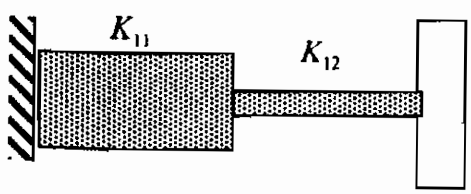
ء- معامل الألتواني المكافئ للمنظومات الآتية (5-14a,b) يمكن أيجادهم كما يلي:



الشكل (5-14 b)

$$k_{t_e}=k_{t_1}+k_{t_2}$$

$\theta_t=\theta_{total}$ =total deflection of the desk



الشكل (5-14 a)

$$\theta_t=\theta_1+\theta_2, \because \theta=\frac{T}{k_t}$$

$$\therefore \theta_t=\frac{T}{k_{t_{eq}}}=\frac{T}{k_{t_1}}=\frac{T}{k_{t_2}}$$

$$\therefore \frac{1}{k_{t_{eq}}}=\frac{1}{k_{t_1}}+\frac{1}{k_{t_2}}$$

$$k_{t_{eq}}=\frac{k_{t_1}.k_{t_2}}{k_{t_1}+k_{t_2}}$$

$k_{t_{eq}}$ = Equivalent spring coefficient

(4) A shaft of 12cm diameter and 120cm long has one of its end fixed and the other carries a disc if weight 580kg at a radius of gyration of 50cm. The modulus of rigidity for the shaft material is $0.8\times10^{6}\,Kg/cm^{2}$. Determine the frequency of torsional vibration.

4-عمود قطره 12سم وطوله 120سم مثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر يحمل قـــرص وزنـــه 580 كيلوجرام عند منتصف القطر للحركة التدويهية 50سم، معـــامل الجســـاءة لمـــادة العمـــود 0.8×10^{6} كيلوجرام/سم^2. أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي.

الحـــل

$\because J$ = Polar moment of inertia of the shaft.

$$J=\frac{\pi}{32}d^{4}=\frac{\pi}{32}\left(12^{4}\right)=2034.7cm^{4}$$

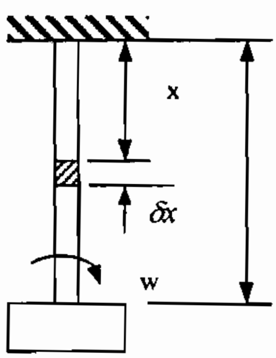
$$I=\frac{w}{g}R_{g}^{2}=\frac{580}{980}(50)^{2}=1478Kg.cm.\sec^{2}$$

Torsional stiffness = $q=\dfrac{CJ}{l}=\dfrac{0.8\times10^{6}(20347)}{120}=13.6\times10^{6}Kg/.cm$

$\therefore f_n$ = Freqency of torsional vibratin= $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{q}{I}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{13.6\left(10^{6}\right)}{1478}}=15.3Cycle/Sec$

2- تأثير عزم القصور الذاتي للعمود على الأهتزازات الألتوائية

Effect of inertia of a constraint on torsional vibations



الشكل (5-15)

الشكل (5-15) يوضح عمود طوله l ومثبت من أحـد طرفيه والطرف الأخر للعمود مثبت فيه قرص ولهذا يسمى بالعمود المقيد بين نقطة التثبيت والقرص.

$\because$ عزم القصور الذاتي للعنصر dx يعين من العلاقة

Mass moment of inertia of the element=

$$I_{element}=\frac{w.\delta x}{g}R_{g}^{2}=\frac{w.\delta x}{l}.\frac{wlR_{g}^{2}}{g}=\frac{\delta x}{l}.I_{c}$$

طاقة الحركة المختزنة بالعنصر تعين من العلاقة التالية:

(K.E) possessed by the element= $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta x}{l}\times I_{c}\right)\left(\dfrac{\omega}{l}.x\right)^{2}$

$$(K.E)_{element}=\frac{I_{c}\omega^{2}x^{2}}{2l^{3}}\delta x$$

وبالتكامل يمكن أيجاد طاقة الحركة الكلية كما يلي:

Total kinetic energy of the constraint= $\int_0^l \frac{I_c \cdot w^2}{2l^3} \cdot x^2 dx$

$$= \frac{I_c \omega^2}{2l^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{3}\right)\omega^2 \text{......(5-43)}$$

حيث R_g هو نصف قطر الحركة التدويمية ، السرعة الزاوية للعنصر = $\frac{\omega \ x}{l}$

w الوزن لوحدة الطول، L طول العمود ، $\frac{I_c}{3}$ عزم القصور الذاتي للعمود ، W_c الوزن الكلـــي، ω السرعة الزاوية للطرف الحر.

I_c=Total mass moment of inertia of constraint = $\frac{W_c}{g} \cdot R_g^2$

وبالتالي فأنه يمكن إضافة عزم القصور الذاتي الناتج من العمود $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{3}\right)\omega^2\right]$ إلى عـــزم القصـــور الذاتي للقرص (I) وكذلك يكون التردد الطبيعي للمنظومة على صورة المعادلة:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{I + \frac{I_c}{3}}} \, cycle/\sec \text{ ....(5-44)}$$

3- الأهتزازات الألتوائية الحرة لمنظومة ذات دوار واحد

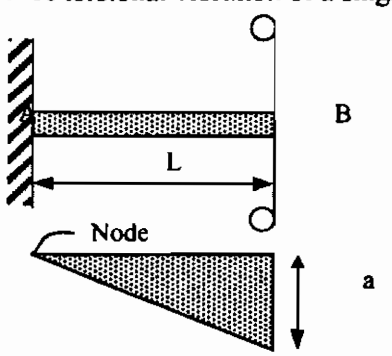
Free torsional vibration of a single rotor system

نعتبر عمود مثبت من أحد طرفيه والطرف الأخر حر ويحمل دوار (carrying a rotor) والتردد الطبيعي لهذه المنظومـــــة المبينة بالشكل (5-16) يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{Il}} \text{....}(5-45)$$

حيث

$$q = \frac{CJ}{l} \quad , \quad I = \frac{W}{g}R_g^2$$



الشكل (5-16)

C= Modulus of rigidity for the shaft material. معامل القص لمادة العمود

J=Polar moment of inertia of the shaft= $\frac{\pi d^4}{32}$ عزم القصور القطبي للعمود

قطر العمود d=diameter of shaft ، L طول العمود

I=Mass moment of inertia of the rotor عزم القصور الذاتي للدوار

R_g =Radius of gyration نصف قطر الحركة التدويمية

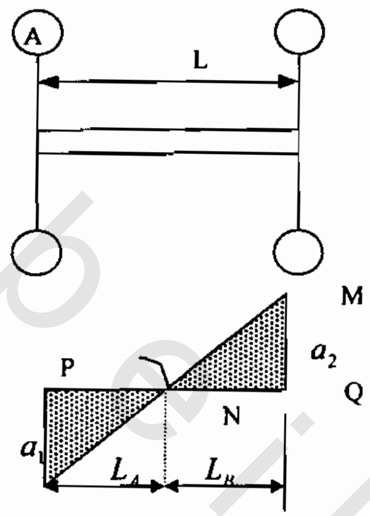
W=weight of rotor وزن الدوار

ونلاحظ أن السعة تساوي صفر عند A ، وتكون أكبر مايمكن عند B كما مبين بالشكل(5-16) وتسمى النقطة التي تكون عندها السعة مساوية للصفر بالعقدة وعند هذه النقطة لايتأثر العمود بالأهتزاز.

4- الأهتزاز الألتوائي لعمود ويحمل دورا عند كل من طرفيه

Free torsional vibration of a two rotor system

نفترض عمود يحمل دورا واحدا عند كل من طرفيه كما بالمنظومة المبينة بالشكل (5-17)، ويحدث الأهتزاز الألتوائي فقط عندما يدور الدورانيان A ، B في أتجاهين متقابلين (متضادين)، فأذا دار الدوار A في ضد أتجاه عقرب الساعة والدوار B يدور في أتجاه عقارب الساعة في نفس اللحظة (والعكس صحيح) فأنه يلاحظ أن الدوارين لهم نفس التردد فنلاحظ أن العقدة (the node) تقع عند النقطة N .



الشكل (5-17)

ولذلك نفترض أن العمود ينقسم إلىقسمين NQ و PN وكل منهمامثبتان عند نهايتهما ويحمل كل منها دوار عند النهايتين الحرتين، ويمكن إيجاد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي للدوار A والدوار B من العلاقة:

$$f_{n_A} = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}}$$

والقرص B من العلاقة

$$f_{n_B} = \frac{1}{2\pi} = \sqrt{\frac{CJ}{L_B I_B}} \quad \text{...(5-46)}$$

مع ملاحظة أن $f_{n_A} = f_{n_B}$ وبالتالي ينتج أن:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{LI_B}} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_B I_B}}$$

$$\therefore L_A I_A = L_B I_B$$

$$\therefore L_A = \frac{I_B L_B}{I_A} \quad \text{...(5-47)}$$

حيث طول العمود $L = L_A + L_B$ وبتحديد كل من L_A و L_B فأنه يمكن أيجاد f_{n_B}, f_{n_A}

I_A, I_B = Mass moment of inertia of rotor A and B

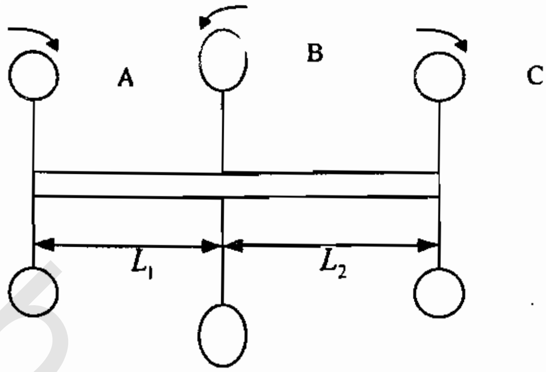
d=Diameter of the shaft

J= Polar moment of ineria of the shaft

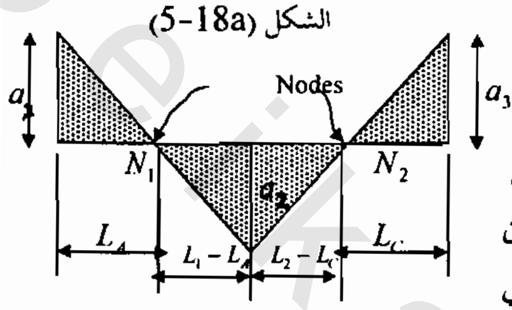
C=Modulusofrigidity for the shaft material

٥- الأهتزازات الألتوائية الحرة لمنظومة ذات ثلاث أعضاء دواره

Free torsional vibration of a three rotor system



الشكل (5-18a)



الشكل (5-18b)

المنظومة المبينة بالشكل (5-18a) هي عمود عليه ثلاثة أعضاء دواره وهي (A,B,C)، يحدث الأهتزاز الألتوائي بطريقتين وهما إما عقدة واحدة أو عقدتان، وفي كلا الحالتين فأن الدورانين يدوران في أتجاه واحد والدوار الثالث يدور في الأتجاه المقابل بنفس التردد، فأذا أعتبرنا أن الدوار A والدوار C بهذه المنظومة يدوران في نفس الأتجاه، بينما الدوار B يدور في الأتجاه المضاد.

وبفرض أن العقدتين تقع عند N_2, N_1 حيث نفرض أن العمود مثبت عند هاتين النقطتين N_2, N_1 ولذلك يكون التردد الطبيعي للدوار A في حالة الأهتزاز الألتوائي يعبر عنه بالعلاقة:

$$f_{n_A} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} \quad \text{.......................................(5-48)}$$

وبالنسبة للدوارين (B) ، (C) يكون

$$f_{n_B} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{I_B}\left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C}\right)} \quad \text{...........................(5-49)}$$

$$f_{n_C} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_C \cdot I_C}} \quad \text{...(5-50)}$$

حيث نعوض في حالة العزم المقاوم (the resisting torque) للدوار B بالبعدين ($(L_2 - L_C$ و$(L_1 - L_A)$ بين العقدتين N_1 and N_2، لذلك فأن جساءة الألتواء (torsional stiffness) خلال $(L_1 - L_A) = \left(\frac{1}{L_1 - L_A}\right) = CJ$.

وكذلك جساءة الألتواء خلال $(L_2 - L_C) = CJ\left(\frac{1}{L_2 - L_C}\right)$

∴معامل الألتواء الكلي للدوار (B) يعين من العلاقة التالية:

$\therefore$ Total torsional stiffness of the rator B$= CJ\left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C}\right)$

ونظرا لان التردد الطبيعي سيكون متساوي في كل دوار

$$\therefore f_{n_A} = f_{n_B} = f_{n_C}$$

ومن المعادلتين (5-48) ، (5-50) نجد أن:

$$L_A I_A = L_C I_C$$

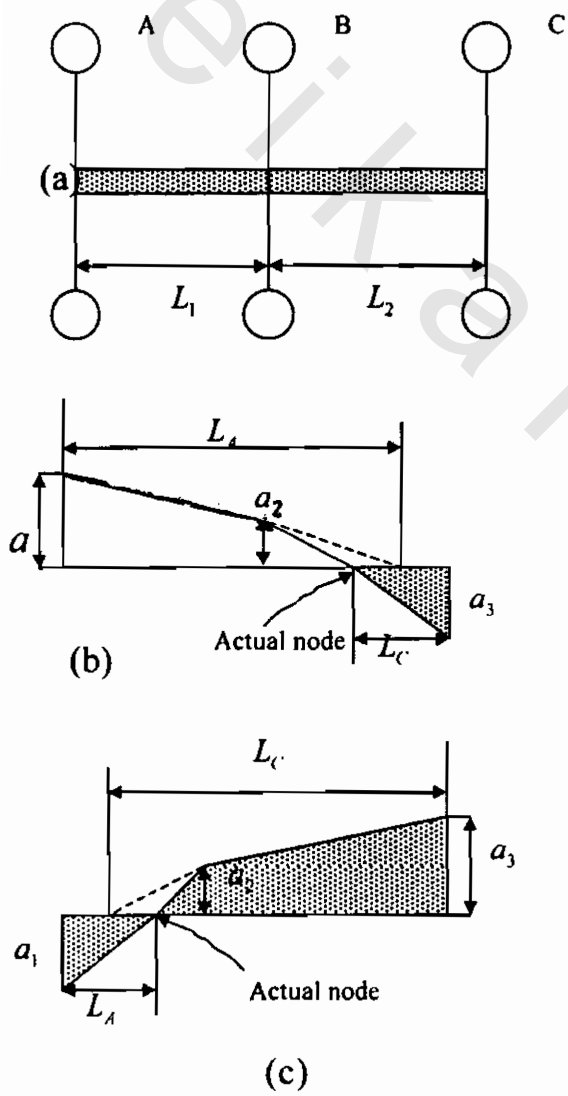
$$\therefore L_A = \frac{L_C . I_C}{I_A} \quad \text{...(5-51)}$$

ومن المعادلتين (2) ، (3) ينتج أن:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{I_B}\left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C}\right)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_C I_C}}$$

$$\therefore \frac{1}{I_B} = \left(\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C}\right) = \frac{1}{L_C I_C} \quad \text{.....................................(5-52)}$$

بالتعويض عن قيمة L_A في المعادلة (5-51) يمكن أيجاد L_C ولذلك فأنه توجد قيمتين لكل من L_C و L_A فأن كل من قيمتي L_A والقيمة المناظرة لها L_C تعطي موضع العقدتين وبذلك فأن التردد يمكن إيجاده بالتعويض عن كل من L_A ، L_C في المعادلتين (5-48) ، (5-50).



الشكل (5-19 a,b,c)

ملاحظات:

1- عندما يدور كل من الدوارين A و B في أتجاه واحد والدوار C في إتجاه مضاد لهما فأن الأهتزاز الألتواني يحدث عند عقدة واحدة كما بالشكل (5-19b) وفي هذه الحالة يكون $L_A \rangle L_1$ أي أن العقدة تقع بين الدوار (B) والدوار (C) ولكنها لاتعطي قيمة العقدة الفعلية.

2- عندما يدور الدواران C و B في أتجاه واحد والدوار A يدور في أتجاه مضاد فأن الأهتزاز الألتواني يحدث عند عقدة واحدة كما بالشكل (C) وفي هذه الحالة يكون $L_C \rangle L_2$ ،أي أن العقدة تقع بين الدوار A والدوار B ولكن لاتعطي القيمة الفعلية للعقدة.

3- عندما تكون سعة الأهتزاز للدوار A معروفة فإن سعة الدوار B تعين من العلاقة:

$$a_2 = \frac{L_A - L_1}{L_A}(a_1) \quad \text{.......(5-53)}$$

وكذلك سعة الدوار C من العلاقة:

$$a_1 = \frac{L_C}{L_C - L_2}(a_2) \quad \text{.......(5-54)}$$

حيث a_1 =Amplitude of rotor A

6- العمود المكافئ للألتواء Torsionally equivalent shaft

نجد في الحياة العملية أن معظم الأعمدة تكون ذات أقطار مختلفة وأطوال مختلفة، لذلك فأن العمود المتغير الأقطار يمكن تبديله بعمود آخر ذات قطر وطول واحد، ولهذا نأخذ العمود المختلف الأقطار d_1, d_2, d_3 وأطوال L_1, L_2, L_3 على الترتيب كما بالشكل (5-20a) ، وهذا العمود يمكن تبديله بعمود أخر ذات قطر واحد d وطول واحد L كما بالشكل (5-20b) ويكون لهم نفس زاوية اللي الكلية وعندما يطبق على كل دوار عزم ا مقداره T عند طرفيه وفي أتجاهين متضادين فإن زاوية اللي الكلية يعبر عنها بالعلاقة الأتية:

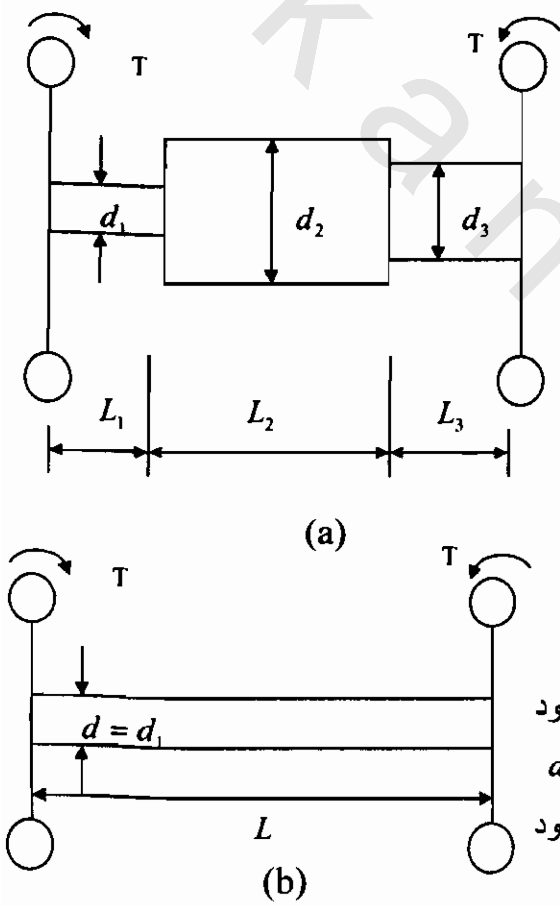
$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad \text{.......(5-55)}$$

$$\therefore \frac{T.L}{CJ} = \frac{T.L_1}{CJ_1} + \frac{T.L_2}{CJ_2} + \frac{T.L_3}{CJ_3}$$

$$\therefore \frac{L}{J} = \frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2} + \frac{L_3}{J_3}$$

$$\therefore \frac{L}{\frac{\pi}{32}d^4} = \frac{L_1}{\frac{\pi}{32}d_1^4} + \frac{L_2}{\frac{\pi}{32}d_2^4} + \frac{L_1}{\frac{\pi}{32}d_3^4}$$

$$\therefore \frac{L}{d^4} = \frac{L_1}{d_1^4} + \frac{L_2}{d_2^4} + \frac{L_3}{d_3^4} \quad \text{.......(5-56)}$$



الشكل (5-20 a,b)

مع فرض أن القطر d هو القطر المكافئ للعمود ويساوي أحد الأقطار الفعلية وليكن d_1 أي أن $d = d_1$ وبالتعويض في المعادلة (5-56) ينتج أن طول العمود المكافئ كما بالمعادلة التالية:

$$\therefore L = L_1 + L_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 + L_3\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 \quad \text{......(5-57)}$$

حيث:

d_1,d_2,d_3 هي أقطار العمود للأطوال L_1,L_2,L_3 على الترتيب.

$\theta_1,\theta_2,\theta_3$ هي زاوية اللي للأطوال L_1,L_2,L_3 على الترتيب .

θ هي زاوية اللي الكلية

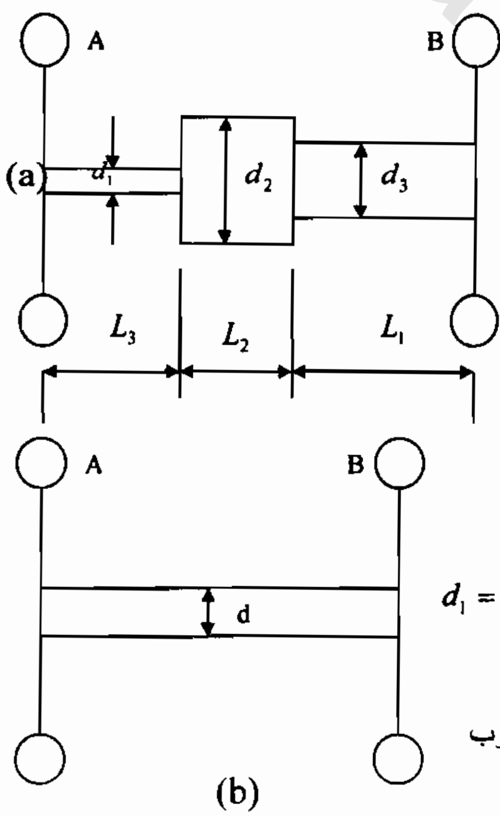
J_1,J_2,J_3 هي عزم القصور القطبي عند الأقطار d_1,d_2,d_3 على الترتيب.

5- Two rotors A and B are attached to the end of the shaft 70cm long the weight of the rotor A is 450Kg and its radius of gyration is 44cm. The corresponding values of rotor B are 580Kg and 56cm respectively. The shaft is 6cm diameter for the first 26cm, 12cm for next 20cm and 8cm for the remaining length. Modulus of rigidity for the shaft material is $0.8\times10^6\ Kg/cm^2$ find:
(i)-The position of the node.
(ii)-he frequency of the torsional vibration.

5- الدورانيان A، B متصليت بطرفي عمود طوله 70cm. ووزن الـــدوار A 450Kg ونصـــف قطـــر الحركة التدويمية له $R_g = 44cm$ والدوار B وزنه 580Kg، ونصف قطر الحركة التدريجية لـــــه $R_g = 56cm$ على الترتيب، قطر العمود 6cm خلال الطول 26cm، وقطره 12cm خلال الطـــول 20cm وقطره 8cm لبقية طول العمود، فأذا كان معامل الجساءة للعمـــود $C = 0.8\times10^6\ Kg/cm^2$ أوجد:

(1) موضع العقدة.

(2) التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي.



$$\because W_A = 450Kg, R_{g_A} = 44cm$$
$$\because W_B = 580Kg, R_{g_B} = 56cm$$
$$C = 0.8\times10^6\ Kg/cm^2$$
$$\because I_A = \frac{W_A}{g}R_{g_A}^2 = \frac{450}{981}(44)^2 = 888Kg.cm.\sec^2$$
$$I_B = \frac{W_B}{g}R_{g_B}^2 = \frac{580}{981}(56)^2 = 1854.1Kg.cm.\sec^2$$

$d_1 = 6cm$, $L_1 = 26cm$, $d_2 = 12cm, L_2 = 20cm$

$d_3 = 8cm, L_1 = 24cm$

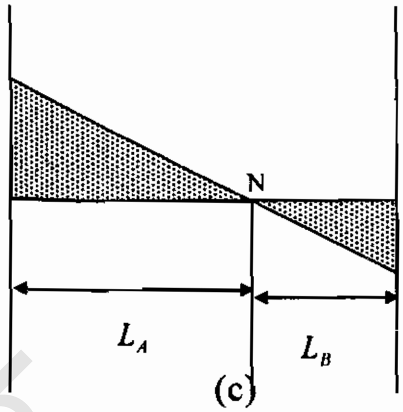
الشكل(5-21a) يوضح العمود الفعلي - ولأيجاد المطلـــوب

نفرض أن $d = d_1$ والتعويض في المعادلة التالية:

$$L = L_1 + L_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 + L_3\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4$$

حيث L هو الطول المكافئ للعمـــود، I_B, I_A همـــا عزم القصور الذاتي لكل من الدوار A والدوار B.

$$\therefore L = 26 + 20\left(\frac{6}{12}\right)^4 + 24\left(\frac{6}{8}\right)^4 = 34.84cm$$



الشكل(5-21a,b,c)

لتعيين موضع العقدة: نفرض أن العقدة تقع عند N كما بالشـكل (5-21 c) فيكون L_A هو بعد العقدة عن الدوار A.

L_B هو بعد العقدة عند الدوار B.

$\because L_A.I_A = L_B.I_B$ with usual notation

$$\because L_A = \frac{L_B.I_B}{I_A} = \frac{1854.1}{888} = 2.1L_B$$

$$\because L_A + L_B = L = 34.84$$

$$\therefore 2.1L_B + L_B = 43.84 \quad \therefore L_B = 11.24cm$$

العقدة تقع على مسافة 11.24 cm من الدوار A

$$L_A = I - L_B = 23..6cm$$

ولإيجاد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي نجد أن:

$$f_n = f_{n_A} = f_{n_B}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_A.I_A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.8\times10^6\left(\frac{\pi}{32}\right)(6)^4}{23.6\times888}} = 11\ cps$$

6- A steel shaft ABCD 1.8m long has flywheels at its end A and D the weight of the flywheel A is 640Kg and has a radius of gyration of 0.7m, The weight of the flywheel D is 860Kg and has a radius of gyration of 0.95m. The connecting shaft has a diameter of 60mm for portion AB which is 0.5m long and has a diameter of 65mm for the portion BC which is 0.6m long, and has a diameter of d mm for the portion CD which is 0.7m long. Determine:

(a)-The diameter (d) of the portion CD so that the node of the torsional vibration of the system will be at the center of the length BC, and

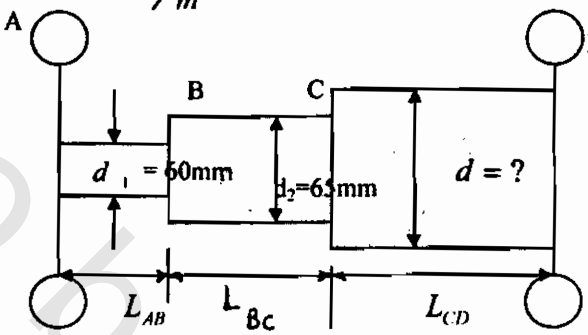
(b)-The natural frequency of the torsional vibrations, the modulus of rigidity for the shaft material is $80GN/m^2$

6- عمود من الصلب ABCD طوله 1.8m به حدافتان على نهايتيه D,A وزن الحدافـــة A 640 كجـم ونصف قطر الحركة التدويمية لها 0.75 متر. وزن الحدافة D 860 كجم ونصف قطر الحركة التدويمية لها 0.95 متر، وصلة العمود AB قطره 60مم وطولها 0.5 متر والوصلة BC قطرها 65مـــم وطولـــها

0.6 متر وصلة العمود CD قطرها (d)مم وطولها 0.7 متر أوجد:

أ-القطر(d) للوصلة CD حيث العقدة للأهتزاز العرضي للمنظومة سوف تكون في منتصف الوصلة BC.

ب-التردد الطبيعي للأهتزاز العرضي- مع إعتبار إن معامل الجساءة لمادة العمود $C = 80 \, GN/m^3$.



الحل:

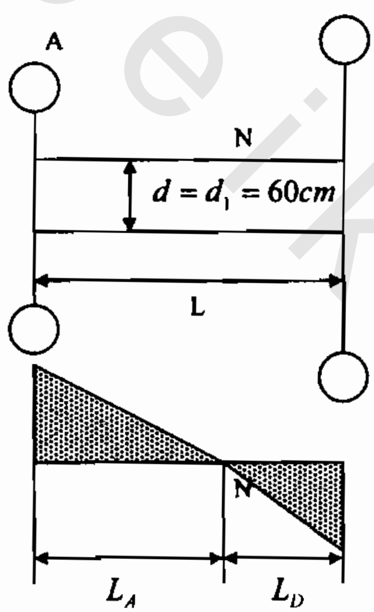
$$L = 1.8m, W_A = 640Kg, R_{g_A} = 0.7m$$

$$W_D = 860Kg, R_{g_D} = 0.95m$$

$$d_{AB} = 60mm, L_{AB} = 0.5m$$

$$d_{BC} = 65mm, L_{BC} = 0.6m, d_{CD}?$$

$$L_{CD} = 0.7m$$



الشكل (5-22)

$$I_A = \frac{W_A}{g} R_{g_A}^2 = \frac{640}{9.81}(0.7)^2 = 31.97 Kg.m.\sec^2$$

$$I_D = \frac{W_D}{g} R_{g_D}^2 = \frac{860}{9.81}(0.95)^2 = 79.12 Kg.m.\sec^2$$

$$L_1 = L_{AB} = 0.5m, L_2 = L_{BC} = 0.6m, L_3 = L_{CD} = 0.7m$$

وبفرض أن الطول المكافئ للعمود (L) وأن قطر العمود المكافئ $d_1 = 60mm$.

$$\therefore L = L_1 + L_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 + L_3\left(\frac{d_1}{d_3}\right)$$

$$\therefore L = 0.5 + 0.6\left(\frac{60}{65}\right)^4 + 0.7\left(\frac{60}{d}\right)^4$$

$$\therefore L = 0.5 + 0.44 + \frac{907.2 \times 10^4}{d^4} = 0.94 + \frac{907.2(10)^4}{d^4} \quad ..(1)$$

ولتعيين القطر (d) للوصلة CD من العمود وبفرض أن العقدة N للمنظومة المكافئة تقع على مسافة L_A من الحدافة (A) وعلى مسافة L_D من الحدافة D.

$$\therefore L_A I_A = L_D I_D$$

$$\therefore L_D = L_A\left(\frac{I_A}{I_D}\right) = L_A\left(\frac{31.97}{79.12}\right) = 0.404 L_A$$

ولهذا فان العقدة تقع فى منتصف الطول BC فى المنظومة الاصلية للعمود الاصلى.

$$\therefore L_A = L_1 + \frac{L_2}{2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^4 = 0.5 + \frac{0.6}{2}\left(\frac{60}{65}\right)^4 = 0.718\ m = 71.8\ cm$$

$$\therefore L_D = 0.404 L_A = 71.8(0.404) = 29\ cm ....(2) \quad \therefore L = 0.94 + \frac{907.2(10)^4}{d^4} = 1m$$

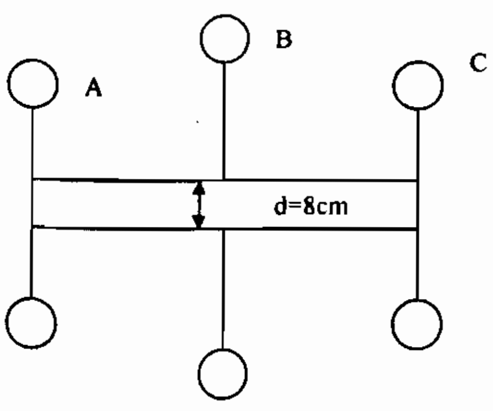
$$\therefore \frac{907.2(10)^4}{d^4} = 0.06 \qquad \therefore d = \sqrt[4]{\frac{907.2(10)^4}{0.06}} = 110.9mm$$

$$\therefore f_n = Natural\ frequency\ of\ torsional\ vibrations = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C.J}{L_A.I_A}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(80)(10^9)\left[\frac{\pi}{32}(0.06)^4\right]}{0.718(31.97)}} = 10.6\ Hz$$

7- A Single cylinder oil engine drives directly a centrifugal pump. The rotating mass of the engine, flywheel and the pump with the shaft is equivalent to three rotor system as shown in fig(5-23) where $d = 8cm, L_{AB} = 180cm, L_{BC} = 120cm$. The mass moment of inertia of the rotors A,B and C are 1200,2800 and 700Kg.cm^2. Find the natural frequency of the torsional vibration. The modulus of rigidity for the shaft material is $0.84\times10^6\ Kg/cm^2$.

7- محرك بترول مفرد الأسطوانة يدير مباشرة مضخة مركزية وكتلة الجزء الـدوار بيـن المحـرك والحدافة والمضخة مع العمود تكافئ منظومة ذات ثلاث دورانيات كما مبين بالشـكل (5-23) عـزم القصور الذاتي الكتلي للدورانيات A,B, and C هي 700,2800,1200 كجم.سم^2 على الترتيب أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي. حيث معامل الجساءة لمادة القضيب 0.84×10^6 كجم/سم^2.



الشكل (5-23)

$$\because I_A = \frac{1200}{981} = 1.22 Kg.cm.\sec^2$$

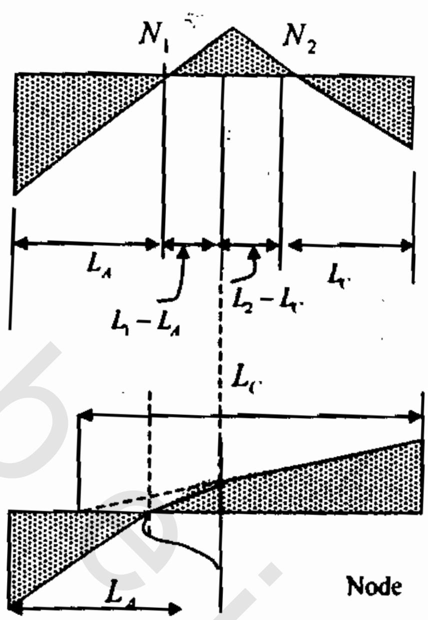
$$I_B = \frac{2800}{981} = 2.85 Kg.cm.\sec^2$$

$$I_C = \frac{700}{981} = 0.714 Kg.cm.\sec^2$$

$\because d =$ diameter of the shaft=8cm

$$L_1 = L_{AB} 180cm, L_2 = L_{BC} = 120cm$$

حيث نلاحظ أن L_A هي المسـافة بيـن العقـدة N_1 والدوار A، L_C هي المسافة بين العقدة N_2 والـدوار C.



الشكل (5-23)

$$\because \frac{1}{L_C . I_C} = \frac{1}{I_B} = \left[\frac{1}{L_1 - L_A} + \frac{1}{L_2 - L_C}\right]$$

$$\because L_A = \frac{L_C . I_C}{I_A} = L_C\left(\frac{0.714}{1.22}\right) = 0.59 L_C$$

$$\therefore \frac{1}{L_C(0.714)} = \frac{1}{2.85}\left[\frac{1}{180 - 0.59L_C} + \frac{1}{120 - L_C}\right]$$

$$\therefore \frac{2.85}{L_C(0.714)} = \frac{120 - L_C + 180 - 0.59L_C}{(180 - 0.59L_C)(120 - L_C)}$$

$$\frac{3.99}{L_C} = \frac{300 - 1.59L_C}{0.59L_C^2 - 250.8L_C + 21600}$$

$$\therefore L_C^2 - 329L_C + 21874 = 0$$

$$\therefore L_C = 236.5cm, L_C = 92.5cm$$

$$\therefore L_A = 0.59L_C$$

at $L_C = 236.5cm \rightarrow L_A = 139.54cm$

$L_C = 92.5cm \rightarrow L_A = 54.6cm$ at

ونلاحظ أنه عندما تكون $L_C = 92.5cm$ فــأن $L_A = 54.6cm$ وهذا يوضح موضع العقدتين كما فــي الشكل (5-23 b) .ونلاحظ ايضاً عندما $L_C = 236.5cm$ فأن $L_A = 139.5cm$ وهذا يعطــــي العقــدة الوحيدة وتكون على بعد $L_A = 139.5cm$ كما بالشكل (5-23 c).ويمكن إيجـــاد الــتردد الطبيعــي f_n للأهتزاز الألتوائي كما يلي:

At $L_A = 139.5cm$

$$f_{n_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_A . I_A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(084 \times 10^6)\left[\frac{\pi}{32}(8)^4\right]}{(139.5)(1.22)}} = 224.3 Cycle/\sec$$

at $L_A = 54.6cm$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(0.84 \times 10^6)\left[\frac{\pi}{32}(8)^4\right]}{54.6(1.22)}} = 358.5 cycle/\sec$$

8- Determine the frequency of torsional vibration of a shaft with two circular discs of uniform thickness at the ends in the system as shown in Fig(5-13), if the weights of the discs are $W_1 = 800lb$ and $W_2 = 1600lb$ and their outer diameter are $D_1 = 40in$,ar $D_2 = 75in$ respectively. The length of the shaft is $L = 100in$ and its diameter $d = 5in$ .Modulus in shear

$G = 12 \times 10^6 \, lb per sq.in$.

8- أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي لعمود متصل به قرصين متماثلين في السمك بنهايتـه كمـا بالشكل (5-13). أذا كان الوزن والقطر الخارجي لكل من القرصين هما $D_1 = 40in, D_2 = 60in$ و $W_1 = 800lb, W_2 = 1600lb$ وطـول العمـود $L = 100lb$ وقطـره $d = 5in$ حيـث $E = 12 \times 10^6 lb/in$.

الحل

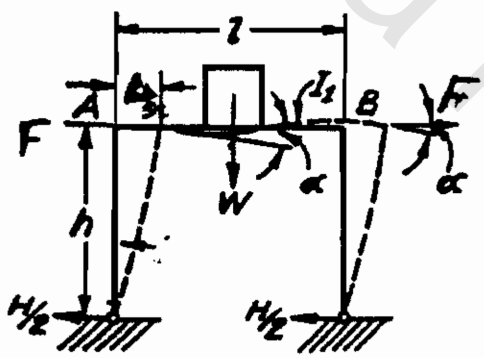
$$\because a = \frac{LI_1}{I_1 + I_2}, \quad \begin{matrix} I_1 = W_1.D_1^2 = (800)(40)^2 \\ I_2 = W_2.D_2^2 = (1600)(60)^2 \end{matrix}$$

$$\therefore a = \frac{100(800)(40)^2}{800(40)^2 + (1600)(60)^2} = 18.18in$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi g d^4 E}{4W_2.D_2^2.a}} = \sqrt{\frac{\pi(386)(5)^4.12 \times 10^6}{4(1600)(60)^2(1818)}} = 32.46 cycles/\sec$$

9- Determine the period horizontal vibration of the frame, shown in Fig(5-24), supporting a load W applied at the center. The mass of the frame should be neglected in this calculation.

9- أوجد الزمن الدوري للأهتزاز الأفقي للهيكل المبين بالشكل (5-24) حيث وضـع حمـل W علـى منتصف الهيكل مع إهمال الهيكل.



الشكل (5-24)

الحـــل:

نوجد Δ_{SL} الأزاحة الأفقية للهيكل والتي تقع تحت تأثير القوة الأفقية F وبأهمال الأنحناء النـاتج مـن الشد والضغط لأعضاء الهيكل مع الأخذ في الأعتبـار فقط الأنحاء للعضو AB والذي ينحني بـزوج مـن العزوم مقدار كل منهم $\left(F.\frac{h}{2}\right)$ الزاوية α لـدوران الوصلات A,B تعين من العلاقة:

$$\alpha = \frac{F.h.L}{12E.I}$$

والأنحناء الأفقي يتكون من جزئين أحدهما نتيجة إنحناء الكابولي والثاني نتيجة دوران وصلات الـهيكل A,B بزاوية α

$$\Delta_{St} = \frac{F.h^3}{6E.I} + \frac{Fh^2L}{12EI_1} = \frac{Fh^3}{6EI}\left(1 + \frac{LI}{2hI_1}\right)$$

$$\therefore k = \text{The spring constant} = \frac{F}{\Delta} = \frac{6EI}{h^{3}\left(1+\frac{LI}{2hI_{1}}\right)}$$

$$\tau_{p} = \text{الزمن الدوري} = \frac{2\pi}{\omega_{n}} = 2\pi\sqrt{\frac{Wh^{3}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{Wh^{9}\left(1+\frac{LI}{2h}I_{1}\right)}{6gEI}}$$

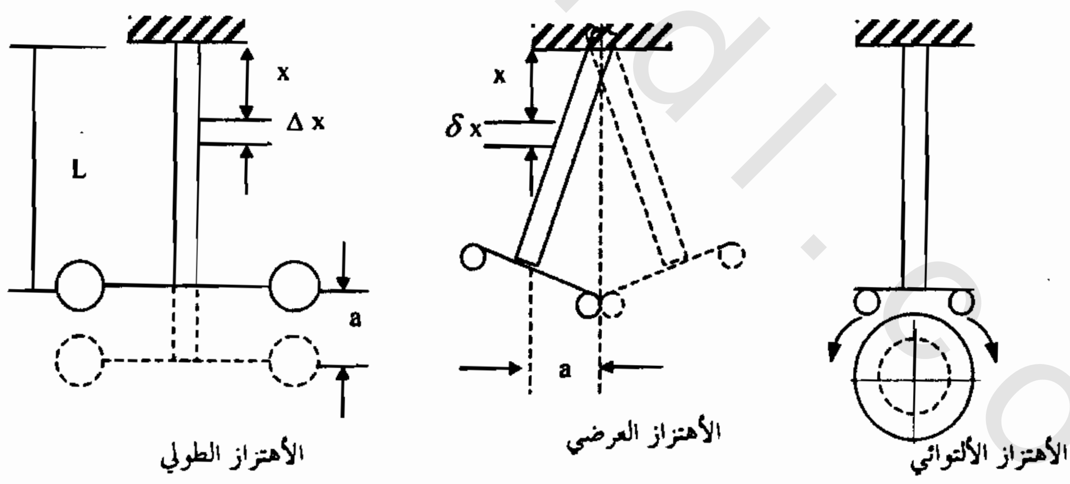
إذا كانت جساءة العضو الأفقي من الهيكل كبيرة نسبياً بالمقارنة بالجساءة الرأسية فإن $\frac{LI}{2hI_{1}}$ يمكن إهماله لصغرها.

$$\therefore \tau_{p} = 2\pi\sqrt{\frac{Wh^{3}}{6gEI}}\ \text{sec}$$

$$\therefore f_{n} = \frac{\omega_{n}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6gEI}{Wh^{3}}}\ c.p.s$$

10- For the system shown in Fig(5-25), the weight of the flywheel is 0.4ton, the radius of gyration is 16in., the shaft is 4in. diameter and 5ft. long to the flywheel boss. For the shaft material Young's modulus is 30×10^{6} lb. per sq. in. and the modulus of rigidity is 12×10^{6} lb. per sq. in. Find the frequency of the free longitudinal, transverse and torsional vibration.

10- المنظومة المبينة بالشكل (5-25) وزن الحدافة 0.4 طن ، ونصف قطر الحركة التدويمية 16 بوصة، وقطر العمود 4 بوصة وطوله 5قدم إلى صرة الحدافة – ونصف قطر الحركة التدويمية 30×10^{6} باوند لكل بوصة مربعة ومعامل الجساءة 12×10^{6} باوند لكل بوصة مربعة. أوجد التردد الطبيعي لكل من الأهتزاز الطولي والعرضي والألتوائي.



(a) (b) (c)

الشكل (5-25)

الحـــــــل:

a-Longitudinal vibration الأهتزاز الطولي

$$\Delta = \text{Static extension of the shaft} = \frac{WL}{AE},\ A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(4)^2 = 12.6m^2$$

$$\therefore \Delta = \frac{0.4(2240)(60)}{\frac{\pi}{4}(4)^2\left[30\times10^6\right]} = 0.000143in, \because f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}$$

$$\therefore f_n = \frac{1878}{\sqrt{\Delta}}c/\min = \frac{187.8}{\sqrt{0.000143}} = 15710\ c/\min$$

b- Transverse vibration الأهتزاز العرضي

$$\therefore \text{Static deflection of cantilever } \Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$\therefore \Delta = \frac{0.4(2240)\left(5\times10^3\right)}{3\left[30\times10^6\right]\frac{\pi}{64}(4)^4} = 0.17$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{0.17}} = \frac{187.8}{0.4123} = 455c.p..\min$$

c- Torsional vibration

$$\because J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\therefore q = \frac{CJ}{L} = \frac{\left(12\times10^6\right)\pi(4)^4}{(5\times12)(32)} = 5\times10^6\,lb.in$$

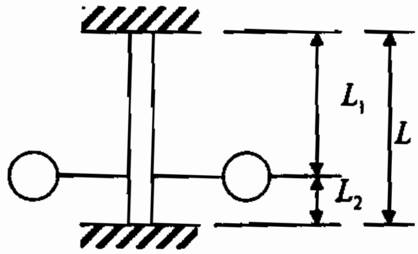
$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q\cdot g}{W.R_g^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(5\times10^6\right)(32.2)(12)}{[0.4][224](16)^2}} = 46.2cps$$

$$\therefore f_n = 2772.8 \text{ cycle per min.}$$

11- A flywheel is mounted on a vertical shaft as shown in Fig(5-26), the ends of the shaft being fixed. The shaft is 3 in diameter, The length L_1 is 4 ft. and the length L_2 is 3 ft. The flywheel weight 50.6ton and its radius of gyration is 20in. Find the natural frequencies of the longitudinal, the transverse and the torsional vibration of the system. (assume $E = 30\times10^6\,lb/in$)

11- حدافة مركبة غلى عمود رأسي كما بالشكل (26-5) مثبت من نهايتيه -قطر العمــود 3 بوصـــة ، والطول L_1 4 قدم، والطول L_2 3 قدم ونصق قطر الحركة التدويهية 20 بوصة، أوجد التردد الطبيعــي لكل من الأهتزاز الطولي والعرضي والألتوائـــي. أعتــبر أن معــامل المرونـــة لمـــادة العمــود (E) 10^6 (30) باوند لكل بوصة مربعة.

أولاً :الأهتزاز الطولي



الشكل (5-26)

بإعتبار أن الوزن W_a هو جزء من الوزن الكلي W للحدافة ويؤثر خلال الطول L_1 من العمود ويكون الوزن $(W - W_a)$ هو الوزن المؤثر خلال الطول L_2

$$\therefore \text{The extension of length } (L_1) = \frac{W_a . L_1}{AE}$$

حيث A هي مساحة مقطع العمود، وأن الأنضغاط في العمود يعين من العلاقة التالية:

$$\text{The compression of the length} (L_2) = \frac{(W - W_a) L_2}{AE}$$

$\because$ التمدد في العمود خلال (L_1) = الأنضغاط في العمود خلال (L_2)

$$\therefore W_a . L_1 = (W - W_a) L_2$$

$$W_a (4) = (W - W_a)(3) \qquad \therefore W_a = \frac{3}{7} W$$

$$\therefore L_1 = \frac{W_a . L_1}{AE} = \frac{\frac{3}{7}(0.6 \times 2240)(4 \times 12)}{\frac{\pi}{4}(3)^2 [30 \times 10^6]} = 0.00013 in$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{0.00013}} = 16474 \text{ C per min.}$$

ثانيا-الاهتزاز العرضي:

الانحراف الاستاتيكى تحت الحمل W يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta = \frac{W L_1^3 L_2^3}{3 E I L^3} = \frac{(0.6)(2240)(4 * 12)^3 (3 * 12)^3}{3(30 * 10^6) \left[\frac{\pi (3)^2}{64}\right] [7 * 12]^3} = 0.294 \ in$$

$$\therefore f_n = \frac{187.8}{\sqrt{\Delta}} = \frac{187.8}{\sqrt{0.294}} = 346.5 \ c.p.m$$

ثالثا الأهتزاز الألتوائي

$$q_1 = \frac{CJ}{L_1}, q_2 = \frac{CJ}{L_2}$$

$\because$العزم الكلي المطلوب للحدافة لأنتاج أزاحة زاوية (1 radian)

$$q = q_1 + q_2 = CJ\left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right] = (12 \times 10^6)\left[\frac{\pi (3)^2}{32}\right]\left[\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\therefore q = 0.52 \times 10^6 lb.in$$

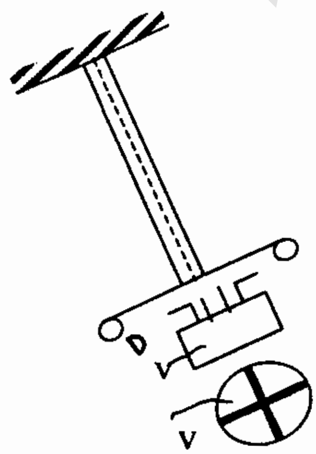
$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q.g}{W.R_g^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.52\times10^6\times(32.2\times12)}{(0.6\times2240)(20)}}$$

$\therefore f_n = 13.77$ cycle per sec

$= 826$ cycle per min.

12- A flywheel of moment of inertia 500 lb.ft^2 is fixed to one end of a vertical shaft, diameter 1in. and length 3ft. the other end of the shaft is fixed. The torsional oscillations of the flywheel are damped by means of a vane V, Fig(5-27) which moves in a dashpot D filled with oil. The amplitude of oscillation is found by experiment to diminish to $\frac{1}{20}$ of its initial value in 3 compete oscillations. Assuming the damping torque to be directly proportional to the angular velocity, find its magnitude at a speed of 1 radn.p.s The modulus of rigidity of the shaft material is 12×10^6 lb per sq.in.

12- عزم القصور الذاتي لحدافة 500 باوند.قدم^2 والمثبتة في نهاية عمود رأسي قطره 1 بوصة وطوله 3 قدم.. الطرف الأخر للعمود ثابت. الأهتزاز الألتوائي للحدافة تم خمده بواسطة دواره الهواء (V) كما بالشكل (5-27) التي تتحرك في خامد D مملوء بالزيت. وجد سعة الأهتزاز بالتجربة تقل إلى $\frac{1}{20}$ من القيمة البدائية في ثلاث دورات أهتزازية كاملة. إفرض أن عزم الخمد يتناسب مباشرة مع السرعة الزاوية وأوجد قيمته عند سرعة 1 rad.p.sec معامل الجساءة لمادة العمود 12×10^6 باوند لكل بوصة مربعة.



الشكل (5-27)

الحـــــــل:

$$\because f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{I}}, q = \frac{CJ}{L} = \frac{12(10^6)}{36}.\frac{\pi}{32}(1)^4$$

$$\therefore q = 3.27(10)^4 \text{ lb.in. per radn}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(3.27)(10)^4(32.2\times12)}{(500)(12)^2}} = 2.11 \text{ per sec}$$

بالنسبة للأهتزازات ذات الخمد فأن معادلة الحركة لهذه المنظومة يمكن كتابته على صوره المعادلة التالية:

$$I\ddot{\theta} + T_f.\dot{\theta} + q.\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{T_f}{I}(\dot{\theta}) + \frac{q}{I}(\theta) = 0 \text{ ....(1)}$$

Put $a_1 = \frac{T_f}{I}$ and $b_1 = \frac{q}{I} = (2\pi f)^2$

حيث θ هي الأزاحة الزاوية من وضع الأتزان عند الزمن t.

q معامل الألتواء (معامل اللي) للعمود. T_f عزم الخمد لكل وحدة سرعة زاوية.

T_f = damping torque per unit angular velocity.

وحل هذه المعادلة (1) يكون على صورة المعادلة التالية:

$$y = Ae^{-\frac{c}{2m}t} .\cos\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\, t \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\because t_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - (\zeta w_n)^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\because f_d = \frac{1}{t_p} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi}$$

$$without\ damping\ c = 0, \zeta = 0, \therefore f_n = \frac{w_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

واذا كانت x_1,x_2 هى النسبة بين اى سعتين متتاليتين فيمكن تعين نسبة السعات او النسبة بين اى سعتين متتاليتين كما يلى:

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{\frac{-c}{2m}t}}{Ae^{\frac{-c}{2m}(t+t_p)}} = e^{\frac{c}{2m}.t_p} = e^{\frac{c}{2m}.\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

وأذا كانت A هي السعة الأبتدائية للأهتزاز الألتوائي وأن a_1، b_1 يمكن التعويض عنها بــ a، b.

وتكون نسبة السعات عند البداية وعند نهاية ثلاث دورات أهتزازية كاملة يمكن أيجادها من المعادلة التالية:

$$\frac{20}{1} = e^{\frac{a_1}{2}(3t_p)} \quad , \quad \frac{3}{2}a_1 t_p = \log_e 20$$

$$\therefore t_p = \frac{2\pi}{\sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \quad \text{, where } a_1 = \frac{T_f}{I}, b_1 = \frac{q}{I} = (2\pi f_n)^2$$

$$b_1 = \frac{q}{I} = \frac{(3.27)(10^4)(32.2)(12)}{(500)(12)^2} = 175.5$$

$$\therefore \frac{(3)(2\pi a_1)}{2\sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} = \log_e 20 = 2.9957 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore \frac{3\pi a_1}{2.9957} = \sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}, \therefore 9.895a_1^2 = b_1 - \frac{a_1^2}{4}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{\frac{b_1}{10.15}}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{\frac{175.5}{10.15}} = 4.16, \text{but } \; a_1 = \frac{T_f}{I} \qquad \therefore T_f = \frac{500(4.16)}{32.2} = 64.8$$

$\therefore T_f = 64.8$ lb. ft. per radn.p.s

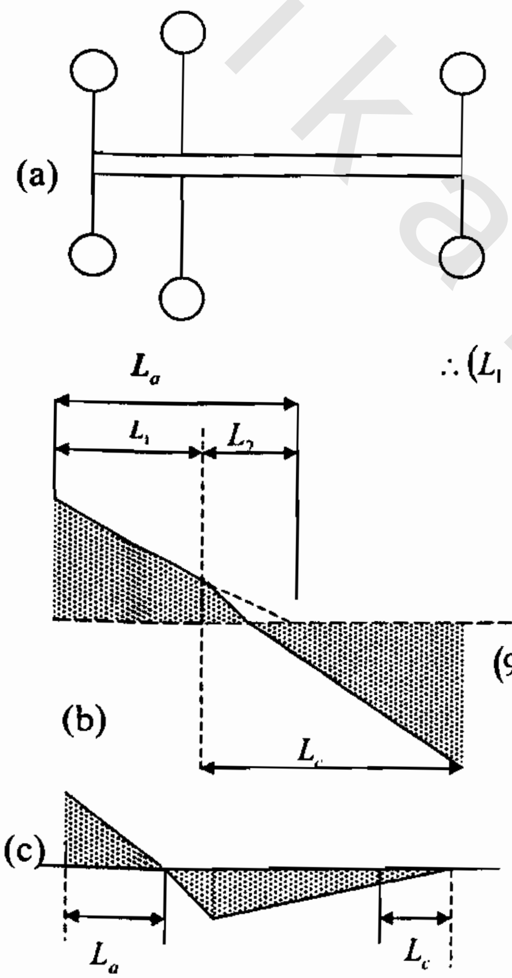
$\because f_n =$ The frequency of the damped vibration.

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{b_1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{175.5 - \left(\frac{4.16}{2}\right)^2} = 2.08 c.p.s$$

$$\therefore Ratio = \frac{f_d}{f_n} = 0.988 = 98.8\%$$

13- The moment of inertia of 3 rotors A,B and C are respectively 2.5ton.ft^2, 7.5ton.ft^2 and 3.0ton.ft^2. The distance between A and B is 9ft. 6in. and between B and C is 25ft. The shaft is 8.5in. diameter and the rigidity for the shaft material is 11.8×10^6 lb. per sq.in. Find the frequencies if the free torsional vibration of the system.

13- عزم القصور الذاتي لثلاث دورانيات A,B and C على الترتيب $2.5, 7.5 and 3.0 ton.ft^2$ المسافة بين الدوار A والدوار B 9 قدم والمسافة بين الدوار B والدوار C 25قدم العمود قطره 8.5 بوصة ومعامل الجساءة لمادة العمود 11.8×10^6 باوند لكل بوصة مربعة. أوجد الترددات للأهتزازات الألتوائية الحرة لهذه المنظومة.



الشكل (5-28)

الحل:

$$\because L_a I_a = L_c I_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\therefore \frac{1}{L_a I_a} = \frac{1}{I_b}\left(\frac{1}{L_1 - L_a} + \frac{1}{L_2 - L_c}\right)$$

$$\therefore (L_1 - L_a)(L_2 - L_c) = \frac{I_a . L_a}{I_b}\left[L_1 + L_2 - (L_a - L_c)\right] \ldots(2)$$

$$\because L_a = \frac{3}{2.5} L_c = 1.2 L_c$$

بالتعويض في (2) نحصل على:

$$(9.5 - 1.2L_c)(25 - L_c) = \frac{(2.5)(1.2L_c)(34.5 - 2.2L_c)}{7.5}$$

$$\therefore L_c^2 - 25.6 L_c + 114.1 = 0$$

$$\therefore L_c = 19.88 ft \text{ or } 5.74 ft$$

$$L_a = 23.86 ft \text{ or } 6.89 ft$$

$\because$ the torsional stiffness of the length L_c of shaft $= q_c = \dfrac{CJ}{L_c}$

When $L_c = 19.88\,ft.$, $\quad q_c = \dfrac{(11.8)(10^6)}{(19.88)(12)} \cdot \left[\dfrac{\pi}{32}(8.5)^4\right]$

$\therefore q_c = 2.54(10^7)$ lb. in. per radn

$$I_c = \frac{(3)(0.2240)(12)^2}{(32.2)(12)} = 2.5 \times 10^3 \text{ lb. in .sec}^2$$

$$\because f_{n_c} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q_c}{I_c}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2.54)(10)^7}{(2.5)(10)^3}} = 16 \text{ per sec.}$$

$\therefore f_{n_c} = 16$ per sec or 960 per min.

$\therefore$ the two node frequency $= (16)\sqrt{\dfrac{19.88}{5.74}} = 29.8$ per sec.

$= 29.8$ per sec or 1788 per sec.

السعة للدوار A نفترض أنها 1 radn ولذلك فإن سعة الدوار B تعين من العلاقة التالية:

The amplitude of rotor B $= \dfrac{L_a - L_1}{L_a} = \dfrac{23.86 - 9.5}{23.86} = 0.602\,radn$

$\therefore$ the amplitude of rotor C $= \dfrac{L_c}{L_c - L_2}$. amplitude of B

$$= \frac{19.88}{19.88 - 25}(0.602) = -2.34\,radn$$

$\therefore$ For the two-node vibration, the amplitude rotor B

$$= \frac{L_a - L_1}{L_a} = \frac{6.89 - 9.5}{6.89} = -0.379\,radn$$

and the amplitude of rotor C $= \dfrac{L_c}{L_c - L_2}$ .amplitude of B

$$= \frac{5.74}{5.74 - 25}(-0.379) = 0.113\,radn$$

والشكل (5-28) يوضح ذلك.

7- الأهتزاز الألتوائي لمنظومة ترسية Free torsional vibration of a geared system

المنظومة المبينة بالشكل(5-29) تتكون من عمود إدارة (C) الذي يحمل الدوار A ويدير العمود المنقاد D الذي يحمل الدوار B خلال (pinion) الترس الصغير ، (Gear) الترس الكبير E. نلاحظ إن المنظومة بالشكل (5-29a) يمكن أن تبدل بمنظومة مكافئة أخرى (b) التي تتكون من عمود يحمل الدوار A في أحد طرفيه والدوار B في الطرف الأخر كما مبين بالشكل (5-29b) ونفرض أن

(a)-The gear teeth are rigid and are always in contact.

أ- أسنان الترس تكون جاسئة (صلدة) وتكون دائماً في حالة تماس.

(b)There is no backlash in the gearing.

ب- لايوجد تفويت في الترس.

ج- يهمل كل من عم القصور الذاتي للعمود والترس.

وبفرض أن d_2, d_1 هي أقطار كل من العمود D،C على الترتيب وأن L_2, L_1 هي طول كل من العمود D،C على الترتيب.

I_B, I_A عزم القصور الذاتي الكتلي لكل من الدوار A ، والدوار B على الترتيب.

ω_B, ω_A هي السرعة الزاوية لكل من الدوار A و الدوار B

∴نسبة التروس تعين من العلاقة(G)

$$G = \text{Gear ratio} = \frac{\text{Speed of pinion E}}{\text{Speed of wheel F}}$$

$$\therefore G = \frac{\omega_A}{\omega_B} = \text{Gear ratio}$$

∵ سرعة كل من F,E تكون متساوية عند كل من الدوار A، والدوار B حيث d و L هي قطر وطول العمود المكافئ.

$I_B^{\prime}$ هي عزم القصور الذاتي الكتلي المكافئ للدوار B.

ونظراً لان طاقة الحركة (K.E) وطاقة الأنفعال (S.E) للمنظومة المكافئة يجب أن تساوي طاقة الحركة وطاقة الأنفعال للمنظومة الأصلية.

$$\therefore K.E \text{ of section } L_1 + K.E. \text{ of section } L_3 = K.E \text{ of section } L_1 + K.E. \text{ of section } L_2$$

$$\therefore \frac{1}{2} I_B^{\prime} . \omega_{B^{\prime}}^2 = \frac{1}{2} I_B . \omega_B^2$$

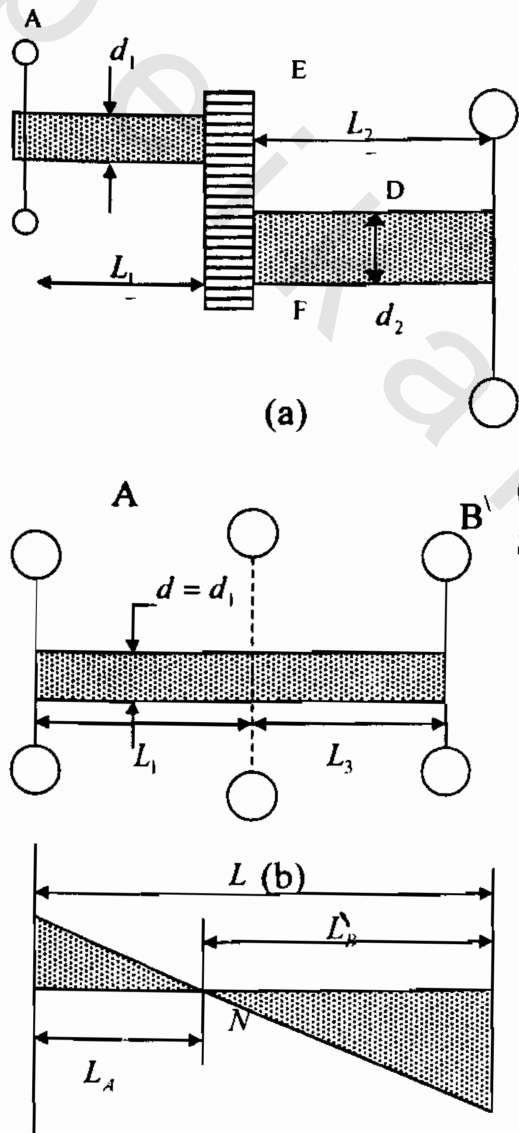
$$\therefore I_B^{\prime} = I_B \left(\frac{\omega_B}{\omega_A} \right)^2 = \frac{I_B}{G^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث $G = \dfrac{\omega_A}{\omega_B}$

$$\because (S.E) \text{ of } L_3 = (S.E) \text{ of } L_1 \text{ and } L_3$$

$$\therefore (S.E) \text{ of } L_3 = S.E \text{ of } L_2$$

$$\therefore \frac{1}{2} T_3 \theta_3 = \frac{1}{2} T_2 \theta_2$$



الشكل (5-29)

$$\therefore \frac{T_3}{T_2}=\frac{\theta_2}{\theta_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث T_2,T_3 هو العزم لمقطع العمود الذي طوله L_2,L_3 على الترتيب θ_2,θ_3 هي زاوية اللي لمقطع العمود الذي طوله L_2,L_3 على الترتيب وبفرض أن القدرة المنقولة خلال المقطعين الذي طولهما L_3,L_2 يكونوا متساويين.

$$\therefore\ T_3\omega_A=T_2\omega_B\ ,\quad \frac{T_3}{T_2}=\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{1}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

∴من المعادلتين (3) و (2) ينتج أن

$$\frac{T_3}{T_2}=\frac{\omega_B}{\omega_A}=\frac{1}{G}=\frac{\theta_2}{\theta_3}$$

$$\therefore \frac{T_3}{T_2}=\frac{\theta_2}{\theta_3}=\frac{1}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

∵معامل اللي q (جساءة اللي) يعبر عنها بالعلاقة:

$$q=\frac{T}{I}=\frac{C\theta}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وكذلك بالنسبة للمقطع الذي طوله L_2 نجد أن:

$$\frac{T_2}{I_2}=\frac{C\theta_2}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

∴من المعادلتين (5) ، (6) ينتج أن:

$$\frac{T_3}{T_2}\times\frac{I_2}{I_3}=\frac{\theta_3}{L_3}\times\frac{L_2}{\theta_2}$$

$$\therefore \frac{T_3}{T_2}=\frac{I_3\theta_3L_2}{I_2\theta_2L_3}$$

ومن المعادلة (6) نجد أن:

$$\frac{1}{G}=\frac{I_3}{I_2}\times G\times\frac{L_2}{L_3}$$

$$\therefore L_3=\frac{I_3}{I_2}\times G^2\times L_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

وبفرض أن القطر للعمود المكافئ للعمود C هو $d=d_1$

$$\therefore I_3=\frac{\pi}{64}d_1^4, I_2=\frac{\pi}{64}d_2^4, \therefore \frac{I_3}{I_2}=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

∴المعادلة (7) يمكن كتابتها على صورة العلاقة الاتية:

$$L_3 = G^2 . L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \quad \text{......................................(8)}$$

ولهذا فإن المنظومة ذات العمود المفرد تكافئ المنظومة الأصلية الترسية وأذا كان عزم القصور الذاتي الكتلي للدوار $B^{\backslash}$ يعطى بالعلاقة (ا) وبالأضافة إلى الطول للعمود المكافئ L_3 المعطى من العلاقـة (8) نجد أن:

بفرض أن طول العمود المكافئ (L)

$$\therefore L = L_1 + L_3$$

$$= L_1 + G^2 L_2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \quad \text{........................(9)}$$

∴التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي للمنظومة الترسية يمكن إيجاده كما يلي:

فأذا أعتبرنا أن العقدة (N) في المنظومة المكافئة كما في الشكل (29-c) فإن التردد الطبيعي للأهـتزاز الألتوائي للدوار (A) يعين من العلاقة التالية:

$$f_{n_A} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} \quad \text{..(10)}$$

و التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي للدوار $B^{\backslash}$ يعين من العلاقة:

$$f_{n_{B^{\backslash}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_{B^{\backslash}} I_{B^{\backslash}}}} \quad \text{......................................(11)}$$

∵التردد f_{n_A} =التردد $f_{n_{B^{\backslash}}}$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_A I_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{CJ}{L_{B^{\backslash}} I_{B^{\backslash}}}}$$

$$\therefore L_A I_A = L_{B^{\backslash}} I_{B^{\backslash}} \quad \text{..(12)}$$

$$L = L_A + L_{B^{\backslash}} \quad \text{..(13)}$$

<u>ملحوظة</u> عندما يؤخذ في الأعتبار عزم القصور الذاتي للترس – فإن الدوار المضاف المبين في الشكل (29-b) يجب أن يعطى introduced المنظومة المكافئة عند المسافة L_1 من الدوار A.

وعزم القصور الذاتي لهذا الدوار يعين من العلاقة $I_E + \frac{I_F}{G^2}$

حيث I_F , I_E هما عزم القصور الذاتي للترس الصغير pinion والترس الكبير wheel على الترتيب وبذلك تصبح المنظومة ذات ثلاث أعضاء دواره.

14- An electric motor is to drive a centrifuge, running at four times the motor speed through a spur gear and pinion. The steel shaft from the motor to the gear wheel is 6cm diameter and L cm long. The shaft from the pinion to the centrifuge is 5 cm diameter and 45 cm long. The weights and radii of gyration of motor and centrifuge are respectively 40 kg, 12 cm and 34kg and 14cm. Neglecting the inertia effect of the gears. Find the value of L if the gears are to be at the node for torsional oscillation of the system and thence determine the frequency of torsional oscillation. Assume modulus of rigidity for material of shaft as 0.84 million Kg per Cm^2.

14- محرك كهربي يدير جهاز طرد مركزي بسرعة تعادل أربعة مرات سرعة المحرك خلال كرسي إسطواني عدل وترس صغير. عمود من الصلب قطره 6 cm يصل مابين المحرك والترس الأسطواني العدل وطوله L cm. وقضيب يصل مابين الترس الصغير وجهاز الطرد المركزي قطره 5 cm وطوله 45 cm، وزن المحرك 40 kg ونصف قطر الحركة التدويمية له 12 cm ووزن جهاز الطر المركزي 34 kg ونصف قطر الحركة التدويمية له 14 cm، أهمل تأثير عزم القصور الذاتي للتروس, أوجد قيمة (L) عندما تكون التروس عند عقدة التذبذب الألتوائي للمنظومة وكذلك أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز (التذبذب) الألتوائي. إفرض أن معامل جساءة مادة العمود $0.84\times10^6\,Kg/cm^2$.

$$\because G = \text{Gear ratio} = \frac{\text{Speed of motor}}{\text{Speed of centrifuge}} = \frac{1}{4}$$

d_1= قطر العمود خلال الطول بين المحرك إلى الترس حيث $d_1 = 6cm$ وطوله (L) بالسنتميتر.

Length of the shaft from pinion to the centrifuge= 45cm and its diameter d_2 =5cm.

وزن المحرك (A) $(W_A = 40Kg)$ ونصف قطر الحركة التدويمية له R_{g_A} =12 cm

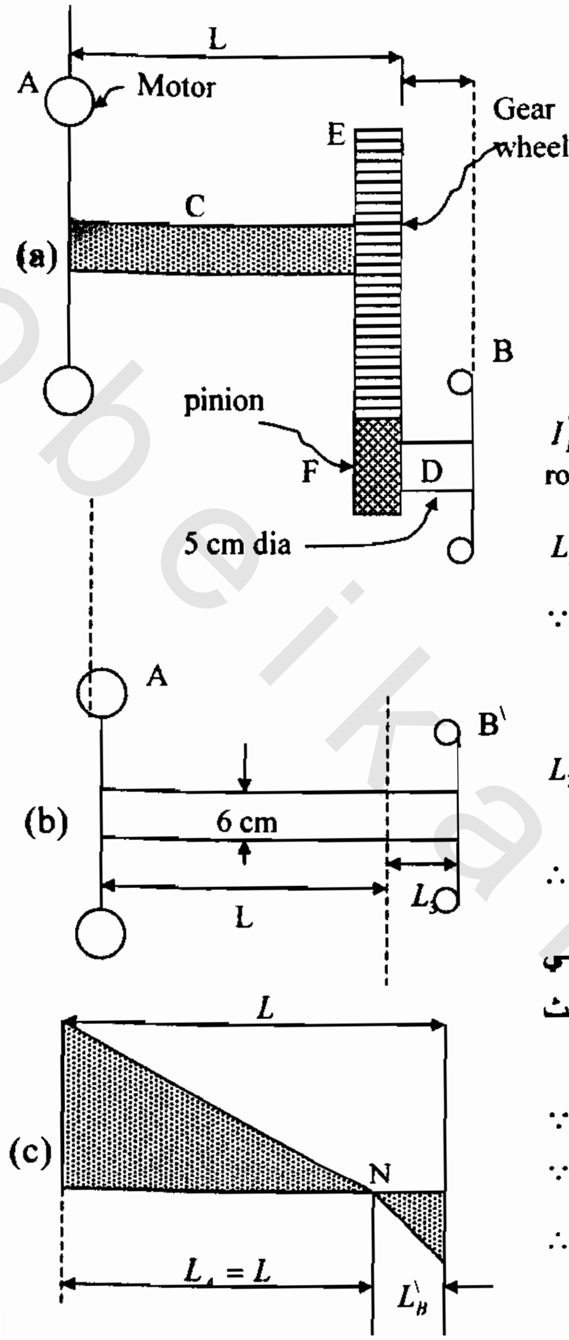
وزن جهاز الطرد المركزي $(W_B = 34Kg)$ ونصف قطر الحركة التدويمية له R_{g_B} =14 cm.

$$\therefore I_A = \frac{W_A}{g}\times R_{g_A}^2 = \frac{40}{981}(12)^2 = 5.86Kg.cm.\sec^2$$

$$\because I_B = \frac{W_B}{g}R_{g_B}^2 = \frac{34}{981}(14)^2$$

$$= 6.79Kg.cm.\sec^2$$

Modulus of rigidity= $C = 0.84\times10^6\,Kg/Cm^2$



الشكل (5-30)

المنظومة الأصلية توضح بالشـــكل (a)

والمنظومة المكافئة توضح بالشكل (b)

∴لتعيين قيمة (L) نتبع الأتي:-

نوجد عزم القصور الذاتي للـــدوار B' المكافئ وكذلك الطـــول المكـــافئ للعمود مع إعتبار أن القطر المكـــافئ

$$d_1 = 6cm$$

I'_B = Mass moment of inertia of the equivalent rotor B'.

L_3 =Additional length of the equivalent shaft.

$$\because I'_B = \frac{I_B}{G^2} = \frac{6}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 6 \times 16 = 96 Kg.cm.\sec^2$$

$$L_3 = G^2 L_2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \text{ with usual notations}$$

$$\therefore L_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 (45) \left(\frac{6}{5}\right)^4 = 5.83Cm$$

لذلك نفرض أن العقدة N لتذبذب أو الأهتزاز الألتوائـي للمنظومة. تقع على بعد L_A مـــن الـــدوار A حيـــث $L_A = L$.

$$\because L'_B = L_3 = 58.3Cm$$

$$\because L_A . I_A = L_B . I'_B$$

$$\therefore L = L_A = \frac{5.83(96)}{5.87}$$

$$\therefore L = L_A = 95.35Cm$$

∴يمكن إيجاد التردد الطبيعي f_n كما يلي:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{CJ}{L_A . I_A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.84 \times 10^6 \left[\frac{\pi}{32}(6)^4\right]}{95.35 \times 5.87}} = 69.6cps$$

15-A 12-Cylinder aero engine gear drive to the airscrew is equivalent torsionally to the system shown in Fig(5-31a). The shafts L_1 and L_2 are respectively 39.5in and 25.5in. long and 2.75in. and 3.5in. diameter. The airscrew runs at 0.6 of the speed of the engine crankshaft and the moments of inertia of the rotors are: for the combined engine masses A, 1500lb.in^2 for the pinion B,54 lb.in, for the gear wheel C,850 lb.in^2 and for the airscrew D,50000lb.in^2. If the modulus of rigidity of the shaft material is 12×10^6 lb per sq.in., Find the natural frequencies of torsional vibration of the system (a) when the inertia of the gearing is neglected, and (b) when the inertia of the the gearing is taken into account.

15- محرك طائرة يتكون من 12 أسطوانة وصندوق تروس يدير المحور الخارجي للرفاص يكافئ منظومة ألتوائية كما بالشكل (5-31a). الأعمدة L_2, L_1 طولهما 39.5 بوصة ، 25.5 بوصة على الترتيب وقطرهما 2.75 بوصة، 3.5 بوصة على الترتيب. عمود أو محور إدارة الرفاص يدار عند 0.6 من عمود الكرنك للمحرك وعزم القصور الذاتي للدورات تكون لكتلة المحرك المركبة A 1500 باوند.بوصة.مربعة. وللترس الصغير B 54 باوند بوصة مربعة، وللترس الكبير C 850 باوند.بوصة.مربعة وبالنسبة للرفاص D 50000 باوند.بوصة مربعة. أذا كان معامل اللجساءة لمادة العمود 12×10^6 باوند لكل بوصة مربعة، أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي للمنظومة:-

أ-عندما يهمل عزم القصور الذاتي للتروس. ب-عندما يؤخذ عزم القصور الذاتي للتروس.

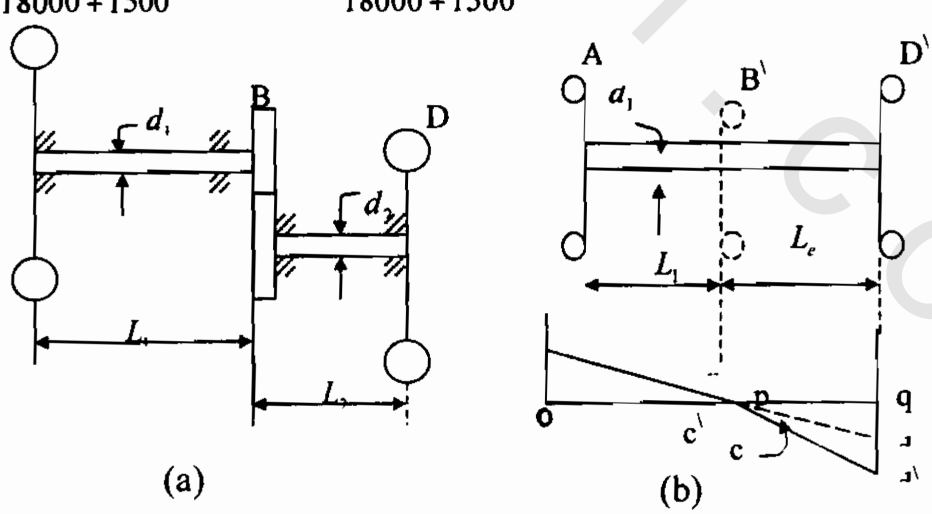
الحل:-1-العمود المنظومة المكافئة ذات الدورانيين قطره 2.75in.

$$\therefore L_e = G^2.L_2\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 = \left(\frac{1}{0.6}\right)^2.(25.5)\left(\frac{2.75}{3.5}\right)^4 = 27in$$

$$I_d^{\backslash} = \frac{I_d}{G^2} = 50000(0.6)^2 = 18000lb.in^2$$

$\because$ the distance from the rotor A= $L_a = \dfrac{I_d^{\backslash}}{I_d^{\backslash}+I_a}(L_1+L_e)$

$$\therefore L_a = \frac{18000}{18000+1500}(39.5+27) = \frac{18000}{18000+1500}(66.5) = 61.4in$$



الشكل (5-31)

The torsional stiffness of this length of shaft= $q_a = \dfrac{CJ}{L_a}$

$$\therefore q_a = \frac{(12)(10^6)}{61.4}\left[\frac{\pi}{32}\left(\frac{11}{4}\right)^4\right] = 1.1\times 10^6\, lb.in/radn$$

$\therefore$ the frequency of the torsional vibration= f_n

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q_a}{I_a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(1.1)(10)^6(32.2)(12)}{1500}} = 84.8 cycle/\sec$$

$$= 5090 cycle/\min$$

(ب) بالنسبة للعمود الذي قطره 2..75in والترس بها فأن يكون مكافئ للدوار $B^{\backslash}$ كما مبين عند النقطة P في الشكل (b 31-5).

$$\therefore I_b^{\backslash} = I_b + I_c/C^2 = 54 + 850(0.6)^2 = 360 lb.in^2$$

لذلك فإن المنظومة المكافئة والمتكون من ثلاث دورات A،$D^{\backslash}$ عند نهائتي العمود الذي قطـــره 2.75in وطوله 66.5in مع الدوار الثالث $B^{\backslash}$ عند النقطة 39.5 بوصة من A، 27 بوصة من $D^{\backslash}$.

أو من العلاقات أ,المعادلات التي سبق أستنتاجها في المنظومة الترسية نجد أن المسافة بين العقدة وبيـــن الدوار A هي 63.15in،in3.661.

$$\therefore \text{ The fundamental frequency} = 84.8\sqrt{\frac{61.4}{63.15}} = 83.5 cycle/\sec$$

$$= 5010 cylce/\min$$

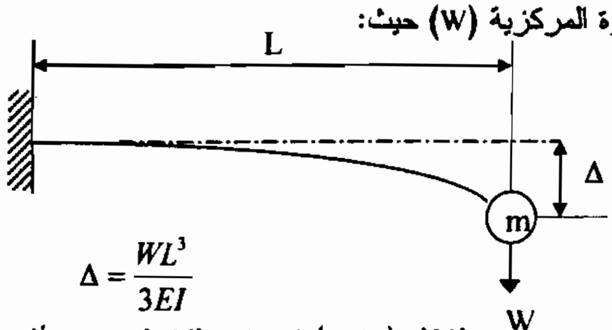
وأن التردد للعقدتين يتعين من العلاقة:

$$f_n = 84.8\sqrt{\frac{61.4}{3.661}} = 347 cycle/\sec = 20800 cycle/\min$$

وبذلك نجد أنه عند إهمال عزم القصور الذاتي للتروس فأننا نحصل على نتيجة تقريبية للتردد الأســـاس كما في هذا المثال الخاص بذلك.

ملاحظات هامة:

• يمكن على سبيل المثال أخذ الكابول أو العتب (cantilever) المبين بالشكل (32-5) وذلك بأعتباره عديم الوزن ويحمل كتلة مركزة عند طرفيه ولهذا يحدث في الكابول أنحراف أو تراخيم أســـتاتيكي Δ من جراء تأثير القوة المركزية (W) حيث:



$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

الشكل (32-5) إنحراف الكابول تحت تأثير القوة W

∴الأنحراف أو الإستطالة أو الترخيم Δ للكابول تحت تأثير الوزن المركز W يعين من العلاقة:

$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI}$$

Where E= Modulus of elasticity معامل المرونة.

I= Moment of inertia عزم القصور الذاتي.

L= Length of cantilever طول الكابول.

W= Weight الوزن.

وبذلك يعتبر الكابول كنابض له معامل k ويعين من العلاقة التالية:

$$k = \frac{W}{\Delta} = \frac{W}{\frac{WL^3}{3EI}} = \frac{3EI}{L^3}$$

وتكون معامل حركة الكابول هي نفس معادلة الحركة للهزاز الميكانيكي البسيط الذي يتكون من الكتلة m والنابض الذي معامله k وذلك كما بالمعادلة التالية:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

حيث x هي إزاحة طرف الكابول ويكون حل هذه المعادلة هو نفس حل معادلة الحركة للهزاز الميكانيكي البسيط ويكون التردد الطبيعي لها هو $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} cps$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} \text{ ....(HZ)}$$

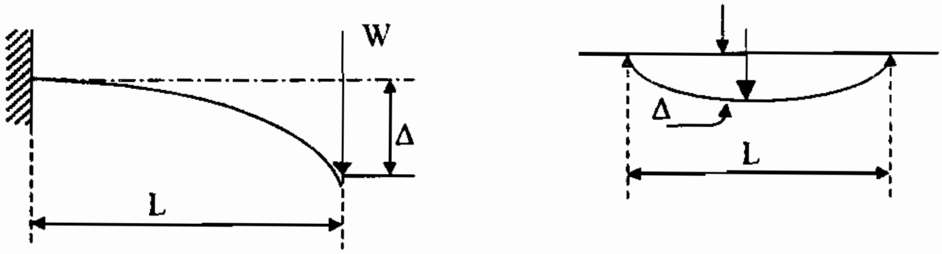
$$t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^3}{3EI}} \text{ sec}$$

ويتوقف العزم I على قطاع الكابولي كما يلي:-

أ- في حالة الكابول ذات المقطع المستدير على محور التعادل يكون عزم القصور الذاتي كما بالعلاقة: $I = \frac{\pi D^4}{64}$ حيث D هي قطر المقطع المستدير.

ب- وفي حالة القطاع المستطيل الذي يكون إرتفاعه العمودي على محور التعادل (a) وعرضه b، فأن عزم القصور الذاتي يكون كما بالعلاقة: $I = \frac{ab^3}{12}$ ومعامل المرونة E يتوقف على المادة المصنوع منها الكابول فمثلا بالنسبة للحديد الصلب نجد أن $E = 2\times10^6 Kg/cm^2$.

ج- علاقة الأنحراف Δ تختلف تبعاً لأختلاف وضع العمود وطريقة التحميل عليه. ويبين الشكل (5-33a,b) بعض الحالات الهامة والأنحراف ومعامل النابض الخاص بكل منهما، وفي أي من هذه الحالات يكون تحليل الأهتزازات مماثلاً لحالة النابض والكتلة مع إستبدال معامل النابض بدلالة معادلة الأنحراف كما تم عمله في حالة الكابول.



الشكل (33-5) الأنحراف والمعامل (ثابت النابض) للكابول والكمره البسيطة

$$\Delta = \frac{WL^3}{3EI} \qquad\qquad \Delta = \frac{WL^3}{48EI}$$

$$k = \frac{3EI}{L^3} \qquad\qquad k = \frac{48EI}{L^3}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} - \sqrt{\frac{3EIg}{L^3W}}(cps) \qquad\qquad \omega_n = \sqrt{\frac{48EIg}{L^3W}}(cps)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIg}{L^3W}}(HZ) \qquad\qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EIg}{L^3W}}(HZ)$$

16- A vibration device consist of a light steel beam, at its end a mass of 0.35Kg the beam receives vibration from electromagnate, the natural frequency for the system should be 60c.p.s, Determine the stiffness coefficient and the length of the beam if $EI = 10^6\ Kg.cm^3/\sec^2$.

17- جهاز هزاز عبارة عن كابول من الصلب الخفيف وعلى نهايته كتلة مقدارها 0.25Kg يستمد الكابول إهتزازه من مغناطيس كهربي ويجب أن يكون التردد الطبيعي للمجموعة 60cps، أوجد معامل النابض وطول الكابول بالستميتر أذا كان $EI = 10^6\ Kg.cm^3/\sec^2$.

الحل:

$$\because k = \frac{3EI}{L^3} \qquad \therefore L = \sqrt[3]{\frac{3EI}{k}} = \sqrt[3]{\frac{3(10^6)}{k}}, \because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore k = \omega_n^2.m = [2\pi(60)]^2(0.35) = 49692.4Kg/\sec^2$$

$$\therefore L = \sqrt[3]{\frac{3(10^6)}{49692.4}} = 3.92Cm$$

17- A disc with moment of inertia (I_G). Suspended at one end by a wire, and allowed freely vibrates to produce 48rpm, If the disc requires a moment of 2Kg.cm to rotor 15°. Find the moment of inertia of the disc.

17- علق قرص عزم القصور الذاتي لة I_G في نهاية سلك رفيع يهتز إهتزاز حراً بمعدل 48 دوره في الدقيقة، فإذا كان القرص يلزمه عزم مقداره 2 كجم.سم لادارته 15°. أوجد عزم القصور الذاتي I_G.

الحل:

$$k_T = \frac{I}{\theta} = \frac{2(980)}{15\left(\frac{\pi}{180}\right)} = 7490Kg.cm^2/rad.\sec$$

$$\because \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k_T}{I_G}} \qquad \therefore I_G = \frac{k_T}{4\pi^2\omega^2} = \frac{7490}{4(\pi)^2\left(\frac{48}{60}\right)^2}$$

$$\therefore I_G = 296.75 Kg.cm^2$$

18- An electrical generator coupled to an engine by a shaft of 1cm diameter and 35cm long. If the moment of inertia of the rotor is 40kg.cm find the natural amplitude for the torsional vibrartion.

18- مولد كهربي ملحق بمحرك بواسطة عمود قطره اسم وطوله 25سم. إذا كان عزم القصور الذاتي لدوار المولد 40كجم.سم، فأوجد التردد الطبيعي للأهتزاز الألتوائي.

الحـــــل:

$$I = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.14(1)^4}{32} = 0.0983 cm^4 \qquad , \qquad \therefore E = 0.8\times10^6 Kg/cm$$

$$\therefore k_T = \frac{I.E}{L} = \frac{0.0983(0.8\times10^6)}{25} = 3145.6 Kg.cm/radn$$

أي أن k_T =3145.6 كجم.سم/زاوية نصف قطريه

$$\therefore k_T = 3.08\times10^6 Kg.cm^2/radn.\sec^2$$

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_T}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3.08\times10^6}{40}} = 277.48 cycle/\sec$$

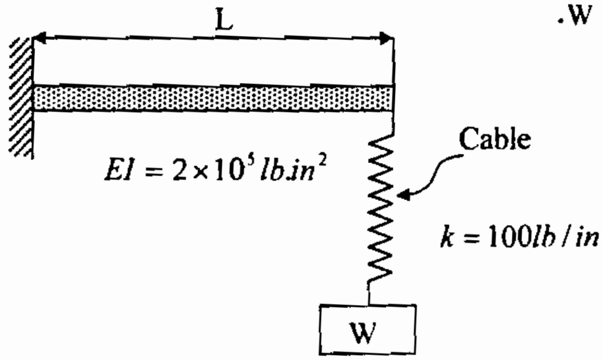
19- A weight W is attached to the end of a small cantilever beam of length L by a cable of stiffness K as shown in Fig(5-34). If W=100 lb, $EI = 2\times10^5 lb.in^2$ (for beam) k=100 lb/m, determine the length L of the beam that will make the system's undamped natural frequency $f_n = 2Hz$,consider the mass of both cable and beam as negligible compared with the mass of the weight W.

19- وزن W معلق في نهاية كابولي صغير طوله L بواسطة سلك معامله k كما بالشـــكل (5-34). أذا كان:

$k_{cable} = 100 lb/m$, $W = 100 lb$, $EI = 2\times10^5 lb.in^2$ (للكابول)

أوجد طول الكابول حتى يجعل تردده الطبيعي بدون خمد Hz 2 مع إهمـــال كتلـــة كـل مــن الســلك والكابولي أذا ماقورن بكتلة الوزن W.

الحـــــل



الشكل (5-34)

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$$ where k_{eq}=المعامل المكافئ للنابض والكابول

$$\therefore f_n^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k_{eq}}{m}\right) \quad , \quad \therefore k_{eq} = (2\pi f_n)^2 .m = (4\pi)^2\left(\frac{100}{386}\right) = 40.87\,\text{ln}/in$$

وبأعتبار أن ثابت النابض للكابول k_b

$$\therefore \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{cable}} + \frac{1}{k_b} = \frac{1}{40.87}, \qquad \therefore k_b = 69.12 lb/m$$

$$\therefore k_b = 69.12 lb/m \qquad k_b = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(2\times10^5)}{L^3} = 69.12 lb/m$$

$$\therefore L = 20.6 in.$$

20- A body has a weight of 40lb is vertically suspended on a steel wire of length L=60 in and of cross-sectional area A=0.002in^2. Determine the frequency of free vibrations of the weight if the modulus for steel is $E = 30\times10^6 lb/in^2$ Determine the amplitude of vibration if the inertia displacement $X_e = 0.02$ in and initial velocity $\dot{X}_o = 1$ in per sec.

20- جسم وزنه 40 باوند علق رأسياً في سلك من الصلب طوله 60 بوصة ومساحة مقطعه 0.002 بوصة^2 – أوجد التردد الأهتزاز الحر للوزن W أذا كان معامل المرونة للصلب 30×10^6 باوند لكل بوصة^2، أوجد سعة الأهتزاز أذا كانت الأزاحة الأبتدائية ($X_o = 0.02in$) والسرعة الأبتدائية ($\dot{X}_o = 1 in/\sec$).

الحل:

$$\because \Delta_s = \frac{W.L}{E.A} \qquad \therefore \Delta_s = \frac{40\times60}{30\times10^6\times0.002} = 0.04 in$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(32.2)(12)}{0.04}} = 15.6 cps$$

$$\therefore \omega_n = 2\pi f_n = 98.3 rad/\sec$$

$$X_o = 0.02, \quad \dot{X}_o = 1 \; in/\sec$$

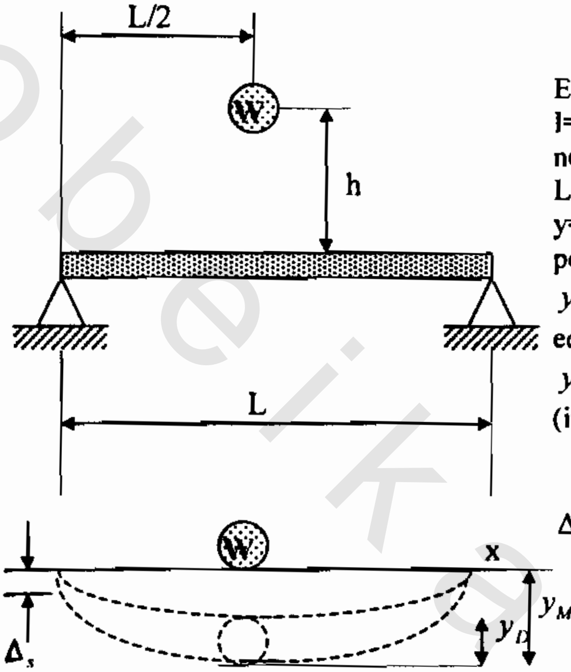
$$\therefore \text{the amplitude of vibration} = \sqrt{X_o^2 + \left(\frac{\dot{X}_o}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{(0.02)^2 + \left(\frac{1}{98.3}\right)^2} = 0.0224 in.$$

21- The simply supported beam in Fig(3-35) has a static deflection of $\Delta_s = 0.1in.$ when it supports a weight W at its center. The weight W is then dropped from a height of $h = 10\Delta_s$ onto the middle of the beam. The weight remains in contact with the beam after striking it, so plastic impact can be assumed. Neglecting the energy lost during the impact, determine:
(a) The ratio of the maximum beam deflection y_M to the static deflection Δ_s with damping neglected, and (b) the same ratio if the damping factor $\xi = 0.1$

21- كابولي بسيط مسند كما مبين بالشكل (5-35) حدث له إنحراف أو أنحناء أستاتيكي $\Delta_s = 0.1in.$ عندما وضع وزن W عند منتصفه. الوزن W سقط من إرتفاع $h = 1in$ عند منتصف الكابول، الوزن

بقى ملامس للكابول بعد إصطدامه مع فرض أن التصادم لدن. إهمل الطاقة المفقودة أثنــــاء التصـــادم. أوجد (أ) نسبـــة أقصى إنحناء للكابول إلى الأنحناء الأستاتيكي Δ_s مع إهمال الخمـــد، (ب) نفـس النسبة أذا كان عامل الخمد $\xi = 0.1$.

الحـــــل



$$k = \frac{W}{\Delta_s} = \frac{48EI}{L^3} lb/in$$

E=modulus of inertia of elasticity(psi).
I=moment of inertia of beam cross section about neutral axis(in^4).
L=Length of beam(in.).
y=displacement of beam from static equilibrium position(in).
y_D=maximum displacement of beam from static equilibrium position(in).static equil. position.
y_M =maximum deflection of beam from X axis (in.)

Δ_s =static deflection of beam due to W(in.)

$$\because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{386}{0.1}} = 62.13 \ rad/\sec$$

$$\Delta_s = \frac{WL^3}{48EI} in$$

$$\therefore \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 62.13\sqrt{1-(0.1)^2} = 61.82 rad/\sec$$

الشكل (5-35)

إزاحة الكابولي من وضع الأتزان الأستاتيكي وبإعتبار أن الأزاحة أسفل ذلك الوضع وأن السرعة تقل ويكون الوضع لأسفل هو الوضع الموجب ومن الظروف الأبتدائية نجد أن الأزاحة هي $y_o = -\Delta_s = -0.1in$.

وعند أصطدام الوزن W مع الكابولي فإن طاقة الحركة تساوي طاقة الوضع

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \therefore v^2 = 2gh$$

$$\therefore v = \sqrt{2gh} = \dot{y}_o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

∴أقصى أنحناء في منتصف الكابولي يعين من العلاقة:

$$y_{\max} = \Delta_s + y_D$$

حيث $y_{\max}$ هي أقصى إزاحة.

من الشكل (5-35) يمكن تعيين أقصى إزاحة y_D عند منتصف الكابولي وهي أقصى أزاحة مقاسة من موضع الأتزان الأستاتيكي.

$$\therefore y_M = \Delta_s + y_D$$

y_D هي أقصى أنحناء للكابولي من المحور (X)

ومن معادلة الأزاحة نجد أن:

$$x = y = e^{-\xi\omega_n t}\left[A\cos\omega_n\left(\sqrt{1-\xi^2}\right) + B\sin\omega_n\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]\text{..........(2)}$$

∴ يمكن إيجاد أقصى أزاحة y_D من منتصف الكابولي وعند موضع الأتزان الأستاتيكي وبـــالتعويض من الظروف الأبتدائية عن $\xi = 0$ و $t = 0$ نحصل على الثوابت B و A.

i.e. at t=0 , x=0 , $\because \xi = 0$

$$\therefore y_o = x = e^{(0)}\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] = -\Delta_s \qquad \therefore A = -\Delta_s\text{..........(3)}$$

وبتفاضل الأزاحة y_o بالنسبة للزمن t نحصل على الأتي:

$$\dot{y}_o = A\left|e^{-\xi\omega_n t}\left(-\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t.\omega_n\sqrt{1-\xi^2} - \xi\omega_n t e^{-\xi\omega_n t}.\cos\omega_n\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right| +$$
$$B\left[e^{-\xi\omega_n t}.\cos\omega_n\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)t.\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) - \xi\omega_n t.e^{-\xi\omega_n t}.\sin\omega_n\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)t\right]$$

وبالتعويض عن

At $t = 0$, $\dot{x} = 0$, $\because \xi = 0$

$$\therefore \dot{y}_o = B.\omega_n$$

$$\therefore B = \frac{\dot{y}_o}{\omega_n} = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n}\text{..(4)}$$

وبالتعويض عن الثوابت A و B في معادلة الأزاحة (2) نحصل على:

$$y_o = -\Delta_s.\cos\omega_n t + \frac{\sqrt{2gh}}{\omega_n}\sin\omega_n t\text{ ....(5)}$$

ومن المتطابقات المثلثية نجد أن:

$$\because y = -A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$\therefore y = \left(\sqrt{A^2 + B^2}\right)\sin(\omega_n t + \phi) = \left(\sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}\right)\sin(\omega_n t + \phi)\text{.................(6)}$$

وعندما تكون $\left(\omega_n t + \phi = \frac{\pi}{2}\right)$ نجد أن الأزاحة y للكابولي من وضع الأتزان الأستاتيكي أكبر مايمكن:

$$\therefore y_D = \sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

∴ أقصى أنحناء يكون في منتصف الكابولي ويعين من العلاقة التالية:

$$y_M = \Delta_s + y_D = \Delta_s + \sqrt{\Delta_s^2 + \frac{2gh}{\omega_n^2}}$$

بالتعويض عن قيم Δ_s ، h ، ω_n نحصل على

$$y_M = 0.1 + \sqrt{(0.1)^2 + \left(\frac{27.78}{62.13}\right)^2} = 0.56in$$

∴تكون النسبة القصوى لأنحراف الكابولي y_M إلى الأنحراف الأستاتيكي Δ_s وذلك في حالة إهمال الخمد $(\xi = 0)$ كما يلي:

$$\frac{y_M}{\Delta_s} = \frac{0.56}{0.1} = 5.6$$

تمارين للباب الخامس

1- A steel bar 3.5cm wide and 6 cm deep is freely supported at two points 1 meter apart, and carries a load of 220kgf mid-away between them. Find the frequency of the natural transverse vibration, neglecting the weight of the bar. $E = 28 \times 10^5 Kgf/cm^2$. What will be the frequency of vibration, if an additional load of $210Kgf$ is distributed uniformly along the length of the shaft?

2- A beam supported at the ends has a load of 200Kgf placed 24cm from one end. Find the frequency of the natural transverse vibration. The length of the beam is 95cm. $E = 2 \times 10^6 kgf/cm^2$ and the cross-section of the beam is $3.5 \times 6cm^2$.

3- Referring to fig (5-36). Let the moment of inertia of the rotors A and B, be 62kg.m^2 and 38kg.m^2 and the length L_1, L_2, L_3, L_4 and L_5 be respectively 24.0cm, 20cm, 30cm, 8cm, and 20cm and diameter d_1, d_2, d_3, d_4 and d_5 be 6.0cm, 10cm, 8cm, 14cm, and 10cm respectively. Find the frequency of natural torsional oscillation of the system. $C = 83 \times 10^4 Kgf/cm^2$.

4- The shaft shown in fig (5-37) carries two masses A and B. The mass at A is 420Kg and its radius of gyration is 64.0cm. Corresponding values for B are 540Kg and 76cm. Shaft diameter between C and B is undecided. Assuming it to be 8cm, (a) determine the frequency of torsional oscillations thereafter. (b) determine what it should be if the node is to be in the plane CC$^\backslash$ as shown. $C = 84 \times 10^4 Kgf/cm^2$.

5- A shaft 2.6 meters long has a diameter of 8cm for half the length and 8cm diameter for the remaining length. If one end of the shaft is fixed and the other end carries a rotor of 280Kgf with radius of gyration of 60cm, calculate the frequency of free torsional oscillation. Neglect inertia of the shaft. $C = 82 \times 10^4 Kgf/cm^2$.

6- A motor generator set consists of two armatures A and D as shown in fig (5-38) with a flywheel between them at B. The modulus of rigidity of the material of the shaft is 0.83 million Kg per sq. cm. The system can vibrate with one node at C 12.0cm from A, the wheel B being at antinode. Using the data of rotors given below, take data of rotors:-

Weight of rotor A is 480Kg and radius of gyration is 28cm.
Weight of rotor B is 570Kg and radius of gyration is 32cm.
Weight of rotors D is 380Kg.

Find:

(i) The position of the other node.
(ii) The natural frequency of the free torsional vibration, for the given positions of the nodes and.
(iii) The radius of gyration of the rotor R.

7- A shaft of 12cm diameter and 120cm long is fixed at one end and other end carries a flywheel of weight 0.8 tone. Taking Young's modulus for the shaft material as $2 \times 10^6 kg/cm^2$. Find the natural frequency of:

(i) Longitudinal vibration.

(ii) Transverse vibration.

8- A flywheel is mounted on a vertical shaft as shown (5-39). The both ends of the shaft are fixed and its diameter is 60mm. The flywheel has a mass of 450Kg. Find the natural frequencies of:

(i) Longitudinal vibration.

(ii) Transverse vibration, take $E = 200GN/m^2$.

9- A small turbine rotor and its shaft are equivalent to a shaft of 100cm long and 10cm diameter It carries three discs weighting 250Kg, 300Kg and 375Kg at 25cm,43cm and 70cm from left end bearing. The total deflection under the loads are found to be 0.012cm, 0.017cm and 0.013cm respectively.

Neglecting the weight of the shaft, determine the critical speed by energy method and compare it with the value obtained by Dankerley's method.

10- A marine engine, shaft and propeller are equivalent to a torsional system as shown (5-40). Determine the frequencies of torsional vibrations and the position of the nodes and find the amplitudes of vibrations for both the nodes of vibrations. $C = 84 \times 10^4 Kgf/cm^2$.

11- A motor generator set consists of two armatures A and C connected as shown in Fig (5-41) with flywheel between them at B. modulus of rigidity $C = 84 10^4 Kgf/cm^2$. The system can vibrate torsionally with one node at x=8cm from A, the flywheel being at antinode. Find:

(i) The position of another node.

(ii) The natural frequency of vibration and (c) the radius of gyration of the armature C.

	A	B	C
k	32cm	38	-
m	440Kg	520	360

12- Fig (5-42) shows the engine, the transmission and the propeller for motor ship. The crank shaft may be assumed equivalent torsionally to a solid shaft of uniform diameter 30cm. The combined reciprocating and revolving masses of each crank have a moment of inertia of 460Kg.m^2. The moments of inertia of the flywheel and the propeller are respectively 6000 Kg.m^2 and 3200Kg.m^2. Reduce the arrangment to an equivalent three-mass system on a shaft. To uniform diameter 28cm and determine the frequency of torsional vibration system . $c = 830000 Kgf/cm^2$.

13- A torsional system in fig (5-43). Has the following particulars, moment of inertia of motor=30Kg.m^2, moment of inertia of flywheel and pinion=120Kg.m^2, Gear ratio=$\frac{N_B}{N_C}$=G=4, moment of inertia of the gear wheel=35Kg.m^2. Determine the moment of inertia of the pump so that the frequency of torsional oscillation of the system is equal to 6.5cycles/sec.

14- A reciprocating internal combustion engine is coupled to centrifugal pump through gearing. The shaft from the flywheel of the engine to the gear wheel is 7cm diameter and 85cm long. Shaft from the pinion to the pump is 3cm diameter and 28cm long. Engine speed is $\frac{1}{3}$th the pump speed. Other particular are the following:

Moment of inertia of the flywheel=750 Kg.m^2.

Moment of inertia of the gear wheel=12 Kg.m^2.

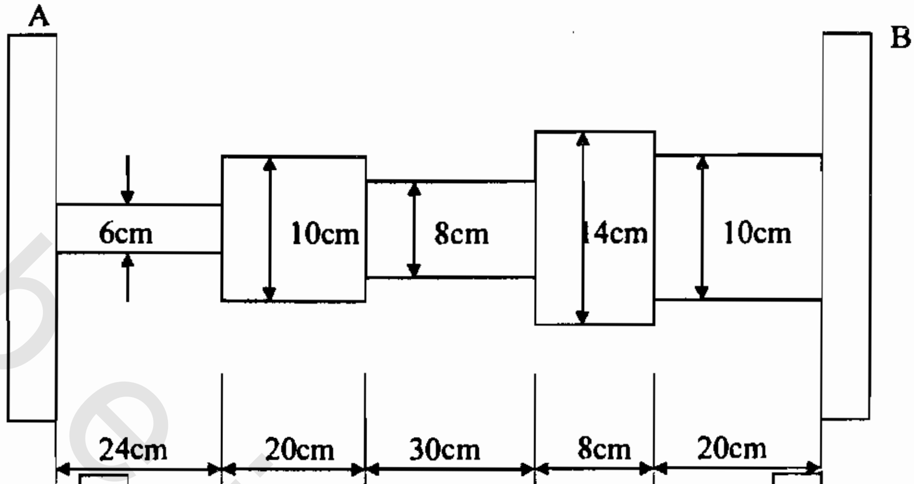
Moment of inertia of the pinion=3 Kg.m^2.

Moment of inertia of the pump impeller =15 Kg.m^2.

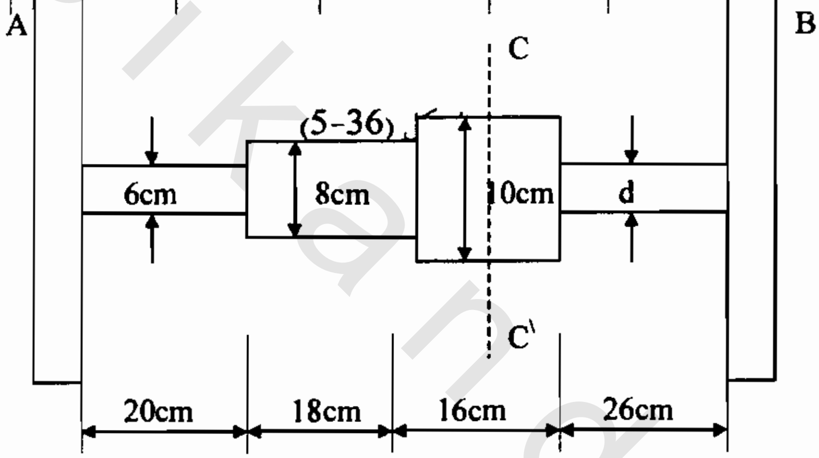
Determine the natural frequency of the torsional oscillation of the system.

15- An electric motor drive a centrifugal pump running at 3 times its speed through gear and pinion , The steel shaft from the motor to the gear wheel is 4cm diameter and (L)cm long. The shaft from pinion to centrifugal pump is 3cm diameter and 36cm long The weight and the radii of gyration of motor and centrifugal pump are respectively 22Kgf, 8cm, 32Kgf and 12cm.

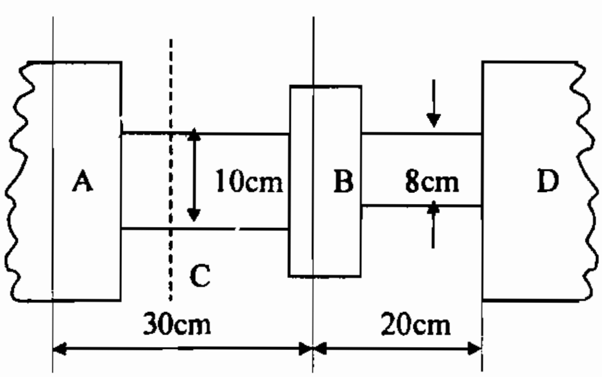
Inertia effect of gear may be neglected. Find the value of (L) if the gears are to be the node point for torsional vibrations $C = 84\times10^{4}\ Kgf/cm^{2}$.



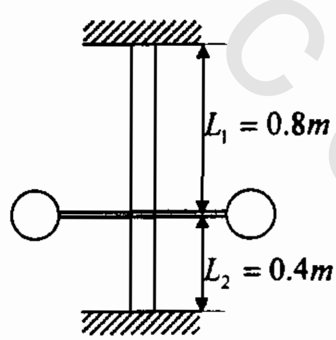
الشكل (5-36)



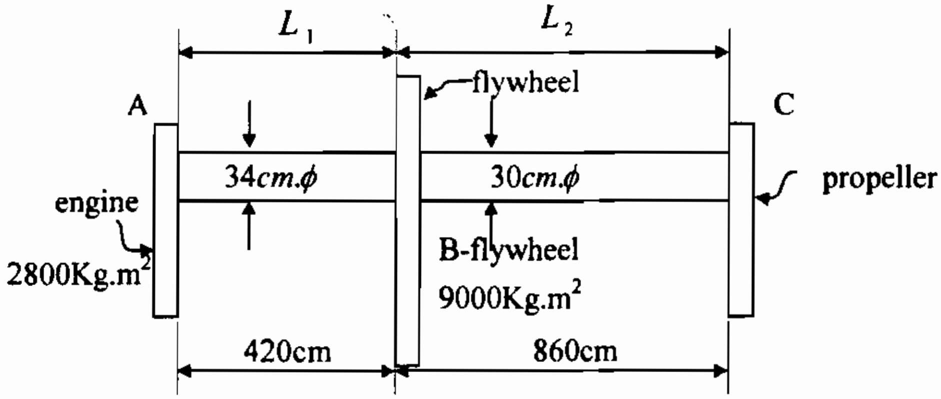
الشكل (5-37)



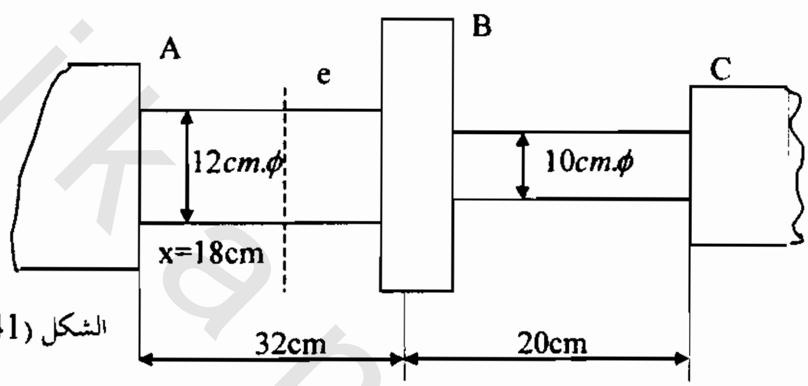
الشكل (5-38)



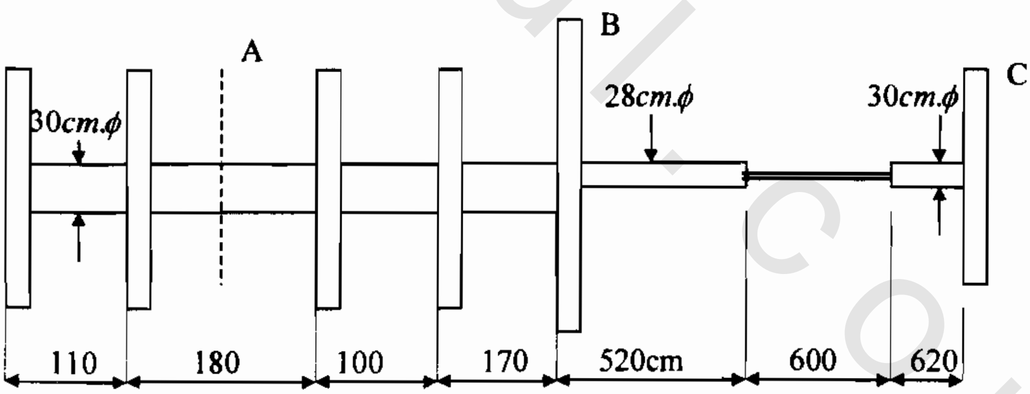
الشكل (5-39)



الشكل (5-40)



الشكل (5-41)



الشكل (5-42)