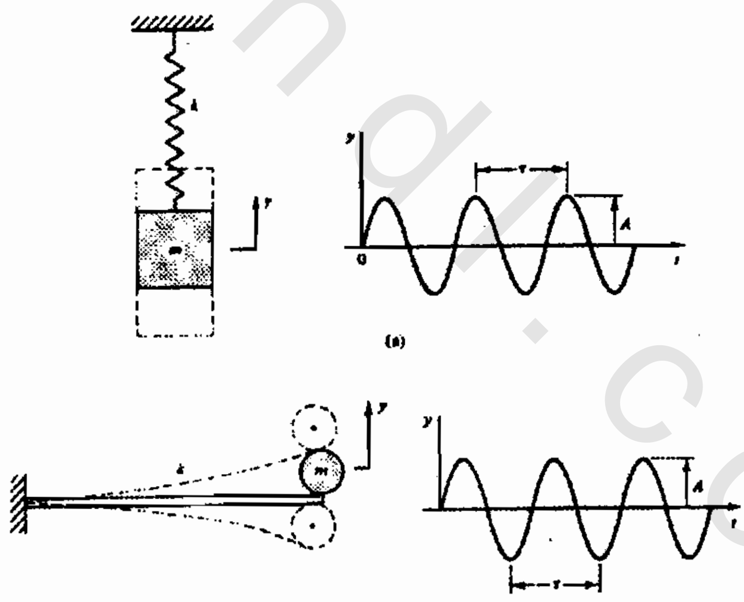
الباب الثانى

الاهتزازت الحرة أحادية الدرجة غير المخمدة

يوضح الشكل (2-1) أبسط مثال للحركة الاهتزازية وهو الهزاز الميكانيكي البسيط الذى يتكـــون من نابض Spring معاملة k وكتلة Mass , وعند تعليق الكتلة m بالنابض تحدث استطالة فى النـــابض Δ وتتولد نتيجة لذلك قوة كامنة فى النابض نتيجة لخروج المجموعة (الكتلة والنابض) عن وضــــع الاتـــزان الاستاتيكى وهذة القوة الكامنة تتحول الى طاقة حركية تجعل المجموعة تتذبذب حول وضع التعـــــادل أو وضع الاتزان ثم تتحول الطاقة الحركية الى طاقة كامنة بالنانض عندما تصـــل الـــى موضـــع الاتـــزان الاستاتيكى الجديد مرة اخرى وتجعل المنظومة (المجموعة) تقف عن التذبـــذب (الحركـــة الاهتزازيـــة) ويسمى هذا الاهتزاز بالاهتزاز الحر ذو درجة الحرية الواحدة لعدم تأثير أى قوى خارجية على المنظومة سوى وزن الكتلة وكذلك لوجود احداثى واحد فقط $x\ (t)$ يحدد موضع الكتلة فى الفراغ مع ملاحظـــة ان هذة الحركة الاهتزازية هى حركة توافقية بسيطة (S.H.M.) وكذلك الحال اذا كانت الحركة ناتجـــة مـــن كابولى خفيف A Light Cantilever Beam كما بالشكل (2-1b) أى يكون شكل الحركة توافقية ايضا Harmonic Motion.



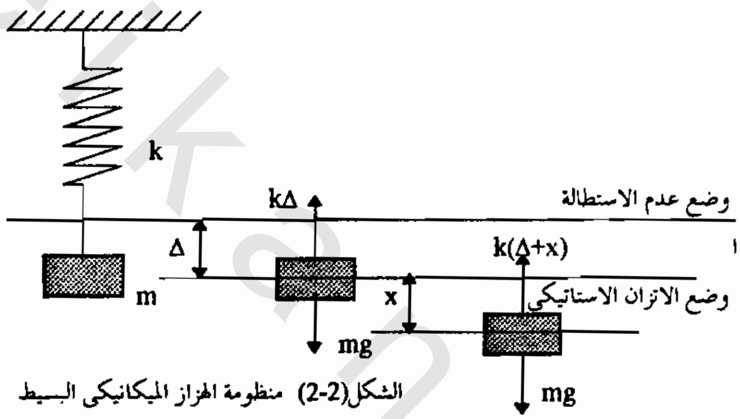
الشكل (2-1a,b) يوضح مثال لحركة توافقية بسيطة لكتلة ونابض وكتلة وكابولى.

أ–استنتاج التذبذب التوافقى البسيط بطريقة نيوتن. *Newton Mothed*

الشكل *(2-2)* يوضح الهزاز الميكانيكى البسيط وعند تعليق الكتلة بالنابض تحدث استطالة **مقدارها** Δ فى النابض الذى معاملة k وبذلك تنتقل المجموعة من وضع الاتزان الاستاتيكى حيث ان الكتلة m **تتحرك** مسافة x وهى تمثل ازاحة الكتلة مع اهمال كتلة النابض، عند وضع الاتزان الاستاتيكى نجد ان:

$k.\Delta = m.g$ ....(2-1)

ونظرا لخروج المجموعة من وضع الاتزان الاستاتيكى وطبقا لقانون نيوتن الثانى نجد ان $\sum F = m.\ddot{x}$ حيث ان القوة الكامنة فى النابض يعبر عنها بالعلاقة $F_s = -k.x$ وبالتعويض حسب قانون نيوتن نجد ان $m\ddot{x} = -F_s = -k.x$ والاشارة السالبة تدل على ان F_s هى مقاومة وبذلك نستنتج معادلة الحركة والممثلة بالمعادلة $m\ddot{x}+k.x=0$



الشكل(2-2) منظومة الهزاز الميكانيكى البسيط

وبقسمة معادلة الحركة على الكتلة m ينتج أن

$$\because \ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \therefore \ddot{x}+\omega^2.x=0 \text{..........................}(2-2)$$

$$\therefore \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad c.p.s \text{..........................}(2-3)$$

$$\because \frac{k}{m}=\frac{g}{\Delta} \qquad \therefore f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \qquad {}^{rad}/_{sec} \text{..........................}(2-4)$$

وتمثل المعادلة (2–3) معادلة الحركة التفاضلية للمنظومة ، ω_n هى التردد الطبيعى الدائرى *the natural circuler frequency*

ب–أستنتاج التذبذب التوافقى البسيط بطريقة الطاقة: *Energy Method*

فى المنظومة المبينة بالشكل *(2-2)* والتى تمثل الهزاز الميكانبكى البسيط نجد ان:

الطاقة الكلية للمنظومة *(T.E)* = طاقة الحركة *(K.E)* +طاقة الوضع *(P.E)*

$$\because\ K.E = \frac{1}{2}mv^2 \qquad , v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \therefore\ K.E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\because\ P.E = \int_0^x (totall \quad spring \quad force\ )dx - mgx$$

$$\therefore\ P.E = \int_0^x (mg + kx)dx - mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$T.E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const \qquad \because\ \frac{d(T.E)}{dt} = 0$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right] = 0, \therefore\ \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\ddot{x}\right) + \frac{1}{2}k\left(2x\dot{x}\right) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \therefore\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \therefore\ \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad c.p.s \qquad , f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (HZ)$$

تفسير الحل لمعادلة الحركة التفاضلية للهزاز الميكانيكى البسيط:

بما أن معادلة الحركة للهزاز الميكانيكى البسيط $\ddot{x}+\omega_n^2.x=0$ وهى معادلة تفاضلية متجانسة ومن الدرجة الثانية وتمثل الحركة التوافقية البسيطة ويكون حلها العام على الصورة التالية :

$$x = c_1.\cos\omega_n.t + c_2.\sin\omega_n.t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-5)$$

حيث c_1 , c_2 ثوابت إختيارية وان كل من $cos\omega_n t$, $sin\omega_n t$ هى دوال دورية تكرر نفسها كل فترة زمنية t_p ويمكن تعيين الزمن الدورى من العلاقة $\omega_n(t_p+t)-\omega_n t=2\pi$ وبذلك يكون $\omega_n t_p=2\pi$ وبالتالىيمكن تعيين الزمن الدورى من المعادلة $t_p=2\pi/\omega_n$ وبذلك نجد ان دورة الاهتزاز تعتمد فقط على وزن الجسم المهتز ومعامل النابض وان الازاحة Δ يمكن إيجادها كدالة فى الزمن الدورى t_p ، ولهذا نجد ان التردد الطبيعى للاهتزاز f_n يعرف بعدد الدورات بالنسبة لوحدة الزمن (ثانية) ، ولايجاد الثوابت c_1, c_2 من المعادلة *(2-5)* نستخدم الشروط او الظروف الابتدائية لحركة المنظومة , أى ان الظروف الابتدائية *The Initial Condition* تكون عندما الزمن $(t=0)$ وتكون إزاحة الجسم المهتز $x=x_o$ من وضع الاتزان الاستاتيكى وكذلك تكون السرعة الابتدائية للجسم $v=\dot{x}=\dot{x}_o$ وبالتعويض بهذة الظروف الابتدائية فى المعادلة *(2-5)* ينتج أن:

$$x = x_o = c_1.\cos\omega_n(0) + c_2.\sin\omega_n(0) \qquad \therefore x_0 = c_1(1) + 0 \qquad \therefore x_o = c_1$$

وبتفاضل المعادلة *(2-5)* نحصل على السرعة فى صورة المعادلة التالية:

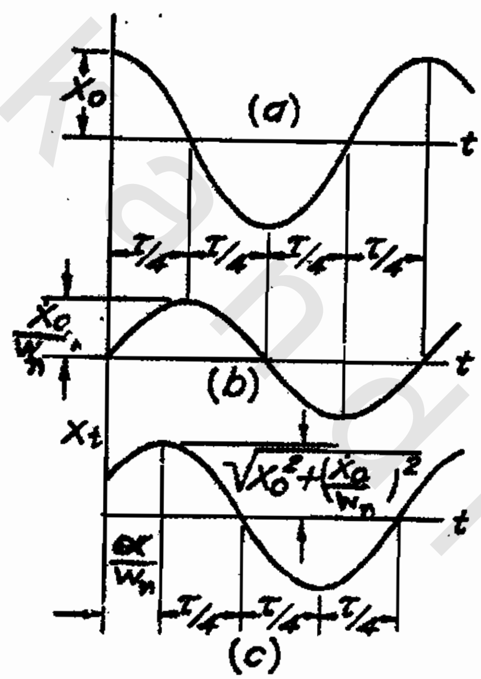
$$\dot{x}_0(t) = -c_1\omega_n . \sin(\omega_n .t) + c_2\omega_n . \cos(\omega_n .t)$$

$$\therefore \; at \quad t = 0 \quad \dot{x}_\circ = c_2\omega_n \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

أذن بالتعويض عن c_1, c_2 في المعادلة *(2-5)*تنتج المعادلة التالية:

$$x = x_0 \cos(\omega_n .t) + \frac{\dot{x}_o}{\omega_n}\sin(\omega_n .t) \qquad (2-6)$$

نلاحظ من المعادلة *(2-6)* ان الاهتزاز يتكون من جزئين أحدهما يتناسب مع $\cos(\omega_n .t)$ ويعتمد على الازاحة الابتدائية لكتلة الجسم المهتز والجزء الاخر يتناسب مع $\sin(\omega_n .t)$ ويعتمد على السرعة الابتدائية وكل من هذين الجزئين يمكن تمثيلهم بيانيا فى الشكل *(2-3a,b,c)*. كدالة فى الزمن t ، والازاحة الكلية ء للوزن W عند اى زمن t يمكن ايجادة بجمع كل من منحنى الازاحة (x_o ,t) ومنحنى السرعة $(\dot{x}_o ,t)$ والذى يمكن تمثيله بالمنحنى *(2-3c)*

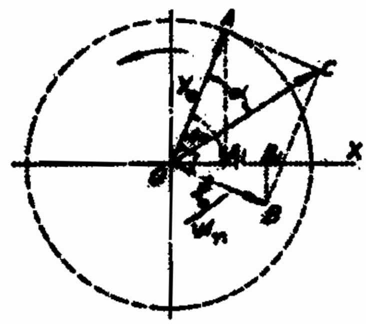


الشكل*(2-3a,b,c)* يوضح العلاقة بين $x_0, \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$مع الزمن *(t)* وجمعهم بيانيا.

يلاحظ أن الشكل *(2-3a)* يوضح العلاقة بين الازاحة الابتدائية لكتلة المنظومة والزمن والشكل *(2-3b)* يوضح العلاقة بين $\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ والزمن *(t)* , بينما الشكل *(2-3c)* يوضح العلاقة بين الازاحة الكليةx_t والزمن t حيث يمكن إيجاد الازاحة الكلية عند أى زمن t بجمع جزئى المعادلة *(2-6)* أو بجمع المنحنيين بالشكل-*(2*

عند الزمن t المناظر لذلك كما مبين بالمنحنى الممثل بالشكل (2-3c). 3a,b)

طريقة أخرى لتفسير الحل العام لمعادلة الحركة التفاضلية.



الشكل (2-4)

لشكل (2-4) يوضح أن المتجة $\overline{OA}$ الذى يمثل الازاحة الابتدائية x_0 حيث يدور هذا المتجة بسرعة زاوية ثابتة (ω_n) The Angular Frequency of Vibration حول النقطة الثابتة (o) وعندما الزمن $(t = 0)$ نجد أن مسقط المتجة $\overline{OA}$ الذى يمثل الازاحة x_0 يكون على صورة المعادلة $\overline{OA_1} = x_o . \cos \omega_n .t$ وكذلك المتجة $\overline{OB}$ العمودى على المتجة $\overline{OA}$ ويكون مساويا للمقدار $\dot{x}_o / \omega_n$ ويكون مسقطة على محور x على صورة المعادلة

$$\overline{OB_1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n .t$$

وبذلك تعين الازاحة الكلية بجمع مسقط المتجهين $\overline{OA}, \overline{OB}$ وتكون على صورة المعادلةالاتية

$$\text{The Total Displacement} = \overline{OC} = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o}{\omega_n}\right)^2} .$$

$$\text{the angle } (\alpha) = \tan^{-1} \frac{\dot{x}_o}{\omega_n . x_o} .$$

وبذلك يمكن تعيين الازاحة x من المعادلة الاتية:

$$\text{the amplitude } (x) = \overline{oc} . \cos(\omega_n .t - \alpha)$$

ملاحظات:

أ-عند جمع التمثيل البيانى لحركتين توافقيتين أحدهما يتناسب مع $\cos \omega_n .t$ والاخرى تتناسب مع $\sin \omega_n .t$ تكون النتيجة حركة توافقية بسيطة أيضا تتناسب مع $\cos(\omega_n .t - \alpha)$.

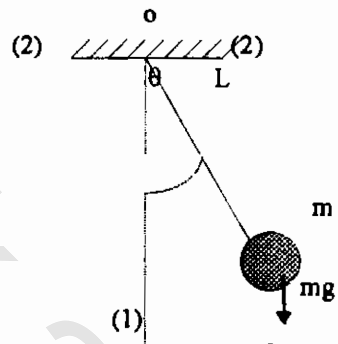
ب-سعة الحركة التى يدل عليها المتجة $\overline{oc}$ تساوى أقصى ازاحة للجسم الهزاز وذلك من وضع الاتزان الاستاتيكى.

ج-الزاوية α هى الاختلاف فى زاوية الطور بين المتجهين $\overline{OA}, \overline{OC}$

2-التذبذب الزاوى للاجسام الجاسئة:

الحركة الزاوية لبندول بسيط. *Anguler Motion of Simple Pendulum*

أبسط مثال على ذلك هو حركة البندول البسيط المبين بالشكل *(2-5)* , فاذا اعطى للبنـــدول إزاحـــة زاوية صغيرة θ فأنة يتولد عزم اللى الكامن نتيجة انتقال البندول من وضع الاتـــزان الاســتاتيكى الــى الوضع الجديد ويعين من العلاقة $I_o.\ddot{\theta}$ حيث I_o هو عزم القصور الذاتى , $\ddot{\theta}$هى العجلة الزاوية ونتيجة لذلك يتولد عزم لى اخر مساوى لعزم اللى الكامن فى المقدار ومضاد لة فى الاتجاة ويسمى هذا العـــزم بعزم اللى الاسترجاعى (الرجوعى) *The Restoring Torque* والذى يعين بأخذ العزوم حول المفصـــل o أى ان: $\sum M_o = mg.l\sin\theta$



الشكل (2-5) البندول البسيط

وبتطبيق قانون نيوتن للحركة فى شكل معادلة العزم $\sum M = I_o.\ddot{\theta}$

$$-mg.l\sin\theta = I_o.\ddot{\theta} \quad ,\because \sin\theta=\theta \qquad \therefore I_o.\ddot{\theta}+mg.l\theta=0 \qquad \because I_o = ml^2$$

$$\therefore \ddot{\theta}+\frac{mg\,l}{ml^2}\theta=0 \qquad \therefore \ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=o \qquad ....(2-7)$$

$$\therefore \omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad c.p.s. \qquad ,f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad rad/\sec.$$

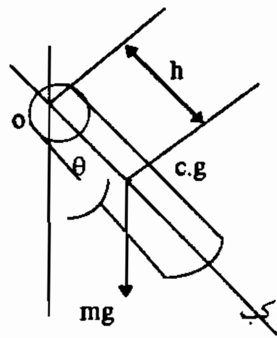
ملحوظة:

نتيجة حدوث الازاحة الزاوية θ للبندول البسيط فأنة يتولد عزم لىكامن فى البندول وعند إعتاقة وجعلــة حرا فأن هذا العزم يتحول الى طاقة حركية تجعل البندول يتذبذب حول المحور الرأسى ونتيجـــة لذلــك يتولد عزم لى إسترجاعى يساوى عزم اللى الكامن فى المقدار ومضاد لة فى الاتجاة يعمل علـــى إعـــادة البندول الى وضع الاتزان وإيقافة.

3-البندول المركب. *Compound Pendulum*

الشكل *(2-6)* يوضح حركة البندول المركب , وعند إعطاء البندول المركب إزاحة زاوية صغيرة θ فانة يتولد عزم اللى الكامن وإذا ترك البندول حرا فأن هذا العزم يتحول الى طاقة حركية تجعل البنـــدول

يتحرك حول المحور الرأسي بحركة اهتزازية ونتيجة لذلك يتولد عزم لى إسترجاعى يعمل على إعادة البندول الى وضع الاتزان الاستاتيكى الجديدمرة اخرى ولهذا يكون عزم اللى الكامن يساوى عزم اللى الاسترجاعى فى المقدار ويخالفة فى الاشارة.



الشكل (2-6) البندول المركب

$$\therefore m(r_g^2 + h^2)\ddot{\theta} = -mgh\,\theta \qquad \therefore \ddot{\theta} + \frac{gh}{\left(r_g^2 + h^2\right)}\theta = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(2-8)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{gh}{\left(r_g^2 + h^2\right)}} \quad c.p.s \qquad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{r_g^2 + h^2}{gh}} \quad \text{sec}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gh}{r_g^2 + h^2}} \quad (HZ)$$

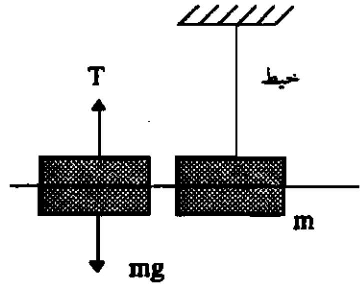
وبما أن عزم اللى الكامن = $I_o.\ddot{\theta}$ ، وعزم اللى الاسترجاعى يعين بأخذ العزوم حول المفصل o

$$\therefore \sum M_o = mgh.\sin\theta = mgh\theta \qquad \because I_o = m\left(r_g^2 + h^2\right)$$

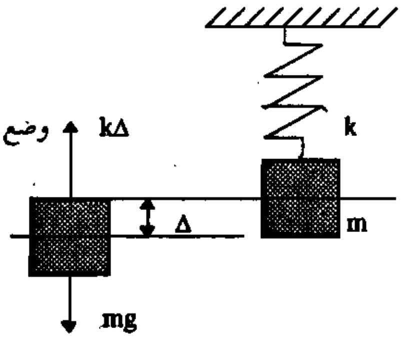
حيث r_g هو نصف قطر الحركة التدويمية *Raduis of Gyration*

4-الحركة الاهتزازية للجسم فى خط مستقيم. *The Vibration Motyon of A body in Straight Line*

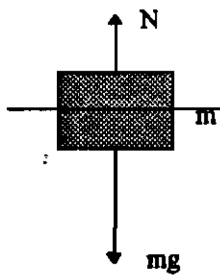
الشكل *(2-7a,b,c,d)* يوضح أمثلة على الحركة الاهتزازية ونلاحظ فى كل هذة الامثلة ان الجسم متزن تحت تأثير وزنة وقوة مساوية موازنة لاعلى فأذا أعطينا للجسم المتزن فى الاشكال *(2-7a,b,c)* إزاحة صغيرة لتحركت حركة اهتزازية حول وضع إتزانها المستقر. أما اذا أعطينا للجسم المتزن فى الشكل *(2-7d,e)* إزاحة صغيرة فانها تتحرك مبتعدة جدا عن وضع إتزانها الغير مستقر ، ففى حالة وضع الاتزان المستقر يكون هناك قوة إسترجاعية *Restoring Force* تقاوم الازاحة الصغيرة عنة أى تحاول إرجاع الجسم الى وضع الاتزان المستقر *Stable Equilibrium* أما فى وضع أو حالة الاتزان غير المستقر فلا توجد هذة القوة الاسترجاعية فاذا إزيح الجسم أى أزاحة صغيرة فانها تزيد بلا مقاومة.



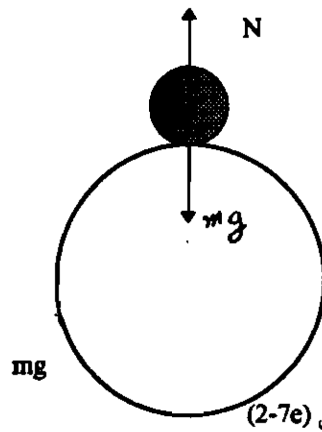
الشكل(2-6c)



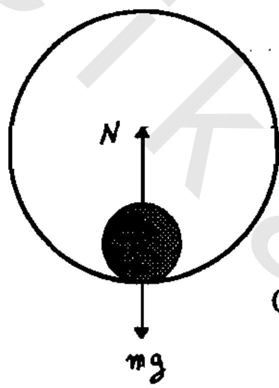
الشكل(2-7b)



الشكل(2-7a)



الشكل (2-7e)



الشكل (2-7d)

الشكل *(2-7d,e)*

والقوة الاسترجاعية تتمثل فى :

أ-جذب الارض فى حالة الجسم المعلق من خيط غير متزن.

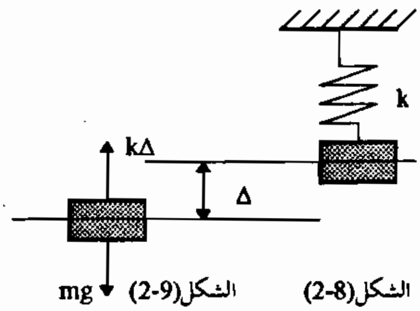
ب-شد الزنبرك (النابض) فى حالة الجسم المعلق من نابض مرن (الهزاز الميكانيكى البسيط).

ج-قوة الطفو فى حالة الجسم الطاف على سطح بحيرة.

اذن وجود إتزان مستقر هو الشرط الضرورى لحدوث الحركة الاهتزازية ولكى تضـــاف الـى صفـة الاهتزازية صفة التوافقية *Harmonic* أو الدورية *Periodic* ، أذن يجب توفر شرط إضـــافى وهـو ان تكون القوة الاسترجاعية متناسبة طرديا مع الازاحة.

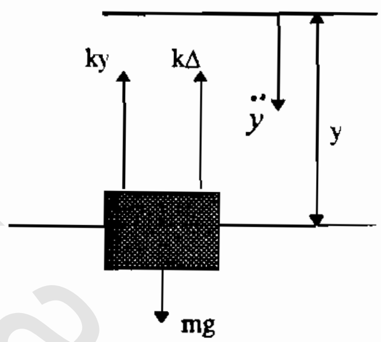
مثال توضيحى:

الشكل *(2-8)* يوضح الهزاز الميكانيكى البسيط حيث علق الجسم الذى كتلتة m فى النابض المرن الـــذى معاملة k ثم ترك حتى يتزن. أوجد الاستطالة الحادثة للنابض ، واذا أزيح الجسم مسافة y_o أسفل وضع



الشكل(2-9)   الشكل(2-8)

الاتزان وأعطى سرعة إبتدائية v_o ثم ترك ليتحرك بحرية. اكتب معادلة حركة الجسم ثم أوجد علاقة السرعة v بالازاحة y من وضع الاتزان وكذلك العلاقة بين كل من السرعة والازاحة والزمن.



الشكل(2-10)

أ- فى حالة وضع الاتزان المستقر.

عند حدوث الاستطالة فى النابض يكون الشد فية مقدارة $k.\Delta$ وتكون معادلة إتزان الجسم ممثلة بالمعادلة الاتية:

$$k.\Delta - mg = 0 \qquad \text{.......} (2\text{-}9)$$

ومنها يمكن إيجاد مقدار الازاحة Δ من العلاقة $\Delta = \dfrac{mg}{k}$ وذلك بعد أن يترك الجسم ليتحرك بحرية.

ب-فى حالة إزاحة الجسم مسافة y_0 أسفل وضع الاتزان.

يوضح الشكل *(2-10)* القوى المؤثرة على الجسم فى هذة الحالة حيث انة فى هذا الوضع تضاف قوة شد فى النابض مقدارها ky ويكون إتجاهها لاعلى.

إذن معادلة الحركة للجسم يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$mg - k.\Delta - ky = m.\ddot{y} \qquad \text{.......} (2\text{-}10)$$

وبالتعويض من المعادلتين *(2-10)* , *(2-9)* تنتج المعادلة التالية:

$$-ky = m\ddot{y} \qquad \text{.......} (2\text{-}11)$$

وبما أن العجلة y يعبر عنها بالمعادلة التالية

$$\ddot{y} = v\frac{dv}{dy} \quad \ldots\ldots (2\text{-}12)$$

حيث $v = \dot{y}$ هى سرعة الجسم وبالتعويض من المعادلة (2-11) فى المعادلة (2-12) نتج المعادلةالتالية:

$$-ky = m.v\frac{dv}{dy} \ldots\ldots (2\text{-}13)$$

اذن بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على المعادلة التالية:

$$-\frac{k}{m}.ydy = v.dv \qquad \therefore -\int_{y_o}^{y}\frac{k}{m}.ydy = \int_{v_0}^{v} vdv$$

$$\therefore -\frac{k}{m}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} \quad \ldots\ldots (2-14)$$

والمعادلة (2-14) توضح علاقة السرعة v بالازاحة y ويمكن كتابة هذة العلاقة على صورة المعادلة التالية: (2-15)

$$\frac{v^2}{\omega A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \ldots\ldots$$

حيث A, ω بارمترين هامين ويعبر عنهم بالعلاقتين الاتيتين:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad , A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \ldots\ldots (2\text{-}16)$$

وبنفس البارمترات يمكن إعادة كتابة المعادلة (2-13) كعلاقة بين الازاحة والعجلةعلى الصورة التالية:

$$a = -\omega_n^2.y \ldots\ldots (2\text{-}17)$$

حيث y هى ازاحة الجسم ، a هى عجلة الجسم وذلك من وضع الاتزان.

ملاحظات هامة:

1-نلاحظ من علاقة الازاحة بالسرعة انة يوجد موضعين يتوقف فيهما الجسم لحظيا ، أى تنعدم فيهما السرعة وبوضع $v=0$ فى المعادلة (2-16) ينتج أن هذان الموضعان $y=A$, $y=-A$ ويسمى هذان الموضعان بالموضعين المتطرفين وتسمى A بالسعة وهى أقصى قيمة للازاحة y فأذا زادت y عن A تصبح v^2 سالبة أى ان v تخيلية.

اذن $v^2 = \omega^2\left(A^2 - y^2\right)$ أى ان إزاحة الجسم تتراوح ما بين $+A$, $-A$ حول وضع الاتزان المستقر:

اذن $-A \le y \le A$ ونتيجة لذلك تسمى الحركة بالحركة الاهتزازية.

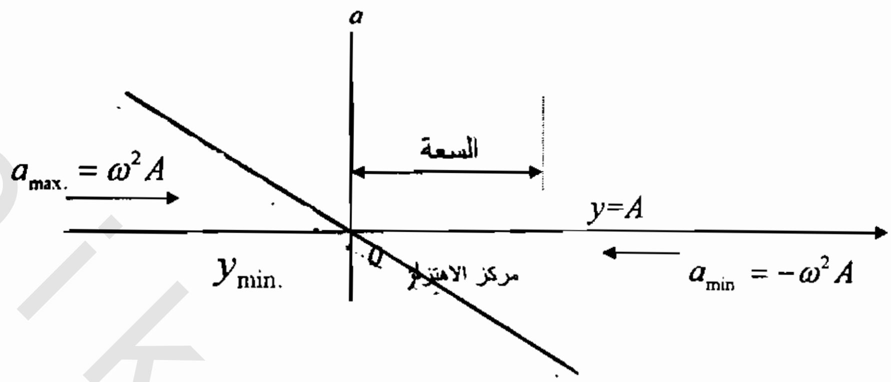
2-نلاحظ أيضا من علاقة الازاحة بالعجلة ان أقصى قيمة للعجلة هى عند الموضعين المتطرفين $a_{max} = \omega^2 A$ حيث ان العجلة تتراوح ما بين $\omega^2 A, -\omega^2 A$ اذن $\omega^2 A \ge a \ge -\omega^2 A$

3-ونلاحظ أيضا من علاقة الازاحة بالسرعة ان اقصى قيمة للسرعة هى عندما تنعدم الازاحة ، اى عندما يكون الجسم مارا بوضع الاتزان المستقر $y = 0$ واذن $v_{max} = \omega A$ وتتراوح السرعة مابين

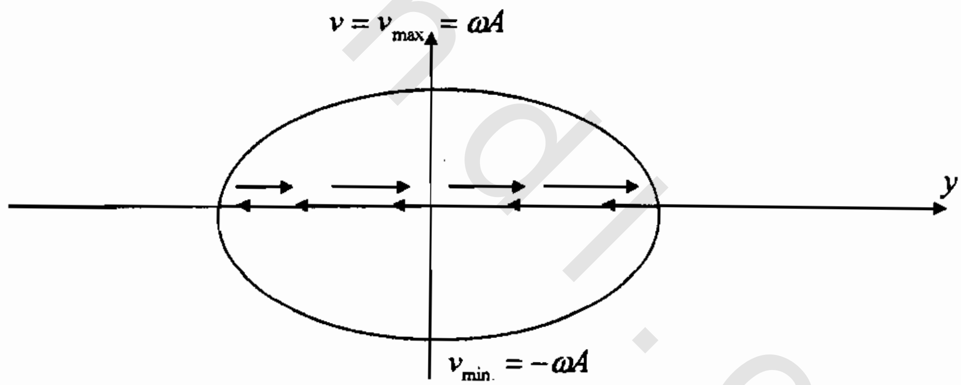
$$-\omega A \le v \le \omega A$$

ويسمى وضع الاتزان المستقر بمركز الاهتزاز , أى انة موضع إنعدام القوة الاسترجاعية(لحظيا).

4-يمكن رسم علاقة بيانية للمعادلتين *(2-17)* , *(2-15)* بينما المعادلة *(2-17)* توضح العلاقة بين العجلة والازاحة وتمثل بخط مستقيم كما بالشكل *(2-11)* ، اما المعادلة *(2-15)* توضح العلاقة بين السرعة والازاحة وتمثل بقطع ناقص كما فى الشكل *(2-12)*.



الشكل *(2-11)*



الشكل*(2-12)*

وتمثل الخطوط ذات الاسهم متجهات سرعة الجسم وهو يتذبذب بين الموضع المتطرف الاول $y = A$ مارا بمركز الذبذبة أو الاهتزازة (موضع الاتزان المستقر) حيث $y = 0$ حتى الموضع المتطرف الثانى $y = -A$ ويعود مرة ثانية ليكرر الحركة.

5-ونلاحظ أنة فى الموضع الواحد توجد سرعتان لهمانفس المقدار الاولى خاصة بحركة الجسم الصاعدة والاخرى خاصة بحركة الجسم الهابطة ، والحركة الصاعدة تمثل بالعلاقة $v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$ بينما الحركة الهابطة تمثل بالعلاقة $v = -\omega\sqrt{A^2 - y^2}$ ، أما العجلة فلها قيمة واحدةفى الوضع الواحد.

6-السعة هى المسافة بين مركز الاهتزازة (موضع الاتزان المستقر) وأى من الموضعيـــن المتطرفيـــن (موضعى التوقف اللحظى للجسم)،والسعة لاتساوىالازاحة الابتدائية عن موضع الاتزان بل هى أكـبر منها أىإن $A \geq y_0$ وهىتساويها فقط إذا كانت السرعة الابتدائية تساوى الصفر $v_0 = 0$، أما إذا كـانت الازاحة الابتدائية تساوى الصفروالسرعة الابتدائية تساوى v_0 فأن السعة تعين من العلاقة $A = \frac{v_o}{\omega}$

5-**<u>العلاقة بين الازاحة والسرعة والزمن.</u>** *<u>The Relationship between Displacement , Velocity and Time</u>*

$$\because v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{dy}{dt} \qquad (2\text{-}18)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على العلاقة التالية:

$$\int_{t=o}^{t} \pm\,\omega dt = \int_{y=y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} \qquad \therefore \pm\omega t = \sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{y_0}{A}\right)$$

وبذلك تكون علاقة الازاحة بالزمن يعبر عنها بالعلاقة الاتية:

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{y_0}{A}\right) \text{ حيث } y = A\sin(\omega t + \phi) \qquad (2\text{-}19)$$

والزاوية ϕ تسمى بزاوية الطور وبتفاضل الازاحة بالنسبة للزمن نحصل على السرعة كما بالمعادلة التالية:

$$v = \omega A\cos(\omega t + \phi) \qquad (2\text{-}20)$$

وبتفاضل السرعة بالنسبة للزمن نحصل على العجلة كما بالمعادلة التالية:

$$a = f = -\omega^2 . A\sin(\omega t + \phi) \qquad (2\text{-}21)$$

6-**العلاقة بين الزمن الدورى والتردد:**

توضح المعادلات *(2-19,20,21)* كيفية تغير الازاحة والسرعة والعجلة مع الزمن والعلاقة بينهما وبين الزمن الدورى ، ويعبر عن الزمن الدورى بالعلاقة $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ ولاثبات ان الحركة الاهتزازية تكرر نفسها كل فترة زمنية $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ ، نأخذ قيمة الزمن t_p التى تتباعد عن بعضها البعض بمقدار $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$

ونظرا لان الحركة الاهتزازية او التوافقية هى حركة دورية ويمكن التعبير عن إزاحتها بالعلاقة التالية:

أى ان بفرض ان الازاحة الابتدائية تمثل بالعلاقة

$$y_0 = A\sin(\omega t + \phi) \ \ at \ \ t = 0 \qquad \therefore y_0 = A\sin(\phi)$$

$$at \ \ t = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \therefore y_1 = A\sin\left(\omega . \frac{2\pi}{\omega} + \phi\right) = A\sin(2\pi + \phi) = A\sin(\phi)$$

$$at \qquad t = \frac{4\pi}{\omega} \qquad \therefore \qquad y_2 = A\sin(4\pi + \phi) = A\sin\phi$$

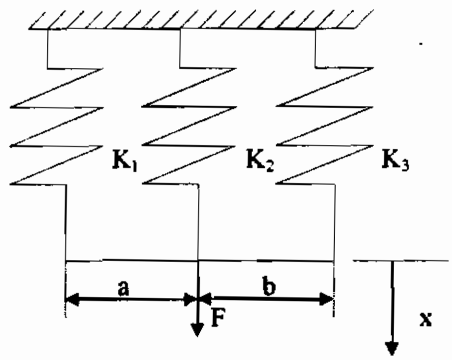
$$at \qquad t = \frac{n(2\pi)}{\omega} \qquad \therefore \qquad y_n = A\sin(2n\pi + \phi) = A\sin(\phi)$$

اى عندما تكون n عدد صحيح اذن الازاحة تكرر نفسها بنفس المقدار كل فترة زمنية $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ وكذلك السرعة والعجلة وتسمى ω_n بالتردد الدورى أو الترددالزاوى *(Angular Frequency)* .

ثوابت النوابض المكافئة ***Equivalent Spring Constant($k_{eq.}$)***

أ-إذا كانت النوابض (اليايات) متصلة على التوازى *Springs Connected in Parallel*

وكانت $a = b$ ، والقوة F تساوى الوحدة فانة يمكن استنتاج معامل النابض المكافئ $k_{eq.}$ من العلاقات التالية:



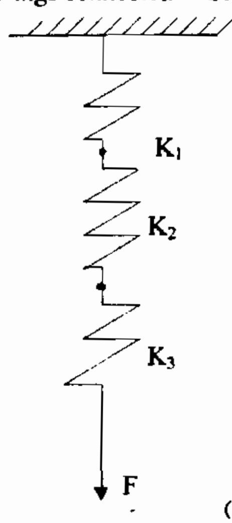
الشكل (2-13)

$$\because x = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F_3}{k_3} \qquad ,\because F = F_1 + F_2 + F_3 = k_1 x + k_2 x + k_3 x = (k_1 + k_2 + k_3)x = k_{eq.} x$$

$$\therefore k_{eq.} = k_1 + k_2 + k_3 \qquad \text{.........................} (2-22)$$

اذا كان عدد النوابض المتصلة على التوازى n فان معامل النابض المكانئ يمكن إيجادة من العلاقة: $k_{eq.} = \sum_{i=1}^{n} k_i$

ب-اذا كانت النوابض متصلة على التوالى. *Springs connected in Series*



الشكل (2-14)

$$F = k_1 . x_1 = k_2 . x_2 = k_3 . x_3 \qquad , \because x = x_1 + x_2 + x_3$$

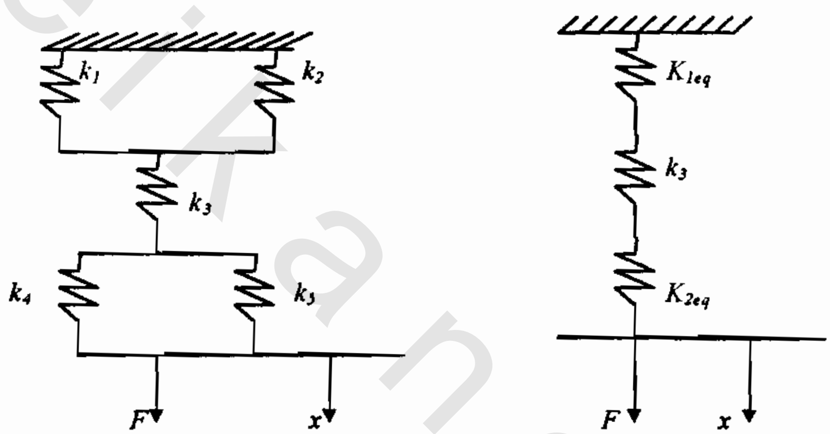
$$\because x_1 = \frac{F}{k_1} \qquad , x_2 = \frac{F}{k_2} \qquad , x_3 = \frac{F}{k_3} \qquad \therefore x = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{k_{eq.}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \qquad \therefore k_{eq.} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-23)$$

اذا كان عدد النوابض المتصلة على التوالى n فيمكن إيجاد معامل النابض المكافئ من العلاقة التالية:

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}$$

ج-اذا كانت النوابض متصلة على التوازى والتوالى. *Springs in Parallel and Series Combination*



الشكل *(2-15a)* توضح المنظومة اتصال النوابض على التوالى والتوازى. الشكل *(2-15b)* المنظومة المكافئة.

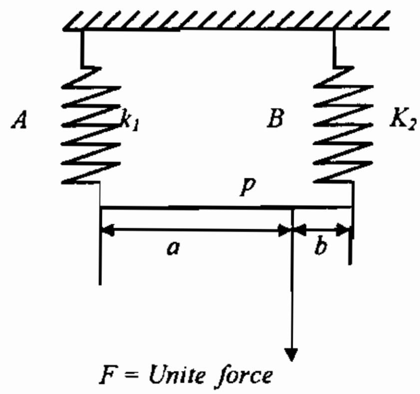
نلاحظ من المنظومة *(2-15a)* ان النابضان k_1 , k_2 متصلان على التوازى وبذلك يكون معامل النابض المكافئ لهما هو مجموعهم كما بالعلاقة $k_{1eq.} = k_1 + k_2 K$ ، والنابضان k_4 , k_5 متصلان أيضا على التوازى ويكون معامل النابض المكافئ لهما هو مجموعهم أيضا ويعبر عنة بالعلاقة $k_{2eq} = k_4 + k_5$ ، ويمكن عمل منظومة مكافئة كما بالشكل *(2-15b)* تتكون من النابضان المكافئان $k_{1eq.} , k_{2eq.}$ والنابض k_3 والمتصلة معا على التوالى.

وبذلك يمكننا إيجاد معامل النابض المكافئ للمنظومة وذلك حسب قانون التوصيل على التوالى كما بالعلاقة التالية:

$$k_{eq.} = \frac{1}{\frac{1}{k_{1eq.}} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_{3eq.}}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1 + k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4 + k_5}}$$

حالة خاصة:

أوجد معامل النابض المكافئ للمنظومة المبينة بالشكل *(2-18)* .



الشكل *(2-16)*

نلاحظ من المنظومة المبينة بالشكل *(2-16)* ان النابضان *k1 ,k2* متصلان على التوازى ، واذا فرض ان قوة *F* مقدارها الوحدة *Unite* تؤثر عند نقطة تبعد مسافة *a* عن k_1 وتبعد مسافة *b* عن k_2 ولايجاد معامل النابض المكافئ لهذة المنظومة نتبع الاتى:

مع إعتبار ان وحدة القوة تؤثر عند نقطة *p* فنجد أن

$$\left[\frac{b}{(a+b)}.F\right] acts \quad on \quad spring \quad A$$

$$\left[\frac{a}{(a+b)}.F\right] acts \quad on \quad spring \quad B$$

وبذلك تكون القوة المؤثرة إلى النابضان *A ,B* يعبر عنهم بالعلاقات الاتية:

$$F_A = F_1 = \left(\frac{F.b}{a+b}\right) \quad , \quad F_B = F_2 = \left(\frac{F.a}{a+b}\right)$$

ويمكن التعبير عن الاستطالة Δ لكل من النابضين (اليايين) بالعلاقتين الاتيتين:

$$\Delta_1 = \frac{F.b}{k_1(a+b)} = \frac{F_1}{k_1} \qquad , \Delta_2 = \frac{F.a}{k_2(a+b)} = \frac{F_2}{k_2}$$

أما الاستطالة عند النقطة *p* يمكن تعينها من العلاقة التالية:

$$\Delta_p = \Delta_1 + \frac{a}{(a+b)}[\Delta_2 - \Delta_1]$$

وبالتعويض عن Δ_1, Δ_2 ينتج مايلى:

$$\therefore \Delta_p = \frac{F\,b}{k_1(a+b)} + \frac{F.a^2}{k_2(a+b)^2} - \frac{F.a.b}{k_1(a+b)^2}$$

$$= \frac{F}{(a+b)^2}\left[\frac{b(a+b)}{k_1} + \frac{a^2}{k_2} - \frac{a.b}{k_1}\right] = \frac{F}{(a+b)^2}\left[\frac{a.b+b^2-ab}{k_1} + \frac{a^2}{k_2}\right]$$

$$\therefore \Delta_p = \frac{F}{(a+b)^2}\left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right] \qquad (2-24)$$

واذا كانت القوة F لها قيمة معينة فانة يمكن إيجاد قيمة الاستطالة عند النقطة P باستخدام المعادلة (2-24) ، أما إذا كانت القوة F تساوى الوحدة ، فان الاستطالة او الانحراف عند النقطة p يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta_p = \frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right]$$

ولايجاد معامل النابض نعوض فى العلاقة $k = \frac{F}{\Delta}$ فنتنتج العلاقة التالية:

$$k_{eq.} = \frac{F}{\Delta_p} = \frac{F.(a+b)^2}{\left[\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right]} \qquad (2-25)$$

واذ ا كانت قيمة F الوحدة نعوض عن $F = 1$ فى المعادلة (2-25) .

طرق ايجاد معادلة الحركة للمنظومات الميكانيكية.

1-طريقة نيوتن للحركة . Newton Method

يمكن إيجاد معادلة الحركة لمنظومة ما باستخدام قانون نيوتن الثانى وذلك بان نعين كل من عزم اللى الكامن وعزم اللى الاسترجاعى (الرجوعى) للمنظومة ثم مساويتهما معا حيث ان عزم اللى الكامن يساوى عزم اللى الاسترجاعى فى المقدار ومضاد لة فى الاتجاة. ، ونظرا لان معظم معادلات الحركة لكثير من المنظومات ، يمكن الحصول عليها بسهولة باستخدام قانون نيوتن الثانى للحركة و يصعب ذلك على بعض النظم الاخرى والتى يمكن استخدام طرق اخرى مثل طريقة الطاقة او طريقة رايلى او طريقة لاجرانج لايجاد معادلة الحركة لها.

2-طريقة الطاقة. Energy Method

نظرا لان المنظومة التى تتذبذب بحرية حول وضعها الاستاتيكى ، تبقى طاقتها الكلية ثابتة كما بالمعادلة التالية:

$$.T.E = P.E + K.E + D.E = Const. \qquad (2-26).$$

حيث : الطاقة الكلية *Total Energy (T.E)* ، طاقة الوضع *Potential Energy (P.E)*، طاقة الحركة

ولايجاد معادلة الحركة لمنظومة ما فأننا نعين كل من طاقات الحركة المختلفة ثم نفاضل الطاقة الكلية بالنسبة للزمن ونساويها بالصفر وذلك لان تفاضل الثابت =صفر. أى ان:

$$\because T.E = const \qquad ,\therefore \frac{d}{dt}(T.E) = 0$$

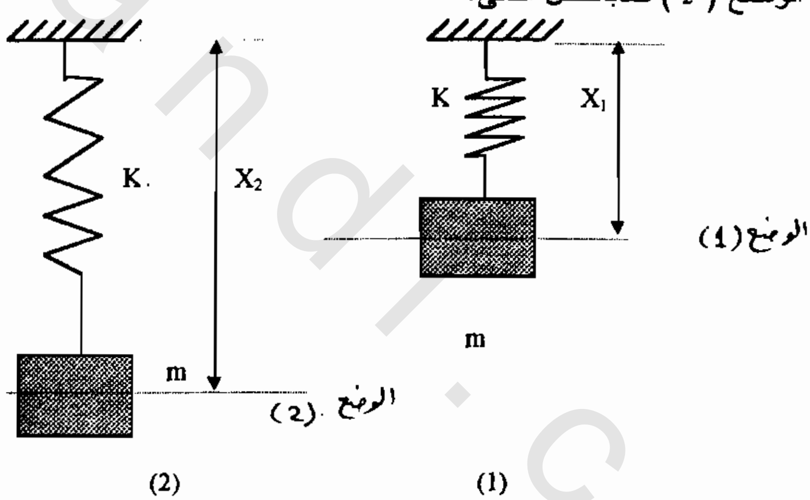
ولذلك يلزم معرفة كل من:-

1-**الطاقة**:تعرف الطاقة المخزونة فى اى جسم بأنها مقدرة الجسم على عمل شغل وتنقسم الطاقة الى ثلاث أنواع هى:-

أ-**طاقة الحركة** *(K.E)*: هو الشغل الذى يبذلة الجسم ضد القوة المقاومة حتى يسكن ، أو هو نصف حاصل ضرب كتلة الجسم فى مربع السرعة ويعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \left[kg\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] = \left(kg.\frac{m}{s^2}\right).m = N.m = joule \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2-27)$$

ب-**طاقة الوضع** *(P.E)*: هى الطاقة التى يكتسبها الجسم أو يختزنها بموجب موضعة فى مجال الجاذبية الارضية أو نتيجة لارتفاعة عن سطح الارض أو يختزنها جسم مرن عند تغيير شكلة كما فى حالة النوابض ويمكن تعريف طاقة حركة النابض بانها هى الشغل المبذول اثناء حركة النابض من الوضع (*1*) الى الوضع (*2*) كمابالشكل التالى:



الشكل *(2-18)* الشكل *(2-17)*

$$W_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} F_s\,ds = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kx^2 \ldots(2-27)$$

ج-**المجال المحافظ**:هى طاقة الجسم التى لايحدث لها اى تغيير عند إنتقال الجسم من وضع ما الى وضع أخر ، إى تكون طاقة الجسم ثابتة حلال إنتقالة من الوضع الاول الى الوضع الثانى.

$(K.E)_1 + (P.E)_1 = (K.E)_2 + (P.E)_2$

$K.E + P.E = const.$

د-طاقة الحركة الكلية ومعدل التغير في طاقة الوضع.

إذا تحرك مركز الكتلة لاى جسم بسرعة خطية قدرها v ، وكان الجسم يدور فى نفس الوقت حول هذا المركز بسرعة زاوية قدرها ω عندئذ يكون : طاقة الحركة الكلية = طاقة حركة الانتقال + طاقة حركة الدوران اى ان

$$Total(K.E.) = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 \quad \ldots\ldots (2-28)$$

حيث I هى عزم القصور الذاتى للجسم حول مركز الكتلة ، وان معدل التغير فى طاقة *The Rate Change of K.E* الحركة يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$The\ Rate\ of\ Change\ of\ K.E. = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right] = \frac{1}{2}m\left(2v\frac{dv}{dt}\right) + \frac{1}{2}I\left(2\omega\frac{d\omega}{dt}\right) =$$

$$= mfv + I\alpha\omega = pv + T\omega == The\ Work\ Done\ in\ Unit\ Time \qquad (2-29)$$

حيث α هى العجلة الزاوية ، f هى العجلة الخطية.

و-طاقة الانفعال او التبديد ***Strain or Dissipation Energy***

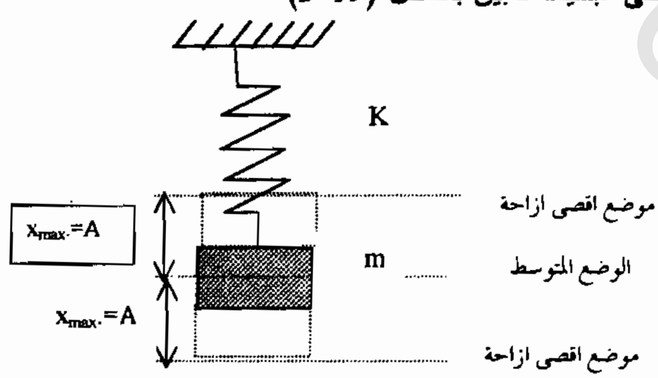
هى الطاقة المختزنة فى جسم مرن نتيجة تشوهة ، ويعبر عنة بالعلاقة التالية:

$$D.E = \frac{1}{2}cv^2 = \frac{1}{2}c\left(\dot{x}\right)^2 \quad \ldots\ldots (2-30)$$

حيث c هو عامل الخمد *Damping Factor*

3-طريقة رايلى: *Rayleigh s Method*

تعتبر طريقة رايلى إمتداد لطريقة الطاقة حيث يوجد علاقة مشتركة أو تبادل ثابت *Constant Interchange* للطاقة بين طاقة الوضع للياى *(P.E)* وطاقة الحركة للكتلة *(K.E)* ونظرا لان المجموعة أو المنظومة مثل الهزاز الميكانيكى البسيط المبين بالشكل *(2-19)*



الشكل (2-19)

يتحرك حركة دورية *Cyclic Motion* فان طاقة الوضع للكتلة تساوى صفر عند موضع الاتزان الاستاتيكى (الوضع المتوسط) *The Static Equlibruim Position* وذلك لانعدام الازاحة $(x=o)$ عند تواجد الكتلة فى موضع الاتزان الاستاتيكى ولهذا فان طاقة الوضع للكتلة تساوى صفر أى ان $P.E=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(0)=0$ وطبقا لنظرية بقاء الطاقة *Conservation of Energy* ، فان الطاقة الكلية *The Total Energy (T.E)* عند هذة اللحظة تساوى أقصى طاقة حركة لان سرعة الجسم تكون اكبر ما يمكن، أى ان :

$$T.E=(K.E)_{max.}=\frac{1}{2}m(v_{max.})^2=\frac{1}{2}.m(\dot{x}_{max})^2 \qquad (2-31)$$

واثناء الحركة الدورية وعندما تصل الكتلة الى أقصى إزاحة $(x_{max.})$ *Maximum Displacemen* والتى تساوى سعة الدورة (A) *Maximum Amplitude* أى ان:

$$x_{max.}=A \qquad (2-32)$$

وعند نلك تغير الكتلة إتجاهها ولهذا تنعدم السرعة $\left(\dot{x}\right)=o$ وبذلك تكون طاقة الحركة عند تلك اللحظة تساوى الصفر أى ان:

$$K.E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(0)=0$$

وبذلك تكون الطاقة الكلية عند هذة اللحظة تساوى أقصى طاقة وضع ، أى إن

$$\therefore T.E=(P.E)_{max.}=\frac{1}{2}k.x^2_{max.}=\frac{1}{2}.kA^2 \qquad (2-33)$$

ومماسبق ذكرة يمكن إستنتاج معادلة التردد f_n كما يلى: اذن من المعادلتين *(2-33)* , *(2-31)* ينتج أن:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_{max.})^2=\frac{1}{2}kx^2{}_{max.}=\frac{1}{2}kA^2 \qquad (2-34)$$

وبفرض ان الحركة التوافقية البسيطة للهزاز الميكانيكى البسيط يعبر عنة بالعلاقة $x=A\sin\omega_n t$ وبالتالىتكون السرعة علىصورة العلاقة $\dot{x}=A\cos\omega_n t$ ومن الشروط البدائية للحركة نجد انة عندما تكون الكتلة عند اقصى إزاحة تنعدم السرعة نظرا لان الكتلة تغير اتجاهها عند هذة اللحظة وبالتالىتنعدم طاقة الحركة وتكون طاقة الوضع عند هذة اللحظة اكبر مايمكن والطاقة الكلية للمنظومة تساوى اقصى طاقة وضع بينما عندما تكون الكتلة عند الوضع المتوسط فان السرعة تكون اكبر مايمكن ، بينما تنعدم الازاحة عند الوضع المتوسط وبالتالى تنعدم طاقة الوضع عند هذا الموضع والطاقة الكلية تتمثل فى اقصى طاقة حركة عند الموضع المتوسط ، وبذلك فان السرعة عند اقصى ازاحة تعين من العلاقة التالية:

$$x=\omega.A\cos\omega.t \quad at \quad x_{max} \quad \cos\omega.t=1 \quad \therefore x_{max}=\omega_n A\cos\omega.t=\omega_n A \qquad (2-35)$$

وبالتعويض من المعادلتين(2-34) , (2-35) ينتج أن:

$$\frac{1}{2}m(\omega_n . A)^2 = \frac{1}{2}k . A^2 \qquad \therefore m\omega_n^2 = k$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (c.p.s) \ldots\ldots\ldots\ldots (2-36)$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (HZ) \ldots\ldots\ldots\ldots (2-37)$$

ويمكن تطبيق ذلك على البندول البسيط المبين بالشكل (2-5) حيث عند الوضع (1) تكون السرعة اكبر مايمكن وتكون الأزاحة الزاوية منعدمة وبالتالى تكون طاقة الوضع تساوى الصفر بينما الطاقة الكلية تساوى اقصى طاقة حركةبينما عند الوضع (2) تنعدم السرعة نظرا لان البندول يغير اتجاة عند اقصى ازاحة زاوية اى عند الوضع (2) وبالتالى تنعدم طاقة الحركة وتكون طاقة الوضع اكبر مايمكن عند الوضع (2) والطاقة الكلية تساوى اقصى طاقة وضع فى هذة الحالة وقد اثبتنا ان التردد الطبيعى فى حالة البندول البسيط تعين من المعادلة (2-7)

4-معادلة لاجرانج. *Legrange s Equations*

يمكن استخدام معادلة لاجرانج التالية فى إيجاد معادلة الحركة لمنظومة ما وذلك فى صورتها الاساسيةللاحداثيات العمومية q_i :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (K.E.)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial (K.E.)}{\partial q_1} + \frac{\partial (P.E.)}{\partial q_1} + \frac{\partial (D.E.)}{\partial \dot{q}_1} = Q_1 \ldots (2-38)$$

حيث ان:

$K.E. = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$ هى طاقة الحركة للمنظومة ، $P.E. = \frac{1}{2}kx^2$ هى طاقة الوضع ، $D.E. = \frac{1}{2}c\dot{x}$ هى الطاقة المتبددة فى المنظومة ، Q_i هى قوة خارجية عمومية مؤثرة على المنظومة.وفى حالة النظام المحافظ فانة يمكن كتابة معادلة لاجرانج على صورة المعادلة التالية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2-39)$$

حيث ان : $L = K.E. - P.E.$

<u>الطاقة الكلية المقابلة للحركة التوافقية البسيطة.</u> *Totall energy corresponding to simple harmonic motion*

إذا تحرك جزئ من الموضع b الى الموضع c على محيط دائرة كما بالشكل (2-20) ونصف قطرهـا a فان مسقط الجزئ عند النقطة c على محور x يعبرعنة بالعلاقة : $x = A\cos(\omega t + \phi)$ وبالتالىيعبر عن السرعة والعجلة بالعلاقات الاتية:

$$\dot{x} = -A.\omega.\sin(\omega t + \phi) \qquad ,\ddot{x} = -A.\omega^2.\cos(\omega t + \phi)$$

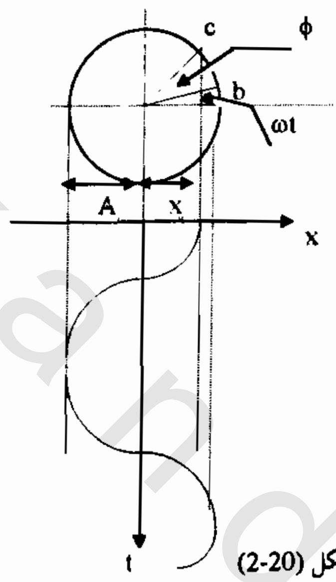
وبالتالى يعبر عن العجلة أيضا بالعلاقة التالية

$$\ddot{x} = -\omega_n^2.x \qquad \therefore \ddot{x} + \omega_n^2.x = 0 \quad \text{.........................(1)}$$

وهى المعادلة التفاضلية لحركة الجزئ حركة توافقية بسيطة ، وبالتالى يمكن كتابة معادلة طاقة الحركة على صورة العلاقة التالية:

$$K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}m[-A\omega.\sin(\omega t + \phi)]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.\sin^2(\omega t + \phi) \quad \text{..............(2)}$$

$$\because K.E. = \frac{1}{2}k.x^2 \quad \text{.............................(3)}$$



الشكل (2-20)

إذن يمكن كتابة الطاقة الكلية علىصورة المعادلة التالية:

$$T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}m\omega^2.A^2.\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}k.A^2.\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\because \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad ,\therefore k = m\omega^2$$

$$\therefore T.E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2.A^2\cos^2(\omega t + \phi) =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kA^2(1) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore T.E. = \frac{1}{2}m\omega^2.A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{.............................(4)}$$

نجد من المعادلة *(4)* إن الطاقة الكلية تتناسب طرديا مع مربع التردد الدورى ومربع السعة ، ونظرا لان طاقة الوضع تحدث عند $x=A$ أى إن x تكون اكبر ما يمكن وتنعدم السرعة عند ذلك الموضع وبالتالى تكون أقصى طاقة وضع تساوى نصف حاصل ضرب معامل النابض فى مربع أ قصى سعة ويمكن كتابة ذلك على الصورة التالية:

$$P.E._{max.}=\frac{1}{2}kA^2$$

وعند اى وضع نجد ان الطاقة الكلية تساوى مجموع طاقتى الحركة والوضع أى يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$T.E.=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}k.x^2, \quad \because T.E.\frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore m\left(\dot{x}\right)^2+kx^2=kA^2 \quad \therefore \left(\dot{x}\right)^2=\frac{k}{m}A^2-\frac{k}{m}x^2=\omega_n^2\left(A^2-x^2\right)$$

$$\therefore \dot{x}=\pm\sqrt{\omega_n^2\left(A^2-x^2\right)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

وتكون أقصى سرعة عندما تنعدم الازاحة أى إن $x=0$ ويعبر عن ذلك بالعلاقة التالية:

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\omega_n^2.\left(A^2-0\right)}=\pm\omega_n.A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ملحوظة:

ثابت او معامل النابض k يتناسب عكسيا مع طول النابض او مع عدد لفات النابض الحلزونـى ، فاذا كان طول النابض L وعدد لفاتة n فيكون $k \propto 1/L$ اى ان $k=c/L$ وذلك فى حالة تعليق كتلـة m فى نابض معاملة k كما فى حالة الهزاز الميكانيكى البسيط واذا وضعنا نفس الكتلة m فـى منتصـف نفس النابض بحيث تم تثبيت طرفى النابض كما بالمنظومة المبينة بالشكل *(2-21b)* وبالتالى نلاحـظ ان $k_1\propto 1/0.5L$, $k_2\propto 1/0.5L$ اذن يكون $k_2=2c/L$, $k_1=2c/L$ حيث c ثـابت التناسـب ونظـرا لان النابضين متصلين التوازى فى هذة الحالة فيكون ثابت النابض المكافى لهما بعد تعليق الكتلة فى منتصـف هذا النابض هو مجموعهم كما يلى:

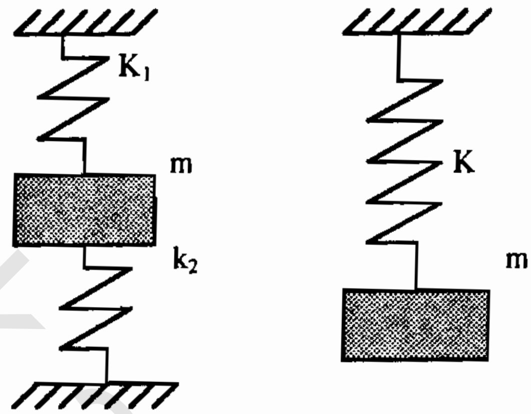
$$k_{eq.}=k_1+k_2=2c/L+2c/L=4c/L=4k$$

اذن معامل النابض المكافى بعد تقسيمة الى نصفين ووضع الكتلة فى منتصفة يساوى اربعة امثال معامل النابض قبل التقسيم .

أمثلة محلولة

1- In the system shown in fig.(2-21a) , the spring has a stiffness of 10 kgf/cm and the mass weight of 20 kgf. Find the natural frequency of the system , and if one mass is attached to mid-point of one spring and the two ends of the spring are securely fixed as shown in fig.(2-21b) , determine the natural frequency of this system.

1-في المنظومة الموضحة بالشكل (2-21a) . معامل النـــابض 10 kgf/cm. ووزن الكتلـــة 20 kgf. ، أوجد التردد الطبيعى للمنظومة ، وإذا علقت الكتلة فى منتصف نفس النابض مع ثبات نهايتى النــــابض كما فى الشكل (2-21b) . أوجد التردد الطبيعى للمنظومة فى هذة الحالة.



الشكل (2-21b)   الشكل (2-21a)

بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل(2-20a)

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{20/981}} = 3.53 \quad c.p.s \quad (Hz)$$

بالنسبة للمنظومة المبينة بالشكل (2-20b)

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = 2k + 2k = 4k$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4(10)}{20/981}} = 7.1 \quad c.p.s \quad (Hz)$$

2-A 12 kgf body hung on the free end of the spring in the system as shown in fig.(2-21a) and the time of period to the vibration motion of this body is 0.85 sec. , Determined the spring stiffness and the time of period to the other body of 4.5 kgf when it is fixed at mid point of this spring as shown in fig.(2-21b).

2-جسم وزنة 12 kgf علق فى الطرف الحر للنابض كما فى المنظومة المبينة بالشـــكل (2-20a) وزمـــن الفترة الاهتزازية 0.85 sec. ، أوجد معامل النابض والفترة الزمنية لاهتزاز جسم اخر وزنـــه 4.5 kgf عندما يثبت فى منتصف نفس النابض كما بالمنظومة المبينة بالشكل (2-21b).

الحل:

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \quad , t_{p_1} = \frac{2\pi}{\omega_{n_1}} = 0.85 \qquad \therefore \omega_{n_1} = \frac{2\pi}{0.85} = 7.39 \quad c.p.s$$

$$\because k = \omega_{n_1}^2 . m_1 \qquad \therefore k = (7.39)^2 . \left(\frac{12}{981}\right) = 0.67 \qquad kg_f / \ cm.$$

في حالة المنظومة المبينة بالشكل(2-21b)

$$\omega_{n_2} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_2}} = \sqrt{\frac{4k}{m_2}} = \sqrt{\frac{4(0.67)}{4.5/981}} = 24.17 \qquad c.p.s.$$

$$\therefore t_{p_2} = \frac{2\pi}{\omega_{n_2}} = \frac{2\pi}{24.17} = 0.26 \qquad \text{sec.}$$

3-A harmonic motion is expressed as x=2.5 sin(10πt-π/3) where x is measured in cm. , (t) in seconds and the angle in radians , determine (a) the frequency and the period of motion, (b) the maximum displacement, velocity and acceleration, (c) the displacement, velocity and acceleration at t =0.3 sec.

3-حركة توافقية يعبر عنها بالمعادلة x = 2.5 sin(10πt-π/3) حيث x هى الازاحة تقاس بالسنتميتر ، (t) الزمن بالثانية ، ω هى السرعة الزاوية وتقاس بالتقدير الدائرى radians ، أوجد:-

أ-التردد الطبيعى والزمن الدورى. ب-أقصى إزاحة وسرعة وعجلة.

ج-الازاحة والسرعة والعجلة بعد فترة زمنية(o.3 sec)

الحل:-

أ-لايجاد التردد الطبيعى والزمن الدورى.

$$\because x = X\sin(\omega t - \theta) = 2.5\sin(10\pi t - \pi/3) \qquad \therefore \omega = 10\pi \qquad rad./\text{sec}$$

$$\because f_n = \frac{\omega}{2\pi} = 5(c.p.s) \qquad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_n} = 0.2\,\text{sec}$$

ب-لايجاد أقصى إزاحة وسرعة وعجلة.

بما أن اقصى إزاحة هى أقصى سعة ويمكن إيجادها من المعادلة المعطاة ، أى ان

$$X_{\max.} = amplitude(A) = 2.5cm.$$

$$v_{\max.} = \omega X = (10\pi)(2.5) = 78.5cm/\text{sec}$$

$$a_{\max.} = \omega^2 . X = (10\pi)^2 (2.5/100) = 24.65m/\text{sec}^2$$

خ-لايجاد الازاحة والسرعة والعجلة at t=0.3sec

$$x = 2.5\sin[10\pi(0.3) - \pi/3] = 2.17cm.$$

$$v = \dot{x} = \left(\frac{2.5}{100}\right)(10\pi)\cos[(10\pi)(0.3) - \pi/3] = -0.38m/\text{sec}$$

$$a = \ddot{x} = \left(\frac{-2.5}{100}\right)(10\pi)^2 \sin[10\pi(0.3) - \pi/3] = -21.39m/\text{sec}^2$$

4-A body of mass 40 gm. excuting simple harmonic motion. The force constant is equall to 600 dyne/cm. The motion is started by displacing the body 16 cm to the right of its equilibrium position and imparting to it a velocity toward the right of 54cm/sec. Compute:-

(a) the period , (b) the frequency , (c) the angular frequency , (d) the total energy , (e) the amplitude , (f) the maximum velocity , (g) the maximum acceleration , (h) the phase angle , (j) the coordinate , velocity , and acceleration at time π/10 ,after the start of motion.

4-جسم كتلته gm. 40 جرام إثير ليتحرك حركة توافقية بسيطة (s.h.m.) وكانت قوة الثابت (معـامل النـابض) 600 dyne/cm والحركة تبدأ بازاحة الجسم مسافة 16 cm من جهة موضع الاتـزان واعطـى الجسـم سرعة إبتدائية 54 cm/sec نحو تلك الجهة إحسب: -

(a) زمن الدورة ، (b) التردد الطبيعى ، (c) التردد الدورى (d) الطاقة الكلية ، (e) السعة ، (f) أقصـى سرعة (g) أقصى عجلة ، (h) زاوية الطور ، (j) الازاحة والسرعة والعجلة عند زمن t=π/10 بعد بدايـة الحركة.

الحل:-

$$(a) \because t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{600}{40}}} = 1.6 \sec$$

$$(b) f_n = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{1.62} = 0.617 (c.p.s)$$

$$(c) \omega_n = 2\pi f_n = 2\pi(0.617) = 3.875 \quad rad./\sec$$

$$(d) The\ total\ energy (T.E.) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(40)(54)^2 + \frac{1}{2}(600)(16)^2 = 135120 (erg.)$$

$$(e) The\ amplitude (A) = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{k}} = \sqrt{\frac{2(135120)}{600}} = 21.2\ cm$$

$$(f) The\ \max.\ velocity (v_{\max.}) = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{m}} = \sqrt{\frac{2(135120)}{40}} = 82.2\ (cm/\sec)$$

$(g) \because$ *The* max*imum acceleration* $(a_{\max.})$ *occurs at the ends of the path where the force is* max*imum.*

$$\therefore a_{\max.} = \omega^2 . x_{\max} = \omega^2 . A = (3.875)^2 . (21.2) = 318.33\ cm/\sec^2$$

$$(h) The\ phas\ angle (\phi) \qquad \because x_\circ = A \sin\phi \qquad \phi = \sin^{-1}\left(\frac{x_\circ}{A}\right)$$

$$\therefore \phi = \sin^{-1}\left(\frac{16}{21.2}\right) = \sin^{-1}(0.755) = 49^\circ$$

(j) *The equation of motion* $x = A\sin(\omega t+\phi) = 21.2\sin(3.875t+49^\circ)$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t+\phi) = (3.875)(21.2)\cos(3.875t+49^\circ)$$

$$= 82.15\cos(3.875t+49^\circ)$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2.A\sin(\omega t+\phi) = -318.3\sin(3.875t+49^\circ)$$

$$\therefore at \quad t = \frac{\pi}{10} \quad \therefore the\ \ phase\ angle(\omega t+\phi) = \left[3.875(\frac{\pi}{10})(\frac{180}{\pi})+49^\circ\right] = 118^\circ\ 75'$$

$$\therefore x = 21.2\sin(118^\circ\ 75') = 18.587\ cm$$

$$\dot{x} = v = -39.51\ cm/\sec \qquad a = \ddot{x} = -279.1\ cm/\sec^2$$

5-A 10 kg body hung on a spring displaces it 40 cm. , it is removed and then 200 gm. is hung on the same spring , the spring stretched and released.
(a)Find the stiffness coefficient of the spring .
(b)Find the period and frequency of the vibration.
(c)If the amplitude is equal to 5 cm. , calculate the total energy of the vibration . Find also the kinetic energy when the displacement is 2 cm. from the centeral position of vibration.

5-جسم كتلتة .10 kg علق فى نابض فحدث لة إزاحة .40 cm . فاذا إزيلت الكتلة الاولى وعلق بدلا منها كتلة اخرى .200 gm فى نفس النابض فحدث لة تمدد ثم ترك حرا .
(أ) اوجد معامل النابض (ب) أوجد الزمن الدورى والتردد الطبيعى للاهتزاز. (ج) إذا كانت السعة .A= 5 cm ، احسب الطاقة الكلية للاهتزاز ، وايضا اوجد طاقة الحركة عندما تكون الازاحة 2 cm. من مركز موضع الاهتزاز.

الحل:-

$$(a)F_s = k\Delta \qquad \therefore k = \frac{F_s}{\Delta} = \frac{10(10^3)(980)}{40} = 245(10^3)\ dyn/cm$$

$$(b) \because \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{245(10^3)}{200}} = 35\ rad/\sec \qquad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{35} = 0.179\ \sec$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{t_p} = 5.59\ cycle/\sec$$

$$(c) The\ totall\ energy(T.E.) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\omega^2.m.A^2 = \frac{1}{2}(35)^2.(200)(5^2) = 3062500\ ergs$$

When the displacement is 2 cm. from the central position of vibration.

$$\therefore The\ kinetic\ energy(K.E.) = \frac{1}{2}k(A^2-x^2) = \frac{1}{2}(245)(10^3)\left[5^2-2^2\right] = 2572.5(10^3)\ ergs.$$

6-A body of mass 800 gm. is suspended from a coil spring of negligible mass , and stretches the spring 10 cm. Find the frequency and amplitude of the insuing motion if the body is displaced 5 cm. below its equilibrium position and given a downward velocity of 70 cm/sec

6-جسم كتلته 800 gm. علق فى نابض حلزونى مهمل الكتلة فحدث تمدد للنابض 10 cm. . أوجد التردد الطبيعى والسعة للحركة إذا حدث للجسم إزاحة 5 cm. اسفل وضع الاتزان واعطى له سرعة cm/sec 70 لاسفل.

الحل:

$$\because mg = k\Delta \quad \therefore k = \frac{mg}{\Delta} = \frac{800(980)}{10} = 78400 \ dyn/cm.$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{78400}{800}} = 9.89 \ rad/\sec$$

$$\because \text{The initial potential } (P.E.) = \frac{1}{2}kx_\circ^2 = \frac{1}{2}(78400)(5^2) = 98(10^4) \ erg.$$

$$\text{The initial kinetic energy}(K.E.) = \frac{1}{2}mv_\circ^2 = \frac{1}{2}(800)(70^2) = 196(10^4) \ erg.$$

$$\text{The totall energy}(T.E.) = K.E. + P.E. = (196+98)(10^4) = 294(10^4) \ ergs.$$

$$\because T.E. = (P.E.)_{max} \qquad \therefore 294(10^4) = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \therefore A = \sqrt{\frac{2(294)(10^4)}{78400}} = 8.7 \ cm.$$

7-A weight of 40 Ib is vertically suspended on a steel wire of length 60 in. and crosssectional area $0.0015 \ in^2$. Determine the frequency of free vibrations of the weight if the modulus for steel is $E = 30(10^6) \ ib.per.in^2$, Determine the amplitude of this vibration if the initial displacement

$x_\circ = 0.02in$,and initial velocity $\dot{x}_\circ = 1.5 \ in.per.\sec$

7-علق وزن 40 Ib راسيا فى سلك من الصلب طولة 60 in ومساحة مقطعه $A = 0.0015 \ in^2$. أوجد التردد الطبيعى للاهتزاز الحر للوزن إذا كان معامل المرونة للسلك $E = 30(10^6) \ Ib/in^2$ أوجد سعة الاهتزاز إذا كانت الازاحة الابتدائية $x_\circ = 0.02 \ in$ والسرعة الابتدائية $\dot{x}_\circ = 1.5 \ in/\sec$

الحل:

بما ان التمدد الطولى الاستاتيكى للسلك يعين من العلاقة التالية:

$$\Delta_{st} = \text{the static elongation of the wire} = \frac{W.L}{E.A}$$

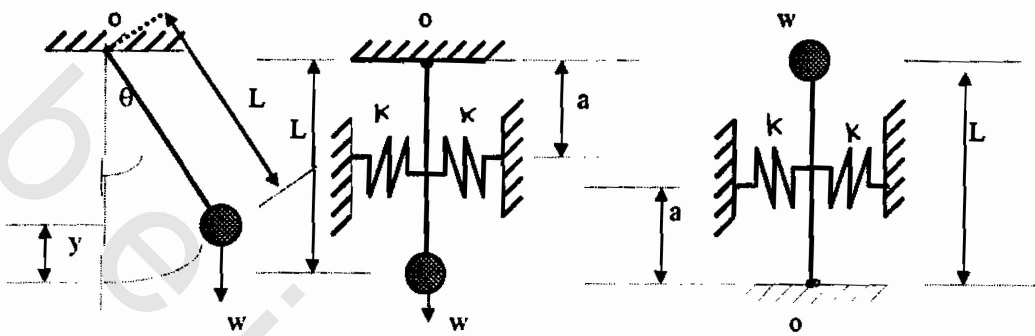
$$\therefore \Delta_{st} = \frac{40(60)}{30(10^6)(0.0015)} = 0.053 \ in \qquad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} = \sqrt{\frac{32.2(12)}{0.053}} = 85.4 \ c.p.s$$

$$\therefore \text{the amplitude of vibration} = A = \sqrt{(0.02)^2 + \left(\frac{1.5}{85.4}\right)^2} = 0.027 \ in$$

$$\text{where } A = \sqrt{x_\circ^2 + \left(\frac{\dot{x}_\circ}{\omega_n}\right)^2}$$

8-Find the frequencies of small vibrations of the pendulums shown in figs. (2-22a,b,c) by using the equation of energy (energy method). Neglect the mass of the bar and assume that in each case the mass of the weight W is concentrated in its center.

8-أوجد ترددات الاهتزازات الصغيرة للبندولات الموضحة بالشكل (2-22a,b,c) باستخدام معادلة الطاقة (طريقة الطاقة) . اهمل كتلة القضيب مع فرض ان الكتلة W فى كل حالة تكون متركزة فى منتصفها.



(a) (b) (c)

الشكل(2-22a,b,c)

أ-بالنسبة للبندول (a)

إذا كانت الزاوية θ هى زاوية ميل البندول على الرأسى فان طاقة الحركة (K.E.) للبندول تعيـــن مـــن العلاقة الاتية:

$$\because x = l\theta \quad ,\dot{x} = l\dot{\theta} \quad \therefore K.E. = \frac{1}{2}mv = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2 \text{ ....(1)}$$

حيث التغيير فى طاقة الوضع للبندول ينتج من الازاحة الراسية y للوزن w وبذلك يمكن كتابة لازاحــة الراسية كما يلى

$$\because y = l - l.\cos\theta = l(1-\cos\theta) \cong l\frac{\theta^2}{2} \qquad \therefore P.E. = W.y = mg,L(\frac{\theta^2}{2})$$

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = const \text{ ....(2)}$$

ولايجاد معادلة الحركة للبندول(a) بطريقة الطاقة نفاضل المعادلة (2) بالنسبة للزمن كما يلى:

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2\left(2.\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}mg.l.\left(2\theta.\dot{\theta}\right) = o \qquad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \;\; ,\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{...c.p.s}$$

ويمكن إيجاد معادلة الحركة بطريقة نيوتن كما يلى:

بما أن عزم الى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى ، حيث يعين عـــزم

اللى الكامن بأخذ العزوم للمنظومة حول محور الدوران 0 ، بينما عزم اللى الاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى للبندول فى العجلة الزاوية ويعبر عن ذلك بالمعادلات الاتية:

$$\sum M_0 = -I\ddot{\theta} \quad \because \sum M_0 = mgl\theta, \quad \because I = ml^2$$

$$ml^2.\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \ldots c.p.s$$

ب- بالنسبة للبندول المبين بالشكل (b) :

نجد إن طاقة الوضع لوزن الكتلة W=mg تضاف الى طاقة الوضع للنوابض وبالتالى يمكن كتابة معادلة الطاقة الكلية للمنظومة كمايلى:

$$\because T.E. = K.E. + P.E. = const. \quad \because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\because k_{eq.} = 2k \therefore P.E. = W.y + \left(\frac{1}{2}k_{eq.}x_2\right), \because y = l - l\cos\theta = l.(1-\cos\theta) = l.\frac{(\theta)^2}{2}$$

$$\therefore P.E. = mgl.\frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}(2k)a^2.(\theta)^2 \quad \because \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2.\left(2.\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + mgl.\frac{\left(2\theta.\dot{\theta}\right)}{2} + k.a^2.\left(2\theta.\dot{\theta}\right) = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{mgl + 2k.a^2}{ml^2}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{mgl + 2k.a^2}{ml^2}} = \sqrt{\frac{2k.a^2}{ml^2} + \frac{g}{l}} \ldots\ldots\ldots\ldots c.p.s$$

ج-بالنسبة للبندول المبين بالشكل (c) نجد أن طاقة الوضع لوزن الكتلة W=mg عند إزاحة البندول من الوضع الرأسى تقل أى تطرح من الطاقة الكلية وبالتالى يمكن كتابة معادلة الطاقة الكلية كما يلى:

$$\therefore T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2 - mgl.\frac{(\theta)^2}{2} + k.a^2.(\theta)^2 \quad \because \frac{d}{dt}(T.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2.\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + k.a^2.\left(2\theta.\dot{\theta}\right) - mgl.\frac{\left(2\theta.\dot{\theta}\right)}{2} = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{2ka^2 - mgl}{ml^2}\right).\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2k.a^2}{ml^2} - \frac{g}{l}} \ldots\ldots\ldots\ldots rad/\sec.$$

9-Two equall masses which each mass of 6 kg are suspended in a free end of a coil spring has stiffness 3 kN. If one mass is suddenly removed and the system is released to vibrate.
1-Find the amplitude and the frequency of the vibration motion.
2-Find the speed, the acceleration of the mass when the mass at the middle position of the amplitude.
3-Find the kinetic energy of vibration (in jole units

9-كتلتين متساويتين كتلة كل واحدة منها 6 كيلو جرام علقوا فى نهاية الطرف الحر لنـــابض حلزونـــى معاملة 3 كيلو نيوتن ، إذا إزيلت إحدى الكتلتين فجأة وتركت المنظومة تهتز .

1-أوجد السعة والتردد للحركة الاهتزازية. 2-أوجد السرعة والعجلة للكتلة عندما تكون الكتلة فى موضع منتصف السعة. 3-أوجد طاقة الحركة للاهتزاز بوحدة الجول.

الحل:-

1-عند موضع الاتزان نجد ان $M\,g = k\Delta$ حيث M هى مجموع الكتلتين 12 كيلو جرام

$$\therefore \Delta = \frac{M.g}{k} = \frac{12(9.81)}{3(10)^3} = 0.03924m$$

وفى حالة تعليق أحد الكتلتين نجد أن

$$\Delta_1 = \frac{m.g}{k} = \frac{6(9.81)}{3(10)^3} = 0.01962m \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_1}}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{9.81}{0.01962}} = 22.36 \qquad rad./\sec.$$

2-عند مرور الكتلة عند موضع منتصف السعة.

$$\because v = \dot{x} = \omega_n\sqrt{a^2 - x^2} \qquad , a = \ddot{x} = 0.01962m \qquad , x = a\cos\varphi \qquad \varphi = 60^0$$

$$\therefore x = 0.01962\cos 60 = 0.00981, \quad v = 22.35\sqrt{(0.01962)^2 - (0.0098)^2} = 0.38m/\sec$$

$$f = \omega^2.x = (22.35)^2.(0.0098) = 4.905m/\sec^2$$

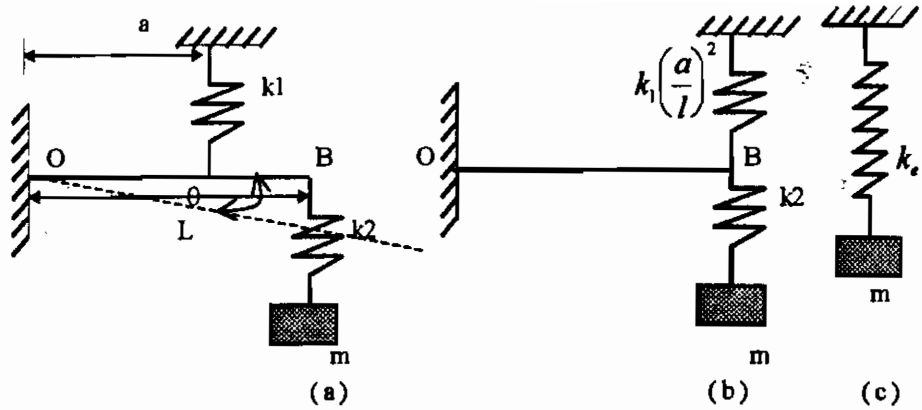
3-لايجاد سرعة الكتلة عند مرورها بالوضع المتوسط وإيجاد طاقة الحركة

$$\because v_{max.} = \omega^2.a = (22.35)^2(0.01962) = 0.4385\,m/\sec$$

$$at\ \ x = o\ ,\because K.E. = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}(4)(0.4385)^2 = 0.3844 \quad Jole$$

10-Determine the natural frequency of vibration of the system shown in fig.(23). Assume the bar OB to be rigid and weightless.

10- أوجد التردد الطبيعى المكافئ للاهتزاز للمنظومة الموضحة بالشكل (23 أ). إفرض ان القضيـــب OB جاسئ ومهمل الوزن.



(2-23-a,b,c)

يمكن نقل النابض k_1 من البعد a الى البعد L فيكون معامل النابض فى هذة الحالة $k = k_1\left(\frac{a}{l}\right)^2$

وباعتبار ان القضيب OBيحدث لة إزاحة زاوية θ وبذلك يمكن إيجاد العزم الناتج ويعبر عنـــة بالعلاقـــة

$$k_1.a\theta.a = k_1.a^2\theta \qquad \text{.....(1)}$$

وعندما ينقل النابض الى البعد Lوباعتبار ان معاملة k فيمكن كتابة العزم الجديد كما بالمعادلة الاتية:

$$k l\theta.l. = k.l^2.\theta \qquad \text{.....(2)}$$

وفى حالة المنظومة (2-23-b) المكافئة ينتج من المعادلتين (1),(2) معامل النابض بعد نقلة الى النقطة B يكون

$$k = \left(\frac{a}{l}\right)^2.k_1 \qquad \text{.....(3)}$$

وتكون المنظومة (b) هى المنظومة المكافئة للمنظومة (a) ويمكن إيجاد k_eللمنظومة (b) كما يلى:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{l}\right)^2.k_1} = \frac{k_1\left(\frac{a}{l}\right)^2 + k_2}{k_2\left(\frac{a}{l}\right)^2.k_1}$$

وبذلك يمكن إيجاد معامل النابض المكافئ للمنظومة من العلاقة التالية:

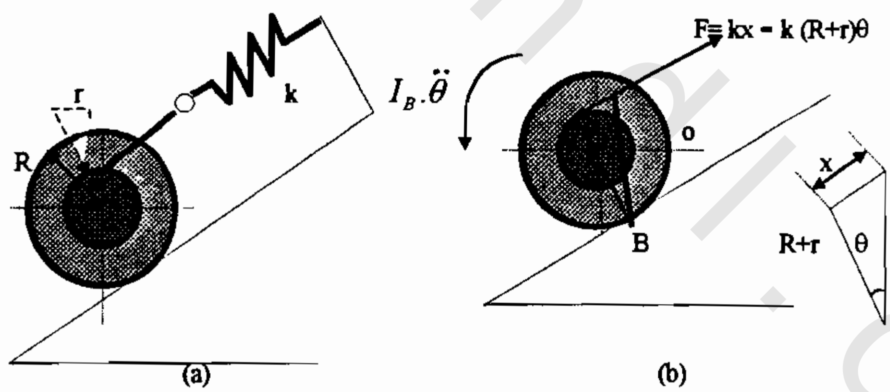
$$k_e = \frac{k_2\left(\frac{a}{l}\right)^2.k_1}{k_1\left(\frac{a}{l}\right)^2 + k_2}$$

وبذلك يمكن إيجاد التردد الطبيعى للمنظومة (c) من العلاقة التالية:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1.k_2\left(\frac{a}{l}\right)^2}{m\left[k_2+\left(\frac{a}{l}\right)^2.k_1\right]}}\ldots\ldots\ldots\ldots Hz$$

11- A uniform wheel of radius R can roll without slipping on an inclined plane. Concentric with the wheel, and fixed to it, is a drum of radius r around which is wrapped one end of a string. The other end of the string is fastened to an anchored spring, of stiffness k, as shown in fig.(2-24). Both spring and string are parallel to the plane. The total mass of the wheel / drum assembly is m and its moment of inertia about the axis through the centre of the wheel O is I, If the wheel is displaced a small distance from its equilibrium position and released, Determine the equation describing the ensuing motion and hence
calculate the frequency of the oscillations. Damped is negligibl.e

11-عجلة منتظمة نصف قطرها R تتدحرج بدون إنزلاق على مستوى مائل ، ومركز العجلة مثبت بـة قرص نصف قطرة r ولف إحدى طرفى خيط حول القرص والطرف الاخر بة خطاف (هلب) ركب فيـة نابض معاملة k كما مبين بالشكل (24) وكل من النابض والخيط متوازيين للمستوى المائل ، وكتلة كـل من العجلة والقرص مجمعة معا m وعزم القصور الذاتى لهما حول محور يمر بمركزهما o هو I ، وإذا إزيحت العجلة لمسافة صغيرة من وضع الاتزان ثم ترك . أوجد المعادلة التى تصف حركة المنظومـة وكذلك إحسب التردد الطبيعى للتذبذب مع إهمال الخمد.



شكل (2-24-a,b)

بفرض أن الكتلة للمنظومة معا m وهى العجلة والقرص اعطى لهما إزاحة زاوية مقدارها θ فى إتجـاة عكس عقارب الساعة وذلك من موضع الاتزان فان النابض الذى معاملة k يحدث لة إزاحـة زاويـة مقدارها $x=(R+r)\theta$ وبذلك تكون قوة مقاومة النابض تعين من العلاقة التالية $F=k(R+r)\theta$ وحيـث ان الدوراني كون لحظى عند نقطة التلامس B لذلك فان العزم حول B يعين من العلاقة التالية:

$$\sum M_B = -kx(R+r) = -k(R+r)^2.\theta$$

أ-طريقة نيوتن :

$$\therefore I_B\ddot{\theta} = -k(R+r)^2\theta \qquad \because I_B = mR^2 + I \qquad \therefore \ddot{\theta} + \frac{k(R+r)^2}{I + mR^2}\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2+I}} \dots rad/\sec \quad , \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2+I}} \dots\dots\dots Hz$$

ب-طريقة الطاقة:

$$\because K.E. = \frac{1}{2}I_B\left(\dot{\theta}\right)^2 \qquad ,P.E = \frac{1}{2}k(R+r)^2.\theta^2,$$

$$\because T.E. = K.E. + P.E = const$$

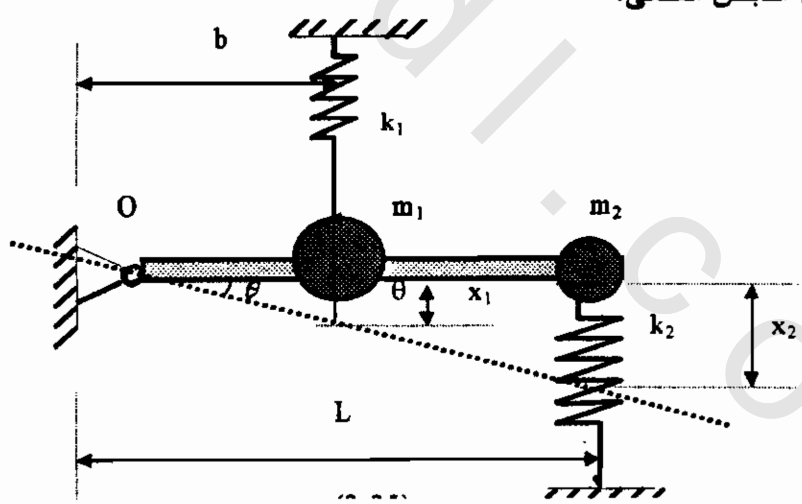
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = 0, \qquad \therefore \frac{1}{2}I_B\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}k(R+r)^2\left(2\theta\dot{\theta}\right) = 0$$

$$I_B.\ddot{\theta} + k(R+r)^2.\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k(R+r)^2}{mR^2+I}\right)\theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(R+r)^2}{mR^2+I}} \dots\dots\dots\dots Hz$$

12-Determine the equation of motion and the natural frequencyof the system as shown in fig.(2-25) and also determine the equivalent mass and the equivalent stiffness of the spring.

12-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل (2-25) وكذلك أيضا اوجد الكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ.



الشكل (2-25)

$\sin\theta = \frac{x_1}{b} = \frac{x_2}{l}, \because \theta$ *is very smal angle* $\therefore \sin\theta \cong \theta, \therefore x_1 = b\theta, x_2 = l\theta$

$v_1 = \dot{x}_1 = b\dot{\theta}, v_2 = \dot{x}_2 = l\dot{\theta} \quad \because K.E. = \frac{1}{2}m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\theta}^2$

$P.E. = \frac{1}{2}k_1.x_1^2 + \frac{1}{2}k_2.x_2^2 = \frac{1}{2}k_1.b^2.(\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2.l^2.(\theta)^2$

$\because T.E. = K.E. + PE. = const. \quad , \frac{d(T.E)}{dt} = \frac{d}{dt}(T.E. + K.E.) = 0$

$$\therefore \frac{1}{2}m_1 b^2\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}m_2 l^2\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}k_1 b^2\left(2\theta.\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}k_2 l^2\left(2\theta.\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\therefore \left(m_1.b^2 + m_2.l^2\right)\ddot{\theta} + \left(k_1.b^2 + k_2.l^2\right)\theta = 0$$

$\therefore$ *the equation of motion* $\quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2}\right)\theta = 0$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2}} \quad c.p.s$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1.b^2 + k_2.l^2}{m_1.b^2 + m_2.l^2}} \quad HZ$$

the mass equivalent $= m_{equ.} = m_1.b^2 + m_2.l^2$

the equivalent of spring stiffness $= k_1.b^2 + k_2.l^2$

13-Determine the equation of motion and the natural frequency of the system as shown in fig.(2-26) , also determine the equivalent of mass and the equivalent of the spring stiffness.

13-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-26) ، أيضا أوجد الكتلة المكافئة ومعامل النابض المكافئ.

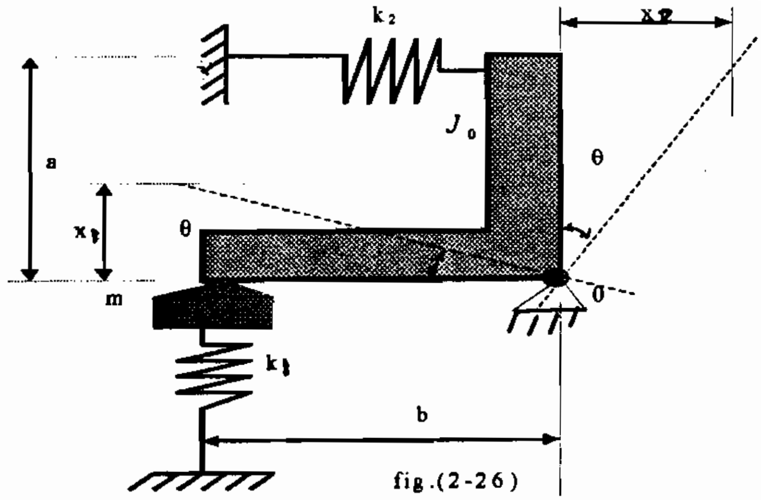


fig.(2-26)

$\sin\theta \cong \theta = x_1/b = x_2/a \quad \therefore x_1 = b\theta\ ,\ x_2 = a\theta$

$$\therefore v_1 = \dot{x}_1 = b\dot{\theta} \qquad v_2 = \dot{x}_2 = a\dot{\theta} \qquad \because T.E. = K.E. + P.E. = const$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0 ; \qquad \because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1\right)^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\therefore K.E. = \frac{1}{2}m.b^2\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J_0\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}k_1.x_1^2 + \frac{1}{2}k_2.x_2^2 = \frac{1}{2}k_1.b^2.(\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2.a^2.(\theta)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}m.b^2.\left(2.\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}J_0.\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}k_1.b^2.\left(2\theta.\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}k_2.a^2.\left(2.\theta\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\left(mb^2 + J_0\right)\ddot{\theta} + \left(k_1.b^2 + k_2.a^2\right)\theta = 0$$

$$\therefore \textit{the equation of motion} \qquad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1.b^2 + k_2.a^2}{mb^2 + J_0}\right)\theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1.b^2 + k_2.a^2}{mb^2 + J_0}} \ldots\ldots\ldots HZ$$

$$\textit{the mass equivalent} = mb^2 + J_0$$

$$\textit{the equivalent of the spring stiffence} = k_1.b^2 + k_2.a^2$$

14-A simple pendulum in position up side down as shown in fig. (2-27). Two springs are fixed at the mid-point of the simple pendulum , Each of the spring has stiffness (k) , A mass (m) fixed in the free end of the simple pendulum. a-Determine the natural frequency of the system , when a small angle displacement (θ) give to the system. b-If the length of the simple pendulum can be change , Determine the length of the simple pendulum , when it can not be able to vibrate.

14-بندول بسيط فى وضع مقلوب كما مبين بالشكل (2-27) ، نابضين مثبتين عند منتصف البندول

البسيط، معامل كل نابض k ، كتلة (m) ثبتت فى الطرف الحر للبندول البسيط. (أ) أوجد التردد الطبيعى للمنظومة، إذا إعطى إزاحة زاوية (θ) صغيرة للمنظومة. (ب)إذا كان طول البندول البسيط يمكن تغيرة ، أوجد طول البندول البسيط عندما لايكون غير قادرعلى الاهتزاز.

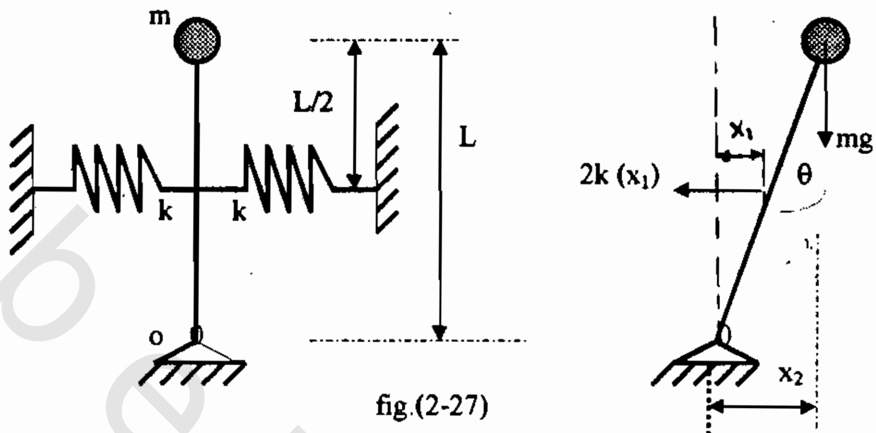


fig.(2-27)

بما أن عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فىالاتجاة عزم اللى الاسترجاعى ، حيث عزم اللى الكامن يعين باخذ العزوم حول محور الدوران وعزم اللىالاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى للمنظومة فى العجلة الزاوية.

$$\because x_1 = \frac{1}{2}l\theta \quad , x_2 = l\theta \quad , \sum M_0 = -I\ddot{\theta}$$

$$\because \sum M_0 = 2k\frac{l}{2}\theta.\frac{l}{2} - mgl\theta$$

$$\therefore 0.5kl^2.\theta - mgl\theta + I\ddot{\theta} = 0 \qquad \therefore I\ddot{\theta} + \left(0.5kl^2 - mgl\right)\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{0.5kl^2 - mgl}{I}\right)\theta = 0 \qquad , \because I = ml^2$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{0.5kl - mg}{ml}} \ldots\ldots\ldots r.p.s$$

ويمكن إيجاد معامل الالتواء q وطول البندول عندما لايكون غير قادرعلى الاهتزاز يكون التردد الطبيعى مساويا للصفر. كما يلى:

$$q = \frac{F.\left(\frac{l}{2}\right)}{\theta} = \frac{kx_1.\left(\frac{l}{2}\right)}{\theta} = \frac{kl^2}{4\theta} \qquad \therefore \sqrt{\frac{0.5kl - mg}{ml}} = 0 \quad \therefore 0.5kl - mg = 0 \quad \therefore l = \frac{2mg}{k}$$

15-Assuming that the cylinder shown in fig.(2-28) rolls on the support without slippage , the cylinder of mass m and the moment of inertia $I = \frac{mr^2}{2}$, determine the equation of motion of the system by the Energy Method and Newton s law of Motion.

15-افرض ان الاسطوانة المبينة بالشكل (2-28) تتدحرج بدون إنزلاق ، كتلة الاسطوانة m وعزم

القصور الذاتى لها I ، أوجد معادلة الحركة للمنظومة بطريقتى الطاقة وقانون نيوتن للحركة.

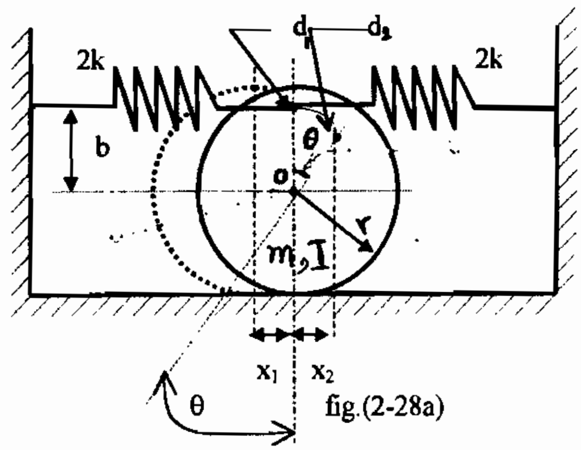


fig.(2-28a)

عندما تتدحرج الاسطوانة التى كتلتها m وعزم القصور الذاتى لها $I = \frac{mr^2}{2}$ ، فـــان الاســـطوانة تتحرك مسافة x1 بينما نقطة إتصال النوابض d1 تتحرك نفس المسافة x1 بالاضافة الـــى المســـافة x2 وذلك لان نقطة d1 ليست فى مركز الاسطوانة ولكنها على بعد b من مركز الاسطوانة o وبالتالى فنقطـة d1تتحرك حركة زاوية نتيجة دحرجة الاسطوانة وتأخذ الموضع d2 وبالتالى يمكن إيجاد قيمة كل مـــن x1 , x2 بدلالة الزاوية θ كما يلى:

$$x1 = r\sin\theta \cong r\theta \quad , \quad x2 = b\sin\theta \cong b\theta$$

وبذلك تكون إزاحة الاسطوانة هى x1= rθ ، وإزاحة النوابض هى مجموع الازاحتين x2 , x1 أى إن x1+x2=(r+b)θ

ونظرا لان النوابض متصلة على التوازى فيكون معامل النابض المكافئ هو مجموعهم ويعين من العلاقة التالية: $k_{eq.} = 2k + 2k = 4k$

$$\because T.E. = K.E + P.E. = const \qquad \because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\because P.E = \frac{1}{2}k_{eq}x_1^2 = 2k(r+b)^2.\theta^2$$

$$\therefore \frac{d(K.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2 + 2k.(r+b)^2.(\theta)^2\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}mr^2\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}I.\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + 2k.(r+b)^2.\left(2\theta.\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\therefore (mr^2 + I)\ddot{\theta} + 4k.(r+b)^2.\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{4k(r+b)^2}{mr^2+I}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{4k(r+b)^2}{mr^2+I}} = 2(r+b)\sqrt{\frac{2k}{3mr^2}} \text{.......... ..} r.p.s$$

$$\therefore f_n = \frac{(r+b)}{\pi.r}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \text{......... ....} Hz$$

d

2k(x+b

طريقة نيوتن /ton' s Method

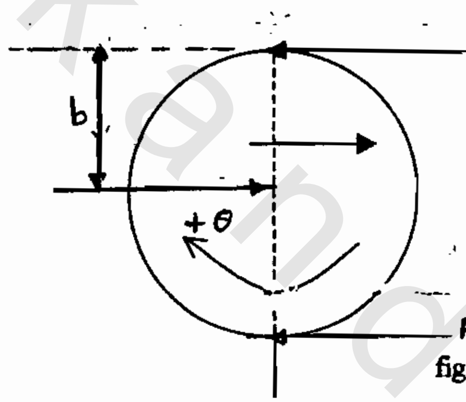


fig.(2-28b)

$$\because m\ddot{x} = \sum F \text{ in } x \text{ direction} \quad \therefore m\ddot{x} = -F - 4k(x+b\theta) = -F - 4k(r+b)\theta \qquad (1)$$

$$\because I\ddot{\theta} = \sum \text{Troque about } (o) \quad \therefore I\ddot{\theta} = F.r - 4k(x+b\theta).b = F.r - 4k(r+b).b\theta$$

$$\therefore \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = F.r - 4k(r+b)b\theta \text{...} (2)$$

بضرب المعادلة (1) فى r ينتج ان

$$mr^2\ddot{\theta} = -F.r - 4kr(r+b)b\theta \text{...}(3)$$

$$from(2),(3) \qquad \left(mr^2 + \frac{mr^2}{2}\right)\ddot{\theta} = -4k(r+b)b\theta - 4kr(r+b)\theta$$

$$\therefore 3mr^2\ddot{\theta} + 8k(r+b)^2.\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{8k(r+b)^2}{3mr^2}\right)\theta = 0 \text{..........................}(4)$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{8k(r+b)^2}{3mr^2}} = \frac{2(r+b)}{r}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad r.p.s. \qquad , f_n = \frac{(r+b)}{\pi.r}\sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad Hz\text{......}(5)$$

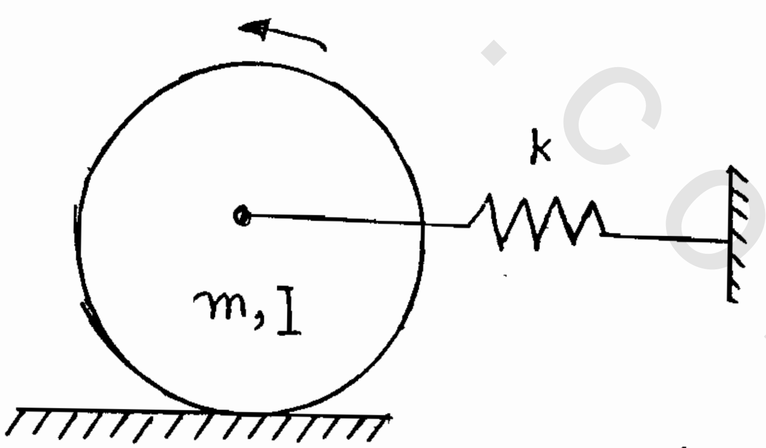
16-Acylinder mass m and the moment of inertia I as shown in fig.(2-29) , rolls on the roughness support without slippage , Determine the equation of motion and the natural frequency by Energy Method and $I = \frac{mr^2}{2}$ Netwon s law of Motion. where

16-إسطوانة كتلتهاm وعزم القصور الذاتى لها I كما مبين بالشكل (2-29) تتدحرج على سطح خشن بدون إنزلاق ، أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى بطريقة الطاقة وقانون نيوتن للحركة. حيث

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

أولا-طريقة الطاقة:

عندما تتدحرج الاسطوانة لازاحة خطية x فانها تناظر إزاحة زاوية يعبر عنها بالعلاقة rθ حيث x =rθ ، وبذلك تكون $\dot{x} = r\dot{\theta}$, $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ ونظرا لان الطاقة الكلية تكون ثابتة لاى منظومة عند اى موضع ، وبالتالى يمكن التعبير عن الطاقة الكلية لهذه المنظومة بالعلاقة التالية: T.E.=K.E.+P.E.=const.



الشكل (2-29)

$$\because K.E.=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}mr^2.\left(\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$P.E.=\frac{1}{2}(2k).(x)^2=kx^2=kr^2.(\theta)^2$$

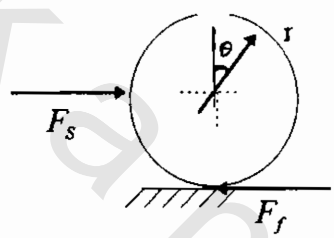
$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mr^2\left(\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2+kr^2.(\theta)^2\right]=0$$

$$\therefore mr^2.\dot{\theta}\ddot{\theta}+I\dot{\theta}.\ddot{\theta}+2k.r^2.\theta.\dot{\theta}=0$$

$$\therefore \left(mr^2+I\right)\ddot{\theta}+2kr^2.\theta=0 \qquad \therefore \ddot{\theta}+\left(\frac{2k.r^2}{mr^2+I}\right)\theta=0, \quad \because I=\frac{mr^2}{2}$$

$$\therefore \omega_n=\sqrt{\frac{4k.r^2}{3mr^2}}=2\sqrt{\frac{k}{3m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r.p.s$$

ب-طريقة نيوتن (قانون نيوتن الثانى للحركة)



الشكل(2-30)

طبقا لقانون نيوتن الثانى نجد أن:

$$\because \sum F=m\ddot{x} \quad ,\because x=r\theta \;\; \therefore \dot{x}=r\dot{\theta} \quad \ddot{x}=r\ddot{\theta}$$

$$,\because \sum F=F_f-F_S \quad ,\because F_s=2kx=2kr\theta$$

$$\therefore \quad F_f-2kr\theta=mr\ddot{\theta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وبما ان عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى (الرجوعى) ، حيث عزم اللى الكامن يعين بأخذ العزوم حول مركز الدوران o ، عزم اللى الاسترجاعى يساوى حاصل ضرب عزم القصور الذاتى فى العجلة الزاوية.

$$\therefore \sum M_0=F_f.r \quad ,\because \sum M_0=-I\ddot{\theta} \;\; \therefore \;\; F_f=-\frac{I\ddot{\theta}}{r}\ldots\ldots(2)$$

وبالتعويض من المعادلة(2) فى المعادلة(1) ينتج أن:

$$\therefore -\frac{I\ddot{\theta}}{r} - 2kr\theta = mr\ddot{\theta}$$

$$\therefore mr\ddot{\theta} + \frac{I\ddot{\theta}}{r} + 2kr\theta = 0 \qquad \therefore \left(mr + \frac{mr^2}{2r}\right)\ddot{\theta} + 2kr\theta = 0$$

$$\therefore \left(\frac{3mr}{2}\right)\ddot{\theta} + 2kr\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{4kr}{3mr}\right)\theta = 0 \quad \omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{3m}} \ldots . r.p.s$$

17-Determine the equation of motion and the natural frequency of the system as shown in fig.(2-31) , by Energy Method , where it is composed from a mass m , a spring has a stiffness co-efficent k and a disc has moment of inertia I.

17-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومة المبينة بالشكل (2-31) ، بطريقة نيوتن حيث تتكـون من كتلة m ونابض معاملة k وقرص عزم القصور الذاتي له I.

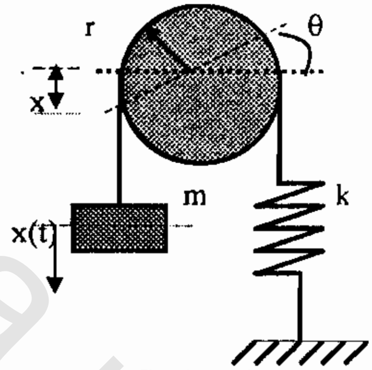


fig.(2-31)

$$\because x = r\theta \qquad \therefore \dot{x} = r\dot{\theta} \qquad , \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\because T.E. = K.E. + P.E. = const \qquad , \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}[K.E. + P.E.] = 0$$

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}mr^2.\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$P.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kr^2(\theta)^2$$

$$\therefore \frac{d(T.E.)}{dt} = \left[\frac{1}{2}mr^2\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}I\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}kr^2.\left(2\theta.\dot{\theta}\right)\right] = o$$

$$\therefore \left(mr^2 + I\right)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{kr^2}{mr^2 + I}\right)\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kr^2}{mr^2 + I}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r.p.s$$

18-Determine the equation of motion and the natural frequency of oscillation of the system shown in fig.(2-32). by Newton s Method.

18–أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي لتذبذب المنظومة المبينة بالشكل (2–32) بطريقة نيوتن.

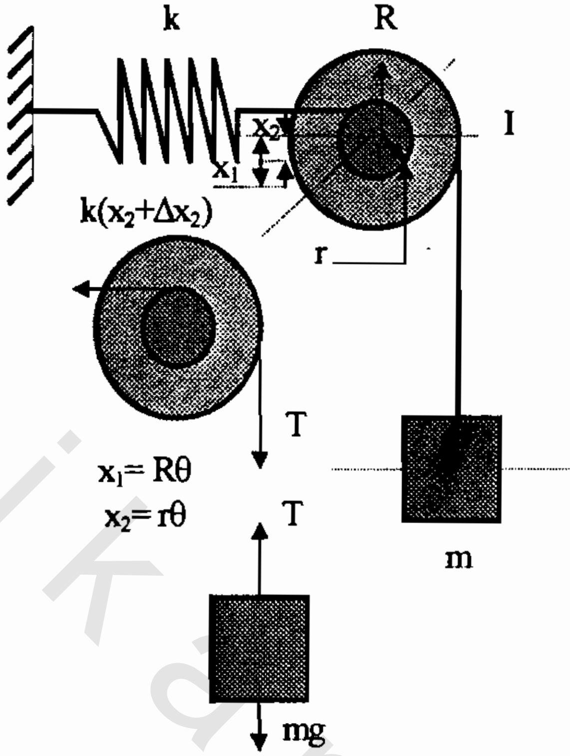


fig.(2-32)

بتطبيق قانون نيوتن نجد أن

$$\because \sum F = m\ddot{x},\quad x_1 = R\theta,\quad x_2 = r\theta\ ,\dot{x}_1 = R\dot{\theta}\ ,\ddot{x}_1 = R\ddot{\theta}\ ,\dot{x}_2 = r\dot{\theta}\ ,\ddot{x}_2 = r\ddot{\theta}$$

:

$$\because m\ddot{x}_1 = mg - T \qquad \therefore T = mg - m\ddot{x}_1 = mg - mR\ddot{\theta}$$

$$\because \sum M_O = -I\ddot{\theta} \qquad ,\because \sum M_0 = k(x_2 + \Delta x_2)r - T.R$$

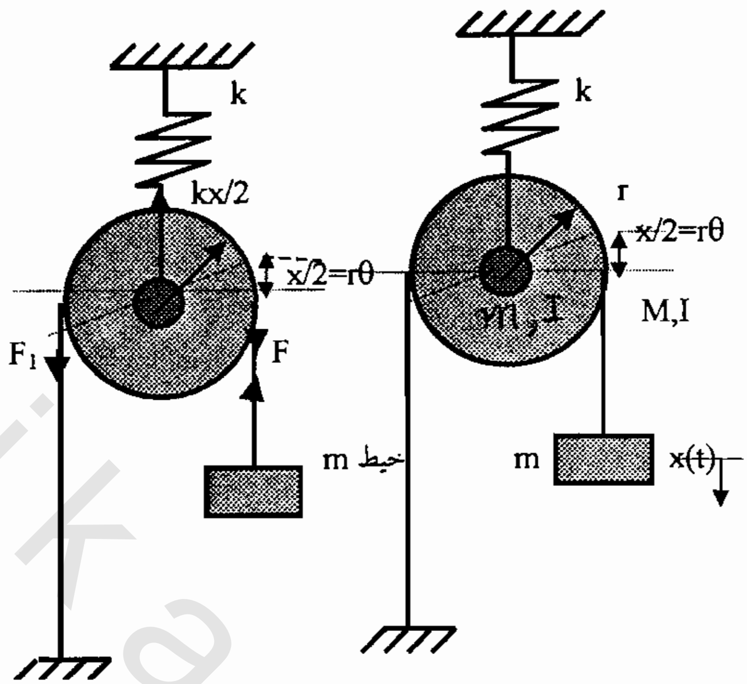
$$\therefore I\ddot{\theta} + kx_2.r + k\Delta x_2.r - \left(mg - mR\ddot{\theta}\right)R = 0$$

$$\therefore \left(I + mR^2\right)\ddot{\theta} + k\Delta x_2.r - mgR + k.r^2.\theta = 0\ , \qquad \because k\Delta x_2.r = mgR$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k.r^2}{I + mR^2}\right)\theta = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k.r^2}{I + mR^2}}..................c.p.s$$

19-Determint the equation of motion and the natural frequency of the system shown in fig.(2-33), the system composed of a mass m, spring has stiffness k, and a disc of mass M and the moment of inertia of the disc I.

19- أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل (2-33) ، المنظومة تتكون من كتلة m ونابض معاملة k وقرص كتلتة M وعزم القصور الذاتى لة I.



الشكل(2-33b) الشكل(2-33a)

أ-طريقة الطاقة:

عندما تتحرك الكتلة m إزاحة خطية x فان مركز القرص يتحرك إزاحة زاوية قدرها x/2=rθ أى ان كل من القرص والنابض يتحرك مسافة x/2 ، وبتطبيق طريقة الطاقة نجد أن:

$$T.E.=K.E.+P.E.=const.$$

$$\because K.E.=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2, \quad \because \frac{x}{2}=r\theta \quad \therefore \theta=\frac{x}{2r} \quad \therefore \dot{\theta}=\frac{\dot{x}}{2r}$$

$$\therefore K.E.=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{M}{8}\left(\dot{x}\right)^2+\frac{I}{8r^2}\left(\dot{x}\right)^2$$

$$P.E.=\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{k}{8}(x)^2, \because \quad \frac{d(T.E.)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2+\frac{M}{8}\left(\dot{x}\right)^2+\frac{I}{8r^2}\left(\dot{x}\right)^2+\frac{k}{8}(x)^2\right]=0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m.(2\,\dot{x}.\ddot{x}) + \frac{M}{8}(2.\dot{x}.\ddot{x}) + \frac{I}{8r^2}(2.\dot{x}.\ddot{x}) + \frac{k}{8}\left(2.x.\dot{x}\right) = 0$$

$$\therefore (m + \frac{M}{4} + \frac{I}{4r^2})\ddot{x} + \frac{k}{4}.x = 0 \qquad \therefore (4m + M + \frac{I}{r^2})\ddot{x} + k.x = 0$$

$$\therefore \ddot{x} + \left(\frac{k}{4m + M + \frac{I}{r^2}}\right)x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m + M + \frac{I}{r^2}}} \ldots\ldots\ldots c.p.s. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ب-طريقة نيوتن:من الشكل (2-33b) نلاحظ مايلى:

$$\because m\ddot{x} = -F \ldots(1) \qquad ,M\left(\frac{\ddot{x}}{2}\right) = F + F_1 - k\frac{x}{2} \ldots(2) \qquad ,\because I = F.r - F_1.r \ldots.(3)$$

$$from(1)\ in\ (2)\ ,\ (3) \qquad \therefore M\left(\frac{\ddot{x}}{2}\right) = -m\ddot{x} + F_1 - k\left(\frac{x}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

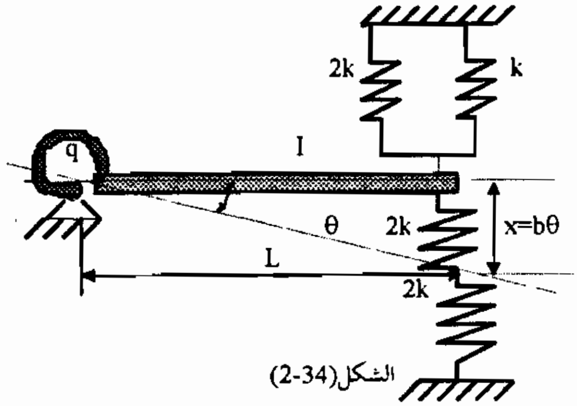
$$I\ddot{\theta} = -m\ddot{x}r - F_1 r \qquad ,\therefore \frac{I\ddot{\theta}}{r} = -m\ddot{x} - F_1 \ldots\ldots(5) \qquad \because \frac{x}{2} = r\theta \quad \therefore \frac{\ddot{x}}{2} = r\ddot{\theta} \quad ,\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{2r}$$

$$\therefore put\ \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{2r}\ \ in\ equation(5) \qquad \therefore \frac{I\ddot{x}}{2r^2} = -m\ddot{x} - F_1 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\therefore \frac{M\ddot{x}}{2} + \frac{I\ddot{x}}{2r^2} = -2m\ddot{x} - k\frac{x}{2} \quad \therefore \left(M + \frac{I}{r^2} + 4m\right)\ddot{x} + kx = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + I/r^2 + 4m}}$$

20-Determine the equation of motion and the natural frequency shown in fig.(2-34).by the Energy method , Solvethe problems by Newton smethod also.

20-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل(2-34) بطريقةالطاقـــة ، حـــل هـــذة المسألة (المشكلة) بطريقة نيوتن أيضا



الشكل(2-34)

أ-طريقة الطاقة:

لمنظومة المبينة بالشكل (2-34) تتكون من أربعة نوابض حلزونية وهما 2k , 2k , k , 2k والنابض الالتوائ الذى معاملة q ، والقضيب عزم القصور الذاتئ لة I ، نعين معامل النابض المكافئ للنوابض الحلزونية المتصلة على التوازى مثل النابضين k , 2k بالنصف العلوى للمنظومة والنابضين المتصلان على التوالى مثل النابضين 2k ,2k بالنصف السفلى للمنظومة.

$$k_{eq.} = 2k + k + \frac{1}{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}} = 4k$$

$$\because T.E. = K.E. + P.E. = const., \quad x = l\theta, \quad F_s = k_{eq.}x = 4kl\theta \ , \dot{x} = l\dot{\theta}$$

$$\because K.E. = \frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2 \quad ,P.E. = \frac{1}{2}q.(\theta)^2 + \frac{1}{2}(4k)l^2.(\theta)^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(T.E.) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}I.\left(\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}q.(\theta)^2 + 2k.l^2.(\theta)^2\right] = 0$$

$$\therefore I.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + q.\theta.\dot{\theta} + 4k.l^2.\theta.\dot{\theta} = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{q + 4kl^2}{I}\right)\theta = 0$$

$$\therefore \omega_N = \sqrt{\frac{q + 4kl^2}{I}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c.p.s$$

ب-طريقة نيوتن:

بما أن عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى ومن ذلك نجد أن:

$$\therefore \sum M_0 = -I.\ddot{\theta}\,, \quad \because \sum M_0 = q\theta + 4k.xl = q\theta + 4k.l\theta l$$

$$\therefore \sum M_0 = q\theta + 4kl^2.\theta \qquad \therefore I.\ddot{\theta} + q\theta + 4kl^2.\theta = 0$$

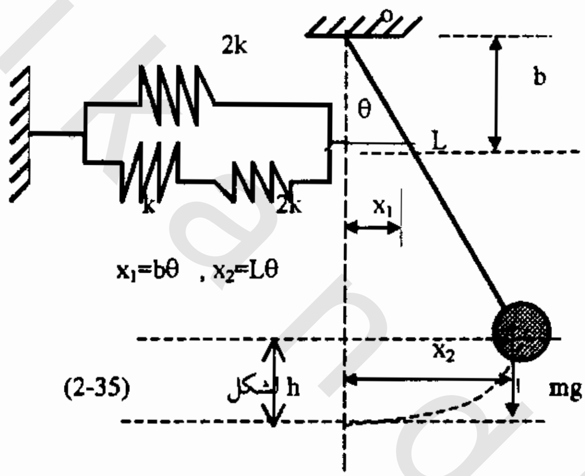
$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{q+4kl^2}{I}\right)\theta = 0\,, \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{q+4kl^2}{I}} \ldots\ldots\ldots\ldots c.p.s$$

21-Determine the equation of motion and the natural frequency as shown in fig.(2-35).

21-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل (2-35)

الحل:المنظومة المبينة بالشكل (2-35) هى بندول بسيط متصل بثلاث نوابض وهما النابض العلوى 2k والمتصل على التوازى مع النابضين الاخرين وهما k,2k وهما متصلان على التوالى معا، ولهذا نعين معامل النابض المكافئ للمنظومة كما يلى.

$$k_{eq.} = 2k + \frac{1}{\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}} = 2k + \frac{2k}{3} = \frac{8k}{3}$$



الشكل (2-35)

أ-طريقة نيوتن: بما أن عزم اللى الكامن $\sum M_0$ يساوى عزم اللىالاسترجاعى $I\ddot{\theta}$ فى المقدار ويخالفة فى الاتجاة.

$$\because \sum M_0 = -I.\ddot{\theta}\,, \quad \because \sum M_0 = mgl\theta + k_{eq.}b\theta.b = mgl\theta + \frac{8k.b^2}{3}\theta$$

$$\therefore I\ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{8k.b^2}{3}\right)\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{3mgl+8kb^2}{3I}\right]\theta = 0 \quad \because I = ml^2$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3mgl+8kb^2}{3I}} = \sqrt{\frac{3mgl+8kb^2}{3ml^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots r.p.s$$

ب-طريقة الطاقة:

الطاقة الكلية للمنظومة تتمثل فى طاقة الحركة للكتلة بينما طاقة الوضع تتمثل فى طاقة الوضع لوزن

الكتلة mg أى تساوى وزن الكتلة مضروب فى إرتفاع الوزن h عن موضع الاتزان الاستاتيكى ، بالاضافة الى طاقة الوضع للنابض المكافئ للمنظومة ،ويعبر عن ذلك بما يلى:

$$\because T.E. = K.E. + P.E. = const., \quad \because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2.\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\because P.E. = W.h + \frac{1}{2}k_{eq}.x_1^2 = mg.h + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right).b^2.(\theta)^2$$

$$\because \quad h = l - l.\cos\theta = l.(1-\cos\theta) = l.\frac{(\theta)^2}{2} \qquad \therefore P.E. = mgl\frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right).b^2.(\theta)^2$$

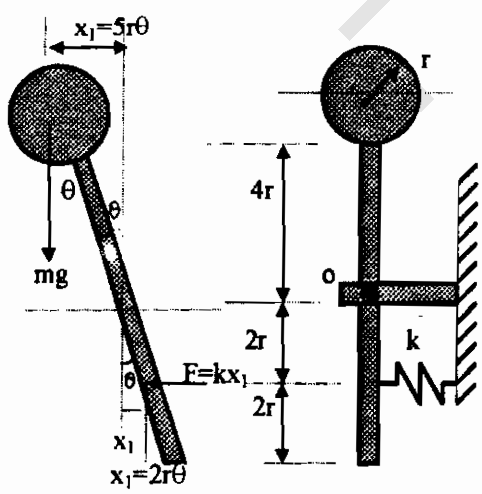
$$\because \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m.l^2.\left(\dot{\theta}\right)^2 + mgl.\frac{(\theta)^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right).b^2.(\theta)^2\right] = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}ml^2.\left(2.\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{2}mgl.\left(2.\theta.\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{8k}{3}\right).b^2.\left(2.\theta.\dot{\theta}\right) = 0$$

$$, \quad \therefore ml^2.\ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{8k}{3}b^2\right).\theta = 0 \qquad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{3mgl + 8kb^2}{3ml^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots r.p.s.$$

22-A component in a machine is schematically shown in fig.(2-36). in its static equilibrium position , ,where the mass of uniform bar is 3m and it is length 8r , the mass of uniform disc is 2m and it is radius r, and the spring has stiffness k , assume kr=3mg , Determine the equation of motion and the natural
frequency of this system.

22–تركيبة فى ألة موضحة فى الشكل (2–36) وفى وضع الاتزان الاستاتيكى ، حيث كتلة القضيب المنتظم 3m وطولة 8r ، وكتلة القرص المنتظم 2m ونصف قطرة r ، ونابض معاملة k ، إفرض أن kr =3mg ، أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة.



الشكل (2-36)

بما إن عزم اللى الكامن يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاة عزم اللى الاسترجاعى

$$\therefore \sum M_0 = -I.\ddot{\theta}, \quad \because \sum M_0 = kx_1.(2r) - 2mg(5r\theta) = 4k.r^2.\theta - 5mgr\theta$$

$$\because kr = 3mg \qquad \therefore \sum M_0 = 12mgr\theta - 10mgr\theta = 2mgr\theta$$

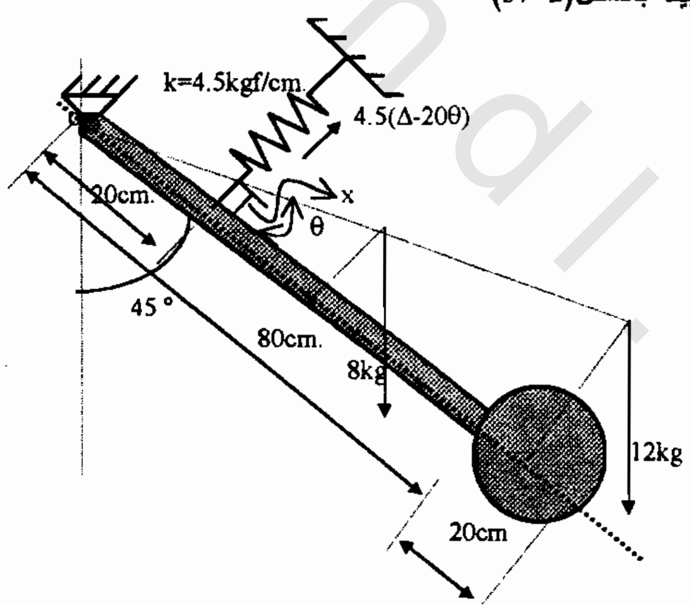
$$I_{total} = I_{bar} + I_{disc} \qquad , \because I_{bar} = \frac{m_{bar}.l_{bar}}{12} = \frac{3m.(8r)^2}{12} = 16mr^2$$

$$\because I_{disc} = \frac{m_{disc}.r^2}{2} + m_{disc}.(5r)^2 = \frac{2m.r^2}{2} + 2m.(5r)^2 = 51mr^2 \qquad I_{total} = 67mr^2$$

$$\therefore 2mgr\theta = -67mr^2.\ddot{\theta} \qquad \therefore \ddot{\theta} + \frac{2g}{67r}\theta = 0 \qquad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{67r}} \text{.........c.p.s}$$

23-A rigid rod of length 80 cm. and mass 8 kg. is pinned at one end (o) and has a cylinder of weight 12 kg. and of diameter 20 cm. attached at the other end. The rod inclined by 45 degree about the vertical axis when it on equilibrium position. A spring of stiffness 4.5 kgf/cm. connected to the rod at a distance 20 cm. from the support. Determine the equation of motion and the natural frequency of the system when give a small angular displacement (θ) to the system as shown in fig.(2-37).

23–قضيب جاسئ طولة 80سم ووزنة 8كجم ممسوك (متصل) من إحدى نهايتية بمفصل (o) واسطوانة وزنها 12كجم وقطرها 20سم متصلة بالنهاية الاخرى للقضيب الذى يميل بزاوية 45 درجة على المحور الرأسى عندما يكون فى موضع الاتزان ، نابض معاملة 4.5 kgf/cm. متصل بالقضيب على مسافة 20سم من موضع تركيبة . أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومة عند إعطائها إزاحة زاوية (θ) صغيرة للمنظومة المبينة بالشكل(2–37)



الشكل (2–37)

عند وضع الاتزان للمنظومة وذلك عندما تكون زاوية ميل المنظومة على الرأسي °45 يكـــون مجمـــوع العزوم حول المفصل (o) يساوى الصفر.

$$i.e \qquad \sum M_o = 0 \quad \therefore k.\Delta.b - W_{rod}.\sin(45)\left(\frac{l}{2}\right) - W_{cyl.}\sin(45)(l+r) = 0$$

$$\therefore 4.5\Delta(20) - 8\sin(45)\left(\frac{80}{2}\right) - 12\sin 45(90) = 0 \qquad \therefore \Delta = 11 \ cm.$$

عندما يعطى المنظومة إزاحة زاوية صغيرة (θ) تكون زاوية ميل المنظومة على الرأسي (45°+θ) ومن ذلك نستنتج أن:

$$\because \sum M_o = -I\ddot{\theta}$$

$$\because \sum M_0 = k(\Delta - x).b - 8\sin(45+\theta)\left(\frac{l}{2}\right) - 12\sin(45+\theta)(l+r)$$

$$= 4.5(11-x).(20) - 8\sin(45+\theta)(40) - 12\sin(45+\theta)(90)$$

$$\because x = b\theta = 20\theta \qquad ,\because \sin(45+\theta) = \sin(45).\cos(\theta) + \cos(45).\sin(\theta)$$

$$\because \theta \ is\ very\ small \ \therefore \sin\theta \cong \theta \quad ,\cos\theta \cong 1$$

$$\therefore \sum M_0 = 990 - 1800\theta - 1400[\sin(45).\cos(\theta) + \cos(45).\sin(\theta)]$$

$$\therefore \sum M_0 = 990 - 1800\theta - 1400[0.7071(1) + 0.7071(\theta)] = 2790(\theta)$$

$$\because I_{totall} = I_{rod} + I_{cylinder} = \frac{m_{rod} l^2}{3} + \frac{m_{cylinder}.r^2}{2} + m_{cylinder}.(l+r)^2$$

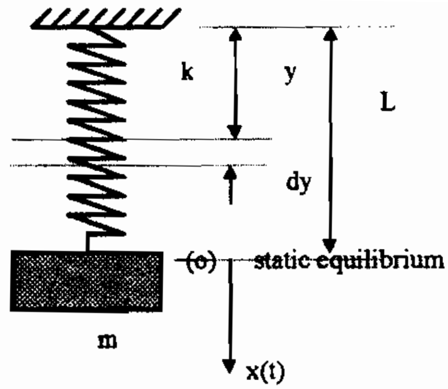
$$\therefore I_{totoll} = \frac{(8)(80)^2}{3(981)} + \frac{(12)(10)^2}{2(981)} + (\frac{12}{981})(90)^2 = 117 kgf.cm.\sec^2$$

$$\because I\ddot{\theta} + 2790(\theta) = 0 \quad \therefore 117\ddot{\theta} + 2790\theta = 0 \qquad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{2790}{117}} = 4.9 \ \ c.p.s$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{4.9}{2\pi} = 0.777 \ \ c.p.s$$

24-By Rayleigh's method , Determine the natural frequency of the mass and spring system shown in fig.(2-38). taking into account the mass of the spring , and assume L is the length of the spring , k is the stiffness of the spring, and ρ is the density of the material of the spring per unit length

24 -بطريقة رايلى أوجد التردد الطبيعى لكتلة ونابض المنظومة المبينة بالشكل(2-38) ، بفـرض ان L طول النابض ، k معامل النابض ، ρ كثافة معدن النابض لكل وحدة طول.



الشكل (2-38)

إذا حدث للطرف الحر بالنابض إزاحة ولتكن x عند نقطة على بعد y فان الازاحة بالنابض تقدر بالعلاقة $\left(\frac{y}{l}x\right)$ وتمثل الحركة بالعلاقة $x = A\sin(\omega_n.t)$ وبتفاضل هذة الدالة بالنسبة للزمن ينتج ان

$$\therefore \dot{x} = \omega.A\cos(\omega_n.t) \qquad at\ \max.displacent, \therefore \cos\omega_n.t = \cos(0) = 1 \therefore \dot{x}_{\max.} = \omega_n.A$$

بما ان الطاقة الحركية للمنظومة هى مجموع طاقة الحركة للكتلة والنابض ، حيث طاقة الحركة للعنصر dy من النابض يعطى بالعلاقة $\frac{1}{2}\rho.dy.\left(\frac{y}{l}\dot{x}\right)^2$ واذا اخذنا كتلة النابض فى الاعتبار فان

$$the\ \max.\ of\ (K.E.) = K.E\ of\ mass + K.E\ of\ spring$$

$$= \frac{1}{2}m.(\dot{x}_{\max})^2 + \int_0^l \frac{1}{2}\rho.(\frac{y}{l}\dot{x}_{\max.})^2 dy = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{\max.})^2 + \frac{1}{2}\rho.\left(\frac{\dot{x}_{\max}}{l}\right)^2.\int_0^l y^2 dy$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}_{\max})^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\dot{x}_{\max}}{l}\right)^2\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^l = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\max.}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho.l\left(\frac{\dot{x}^2_{\max}}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho l}{3}\right)\left(\dot{x}_{\max.}\right)^2$$

$$\therefore\ (K.E)_{m\max} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\rho l}{3}\right)(\omega_n.A)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because\ (P.E.)_{\max} = \frac{1}{2}k.x^2_{\max} = \frac{1}{2}k.A^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\therefore from\ (1)\ ,\ (2) \qquad \frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho l}{3}\right)\omega_n^2.A^2 = \frac{1}{2}kA$$

$$^2 \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+\frac{\rho l}{3}}}\ c.ps \therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\frac{\rho l}{3}}} \qquad Hz$$

اى ان تأثير القصور الذاتى للنابض يحسب باضافة ثلث كتلة النابض المكافئة وذلك للكتلة الجاسئة.

25- a-If a mass M is suspended in the free end of a coil spring has stiffness of k and of mass m, Prove that the work done in the tension of the spring at its lowest position can be calculated by the following relation:

$$\frac{\left(Mg+\frac{mg}{2}\right)+\left(Mg+\frac{mg}{2}+ka\right).a}{2}$$

where: a is the amplitude of vibration.

b-A spring has a stiffness of 400 N/m and a mass of 2 kg. If a mass of 8 kg is hung in the free end of this spring and then released to vibration. Find the natural frequency and the time of the period of the system, when (1)the mass of spring is negligible. (2)the mass of spring is considered into account. ..

25-أ-اذا علقت كتلة M فى النهاية الحرة لنابض حلزونى معاملة k وكتلتة m ، اثبت ان الشغل المبـذول فى شد النابض عند ادنى موضع يمكن حسابة من العلاقة التالية:

$$\frac{\left(Mg+\frac{mg}{2}\right)+\left(Mg+\frac{mg}{2}+ka\right).a}{2}$$

حيث a هى سعة الاهتزاز.

ب-نابض معاملة 400 نيوتن لكل متر ، وكتلتة 2 كيلوجرام ، اذا علقت كتلة 8 كيلوجـرام فـى نهايـة النابض ثم ترك يهتز.

أوجد التردد الطبيعى والزمن الدورى للمنظومة عندما: (1) تهمل كتلة النابض.

(2) تؤخذ كتلة النابض فى الاعتبار.

الحل:

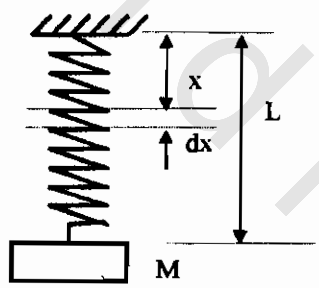


fig.(2-39)

نفرض ان السرعة الزاوية للحركة التوافقية ω مع اخذ عنصر من النابض سمكة dx وعلى بعـد x مـن النهاية المثبتة للنابض.

اذن سرعة الكتلة M عند الوضع المتوسط= ω .a ، بينما سرعة عنصر النابض عند الوضع المتوسط=

(ω .a .x)/L

اذن طاقة الحركة للعنصر (element) dx من النابض عند الوضع الاوسط يعين من العلاقة التالية:

$$(K.E)_{element(dx)} = \frac{m\left(\frac{dx}{l}\right)}{2}\left(\frac{\bar{\omega}.a.x}{l}\right)^2$$

اذن طاقة الحركة الكلية (Totall of K.E.) للنابض عند الوضع المتوسط تعين من العلاقة التالية:

$$Totall\ of\ K.E = \frac{m.\omega^2.a^2}{2l^3}\int_0^l x^2 dx = \frac{m}{6}.\omega^2.a^2$$

اذن طاقة الحركة الكلية للمنظومة عند الوضع المتوسط تعين من العلاقة التالية:

$$The\ total\ of\ K.E.of\ the\ system = \frac{\omega^2.a^2}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)$$

وبأخذ أقصى وضع سفلى كمرجع إسناد يمكن تعيين طاقة الوضع للمنظومة عند الوضع المتوسط من العلاقة التالية:

$$(P.E)\ for\ system = Mg + \frac{mg}{2}$$

وذلك لان مركز ثقل النابض قد ازيح مسافة (a / 2) فقط.وعند الوضع الاوسط يكون متوسط قوة الشد فى النابض=Mg+ (mg/2)

وبذلك عند اقصى وضع سفلى يكون متوسط قوة الشد فى النابض=Mg + (mg/2) + ka

اذن الشغل المبذول (W.D) فى شد النابض الى اقصى وضع سفلى من العلاقة التالية:

$$\therefore W.D = \frac{\left(Mg + \frac{mg}{2}\right) + \left(Mg + \frac{mg}{2} + ka\right).a}{2}$$

وبما ان الشغل المبذول فى شد النابض الى اقصى وضع =الطاقة المخزونة فى النابض عند اقصى وضع سفلى.

اذن بمساواة مجموع طاقتى الحركة والوضع للمنظومة فى وضعها الاوسط بالطاقة المختزنة فى النابض عند اقصى وضع سفلى ، ونظرا لان الطاقة الكلية للمنظومة لاتتغير فان ذلك يحقق المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2}\omega^2.a\left(M + \frac{m}{3}\right) + Mga + \frac{mga}{2} = Mga + \frac{mga}{2} + \frac{k.a^2}{2}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{\left(M + \frac{m}{3}\right)}............c.p.s \qquad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}}............sec$$

ويمكن إخذ كتلة النابض فى الاعتبار باضافة ثلث كتلتها للكتلة المثبتة علية وبذلك يكون:

1-فى حالة إهمال كتلة النابض ، فان:

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{8}}=1.126\ HZ \qquad ,t_p=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{400}{8}}}=0.89\ \sec$$

2-فى حالة أخذ كتلة النابض فى الاعتبار :

$$\therefore f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{8+\frac{2}{3}}}=1.082\ HZ \quad ,t_p=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{8+\frac{2}{3}}{400}}=0.924\ \sec$$

26-Determine the equation of motion and the natural frequency of the simple pendulum as shown in fig.(2-40). by:-
(1)-Newton's method , Energy mothod , Rayleigh's mothod and Lagrange's equation ,if the mass of the rod L is negligible.
(2)- Newton's method and Eenergy mothed if the mass of the rod M is not negligible.

26-أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للبندول البسيط المبين بالشكل (2-40) ، (1)-بطريقة نيوتن وطريقة الطاقة وطريقة رايليت ومعادلة لاجرانج اذا إهملت كتلة القضيب. (2)-بطريقة نيوتن وطريقة الطاقة اذا لم تهمل كتلة القضيب M.

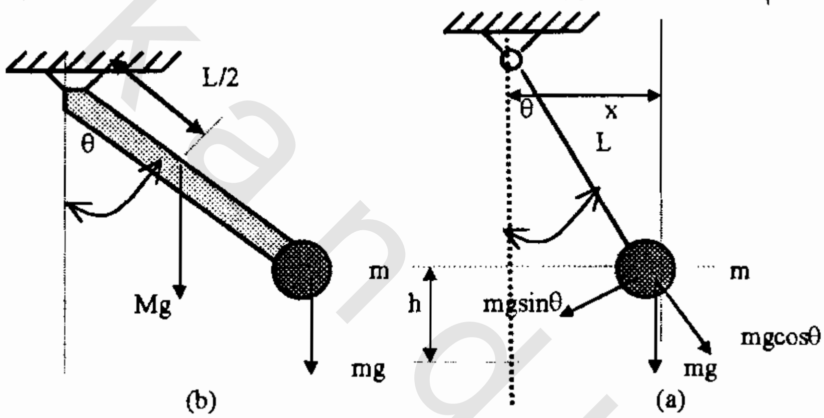


fig.(2-40)

(أ) فى حالة إهمال كتلة القضيب ، حيث طول القضيب L

1-***طريقة نيوتن*** Newton mothed

$$\because \sum M_o=-I\ddot{\theta} \quad \therefore mgl\theta+I\ddot{\theta}=0 \quad \because I=ml^2 \quad \therefore \ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

$$\therefore f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad Hz$$

Energy mothed طريقة الطاقة-2.

$$\because K.E.=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \text{ ,where } x=l\sin\theta\equiv l\theta$$

$$P.E.=\frac{1}{2}mg.h=mg(l-l\cos\theta)=mgl-mgl\theta \qquad \text{where } \sin\theta\cong\theta$$

$$\therefore Total\ Energy(T.E.)=K.E.+P.E.=const \qquad \because\frac{d(T.E.)}{dt}=0$$

$$\therefore\frac{1}{2}m.l^2\left(2\dot{\theta}.\ddot{\theta}\right)+mgl(0)+mgl\left(\theta\dot{\theta}\right)=0$$

$$\therefore\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad \therefore f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\ \ HZ$$

Rayleigh's mothed طريقة رايلايت-3

بما ان البندول يتحرك حركة توافقية وبذبذبات صغيرة ذات سعة زاوية (θ) وتردد دائرى ω_n وتكون اقصى سرعة يعبر عنها بالعلاقة $\omega_n\theta$ ، وبالتالى يمكن تعيين أقصى طاقة حركة واقصى طاقة وضع كما يلى:

$$\therefore(K.E.)_{max.}=\frac{1}{2}J_o\left(\dot{\theta}_{max}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2(\omega_n.\theta)^2 \qquad where \quad \dot{\theta}_{max}=\omega_n.\theta$$

وتكون أقصى طاقة وضع عندما تنعدم السرعة وتكون السعة اكبر مايمكن

$$\therefore(P.E.)_{max}=\frac{1}{2}mgh=mg\frac{l.(\theta)^2}{2} \qquad \because(K.E.)_{max}=(P.E.)_{max}$$

$$\therefore l.\omega_n^2=g \qquad \therefore\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}\ \ c.p.s$$

Lagrange's equation باستخدام معادلة لاجرانج-4

$$\because K.E.=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2 \qquad ,\because P.E.=mg\frac{l(\theta)^2}{2}=\frac{1}{2}mgl(\theta)^2$$

$$\because\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(K.E.)}{\partial\dot{\theta}}\right]+\frac{\partial(P.E.)}{\partial\theta}=0 \qquad \therefore\frac{1}{2}ml^2\left(2\ddot{\theta}\right)+\frac{1}{2}mgl(2\theta)=0$$

$$\therefore ml^2.\ddot{\theta}+mgl\theta=0 \qquad \therefore\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}\ \ c.p.s$$

ب-في حالة أخذ وزن القضيب M في الحساب:

1-**بطريقة نيوتن**Newton mothed

$$\because \sum M_o = -I\ddot{\theta} \qquad \because \sum M_o = -mgl\sin\theta - Mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\because I = ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2 = \left(m+\frac{M}{3}\right)l^2 \qquad \therefore I\ddot{\theta} + mgl\theta + \frac{1}{2}Mgl\theta = 0$$

$$\therefore \left(m+\frac{M}{3}\right)l^2.\ddot{\theta} + gl\left(m+\frac{M}{2}\right)\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\frac{m+\frac{M}{2}}{m+\frac{M}{3}}\right)\theta = 0 \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{m+\frac{M}{2}}{m+\frac{M}{3}}\right]}\ c.ps$$

2-**بطريقة الطاقة** Energy mothed

باعتبار ان كتلة القضيب M موزعة بانتظام فيكون عزم القصور الذاتيللقضيب كما يلي:

$$I = ml^2 + \frac{ML^2}{3} \qquad \because K,E. = \frac{1}{2}I(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right)l^2.\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right)l^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\because P.E. = mgh + \frac{1}{2}Mgh = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Mgl(1-\cos\theta)$$

$$\therefore P.E. = gl(m+\frac{M}{2})(1-\cos\theta) \qquad \because T.E. = K.E. + P.E. = const$$

$$\because \frac{d(T.E.)}{dt} = \frac{d}{dt}(const) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(m+\frac{M}{3}\right)l^2\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + gl\left(m+\frac{M}{2}\right)\left(0+\sin\theta.\dot{\theta}\right) = 0$$

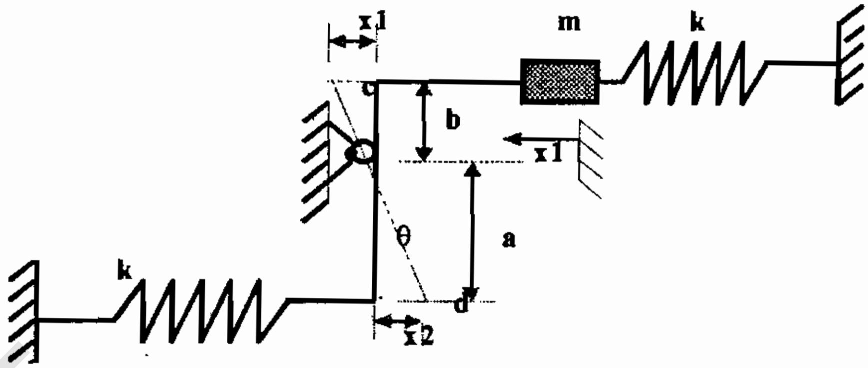
$$\therefore \left(m+\frac{M}{3}\right)l^2.\ddot{\theta} + gl\left(m+\frac{M}{2}\right)\theta = 0 \qquad \therefore \ddot{\theta} + \left[\frac{m+\frac{M}{2}}{m+\frac{M}{3}}\right].\frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{m+\frac{M}{2}}{m+\frac{M}{3}}\right]}\ HZ$$

27-The system as shown in fig.(2-41). , find the equation of motion , the equivalent of spring stiffness and the equivalent of mass ,by Energy method and Newton's method

27-.المنظومة المبينة بالشكل (2-41) ، أوجد معادلة الحركة ومعامل النابض المكافئ والكتلة المكافئـــة

بطريقة الطاقة وطريقة نيوتن.



شكل (2-41)

1-طريقة الطاقة:

$$\because \sin\theta \cong \theta = \frac{x_1}{b} = \frac{x_2}{a} \qquad \therefore x_1 = b\theta \ ,\dot{x}_1 = b\dot{\theta} \quad ,x_2 = a\theta \ ,\dot{x}_2 = a\dot{\theta}$$

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}mb^2(\dot{\theta})^2 \quad ,P.E. = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}k_1b^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2a^2\theta^2$$

$$\because \frac{d}{dt}[K.E. + P.E.] = 0 \qquad \therefore mb^2\ddot{\theta} + \left(k_1b^2 + k_2a^2\right)\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2}\right).\theta = 0 \qquad \therefore \ f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(k_1b^2 + k_2a^2\right)}{mb^2}}$$

$$\therefore k_{eq} = k_1b^2 + k_2a^2 \qquad ,m_{eq} = mb^2$$

2-طريقة نيوتن:

$$\because m\,\ddot{x}_1.b = -k_1.x_1b - k_2x_2a \qquad \therefore mb^2\ddot{\theta} + \left(k_1b^2 + k_2a^2\right)\theta = 0$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1b^2 + k_2a^2}{mb^2}\right).\theta = 0 \qquad \therefore f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(k_1b^2 + k_2a^2\right)}{mb^2}}$$

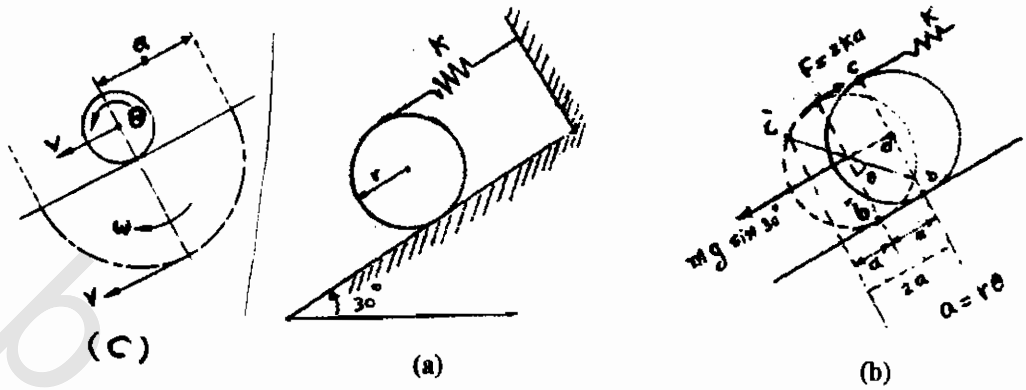
$$k_{eq.} = the \ \ equivalent \ \ spring \ \ stiffness \ = k_1b^2 + k_2a^2$$

$$m_{eq} = mass \ \ equivalent \ \ mass \ = mb^2$$

28-A uniform a cylinder of radius r is constraint to roll without slipping to upward and downward on an inclined plane , a one end of spring stiffness k is wrapped on the cylinder as shown in fig.(2-42), and the other end of the spring is fixed on the frame of the system , where spring is parallel to the inclined plane (a)-If the cylinder is released at position when the spring is not tense. , What is the natural frequency of the cylinder whenslipping is not occur? (b)-Find the maximum friction force?

28-إسطوانة منتظمة نصف قطرها r مقيدة لتتدحرج بدون إنزلاق لاعلى ولاسفل على مستوى مائل ، إجدى نهايتى نابض معاملة k مربوط بالاسطوانة كما موضح بالشكل (2-42) والطرف الاخر للنابض مثبت فى إطار (هيكل) المنظومة ، حيث النابض يكون موازى للمستوى المائل :

(أ) إذا تركت الاسطوانة عند موضع يكون النابض غير مشدود ، أوجد التردد الطبيعى للاسطوانة عندما لايحدث إنزلاق.   (ب) أوجد أقصى قوة للاحتكاك.



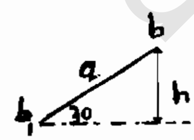
شكل (2-42a,b)

نفرض ان وضع الاتزان يقع على مسافة a اسفل الوضع الابتدائى ومقاسة على إمتداد السطح المائل كما بالشكل(2−32) فتكون قوة الشد فى النابض 2ka وبأخذ العزوم حول نقطة b فان:

$$2k(a(2r) = mg\sin 30°(r) \qquad \therefore a = \frac{mg}{8k}$$

اذن عند إعتاق الاسطوانة من وضعها الابتدائى فانها سوف تتذبذب حول وضع الاتزان بسعة ذبذبة (a).كما بالشكل

وفى الوضع الاوسط تكون السرعة الخطية لمركز الاسطوانة هى $v = \omega.a = \dot{\theta}.r$ حيث ω هى التردد الدائرى للذبذبة ، θ هى السرعة الزاوية لتدحرج الاسطوانة. ، وعند التحرك من أقصى وضع أعلى المستوى تجاة الوضع الاوسط فان الطاقة الكلية تظل ثابتة وفى أقصى وضع أعلى المستوى نجد أن طاقة الوضع (K.E.) تعين من العلاقة التالية: ....



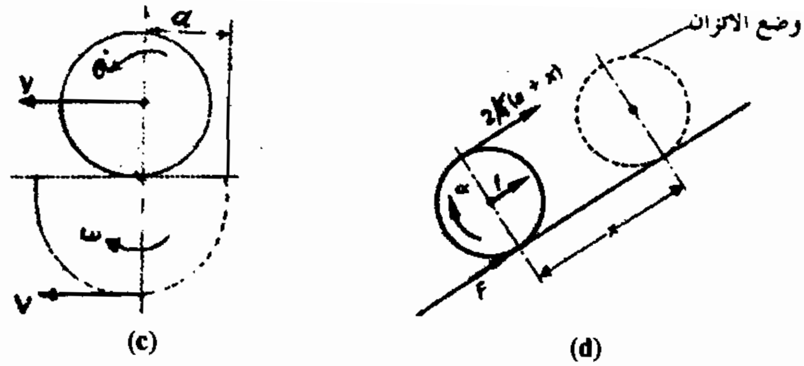
K.E.=W.h= mga.sin30=0.5mga

وبماان طاقة الحركة عند الوضع المتوسط تساوى الصفر لان السرعة تساوى صفر لانها تغير اتجاهها عند ذلك الموضع وطاقة الانفعال ايضا تساوى الصفر لانعدام الازاحة اى ان طاقة الوضع تنعدم.

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}I.(\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(\omega.a)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\left(\frac{\omega.a}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}m\omega^2.a^2$$

$$\because D.E. = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(2a)^2 = 2ka^2 \qquad \therefore \frac{1}{2}mga = \frac{3}{4}m\omega^2.a^2 + 2ka^2$$

$$\because a = \frac{mg}{8k} \qquad \therefore \omega^2 = \frac{8k}{3m} \qquad \therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k}{3m}} \quad HZ$$



شكل (2-42c,d)

اعتبر وضعا تكون فية الاسطوانة قد انتقلت الى مسافة x من وضع الاتزان كمابالشكل (2-42d) فيكون الشد فى النابض 2(a+x) وتكون قوة الشد فى النابض 2k(a+x) ، وبما العجلة الزاوية للاسطوانة تكون فى إتجاة عقارب الساعة ، وعلية فان قوة الاحتكاك تكون متجهة لاعلى المستوى ، وذلك لتجنب حدوث إنزلاق.

وبالنسبة للحركة الخطية نجد ان 2k(a+x)+f=mf وللحركة الزاوية

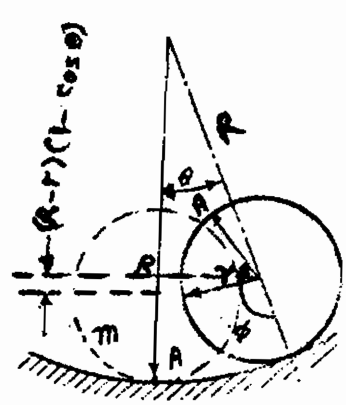
$$[2k(a+x)-f].r = I\dot{\theta} = \frac{m.r^2}{2}.\frac{f}{r} \qquad \therefore 2k(a+x)-f = \frac{m.f}{2}$$

$$\therefore f = \frac{m.f}{4} = \frac{m.\omega^2.x}{4} \qquad \therefore the\ \ maximum\ \ friction\ \ force\ \ occure\ \ at\ \ x=a$$

$$\therefore f_{\max} = \frac{m.\omega^2.a}{4} = \frac{m}{4}\left(\frac{8k}{3m}\right)\left(\frac{mg}{8k}\right) = \frac{mg}{12}$$

29-A cylinder of weight W and radius r rolls without slipping on a cylindrical surface of radius R , as shown in fig.(2-43). , Determine its natural frequency for small oscillations about the lowest point.

29–إسطوانة وزنها W ونصف قطرها r تتدحرج بدون إنزلاق على سطح اسطوانى نصف قطرة R كما مبين بالشكل (2–43) ، اوجد التردد الطبيعى لذبذبة صغيرة حول اسفل موضع.



الشكل (2–43)

عند حركة الاسطوانة المبينة بالشكل (2-43) تحدث إزاحة خطية وإزاحة زاوية ، حيث السرعة الخطية للاسطوانة تعين من العلاقة التالية:

$$\because \text{The translational velocity of the center of the cylinder} = (R-r)\dot{\theta}$$

$$\because \text{The rotational velocity} = (\dot{\varphi}-\dot{\theta}) \qquad \because R\theta = r\varphi \qquad \therefore \varphi = \frac{R\theta}{R}$$

$$\because K.E. = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{W}{g}\left[(R-r)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{W.r^2}{2g}\right)\left(\frac{R}{r}-1\right)^2.\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$I_{cylinder} = \frac{W.r^2}{2g} \qquad P.E. = W.h = W(R-r)(1-\cos\theta)$$

where $P.E.$ = work done in lifting through through the vertical heigh (h)

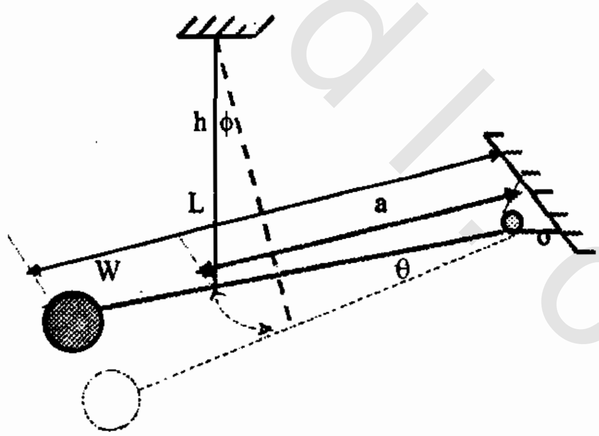
$$\because \frac{d}{dt}(T.E.) = \frac{d}{dt}(K.E + P.E) = 0$$

$$\therefore \frac{W}{2g}(R-r)^2\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{Wr^2}{4g}\left(\frac{(R-r)^2}{r^2}\right)\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + W(R-r)\theta.\dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{3}{2}\left(\frac{R-r}{g}\right)\ddot{\theta} + \theta = o \therefore \ddot{\theta} + \left(\frac{2g}{3(R-r)}\right)\theta = 0 \quad \therefore f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}} \quad Hz$$

30-Determine the natural frequency of the system shown in fig.(2-44) for small oscillations, where the bar L is assumed to be rigid and weightless, and supported by the inextensible cord (h)

30-أوجد التردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل (2-44) لذبذبة صغيرة ، حيث القضيب طولة L وجاسئ ومهمل الوزن ، ومركب فى خيط مشدود وطولة h.



شكل (2-44)

$$\because (K.E.)_{max} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{W}{2g}\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{W}{2g}l^2.\left(\dot{\theta}\right)^2 \quad assume \ \theta = \theta_\circ \cos \omega.t$$

$$\therefore \dot{\theta}_{max} = \omega.\theta_\circ \qquad \therefore (K.E.)_{max.} = \frac{W}{2g}l^2.\omega^2.\theta_\circ^2$$

$$\because (P.E)_{max} = Wh(1-\cos\phi_\circ)\frac{l}{a} = Wh\left[1-\left(1-\frac{\phi_\circ^2}{2}+........\right)\right]\frac{l}{2} \cong Wh\frac{\theta_\circ^2}{2}.\frac{l}{2}$$

$$\because a\theta_\circ = h\phi_\circ \ \ \phi_\circ = \frac{a\theta_\circ}{h} \quad \therefore (P.E.)_{max} = \frac{Whl}{2a}\left(\frac{a\theta_\circ}{h}\right)^2$$

$$\therefore by \ Rayleigh©s \ metheod \quad (K.E.)_{max} = (P.E)_{max}$$

$$\therefore \frac{W}{2g}l^2\omega_n^2.\theta_\circ^2 = \frac{1}{2}Wl\left(\frac{a}{h}\right).\theta_\circ^2 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{ag}{lh}} \ \ c.p.s \quad \therefore f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ag}{lh}} \ \ HZ$$

31-From the system as shown in fig(2-45) , Find the displacement Δ , the equation of motion and the natural frequency by Newton's method and The energy method .

31-من المنظومة المبينة بالشكل (2-45) ، أوجد الازاحة Δ ومعادلة الحركة والتردد الطبيعى بطريقة نيوتن وطريقة الطاقة.

الحل:

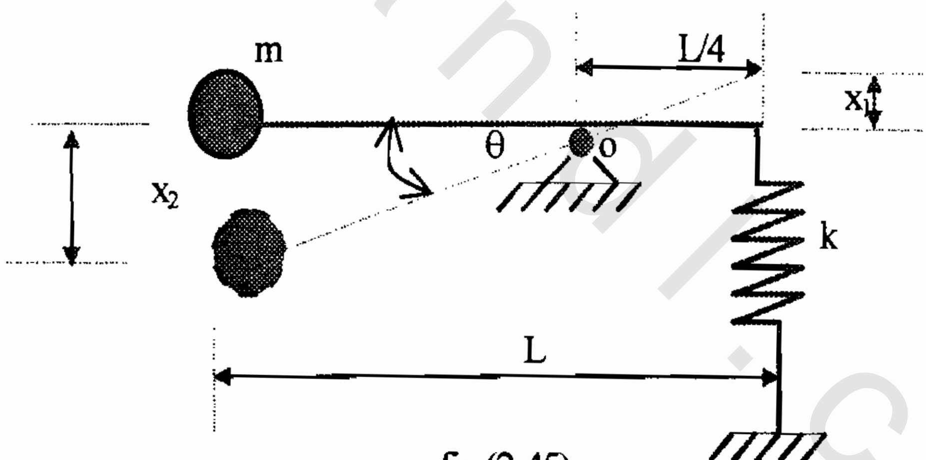


fig.(2-45)

1-طريقة نيوتن:

$$\because \sin\theta \cong \theta \cong \frac{x_1}{l/4} = \frac{x_2}{3l/4} \therefore x_1 = \frac{1}{4}l\theta \ , x_2 = \frac{3}{4}l\theta$$

$$\because \sum M_o = -I\ddot{\theta} \ , \sum M_o = kx_1(\frac{l}{4}) = \frac{kl^2}{16}\theta \ \ , \because I = m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}ml^2$$

$$\therefore \frac{9}{16}ml^2.\ddot{\theta} + \frac{kl^2}{16}\theta = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{k}{9m}\theta = 0 \quad \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{9m}} \ \ c.p.s$$

$$\because k.\Delta = mg \quad \therefore \Delta = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_n^2} = \frac{9mg}{k}$$

2-طريقة الطاقة:

$$\because (K.E.) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3l\dot{\theta}}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}ml^2\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\because (P.E.) = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(\frac{l}{4}\theta)^2 = \frac{kl^2}{32}.\theta^2 \quad \because \frac{d}{dt}(T.E.) = \frac{d}{dt}(K.E. + P.E.) = 0$$

$$\therefore \frac{9}{32}ml^2\left(2\dot{\theta}\ddot{\theta}\right) + \frac{1}{32}kl^2\left(2\theta\dot{\theta}\right) = 0 \quad \therefore \ddot{\theta} + \frac{k}{9m}\theta = 0 \ \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{k}{9m}} \ \ c.p.s$$

$$\because k\Delta = mg \ \therefore \Delta = \frac{mg}{k} = \frac{m}{\omega_n^2} = \frac{9mg}{k}$$

32-A Body of mass 10 kg was placed on two springs as shown in fig.(2-46) , one of them has a stiffness of 960 N/m. , After a displacement of 5 cm down , the system has been brought to ***equilibrium*** *, fin the stiffness of the second spring. If the body moved upwards , a distance of 8 cm. , then subjected to a initial velocity of 2.1 m/sec and left freely ,then:*

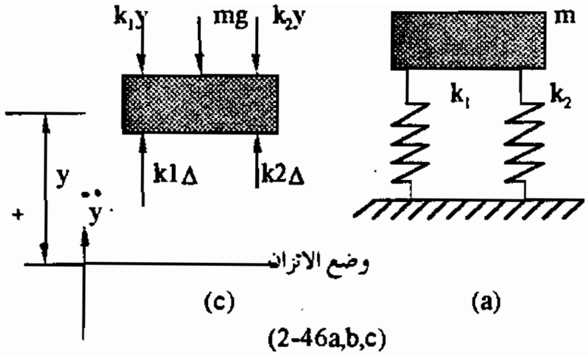
(1) Prove that the motion is a simple harmonic motion , its amplitude and time of period.

(2)Find its amplitude and the time of period

32-وضع جسم كتلتة *10 kg* فوق نابضين كما بالمنظومة المبينة بالشـــكل *(2-46)* ، معـــامل أحدهمـــا *k1=960 N/m* ، فاتزن بعد ان انضغط مسافة *5 cm* ، أوجد معامل النابض الثانى ، واذا رفع الجسم بعـــد ان اتزن مسافة *8 cm* ثم اعطى لة سرعة أبتدائية مقدارها *2.1 m/sec* ثم ترك ليتحرك بحرية:

(أ) إثبت ان حركتة هى حركة توافقية بسيطة واوجد سعتها وزمنها الدورى.

(ب) اوجد الازاحة مقيسة من وضع الاتزان واوجد السرعة بعد مرورثانيتين على بدء الحركة.



(2-46a,b,c)

الحل:

أولا فى حالة وضع الاتزان المستقر: نفرض ان Δ هى الازا حة الانضغاطية فى كل من النابضتين فـــى وضع الاتزان المستقر كما بالشكل *(2-46 b)* وبذلك تكون معادلة الحركة هى

$$k_1\Delta + k_2\Delta - mg = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore k_2 = \frac{1}{\Delta}\left[mg - k_1\Delta\right]$$

$$\therefore k_2 = \frac{mg}{\Delta} - k_1 = \frac{10(9.81)}{0.05} - 960 = 1002\, N/m$$

ولاثبات ان الحركة توافقية نتبع الاتى:

أثناء الحركة نفرض ان اللوح كان فى يبعد مسافة y اعلى موضعة اثناء الاتزان وهذة الازاحة ســـتنتج قوى شد إضافية لاسفل فى النابضين فتكون القوى المؤثرة فى الجسم مبينـــة بالشـــكل *(4-16c)* وتكـــون معادلة الحركة:

$$k_1\Delta + k_2\Delta - mg - k_1y - k_2y = m\ddot{y} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{frome quation}(1) \quad \because k_1\Delta + k_2\Delta - mg = 0 \quad \therefore m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = 0$$

$$\therefore \ddot{y} + \frac{k_{eq.}}{m}y = 0 \qquad \therefore \ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

والمعادلة *(3)* هى معادلة حركة الجسم وهى معادلة تفاضلية متجانسة ومن الدرجة التانية وهـــى ايضـــا تمثل الحركة التوافقية البسيطة لان الازاحة *(y)* تتناسب مع العجلة $\ddot{y}$ وبذلك يثبت ان الجسم يتحـــرك حركة توافقية بسيطة، ويمكن ايجاد الزمن الدورى والسعة ويمكن إيجاد التردد والزمن الدورى كما يلى:

$$\because \omega_n^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} = \frac{1962}{10} \qquad \therefore \omega_n = 14 \ rad/\sec \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14} \ \sec$$

وبتكامل المعادلة *(3)* كما بالمثال التوضيحى فانة يمكن الحصول على السرعة والازاحة كما يلى:

$\dot{y} = \omega\cos(\omega t + \phi)$, $y = A\sin(\omega t + \phi)$ حيث A هى سعة الحركة ، ϕ هى زاوية الطور ويمكـــن

إيجاد قيمتهما من الشروط الابتدائية للحركة وهى $,\dot{y}_{\circ} = 210\ cm/\sec$ $\quad y_{\circ} = 8\ cm.$ ويمكنن ايجاد السعة الكلية كما يلى

$$Totall\ amplitude = A = \sqrt{(y_{\circ})^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(8)^2 + \left(\frac{210}{14}\right)^2} = 17\ cm$$

ويمكن ايجاد السعة A بطريقة الطاقة الكلية كما يلى:

$$\because A = \sqrt{\frac{2(T.E.)}{k_{eq}}} \qquad \because T.E. = K.E. + P.E. = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2$$

$$\therefore T.E. = \frac{1}{2}(10)(210)^2 + \frac{1}{2}(1962)(8)^2 = 283220\ N$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2(283220)}{1962}} = 17\ cm$$

ولايجاد الازاحة والسرعة بعد ثانيتين $(t=2\ sec)$:

$$\because \phi = \sin^{-1}\left(\frac{y}{A}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = 28^{\circ} = 0.488\ rad$$

$$y = A\sin(\omega t + \phi) = 17\sin((14)(2) + 0.488) = 17(0.51) = 8.67\ cm$$

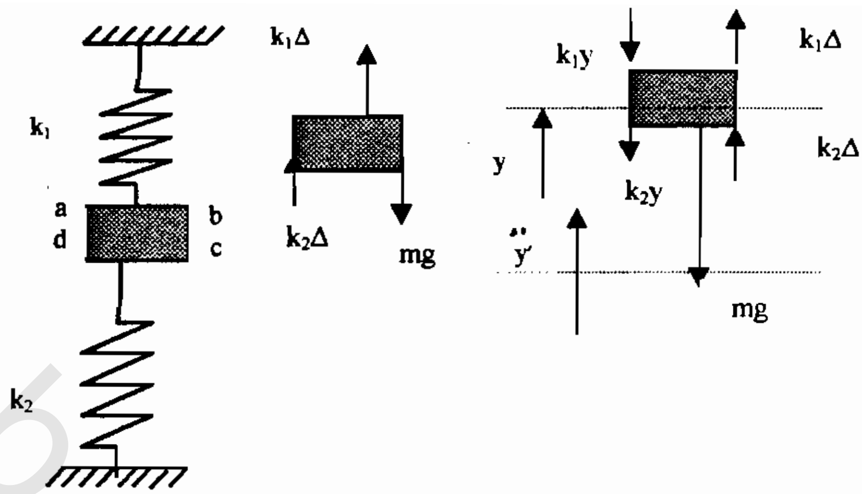
$$\because \dot{y} = A\omega.\cos(\omega t + \phi) = 17(14)\cos(14(2) + 0.488) = 17(14)(0.8616) = 205.06\ cm/\sec$$

33-A body abcd with sides ad=bc=6cm. , and a body of mass 5kg suspended by two levels of distance 1m. , the springs are L_1=40cm. , L_2=52cm. , and k_1=120 N/m. Find the stiffness coefficient of the other spring in equilibrium position for distance h=34 cm. (1) A Vertical velocity of $(40)(2)^{1/2}$ cm/sec inposed on the body and then left to freely vibrate. prove that the motion is a simple harmonic motion and find its time of period and phase angle.
(2)Find the distance when the speed is half the maximum velocity.

33-حسيم *abcd* طولة *ad=bc=6cm* وكتلتة *5kg* معلق بين مستويين افقيين المسافةبينهما متر واحد بواسطة نابضين طولهما الطبيعى L_1*=40cm* , L_2*=44cm.* وكان ثابت الزنبرك (النابض) الاول k_1 *=120 N/m.*، أوجد ثابت النابض الثانى والتى تجعل المسافة *h=34cm* فى وضع الاتزان. ، إعطى الجسيم بعد ان إتزن سرعة رأسية الى أعلى مقدارها $(40)(2)^{1/2}$ *cm/sec* ثم ترك ليتحرك بحرية.

(*1*)-إثبت ان حركتة ستكون حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزمنها الدورى وزاوية طورها.

(*2*)-أوجد المسافة *h* عندما تصل سرعة الجسيم الى نصف سرعتها القصوى ، وزمن حدوثها.



الشكل$(2-47)$

الحل: *1*-وضع الاتزان المستقر:

يلاحظ انة لاتحدث إستطالة فى كل من النابضين قبل ربط الجسيم بهما وبالتالى تكون المسافة بين المستويين $(40+54+6=100cm)$ وبعد ربط الجسيم وتركة حر يحدث إنضغاط مقدارة Δ فى النابض الثانى k_2 ، بينما تحدث إستطالة مقدارها Δ فى النابض الاول k_1 وتكون القوى المؤثرة على الجسم كما مبين بالشكل $(46\text{-}b)$ ، وإذا إعتبرنا ان الاتجاة الموجب لاعلى وبذلك يمكن كتابة معادلة الاتزان للقوى كما يلى $k_1\Delta+k_2\Delta-mg=0$ ....(1)

ويما إنة يحدث إتزان بعد تعليق الجسيم عندما يكون الجسم على بعد $h=34cm$ من موضع الاتزان ، وبالتالى يمكن ايجاد مقدار الاستطالة او الانضغاط Δ من المعادلة $\Delta= L_2-h=54-34=20cm$ ومن من المعادلة (1) نجد ان

$$\Delta(k_1+k_2)=\Delta.k_{eq.}mg \qquad \therefore k_{eq.}=\frac{mg}{\Delta}=\frac{5(9.81)}{0.2}=245.25N./m$$

لاثبات ان الحركة اهتزازية :

نفرض ان الجسيم اثناء الحركة يبعد مسافة x (أعلى موضعة أثناء الاتزان) فى الزضع العام عند الزمن t وهذة الازاحة تنتج قوى إضافية فى النابضين حيث يستطيل النابض k_2 وينضغط النابض k_1 بمقدار x وبذلك يمكن توضيح القوى المؤثرة على اتلجسم كما بالشكل $(47\text{-}c)$ ويمكن كتابة معادلة الحركة والتى تمثل القوى المؤثرة على الكتلة كما يلى:

$$\because m\ddot{y} = k_1\Delta + k_2\Delta - k_1 y - k_2 y - mg........(2)$$

$$from(1),(2) \quad \therefore m\ddot{y} = -k_1 y - k_2 y + (k_1\Delta + k_2\Delta - mg) \quad \therefore m\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y........(3)$$

$$\therefore m\ddot{y} + k_{eq} y = 0 \quad \therefore \ddot{y} + \frac{k_{eq}}{m} y = 0 \quad \therefore \ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad \therefore \ddot{y} = -\omega_n^2 . y..................(4)$$

المعادلة (*4*) هى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ونلاحظ ان العجلة تتناسن مع الازاحة وثابت التناسب هو مربع التردد الطبيعى للمنظومة والاشارة سالبة وبذلك مان الجسيم يتحرك حركة توافقية بســـيطة. ، ويمكن تعيين الزمن الدورى والازاحة الكلية وزاوية الطور من العلاقات التالية:

$$\because t_p = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad ,\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{245.25}{5}} = 7 rad/\sec. \quad \therefore t_p = \frac{2\pi}{7} = 0.89\sec \quad \because$$

$$y_\circ = displacment = 0 \quad \because total \ \ amplitude = A = \sqrt{(y_\circ)^2 + \left(\frac{v_\circ}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\because v = 40\sqrt{2} \quad \therefore A_{total} = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{40\sqrt{2}}{7}\right)^2} = 8cm \quad ,T.E = K.E + P.E$$

$$\therefore T.E == \frac{1}{2} m(\dot{y})^2 + \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2}(5)(40\sqrt{2})^2 + 0 = 8000$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2(T.E)}{k_{eq}}} = \sqrt{\frac{2(8000)}{245.25}} = 8cm \quad \phi = Phase \ \ angle = \sin^{-1}\left(\frac{y_\circ}{A}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0}{8}\right) = 0^\circ$$

ب-لايجاد السرعة القصوى:

يمكن إيجاد السرعة القصوى والمسافة *h* وزمن حدوثها كما يلى:

$$\because v_{max.} = \omega.A = (5\sqrt{2})(8) = 40\sqrt{2} \quad ,\because half \ \ of \ \ velocity \ \ occures \ \ at \ \ acceleration \ddot{x}$$

$$\therefore v = \omega\sqrt{A^2 - (y)^2} \quad \therefore 20\sqrt{2} = 7\sqrt{(8)^2 - (y)^2} \quad \therefore y = \pm 4\sqrt{2} \ \ cm$$

$$\therefore h = 34 \pm 4\sqrt{3} = 40.92 \ \ cm., h = 27.13cm.$$

$$\because v = \omega A\cos(\omega.t) \quad \therefore 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2}\cos(\omega t) \quad \because \omega.t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

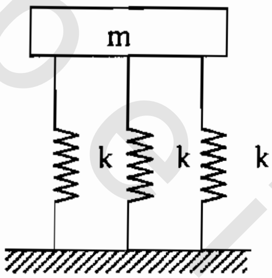
$$\therefore t_\circ = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3(7)} = 0.148\sec$$

مسائل الباب الثاني

1- حركة توافقية بسيطة يعبر عنها بالمعادلة $x = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{10}\right)$، أوجد التردد بالدورات في الثانية إذا كانت (x) بالسنتميتر (cm) والزمن (t) بالثانية (sec) والزاوية نصف قطريه. أوجد أيضاً الأزاحة والسرعة والعجلة عندما تكون $t=2sec$.

2- نابض معامله $k=100\ Kg/cm$. علقت به كتلة مقدارها $2\ Kg$ فاذا أعطيت الكتلة سرعة مقدارها $10\ cm/sec$ عند وضع التعادل ، أوجد:

أ- التردد في الثانية. ب- معادلة الحركة. ج- أتساع الذبذبة.



شكل (2-1)

3- المنظومة المبينة بالشكل (2-1) عبارة عن جهاز وزنه $3000\ Kg_f$ مركب على ثلاث نوابض معامل كل منها k فاذا حدث ترخيماً أستاتيكياً مقداره $1\ mm$. أوجد:

1- التردد الطبيعي للمجموعة .

2- معامل كل من النوابض الثلاثة.

3- أوجد معامل النابض المكافئ للمنظومة.

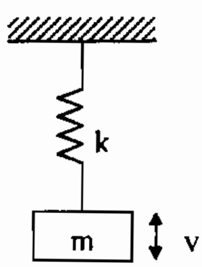
4- نابض حدث به إستطالة مقدارها $2cm$ تحت تأثير ون ما فأذا جذب الوزن إلى أسفل مسافة مقدارها $3cm$ وأعطي سرعة لأعلى مقدارها $10\ cm/sec$، أوجد:

أ- الشريطين الأبتدائيين ب- معادلة الحركة.

ج- إتساع الذبذبة.

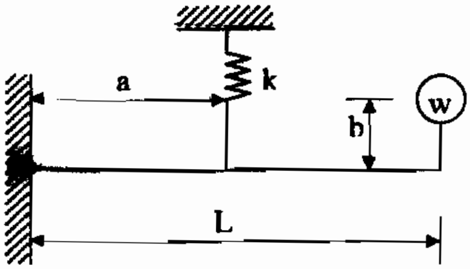
5- كتلة وزنها $(W\ lb)$ متصلة بنهاية نابض معامله k فكان التردد الطبيعي $94c.p.m$. فأذا أضيف وزن أخر مقداره $1lb$ إلى الكتلة الأولى لوحظ إنخفاض التردد الطبيعي إلى $76.7\ c.p.m$ أوجد الوزن المجهول $(W\ lb)$ للكتلة وكذلك معامل النابض $(k\ lb/in)$.

6-كتلة وزنها $3\ lb$ معلقة في طرف سلك طوله $(50\ in)$ والطرف الأخر العلوي للسلك المصنوع من الصلب مثبت كما مبين بالشكل (2-2) ومساحة مقطع السلك $0.001\ in^2$ فاذا أعطيت عند هذا الوضع سرعة في أتجاه السلك إلى أعلى مقدارها $1\ m/sec$ أوجد التردد وسعة الذبذبة مع إعتبار أن معامل المرونة للصلب $E = 30\times10^6\ lb/in^2$.



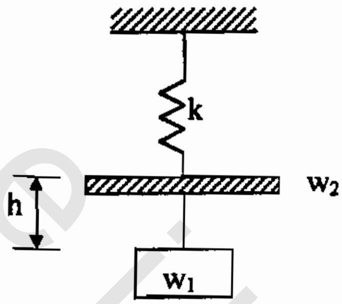
الشكل (2-2)

7-المنظومة المبينة بالشكل (2-3) أوجـد المعادلـة التفاضلية لحركة المنظومة أذا كان عـزم القصـور الذاتي للوزن w والقضيب حول المفصل (o) هـو J_o وضح أن المنظومة تصبح غير مستقرة عندما يكـون $b \geq ka^2/w$.



الشكل (2-3)

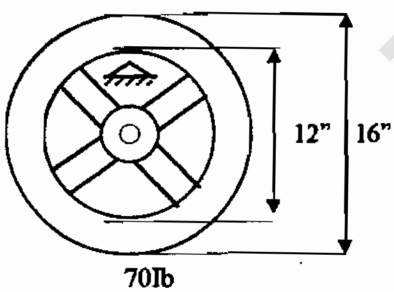
8-علق وزن w_1 في نابض معامل صلابتة k وفـي حالة توازن أستاتيكي. إسقط وزن ثـاني w_2 خـلال الأرتفاع h والتصق بالوزن w_1 بدون أرتـداداً. كمـا مبين بالشكل (2-4). أوجد التردد الطبيعي للمنظومة



الشكل (2-4)

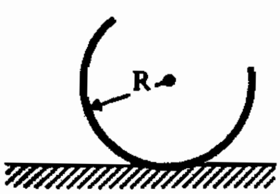
9-ربط وزن $44.5N$ بالنهاية السفلى لنـابض ثبتـت نهايته العليا، يهتز بزمن دوره طبيعـي 0.45 ثانيـة. أوجد زمـن الـدورة الطبيعـي عندمـا يربـط وزن $122.25N$ إلى منتصف نفـس النـابض مـع تثبـت النهايات العليا والسفلى.

10- لقد سمح للحدافة التي تزن $311.5N$ أن تتأرجح كبندول على حافة سكين وعنـد الجـانب الداخلـي للطوق كما مبين بالمنظومة الموضحة بالشـكل (2-5) إذا كان زمن دورة التذبذب المقـاس $1.22\ sec$، أوجد عزم القصور الذاتي للحدافة حـول محورهـا الهندسي.

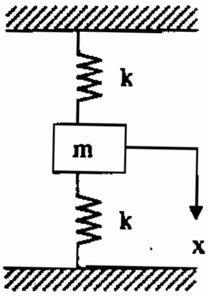


الشكل (2-5)

11- ثبيت صفيحة نحيفة مستطيلة إلى أسـطوانة نصـف دائرية كما مبينة بالشكل (2-6) أوجد من دورة التذبـذب إذا سمح للأسطوانة أن تتأرجح على سطح أفقي.



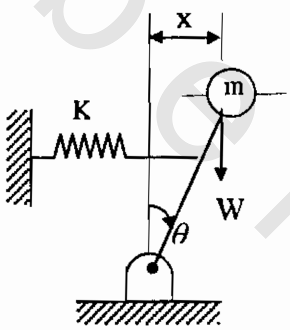
الشكل (2-6)

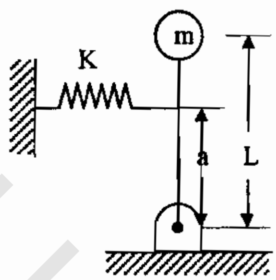


الشكل (2-7)

12- المنظومة المبينة بالشكل (2-7). أوجد المعادلة التفاضلية للحركة للأهتزاز الحر الغير مخمد وأوجد التردد الطبيعي للمنظومة.

$$Ans: \omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

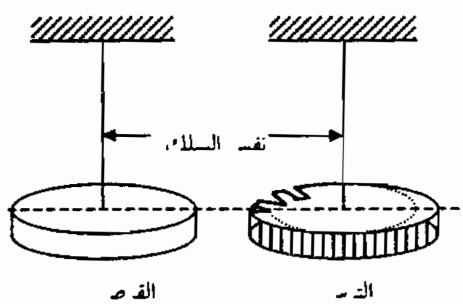




الشكل (2-8)

13- المنظومة المبينة بالشكل (2-8) يبين بندولاً مقلوباً طوله L وفي أخره كتلة m. والمطلوب إيجاد التردد الحر في الثانية أذا علم بأن النابض له معامل مرونة بحيث أن الذراع يكون في حالة إتزان من وضع رأسي كما هو مبين. وأذا كانت المسافة L متغيرة فأوجد طول البندول L بحيث يكون الذراع غير قادر على عمل ذبذبات.

14- أثبت أن البندول البسيط يهتز بحركة توافقية بسيطة بحيث يكون تردد الأهتزاز= $\sqrt{\frac{g}{L}}$ حيث (g) هي عجلة الجانبية و L هو طول البندول وذلك بفرض أن زاوية الأهتزاز صغيرة.



الشكل (2-9)

15- قرص مستدير وزنه $(20lb)$ ونصف قطره $(8")$ معلق من سلك كما في الشكل (2-9). وجد إن القرص يهتز ألتوائياً بفترة مقدارها زمنيه $(1.13\ sec)$. فأذا ركب ترس بدلاً من القرص وأهتز بفترة زمنية $(1.93\ sec)$ فأوجد:

1-معامل الياي الألتوائي للسلك.

2-عزم القصور الذاتي لكتلة الترس حول محوره.

(عزم القصور الذاتي لكتلة القرص= $\frac{m.r^2}{2}$)

16- كتلة مقدارها $25kg$ معلقة بسوستة كزازتها في الشد $14KN/m$ وتهتز بحرية بسعة $12mm$، أوجد الزمن الدورى، والسرعة والعجلة عندما تكون الكتلة على بعد $8mm$ من وضع الأتزان وعين الزمن الذي ينقضي لتعبر من هذا الوضع إلى موضعها في الأزاحة القصوى (الجواب: $0.0356\ s$ و $4.48\ m/s^2$ و $0.212\ m/s$ و $0.226\ s$).

17- في آلية ماكينة تعبئة تتحرك وصلة منزلقة في دليلها المستقيم بحركة توافقية بسيطة عند مسافتين $125\ mm$ و $200\ mm$ من وضعها الأوسط كانت للوصلة المنزلقة السرعتان $3\ m/s$ و 6 على الترتيب أوجد:

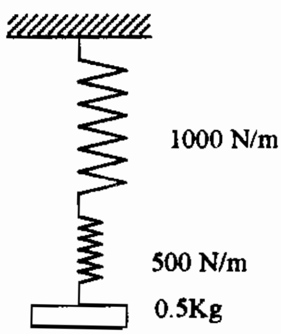
(أ) سعة الحركة. (ب) السرعة القصوى. (ج) الزمن الدوري. إذا كانت:

كتلة الوصلة المنزلقة $0.2Kg$ ، فما هي القيمة القصوى لقوة القصور الذاتي.

(الجواب: $48.6\ N$ و 0.1875 و $7.3\ m/s$ و $219.5\ mm$)

18- سوستة حلزونية ثبتت نهايتها بحيث كانت إحداهما رأسية فوق الأخرى. وركبت كتلة على السوستة عند نقطة بينهما. إثبت أن تردد الأهتزاز تكون له قيمة دنيا عندما تكون الكتلة في منتصف المسافة بين النهايتين.

سوستة حلزونية كزازتها $3.5N/m$ عندما تكون إحدى نهايتيها مثبتة، والحمل يؤثر على النهاية الحرة. أوجد أقل قيمة للتردد عندما تكون كلتا النهايتين مثبتتين وكتلة قدرها $18Kg$ تلؤثر على السوستة. (الجواب: $4.44Hz$)



الشكل (2-10)

19- في المنظومة المبينة بالشكل (2-10) السوستة العلوية كزازتها $1000\ N/m$ والسوستة السفلية كزازتها $500\ N/m$ والكتلة المعلقة قدرها $0.5Kg$ أوجد التردد الطبيعي للأهتزاز.

(الجواب: $4.11\ Hz$)

20- كتلة m عندما تؤثر تدريجياً على سوستة ذات قوة مرنة k لوحدة الأمتطاط، تحدث ترخيماً مقداره δ بيّن أنه عند أستثارتها، فأن الحركة الناجمة تكون توافقية بسيطة، وأن التردد هو n ويمكن إيجاده من العلاقة $2\pi n = \sqrt{g/\delta}$ إذا أهمل تأثير كتلةالسوستة.

عمود أفقي – يرتكز على محملين عند نهايتيه – يحدث به ترخيم عند منتصفه قدره $0.005\ mm$ لكل $100N$ من الحمل الواقع عند هذا المنتصف وعند تركيب طاره كتلتها $300\ Kg$ عند المنتصف، فإن

المنظومة تستجيب للأستثارة الخارجية، وتهتز رأسياً بسعة قدرها $0.25mm$ وأحسب قيم التردد، والسرعة القصوى، والعجلة القصوى لهذا الأهتزاز.

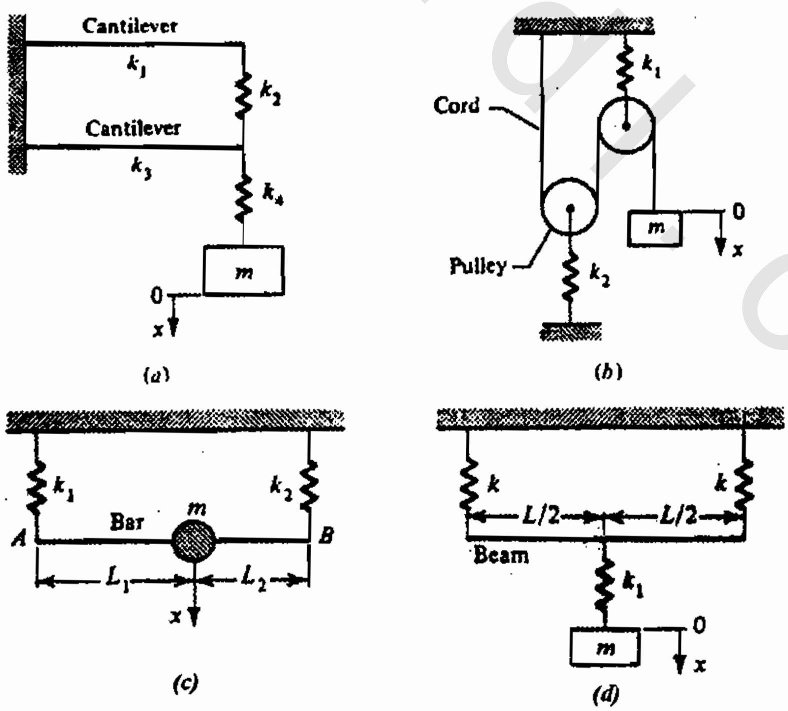
21– بندول ألتوائي يتكون من سلك طوله $0.5m$ ، وقطره $10mm$، نهايته العلوية مثبتة، أما النهاية السفلية، فمركب عليها قرص ثقيل عزم قصوره الذاتي $0.06Kg.m^2$ ، ومعامل جساءة السلك $44\ GN/m^2$ ، أوجد تردد الذبذبة الألتوائية للقرص وأذا كانت الأزاحة القصوى على أحد جانبي وضع الثبات الحر هي $5°$ فأوجد أقصى قيمة لكل من السرعة الزاوية والعجلة الزاوية للقرص.

(الجواب: $125.5\ rad/s^2$ و $3.31\ rad/s$ و $6.04Hz$)

22– أسطوانة معدنية مصمته قطرها $450mm$ معلقة رأسياً على أمتداد محورها بسلك مثبت فيها بإحكام – فإذا كانت مقاومة السلك للألتواء $22Nm/rad$، فأوجد كتلة الأسطوانة اللأزمة لكي تهتز بمعدل $40vib/min$ إذا أعطيت أزاحة زاوية صغيرة حول محورها. (الجواب: $49.5\ Kg$)

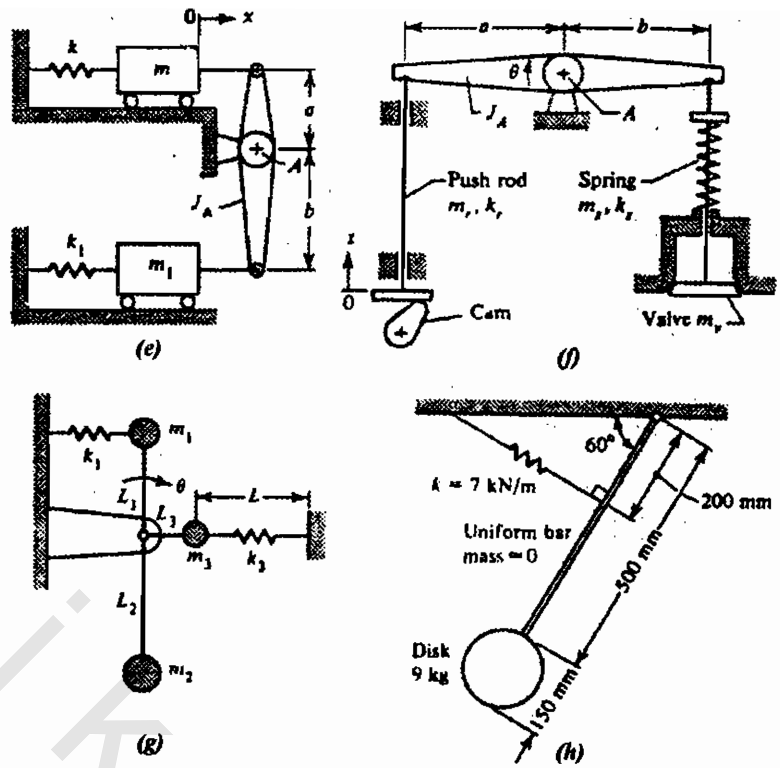
23– علقت حدافة مرتكزة بالسطح الداخلي لإطارها على ساند أفقي ذي حافة حادة، بحيث يمكن أرجحتها في مستواها الرأسي – وزن الحدافة $350Kg$ والحافة الحادة للساند الأفقي موازية لمحور الحدافة، وتبعد عنه $350mm$ ويبلغ زمن ذبذبة صغيرة واحدة $1.77s$، بفرض أن مركز ثقل الحدافة يقع على محورها. أوجد نصف قطر الحركة التدويمية حول هذا المحور. أيضاً أوجد عزم اللي اللازم لزيادة سرعة الحدافة بمعدل منتظم من 240 إلى $250\ rev/min$ خلال $0.75s$ عندما تكون الحدافة مداره حول محورها. (الجواب: $73.25Nm$ و $387.2mm$)

24–أوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي للمنظومات المبينة بالشكل$(2\text{-}11a,b,c,d,e,f,g\ and\ h)$



(a) (b)

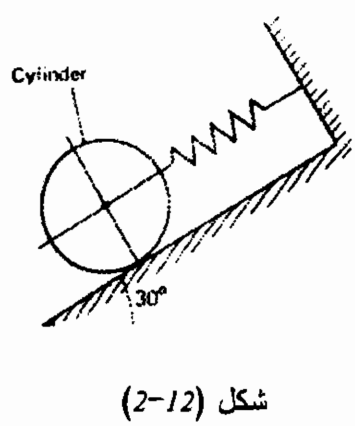
(c) (d)



أشكال *(2-11a,b,c.d,e,f,g and h)*

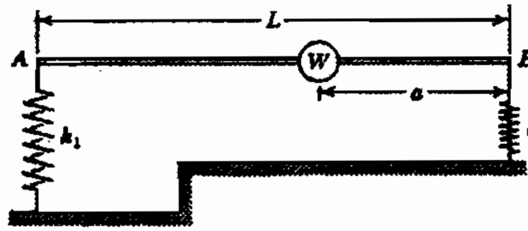
*25*ــ اسطوانة قطرها *200 m m*، وكتلتها *2Kg*، ونصف قطر حركتها التدويمية حول محورها *80 m m*، تستقر على سطح يميل *30°* على المستوى الأفقي، وتتصل بها سوسته (نابض) معاملة *1200 N\m*، كما هو مبين بالشكل *(2-12)*.

أــ إذا كانت الاسطوانة تتدحرج على السطح دون انزلاق، فأوجد تردد حركتها إذا ما أزيحت عن وضع اتزانها ثم أعتقت . (ب) إذا كان معامل الاحتكاك بين الاسطوانة والسطح هو *0.2*، فأوجد أكبر سعة لحركة مركز الاسطوانة، بدون انزلاقها على السطح. (الجواب: *3.04 Hz, 7.27 m m*).



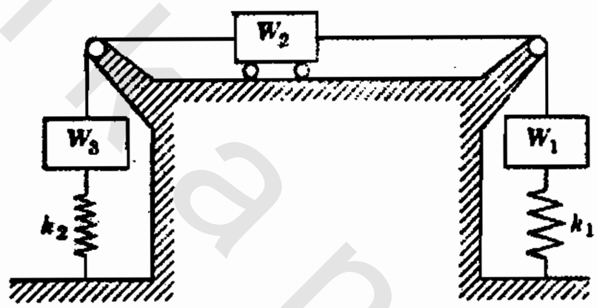
شكل *(2-12)*

26ــ أوجد التردد الطبيعى للمنظومة المبينة بالشكل (2-13) إذا تحركت المنظومة فى الاتجــاه الرأســى مع اعتبار أن القضيب AB جاسئ ومعمل الوزن وأن الوزن الركز (W) هو المؤثر فى المنظومة.



شكل (2-13)

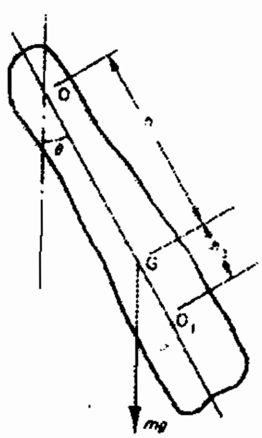
27ــ أوجد التردد الطبيعى ومعادلة الحركة للمنظومة المبينة بالشكل (2-14) وذلك عند حــدوث ذبذبــة صغيرة للاوزان W_1, W_2, W_3 مع اعتبار إن الحبل المتصل بعناصر المنظومة غير قابل للاســـتطاله وأن معاملات النوابض هى K_1, K_2.



شكل(2-14)

28ــ جسم ذو سمك منتظم، وبه ثقب أسطوانى على مسافة h مــن مركز ثقله G علق الجسم من هذا الثقب ليتأرجح فى مستواه كبندول مركب كما هو مبين بالشكل (2-15) بيــن ــ لذبذبــات ذات ســعة صغيرة ــ أن الزمن الدورى مساو للزمن الدورى لبنــدول بسـيط طوله $h+R_G^2/h$ حيث R_G هو نصف قطر الحركة التدويميـة حول محور يمر خلال G، موازياً لذلك المحور المار خــلال O ، إذا كان الجسم عبارة عن قرص قطره $400\ mm$، والمســافة $h=150\ mm$ أوجد الزمن الدورى، وحدد مكان نقطة بديله 01 والتــى لــها نفس زمن التأرجح.

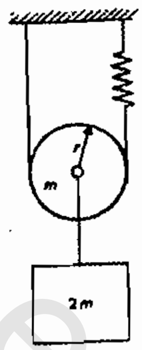
(الجواب: $1.068\ s,\ h1=133\ mm$).



شكل(2-15)

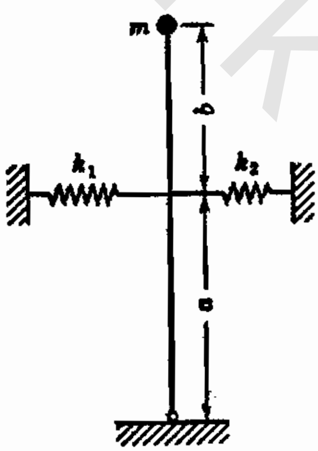
29ــ حدافة قرصية مصمتة قطرها $600\ mm$ مركبة بين ذنبتين عديمتى الاحتكاك، بحيث كان محورهــا أفقياً، ربطت عليها ــ بمسامير ــ كتلة أسطوانية قدرها $5Kg$، وقطرها $200mm$، بحيث كـــان محــور الكتلة موازياً لمحور الحدافة، ويبعد عنه مسافة $200\ mm$، فوجد أن المنظومة تتأرجح بزمن دورى $3.18\ sec$، ما هى كتلة الحدافة؟

(الجواب: $50.8\ Kg$).



شكل$(2\text{–}16)$

30ــ المنظومة المبينة بالشكل $(2\text{–}16)$ تتكون من بكـــرة كتلتــها m، ونصف قطرها r، عزم قصورها الذاتى حول محورها هو I ، محمولة على حبل غير مرن على التوالى مع نابض معاملة K، وتتدلى كتلـــة $2m$ حرة الاتصال مع مركز البكرة ، إذا كان الحبل لا يــنزلق علــى البكرة فاستنبط تعبيراً رياضياً بدلاله القيم المعطاة للـــتردد الطبيعـــى للذبذبات الرأسية.



شكل$(2\text{–}17)$

31ــ المنظومة المبينة بالشكل $(2\text{–}17)$ عبارة عن بندول مقلــوب: أــ أوجد التردد الطبيعى للمنظومة فى حالة حدوث سعة صغـــيرة إثنـــاء الاهتزاز. ب ــ إذا كانت الكتلة m والنوابض $K1, K2$، والبعد $a + b$ (أى طول البندول) جميعها ثابتة تحقق من قيمة البعـــد a عندمـــا لا يحدث اهتزاز أى أن

جـــ ــ إذا كانت السعة للكتلة يعبر عنها بـــ $(X\ \ inches)$ مـــا هـــى أقصى عجلة.

دـــ كم تصبح قيمة التردد الطبيعى F_n لهذه المنظومة عندما تصبـــح الجاذبية تقريباً مساوية سدس عجلة الجاذبية الأرضية.

الجواب:

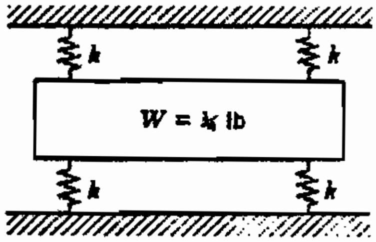
$$(a)\ f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2(k_1+k_2) - mg(a+b)}{m(a+b)^2}}$$

$$(b)\ a = \sqrt{\frac{mg(a+b)}{k_1+k_2}}$$

$$(c)\ A = X\left(\frac{a^2(k_1+k_2) - mg(a+b)}{m(a+b)^2}\right)$$

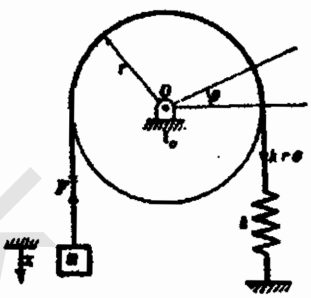
$$(d)\ f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^2(k_1+k_2) - \frac{1}{6}mg(a+b)}{m(a+b)^2}}$$

32ـ المنظومة المبينة بالشكل $(2-18)$ إذا كانت وزن الكتلة $(0.25lb)$ متصل بأربعة نوابض معامل كل منهم K وكان التردد الطبيعي أثناء الاهتزاز في الاتجاه الرأسي $(6\ c.p.s)$ أوجد قيمة K لكل نابض ومعامل النابض المكافئ.



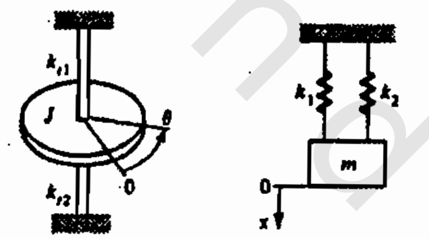
شكل $(2-18)$

33-اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعي بطريقتي الطاقة ونيوتن للمنظومة المبينة بالشكل $(2-19)$.



شكل $(2-19)$

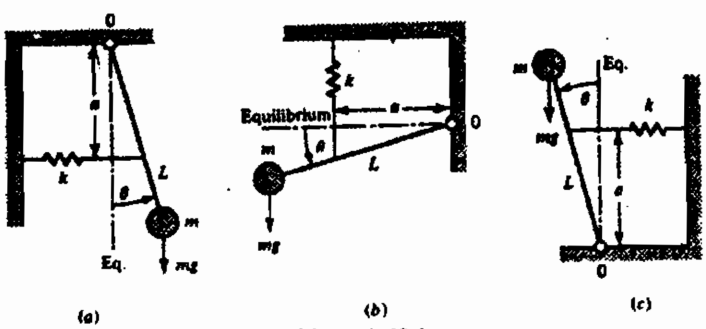
34-اوجد التردد الطبيعي f_n للمتنظومة المبينة بالشكل $(2-20)$.



(a) Vibratory system (b) Equivalent system

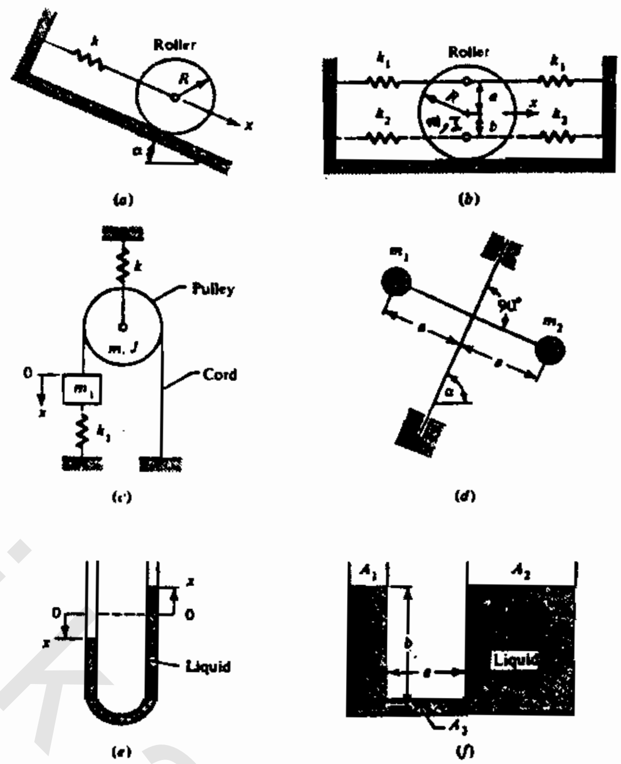
شكل$(2-20)$

35-أوجد معدلات الحركة للمنظومات المبينة بالشكل$(2\text{-}20a,b,c)$.



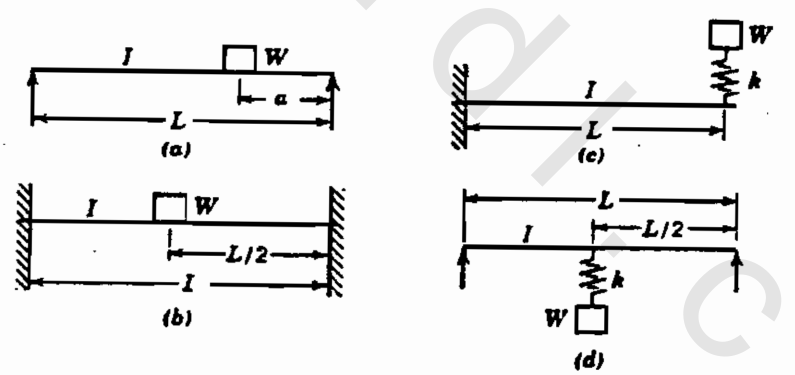
شكل$(2-20)$

36-اوجد معادلة الحركة لكلمن المظومات المبينة بالشكل(2-22a,b,c,d,e and f).



شكل (2-22a,b,c,d,e and f)

37-اوجد معادلة الحركة والتردد الطبيعى للمنظومات المبينة بالشكل (2-23a,b,c and d)



شكل (2-23a,b,c and d)

الجواب:

(a) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI\,Lg}{Wa^2b^2}}$ cps (b) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{192EIg}{WL^3}}$ cps

(c) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EIkg}{(3EI+kL^3)W}}$ cps (d) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{48EIkg}{(48EI+kL^3)W}}$ cps