الباب الأول

المصطلحات الأساسية لعلم الاهتزازات

1- مقدمة:

علم الاهتزازات الميكانيكية (*Mechanical Vibration*) يبحث فى كل ما تتعرض لة الاجسام الدرنـــة تحت تأثير القوى المسببة للحركة الاهتزازية والتى تنشأ من عدم اتزان الكتل المتحركة حركة دورانيـــة أو ترددية , ويعتبر هذا العلم أيضا من اهم مجالات الدراسة فى الفيزياء لان كل الانظمة الفيزيائية فـــى الطبيعة قادرة على القيام بحركات اهتزازية بشكل او بأخر حيث ان الصـــوت والضـــوء مـــا همـــا الا حركتان اهتزازيتان , واذا تعرض جسم ما الى تأثير قوة خارجية مثل الرياح أو خلافة وجعلتـــة يـــهتز بدرجة تردد تتوافق مع تردد الجسم ذاتة فيؤدى ذلك الى اهتزازاتة باهتزازات ذات اتساع كبـــير والتـــى تجعلة ينهار مثل كوبرى تاكوما الشهير بولاية اوريجون بالولايات المتحدة والتى تعرض لرياح أحدثـــت بة اهتزازات ذات تردد متوافق مع تردد الكوبرى الطبيعى والذى أدى الى اهتزازة بدرجة كبـــيرة جـــدا مما أدى الى انهيارة بالرغم من جودة تصميمه وتنفيذه من الناحية الهندسية وذلـــك لعـــدم أخـــذ حركتـــة الاهتزازية فى الحسابات التصميمية.

أما بالنسبة للاعمدة الدورانية فقد تحدث انحرفات كبيرة عند سرعات عالية وهى السرعات الحرجـــة *Critical Speeds* نتيجة تأثير قوى غير متزنة مهما كانت صغيرة ويؤدى هذا الى اخفـــاق العمـــود اذا دار على هذة الحالة لفترة طويلة. أما فى الحياة العملية فعند تصميم سيارة أو طـــــائرة مثـــلا يجـــب عـــزل الاهتزازات بأكبر قدر ممكن حتى لاتصل الى الراكب وذلك بدراسة نظام هذة المركبة من ناحيـــة علـــم الاهتزازات الميكانيكية , وكذلك عزل الاهتزازات الناتجة من الالات والماكينات بالطرق الهندسية عـــن جدران المنشأت(المبانى) فى المصانع أو فى محطات توليد القوى او الورش الصغيرة التـــى بـــها الآت يصدر منها اهتزازات والموجودة بالمبانى وسط السكان فى المدن.

2- فوائد الاهتزازات:

توجد اهتزازات مفيدة فى الحياة ومرغوب فيها مثل اهتزاز اوتار الاجهزة الموسيقية التى تســـمعنا الحان موسيقية عذبة , وكذلك أمكن التوصل عن طريق البحث و الدراسة لعلم الاهتزازات الى تصنيـــع أجهزة تصدر موجات عالية جدا تستطيع تفتيت الحصاوى بجسم الانسان بـــدون عمليـــات جراحيـــة , وأيضا امكن تصنيع الاجهزة الالكترونية التى تتحكم فى الترددات الاهتزازية المختلفـــة التـــى ترســـلها الاقمار الصناعية لدول العالم وامكن استقبالها على جهاز التلفزيون بواسطة الاستقبال الالكـــترونى ممـــا حول العالم الى قرية صغيرة.

الغرض من دراسة علم الاهتزازات فى الهندسة الميكانيكية هو العمل على ايجاد حل لكثير من المشاكل بالبحث والدراسة للقوانين التى تتحكم فى اهتزاز المنظومات الميكانيكية والتى أمكننا من السيطرة على الجانب السلبى الغير مرغوب فية من الاهتزازات والتى امكن اخمادها حتى لاتصل الى راكب السيارة وتعمل على اجهادة وتعبة. وكذلك التحكم فى الاصوات الصادرة من المحركات وخاصة الطائرات والعمل على اخماد نسبة كبيرة منها ايضا حتى لاتصل الى راكب الطائرة وذلك بجانب البحث فى علم الضوضاء *Noise* .

3-عيوب الاهتزازات:

ان عيوب الاهتزازات هو الجانب الغير مرغوب فية لما لها من خواص تدميرية وتحطيمية مثل انهيار الكبارى والجسور واجنحة الطائرات وكذلك انهيار أجزاء الماكينات بسبب الاهتزازات الناتجة عن عدم توازن الكتل الدورانية بها ويكون تأثير الاهتزازات على عمل أجهزة القياس الدقيقة الموجودة بالقرب من المكائن الدوارة سلبى والذى يؤدى الى زيادة نسبة الخطأ فى الاجهزة أو قد يؤدى الى تلفها او تعطيلها عن أداء وظيفتها , وهذا بالاضافة الى الاصوات المزعجة المنبعثة من هذة الماكينات والتى تتعب راحة الناس وخاصة المرضى.

4-تعريف المصطلحات الفنية :

يلزم لدراسة علم الاهتزازات الميكانيكية تعريف المصطلحات الفنية التى سنتناولها فى دراستنا لهذا العلم فى هذا الكتاب وفيما يلى أهم هذة المصطلحات :-

(4-1) الحركة الاهتزازية (الترددية او التذبذبية) : *Vibratory or Oscillatory*

هى حركة دورية تكرر نفسها كل فترة زمنية وتسمى هذه الفترة بزمن الذبذبة *Period of Oscillatory* .

(4-2) الدورة : *Cycle*

هى وحدة الحركة فى الفترة الزمنية الواحدة.

(4-3) التردد (تردد الحركة الاهتزازية): *Frequency*

هو عدد الدورات فى وحدة الزمن ويسمى بالتردد الطبيعى الدورى او الدائرى ويعبر عنة بالدورة لكل ثانية*(cycle/sec.)* ويرمز له بالرمز (ω).

(4-4) زمن الدورة : *Time of Period*

هو الزمن المطلوب للحركة الدورية لتكرر نفسها ويرمز له بالرمز (t_p).

(4-5) التردد الطبيعى (f_n) : *Natural of Frequency*

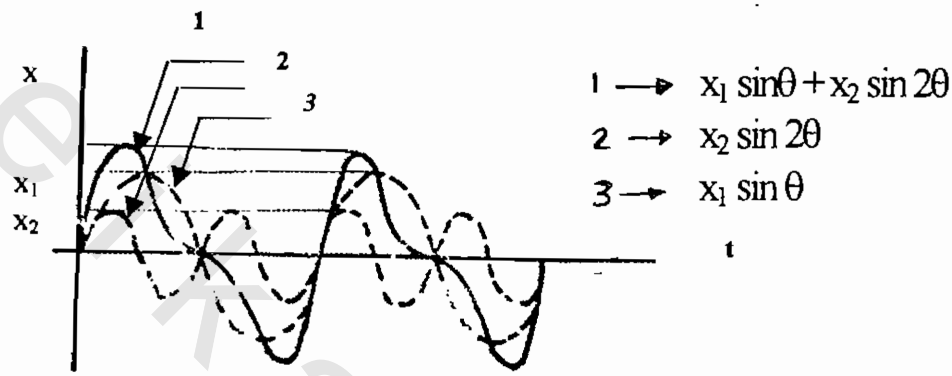
هو تردد المنظومة المهتزة اهتزاز حر دون حدوث احتكاك او مقلوب الزمن الدورى $\frac{1}{t_p}$ ويعبر عنة بالهرتز *(Hz)*

(4-6) **التردد الطبيعي المخمد** (f_d) : *Damping Frequency*

هو تردد المنظومة المهتزة اهتزاز حر بوجود الاحتكاك.

(4-7) **انواع الحركات الاهتزازية:** *Types of Vibration Motions*

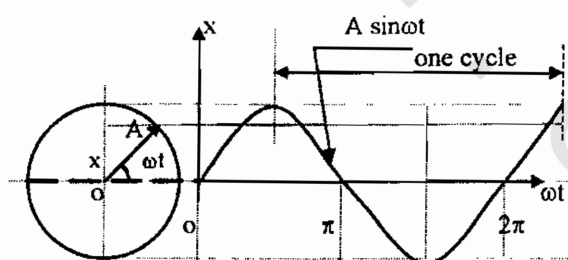
يبين الشكل *(1-1)* دالة تذبذبية وهي التي تكرر نفسها كل فترة زمنية . أما الحركة التوافقية *Harmonic Motion* فهي التي يمكن تمثيلها بأي من الدالتين الدائريتين *Sine or Cosine* وتعتبر كل دالة توافقية هي تذبذبية أما الدالة التذبذبية فقد لاتكون توافقية , وقد أثبت فورريير *Fourier* أن الدالة التذبذبية يمكن تركيبها من عدة متتاليات توافقية , وعلى ذلك يمكن تمثيل دالة بالشكل *(1-1)* بمركبتين توافقيتين:



الشكل*(1-1)* يمثل الحركة التذبذبية ومركباتها التوافقية.

$x = x_1 \sin\theta + x_2 \sin 2\theta$

يسمى الحد الاول $x_1 \sin\theta$ أولي *Primary* , والحد الثاني $x_2 \sin 2\theta$ ثانوي *Secondary* ويتردد بضعف سرعة الحد الاول , ومن حسن الحظ ان كثير من الدوال التذبذبية الهامة يمكن ارجاعها الى دوال توافقية ببساطة.



الشكل(1-2) يمثل الحركة التوافقية البسيطة

(4-8) **أنواع الاهتزازات:** *Types of Vibrations*

ينقسم الاهتزاز الى الاهتزازات الحرة والاهتزازات الجبرية (القسرية).

أ-الاهتزاز الحر: *Free Vibration*

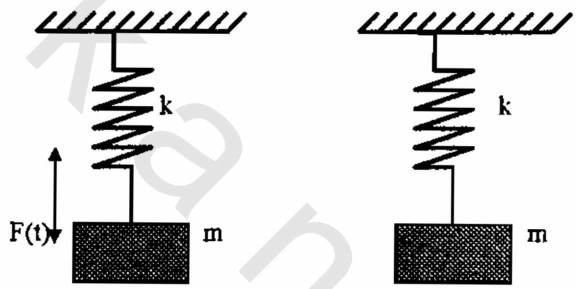
هو اهتزاز المنظومة المرنة *Elastic System* وازاحتها من وضع الاتزان الاستاتيكى بدون تأثير قوة خارجية تؤثر فى المنظومة ويكون ترددها هو التردد الطبيعى تحت تأثير معامل النابض ووزن كتلة المنظومة ويكون الاحتكاك بين المنظومة والهواء ولهذا تتضائل الاهتزازات مع الزمن بسبب وجود الاحتكاك ولذلك تسمى بالاهتزازات الحرة أو الاهتزازات العابرة , كما مبين بالشكل *(1-3a)* والذى يوضح ابسط المنظومات الاهتزازية الحرة وهو الهزاز الميكانيكى البسيط.

ب-الاهتزازات الجبرية (القسرية): *Forced Vibrations*

هو اهتزاز المنظومة المرنة تحت تأثير قوة خارجية تؤثر عليها والتى يمكن تمثيلها عادة بالعلاقات:

$F\sin\omega t, F\cos\omega t, Fe^{i\omega t}, F(t)$

ويكون التردد الجبرى مختلفا عن التردد الطبيعى للمنظومة لان هذا التردد يكون نتيجة القوة المؤثرة , والشكل *(1-3b)* يوضح الاهتزاز الجبرى لمنظومة الهزاز الميكانيكى البسيط تحت تأثير قوة الاستثارة الخارجية *F(t)* .



الشكل (1-3b) الاهتزازالجبرى   الشكل (1-3a)الاهتزاز الحر

(9-4) الرنين: *Resonance*

يحدث الرنين فى حالة الاهتزاز الجبرى او القسرى وذلك اذا حدث وتوافق التردد الناتج من تأثير القوة الخارجية مع التردد الطبيعى للمنظومة فأن سعة الذبذبات تزيد بدرجة كبيرة جدا والتى تصل الى مرحلة خطرة وتسمى هذة المرحلة بالرنين حيث انها تشبة ذبذبات الرنيين فى الاجهزة الصوتية وان السعة فى هذة الحالة تكون محكومة فقط بمقدار الخمد الموجود فى المنظومة , ولتجنب الوصول لهذة المرحلة يجب معرفة التردد الطبيعى مسبقا للمنظومة وكذلك دراسة التردد الحادث نتيجة قوة الاستثارة وتعينة بأجهزة القياس العلمية.

(10-4) الكبت (الخمد): *Damping*

تتعرض المنظومات المهتزة الى مقاومة نتيجة الاحتكاك والذى يعبر عنة بالكبت أو الخمد أو التضاؤل وذلك بصور مختلفة مثل الكبت الجاف الكولمبى , والكبت بالهواء , او الكبت نتيجة احتكاك السوائل أو نتيجة لاى أنواع اخرى للمقاومة ا لداخلية ...وتحت تأثير الكبت تقل اهتزازات المجموعة حرة الحركة

الى أن تتوقف.

(4-11) معامل اليای (الكزازة او الاكتناز): Stiffness Coefficient

اذا أثرت قوة شد (F) على نابض فانة يحدث استطالة للياى مقدارة Δ وبزيادة قوة الشد المؤثرة على النابض يزداد مقدار الاستطالة والعكس صحيح وبذلك فأن مقدار الاستطالة (مقدار التغيير فى طول النابض) يتناسب مع القوة المؤثرة بغض النظر عن شكل النابض أو مساحة مقطعة ويسمى ثابت التناسب بمعامل النابض k كما بالمعادلة الاتية:

$$\because \quad F \propto \Delta \qquad \therefore\ F = k\Delta \qquad \therefore\ k = \frac{F}{\Delta}$$

وتكون وحدات k للنوابض البسيطة عبارة عن قوة لكل وحدة طول kgf/cm أو ib/in , أما فى حالة المجموعات الالتوائية فيعرف معامل الياى بمعامل الالتواء q لوحدة الازاحة حيث $q = \dfrac{T}{\theta^{o}}$

(kg.cm/degree) or (ib.in/degree) حيث T هى عزم الالتواء.

(4-12) درجات الحرية: Degrees of Freedom

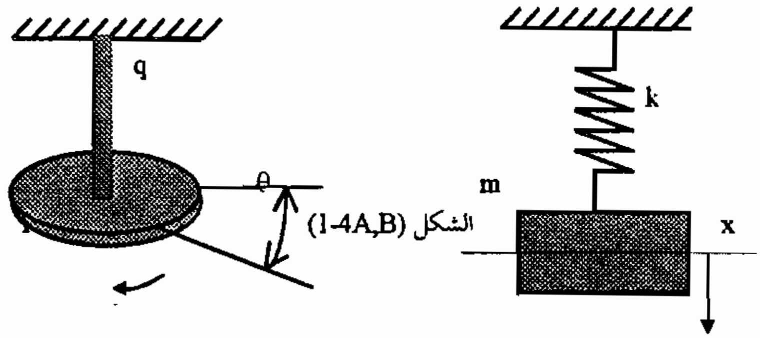
لدراسة الاهتزاز لمنظومة ميكانيكية معينة يجب أولا تحديد أقل عدد للمتغيرات التى تلزم لوصف حركة المنظومة وتحديد موضعها , ويسمى هذا العدد من المتغيرات بعدد درجات الحرية للمنظومة , ويمكن تقسيم المنظومات الميكانيكية الى ثلاث مجموعات كما يلى:

أ-منظومات ذات درجة حرية واحدة : Systems of one Degree of Freedom

تعرف المنظومات ذات درجة الحرية الواحدة بأنها المنظومات التى تحتاج الى احداثى واحد فقط لوصف الحركة وتحديد موضع كتل المنظومات فى الفراغ مع العلم بأنة يمكن أن تهتز كثيرا من النظم بأكثر من طريقة واكثر من اتجاة كما بالامثلة الموضحة بالاشكال الاتية:-

1-الشكل (1-4A) يبين منظومة الهزاز الميكانيكى البسيط ذات درجة حرية واحدة لانها مقيدة لتتحرك راسيا ولهذا فأنة يلزم احداثى واحد فقط $x(t)$ لوصف حركة المنظومة وتحديد وضع الكتلة فى الفراغ عند زمن (t) من وضع الاتزان الاستاتيكى.

2-الشكل (1-4B) يبين منظومة البندول الالتوائى وهو عبارة عن قرص مثبت فى عمود مرن معامل الالتواء لة q ويلاحظ انة عند التأثير بعزم $Torque\ (T)$ على القرص فأنة يتحرك بزاوية(θ) بعد فترة زمنية (t) ولهذا يلزم احداثى واحد فقط $\theta(t)$ لوصف الحركة وتحديد وضع القرص وبذلك فهى منظومة ذات درجة حرية واحدة.

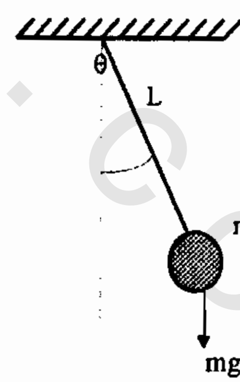


شكل (1-4A) شكل (1-4B)

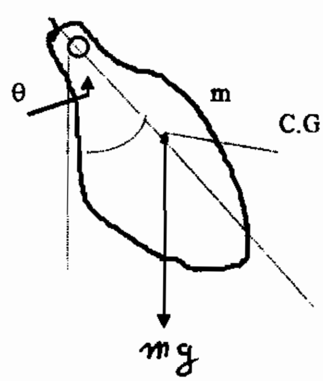
3-الشكل (1-4c,d) يبين البندول البسيط والبندول الصلب وكل منهما يحتاج الى احداثى واحد فقط $\theta(t)$ لوصف حركتة حول المحور الراسى وتحديد موضعة فى الفراغ ولهذا فكل منهما تعتبر منظومة ذات درجة حرية واحدة.

4-الشكل (1-4e) يبين منظومة تتكون من كتلة m وبكرة ونابض معاملة k ونلاحظ من حركة المنظومة وجود احداثيين أحدهما $\theta(t)$ وهو يمثل الازاحة الزاوية لدوران البكرة حول مركزها والاحداثى $x(t)$ يمثل الازاحة الخطية للكتلة m فى الاتجاة الرأسى وهذين الاحداثيين غير مستقلين عن بعضهما ولكنهم مرتبطين معا ولهذا يكفى احداثى واحد فقط من هذين الاحداثيين لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة فى الفراغ عند زمن (t) من موضع الاتزان الاستاتيكى

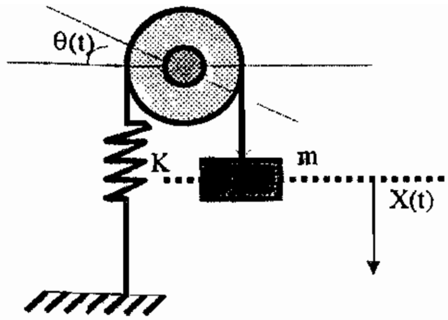
5-الشكل (1-4f) يبين منظومة جهاز لاقط الاهتزازات لقياس درجة الزلازل حيث يتم ربط قاعدة المنظومة بالجسم المراد قياس حركتة الاهتزازية وذلك بايجاد الحركة النسبية بين القاعدة والكتلة والتى تمثلها المعادلة $x = x_1 + x_2$ ولهذا يلزم احداثى واحد فقط $x(t)$ لوصف حركتة المجموعة وتحديد موضعها فى الفراغ.



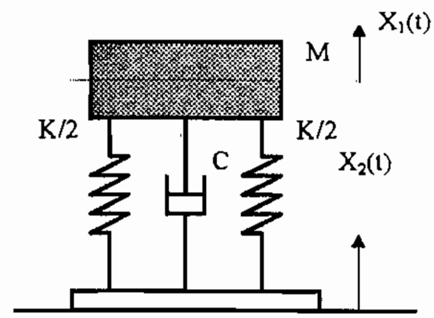
الشكل(1-4c) البندول البسيط



الشكل(1-4d) البندول الصلب



الشكل(1-4e) منظومة ذات درجة حرية واحدة



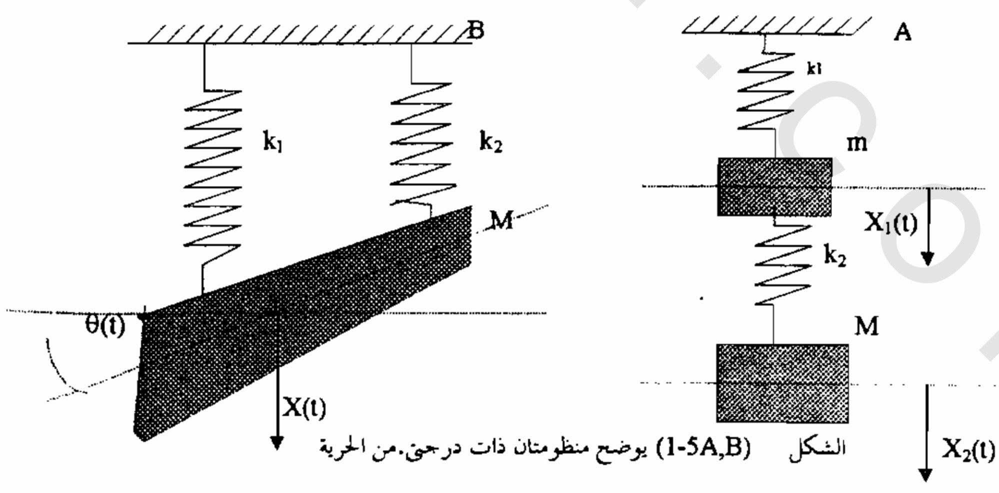
الشكل (1-4f)يوضح جهاز لاقط الاهتزاز ذات درجة حريةواحدة

ب-المنظومات ذات درجتين من الحرية: *Systems of Two Degree of Freedom*

تعرف المنظومات ذات درجتى الحرية بأنها المنظومات التى تحتاج الى احداثيين فقط لوصف الحركة وتحديد موضع كتل المنظومات فى الفراغ وكثيرا منها يهتز بأكثر من طريقة واكثر من اتجاة كما بالامثلة الموضحة بالاشكال الاتية :-

1-الشكل *(1-5A)* يبين منظومة مكونة من كتلتين *m,M* وكذلك نابضين k_1, k_2 وكل منهما مقيد للحركة فى الاتجاة الراسى فقط اى يحدث ازاحة خطية رأسية وهما $x_1(t), x_2(t)$ ويلاحظ ان احد الاحداثيين لايكفى لوصف الحركة وتحديد وضع الكتلتين فى الفراغ من وضع الاتزان الاستاتيكى عند زمن (*t*) ولكن يلزم الاحداثيين معا ليحققان ذلك ولهذا فهى منظومة ذات درجتين من الحرية.

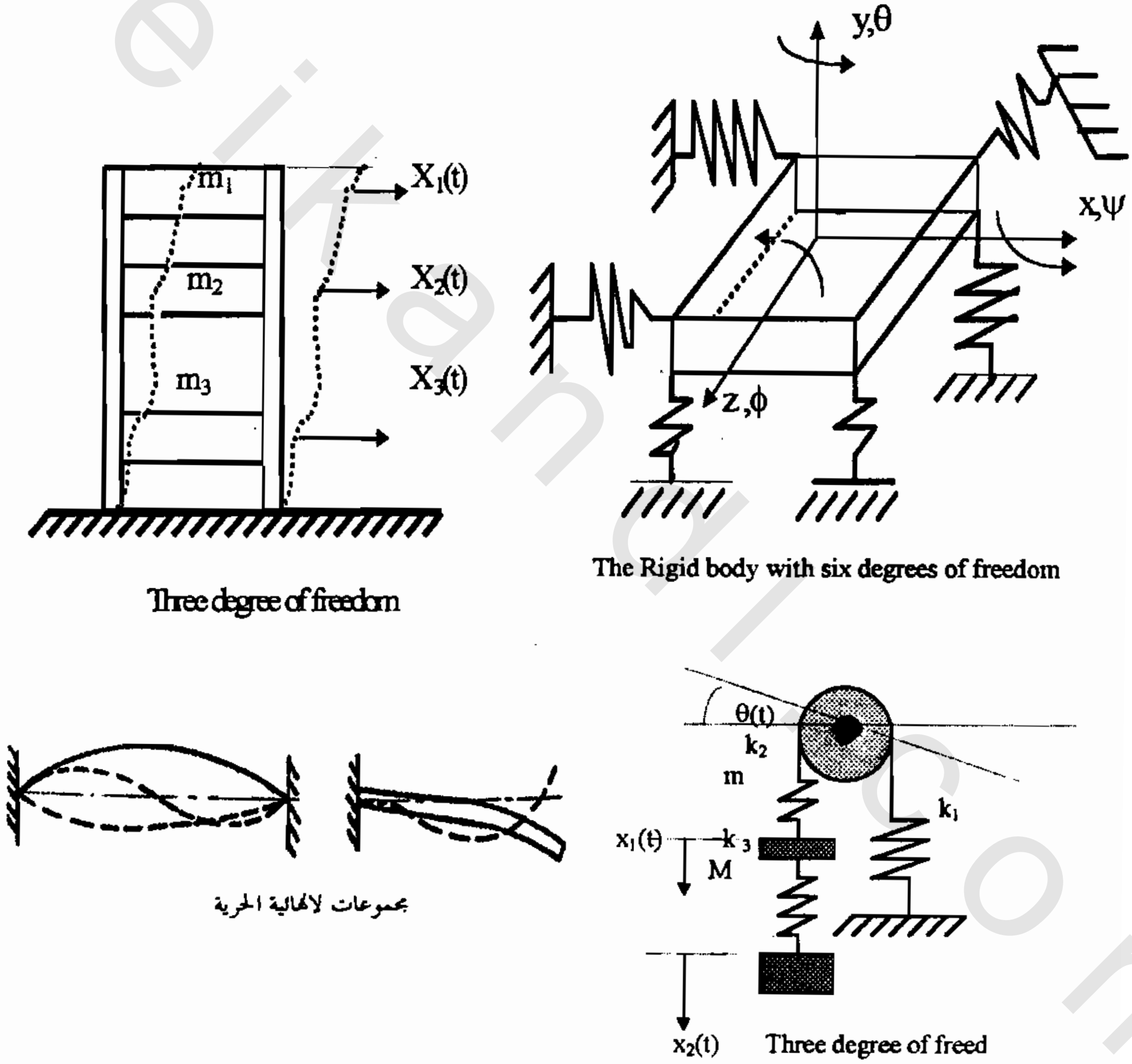
2-الشكل *(1-5B)* يبين منظومة تتكون من نابضين معاملهما k_1, k_2 غير متساويين وكتلة *M* ولهذا يحدث ازاحة خطية *x (t)* وازاحة زاوية *θ(t)* وهم احداثيين لابد من ايجادهم لوصف حركة المنظومة وتحديد موضع الكتلة فى الفراغ من وضع الاتزان الاستاتيكى عند زمن *(t)* من بداية الحركة ولذلك فهى منظومة ذات درجتين من الحرية.



الشكل (1-5A,B) يوضح منظومتان ذات درجتى.من الحرية

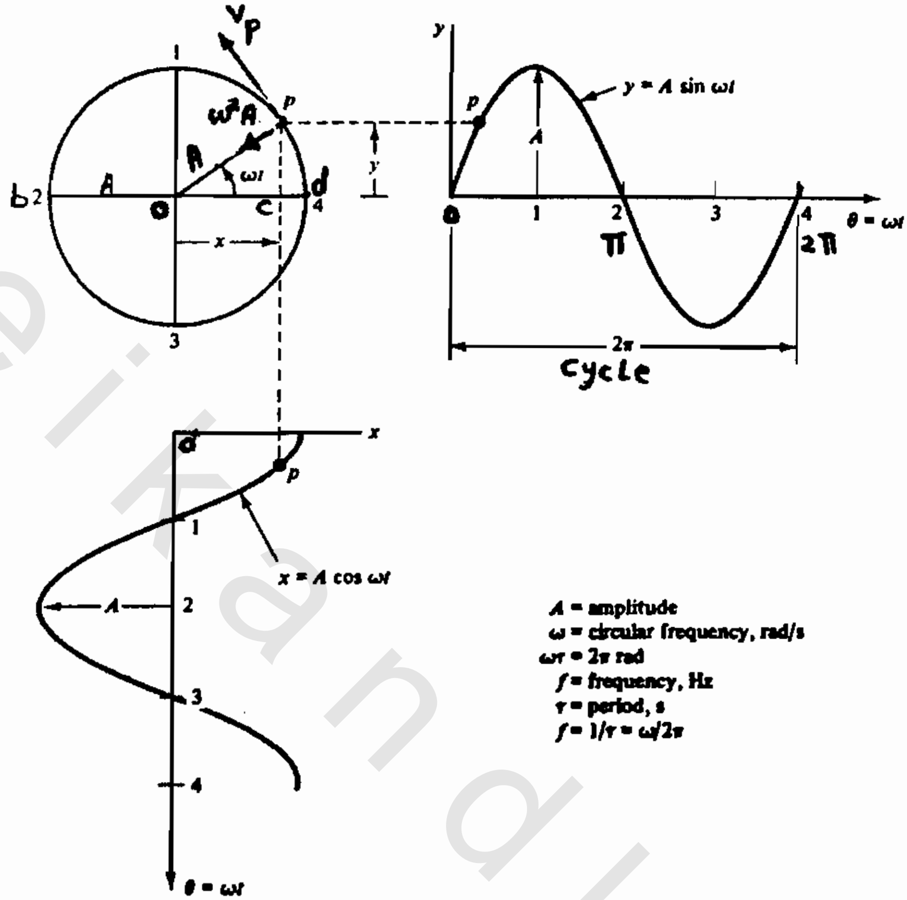
ج-منظومات متعددة درجات الحرية: *Multiple-Degree-of-Freedom System*

تعرف المنظومات التي لها عدد لانهائي من درجات الحرية (أكثر من احداثيين لوصف الحركة) بأنها المنظومات التي يمكننا أن نتصور كل منهما بأنها منظومة تحتوى على عدد لانهائي من الكتل والبايات وعلى ذلك فهي لانهائية الحرية ويمكن أن تتذبذب بعدد لانهائي من الاشكال وهذة المنظومات يقال عنها أنها في المنوال الرئيسي *Principal Mode* عندما تتذبذب الكتل كلها بتردد مشترك . أما بقية كيفيات الاهتزاز فيمكن اثبات انها عبارة عن عدد من الاهتزازات الرئيسية مجتمعة معا . ومن حسن الحظ ان التردد الطبيعي الاول يكون مهما من الناحية العلمية في كثير من التطبيقات وكل درجة من درجات الحرية يقابلها منوال رئيسي , وعلى سبيل المثال ان المنظومة ثنائية درجات الحرية يكون لها منولان رئيسيان والشكل *(1-6)* يوضح منظومات ذات درجات متعددة الحرية او لانهائية الحرية.



الشكل *(1-6)* يبين منظومات متعددة درجات الحرية.

عندما يتحرك جسم على محيط دائرة وكانت عجلة حركة هذا الجسم تتناسب مع ازاحتة من نقطة ثابتة (o) هى مركز الدوران للجسم وكان اتجاة العجلة دائما نحو النقطة الثابتة فان حركة هذا الجسم تسمى حركة توافقية بسيطة (S.H.M) ولاثبات ذلك نلاحظ من الشكل (1-7) مايلى:



الشكل (1-7) يوضح الحركة التوافقية البسيطة.

من الشكل (1-7) نجد أن ازاحة النقطة c التى هى مسقط للنقطة p على القطر bd تعين من العلاقة $x = A\cos\omega t$ وذلك عندما يتحرك الجسم من الوضع od الى الوضع op فى زمن t وبسرعة زاوية ثابتة ω فان الزاوية التى تحركها op فى الزمن t هى ωt وان الازاحة القصوى A تسمى بسعة الحركة Amplitude وسرعة النقطة c هى مركبة سرعة النقطة p والموازية للقطر bd ونعين السرعة v_c بتفاضل الازاحة x بالنسبة للزمن t أى أن:

$$v_c = \frac{d(x)}{dt} = \frac{d(A\cos\omega t)}{dt} = -\omega A\sin\omega t = -\omega . pc$$

$$\therefore v_c = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

وبإهمال الإشارة نجد ان أقصى سرعة للنقطة c تحدث عندما تنعدم الازاحة x

$\therefore v_{c(\max)} = \omega_n . A$

وبما أن عجلة النقطة c هى مركبة عجلةالنقطة p الموازية للقطر bd ويمكن ايجـــاد العجلــة بتفــاضل السرعة بالنسبة للزمن كما بالمعادلة الاتية:

$$f_c = -\omega_n^2 . A\cos\omega t = -\omega_n^2 . x \quad , \quad assume \quad f_c = \ddot{X} \quad \therefore \quad \ddot{X} = -\omega_n^2 x$$

ونلاحظ من هذه المعادلة ان العجلة f_c تتناسب مع الازاحة x عن النقطة الثابتة o مركز الدوران للجسم وتتجة دائما نحو المركز بحيث ان ω_n^2هى ثابت التناسب وتسمى ω_n بالتردد الدورى *Circular Frequency* وتكون اقصى عجلة عند اقصى ازاحة اى عندما $x = A$ ومن ذلك يمكن تعيين اقصى عجلة من العلاقــة $f_{c(\max)} = \omega_n^2 . A$ وبذلك أمكن اثبات ان حركة النقطة c حركة توافقية بسيطة *(S.H.M)* ونلاحـظ ان الزمن الدورى هو الزمن الذى يستغرقة دوران النقطة p دورة واحدة كاملــة اى ان $t_p = \frac{2\pi}{\omega}$ وعنـد اقصى ازاحة وجدنا ان $x = A$ ومن ذلك يمكن اثبات ان المعادلة $\ddot{X} + \omega_n X = 0$ هى معادلة تفاضلية لحركة التوافقى البسيط

$$\because f_{c(\max)} = f_n = \omega_n^2 . A = \omega_n^2 . x \quad , \therefore \omega_n = \sqrt{\frac{f}{x}} = \sqrt{\frac{f}{A}} \quad , \therefore t_p = 2\pi\sqrt{\frac{x}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{A}{f}}$$

$$\therefore f_n = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{x}} = \sqrt{\frac{f}{A}} \quad , \because t_p = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{f}}$$

حيث x هى الازاحة ، f هى العجلة وبذلك يمكن استنتاج العلاقة الاتية:

$$\because f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad , \therefore \omega_n = 2\pi f_n$$

وتسمى وحدة التردد الطبيعى (f_n) بالهرتز *(HZ)* وتقدر بذبذبة واحدة لكل ثانية.

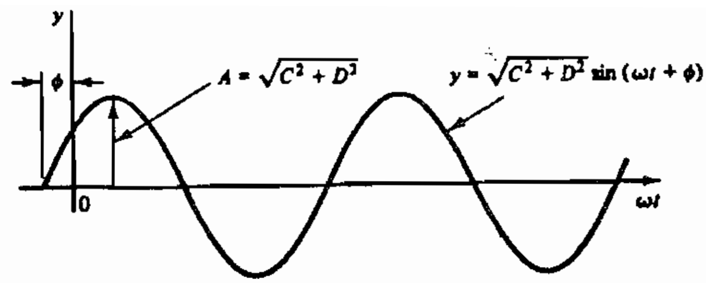
ملاحظات:

1-العوامل التى تتوقف عليها الحركة التوافقية (الجيبية) البسيطة هى السعة A *(Amplitude)* ، الـتردد ω_n *(Frequency)* ، وزاوية الطور ωt *(Phase Angle)*.

2-يمكن تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بالعلاقة $y = A\sin\omega t$ or $x = A\cos\omega t$ كمــا فــى الشــكل *(1-7)* ونلاحظ ان المسقط الافقى *Horizontal Projection* للمتجة او السعة يعبر عنة بالعلاقة:

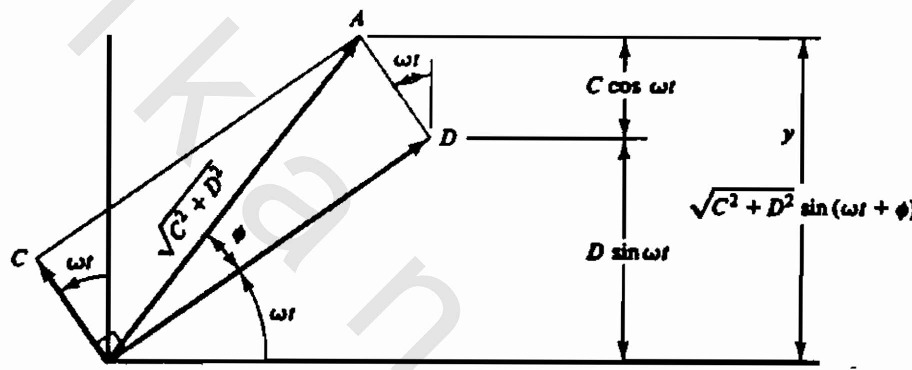
$x = A\cos\omega t = A\cos(2\pi f_n)t$

3-اذا كانت الحركة الموجية الجيبية *Sine Wave* فى اللحظة التى يبدأ فيها قياس الزمن $t \neq 0$ فأن هــذة الحركة يمكن تمثيلهابالشكل *(1-8)* ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة : $y = A\sin(\omega t + \phi)$ حيث الزاوية $(\omega t + \phi)$ هى زاوية الحركة الموجية *The Phase Angle of the Motion Wave* بينما الزاوية ϕ هى زاويــة الطور البدائية *The Initial Phase Angle* واشارة الزاوية ϕ الموجبة تدل على ان الحركة الموجية تتقــدم على الحركة الممثلة بالعلاقة $y = A\sin(\omega t)$ بمقدار زاوية الطور ϕ كما بالشكل *(1-8)*



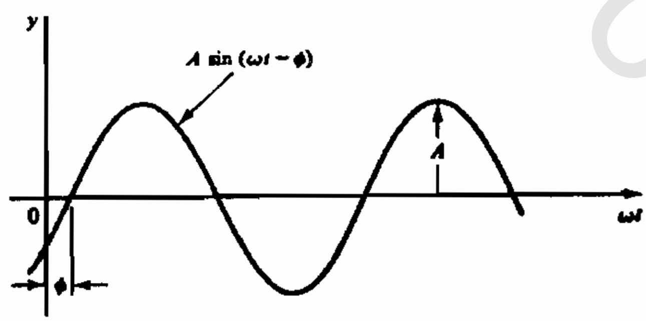
الشكل $(1\text{-}8)$ يوضح ان الحركة الموجية تتقدم الحركة الممثلة بالعلاقة $sin(\omega t)$ بالزاوية ϕ

4-الشكل $(1\text{-}9)$ يوضح المعادلة $y = A\sin(\omega t+\phi)$ التي يمكن كتابتها على الصورة $y=C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t)$ حيث ان حركة المتجة الدورانية للنقطة p والتي امكن تمثيلها بالعلاقة $y= C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$ ونجد ان $C\cos(\omega t)$ تتقدم على $D\sin(\omega t)$ بزاوية 90° وتكون السعة القصوى ممثلة بالعلاقة $A = \sqrt{C^2 + D^2}$.



الشكل $(1\text{-}9)$ يوضح دوران المتجهات الممثلة بالمعادلة $y = C\cos(\omega t)+ D\sin(\omega t) = \sqrt{C^2 + D^2}\,\sin(\omega t + \phi)$

5-اذا كانت الحركة الموجية الجيبية تتأخر بزاوية ϕ فان ذلك يمكن تمثيلة بالشكل $(1\text{-}10)$ والممثلة بالعلاقة $y=A\sin(\omega t-\phi)$ وان الاشارة السالبة للزاوية ϕ توضح ان الحركة الموجية المممثلة بهذة العلاقة تتأخر بزاوية ϕ عن الحركة الموجية الجيبية الممثلة بالعلاقة $y=A\sin(\omega t)$



الشكل $(1\text{-}10)$ يوضح ان الحركة الموجية تتأخر بزاوية الطور ϕ عن الحركة الممثلة بالعلاقة $y=A\sin(\omega t)$

6-اذا فرضنا ان الدالة التوافقية ممثلة بالعلاقة $x=A\sin(\omega t)$ فأنة يمكن تخيل هذة الحركة كمسقط جســـم يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها A كما بالشكل (1-7) وبسرعة زاوية ω على احد أقطـــار هــذة الدائرة , وتتكرر الحركة كل زاوية $(\omega t=2\pi)$ وعلى ذلك تعين فترة او زمن التردد من العلاقـــة tim of $t_p=\frac{2\pi}{\omega_n}$ =period وبذلـك يكـون الـتردد الطبيعـى f_n مســـاويا مقلـــوب الفـــترة اى ان

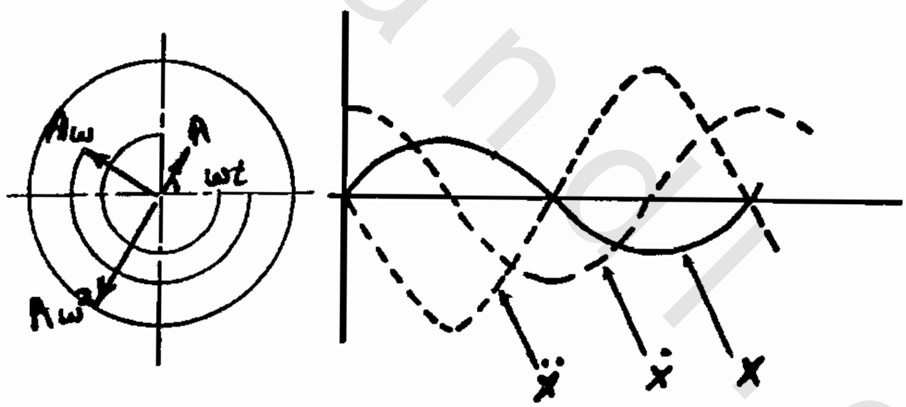
$$f_n=\frac{1}{t_p}=\frac{\omega_n}{2\pi}$$

7-اذا كانت الازاحة ممثلة بالعلاقة $x=A\sin(\omega t)$ فان السرعة تعيـــن بتفــاضل الازاحة بالنسبة للزمن t وتعين من العلاقة $\dot{x}=v=\omega\cos\omega t$, وكذلك العجلة تعين من تفاضل السرعة بالنسبة للزمن كما بالعلاقة $f=\ddot{x}=-\omega^2A\sin\omega t$

ومن المتطابقات المثلثية نجد ان

$$\dot{x}=\omega A\cos(\omega t)=\omega A\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\therefore\ddot{x}=-\omega^2A\sin(\omega t)=\omega^2A\sin(\omega t+\pi)$$

ومن هذا يمكن استنتاج ان كل من السرعة والعجلة هما دالتان توافقيتان أيضا وتدوران بنفس الســـرعة الزاوية ω ونجد ان السرعة تسبق الازاحة بزاوية ثابتة $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ بينما العجلة تسبق الازاحة بزاوية (π) كما مبين بالشكل (1-11)



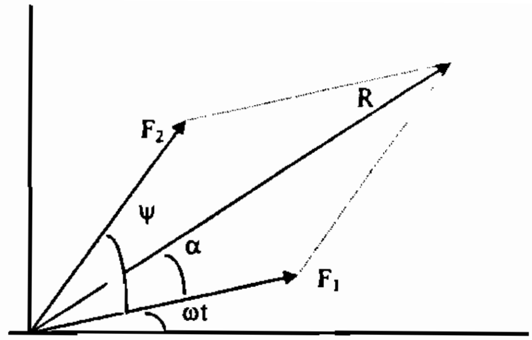
الشكل(1-11) يوضح الازاحة والسرعة والعجلة للحركة التوافقية البسيطة.

ويكن استنتاج معادلة الحركة كما يلى :

$$\because\ddot{x}=-\omega_n^2A\sin(\omega t),x=A\sin(\omega t)\quad\therefore\quad\ddot{x}=-\omega_n^2x\quad\therefore\quad\ddot{x}+\omega_n^2x=0$$

وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ويمكن تمثيل الدالة التوافقية بكمية متجة لها مقدار x واتجـــاة ωt وبتطبيق قواعد جمع المتجهات على هذة الدوال كما بالشكل (1-12) والتى تمثل بالعلاقة

$$F_1\sin(\omega t)+F_2\sin(\omega t+\psi)=R\sin(\omega t+\alpha)$$



الشكل *(1-12)* يوضح جمع الدوال التوافقية المشتركة فى السرعة الزاوية.

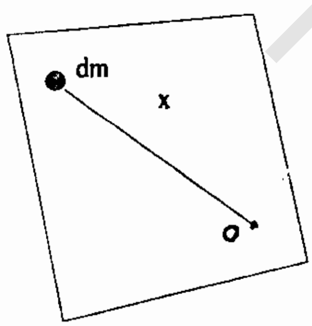
5-<u>*عزم القصور الذاتى: Moment of Inertia*</u>

هو مجموع حاصل ضرب كتلة كل جسيم لاى جسم فى مربع بعدة عن أى محـــور ويرمـــز لـــة بالرمز I_0.

اذا كانت dm هى كتلة عنصر او جسيم صغير جدا على مسافة x من محور يمر بالنقطـــة o وعمـــودى على المستوى الواقع فيه عنصر الكتلة dm (اى عمودى على مستوى الصفحة التى امامك) ,فإن عـــزم القصور الذاتى لهذا العنصر يعين من العلاقة $I = dm.x^2$ وعزم القصور الذاتى للعنصر للجســـم كلـــة يعين بالتكامل من العلاقة:

$$I_0 = \int dm.x^2 = m.r_g^2 \qquad kg.m^2$$

حيث m الكتلة الكلية للجسم , r_g نصف قطر الحركة التدويمية *Radius of Gyration* الذى تتركز عنـــدة الكتلة الكلية (أى ان المسافة x تتحول الى نصف قطر الحركة التدويمية عن المحور للجسم كلة).



الشكل (1-13)

6-<u>*عزم القصور الذاتى لبعض الحالات الهامة.*</u>

1-قرص منتظم أو اسطوانة نصف قطرها ® يكون عزم القصور الذاتـــى حـــول المحـــور المركـــزى $\left(I = \frac{mr^2}{2}\right)$ ، نصف قطر الحركة التدويمية $R_G = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

2-قرص او اسطوانة جوفاء بنصفى قطر خارجى وداخلى (r_o , r_i) ويعين عزم القصور الذاتى حــول المحور المركزى من العلاقة التالية: $I_O = \dfrac{m\left(r_o^2 + r_i^2\right)}{2}$

3-قرص رقيق نصف قطرة r ، يكــون $I_O = \dfrac{mr^2}{4}$ حــول القطــر ويكــون نصــف قطــر الحركــة التدويمية= $r_g = R_G = \dfrac{r}{2}$

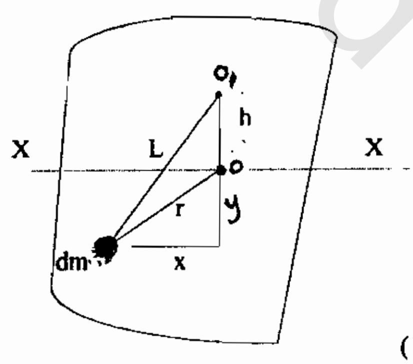
4-قضيب منتظم ورفيع طولة L ، فان عزم القصور الذاتى لة يعين من العلاقة $I_O = \dfrac{mL^2}{12}$ حول محور يمر بمنتصفة ومتعامد مع الطول. وعزم القصور الذاتىللقضيب حول محور موازى عند أحــد طرفيــة يعين من العلاقة $I_0 = \dfrac{mL^2}{3}$

5-اسطوانة مصمتة نصف قطرها r وطولها L ، فان عزم القصور الذاتى يعيــن مــن العلاقــة $I_O = m(\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{L^2}{12})$ حول محوريمر بمنتصفها ،ومتعامدا مع الطول.

6-كرة مصمتة نصف قطرها r فان عزم القصور الذاتى حول محــور قطــرى يعيــن مــن العلاقــة $I_O = \dfrac{2mr^2}{5}$

7-***نظرية المحاور المتوازية:Thorem of Parallel Axes***

بفرض ان I_G هو عزم القصور الذاتى لجسم ما حول محور يمر بمركز الكتلة G كما بالشــكل (14-1) وان المطلوب ايجاد عزم القصور الذاتى حول محور موازى يمر بالنقطة O وعلى بعــد h مــن محور مركز الكتلة G .



الشكل (14-1)

اذن عزم القصور الذاتى I للجسيم dm حول المحور o_1 يعين بالعلاقة الآتية:

$$I_o = dm.l^2 = dm.\left[(h+y)^2 + x^2\right] = dm\left[h^2 + 2hy + y^2 + x^2\right] = dm\left[h^2 + 2hy + r^2\right]$$

وعزم القصور الذاتى I للجسم كلة m خول المحور o_1 يعين من العلاقة الاتية:

$$I_O = \int dm.h^2 + 2h\int dm.y + \int dm.r^2 = mh^2 + 2hx + I_G$$

حيث إن المحور XX يمر بمركز الكتلة G، فإن العزم الكلى للكتلة حول المحور XX يساوى الصفـــر، وبذلك يكون

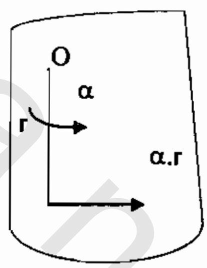
$$I_O = I_G + mh^2$$

اذن نظرية المحاور المتوازية تعرف بأنها عزم القصور الذاتي لجسم ما حول اى محور يساوى عـــزم القصور الذاتي للجسم حول محور موازى يمر بمركز الكتلة ومضافا الية حاصل ضــــرب الكتلـــة فـــى مربع البعد بين المحورين.

8-عزم الدوران والعجلة الزاوية Torque and Angular Acceleration

عند دوران جسم صغير جدا كتلتة dm حول محور يمر بالنقطة o وان α هي العجلة الزاوية التى يسببها عزم الدوران T كما بالشكل $(1\text{-}15)$ وبذلك تكون عجلة الجسيم dm عن نصف قطر r = $\alpha.r$ وأيضا تكون القوة اللازمة لتسارع الجسيم = $dm.\alpha.r$, أى ان عزم الدوران اللازم لتسارع الجسيم = $dm.\alpha.r^2$ اذن عزم الدوران الكلى T اللازم لتسارع الجسيم يعين من العلاقة $T = \int dm.\alpha.r^2$

$$\therefore T = I_0.\alpha = m.r_g^2.\alpha$$



الشكل (1-15)

9-كمية التحرك الزاوية: Angular Momentum

كمية التحرك الزاوية لجسم ما حول محور دورانة هو عزم كمية التحرك حول هذا المحور.

نفرض ان جسيم كتلتة dm يدور حول محور يمر بالنقطة o كما بالشكل $(1\text{-}16)$ وبسرعة زاوية ω فتكـون سرعة هذا الجسيم عند نصف القطر r = $\omega.r$,وبذلك تكون كمية التحرك للجسيم = $dm.\omega.r$

$\therefore$ كمية التحرك الزاوية للجسيم حول o تعين من المعادلة الاتية

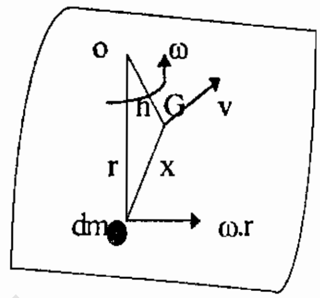
$$dm.\omega.r.r = dm.\omega.r^2$$

$\therefore$ كمية التحرك الزاوية الكلية للجسم كله يعبر عنها بالمعادلة الاتية

$$\int dm.\omega.r^2 = I_o.\omega$$

واذا فرض ان مركز الكتلة G فان $I_0 = I_G + mh^2$ ويعبر عن كمية التحرك الزاويـــة حـــول o بالعلاقة التالية: $I_G.\omega + mh^2\omega = I_G.\omega + mvh$

$\therefore$ كمية التحرك الزاوية حول أى محور o تساوى كمية التحرك الزاوية حول محـــور مـــوازى يمـــر بالنقطة G , مضافا اليها عزم كمية التحرك الخطية حول o وتكون وحـــدات كميـــة التحـــرك الزاويـــة والخطية على الترتيب $kg.m^2/sec$, $kg.m/sec$



الشكل (1-16)

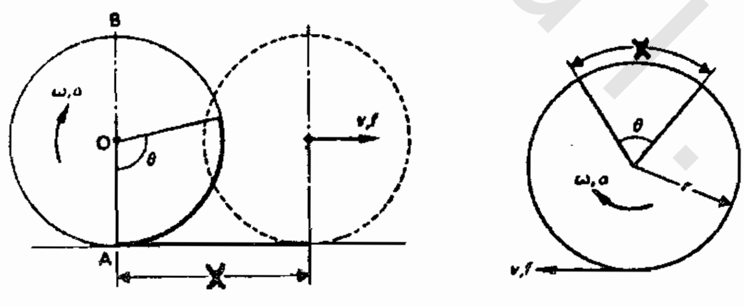
10-العلاقة بين الحركة الخطية والزاوية: *Relations between Linear and Angular Motion*

اذا تحركت نقطة ما مسافة x على محيط جسم دوار نصف قطر r كما بالشكل $(1\text{-}17a)$ فأن الزاويـة المركزية المقابلة θ (مقاسة بالزوايا النصف قطرية) تتحدد بالعلاقة $\theta = \dfrac{x}{r}$ ومنها نجد ان $x = \theta r$

وباجراء التفاضل نحصل على السرعة (v) والعجلة (f) ....

$$\therefore v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r = \omega . r$$

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \propto .r$$



الشكل $(1\text{-}17a,b)$

وفى حالة العجلة او الاسطوانة التى تتدحرج على سطح مستوى دون ان تنزلق كما بالشكل $(1\text{-}17b)$ فأن طول القوس x يكون مساويا للمسافة التى يتحركها المركز o أى ان المسافة التـــى يتحركـــها المركـــز $(o) = \theta . r$ وبذلك تكون السرعة والعجلة للمركز (o) كالاتى: $v = \omega . r$, $f = \alpha r$ حيـــث ان نقطـــة

التماس A تعتبر لحظيا فى حالة سكون , وان قيم الازاحة والسرعة والعجلة للنقطة B تكـــون مســاوية لضعف نظيرتها بالنسبة للمركز (0) اى انها تساوى $2\alpha r$, $2\omega r$, $2\theta r$ على التوالى.

11–قوانين الحركة:

هى قوانين نيوتن للحركة التى تربط حركة الجسم بالقوى المؤثرة علية وهى كما يلى:

أ–القانون الاول للحركة:

كل جسم يبقى على حالة سكونة او حركتة فى خط مستقيم بسرعة منتظمة ما لم تؤثر عليـــة قــوة تغير من حالتة. ويوضح هذا القانون

ان القوى هى اسباب تغير الحالة الميكانيكية للجسم وتنقسم القوى الى نوعين:

1–قوة ميكانيكية: هى القوة التى تؤثر باللمس المباشر المستمر للجسم مثل الشـــد أو الضغـط أو ردود أفعال المفاصل والسطوح.

2–قوة مجالية: هى القوة التى تؤثر دون لمس (أى عن بعد) مثل الوزن أو الجاذبية والتجاذب والتنافر الكهربى والقوة المغناطيسية.

ب–القانون الثانى للحركة:

التعريف الاول – يكتسب الجسم عجلة مقدارها يتناسب فقط مع محصلة القوى المؤثرة علية وإتجاهها نفس إتجاة المحصلة.

التعريف الثانى – المجموع الاتجاهى لجميع القوى المؤثرة على جسيم يتناسب تناسبا طرديا مع المعدل الزمنى لتغيير كمية حركتة الخطية. .

ملاحظات هامة على القانون الثانى:

1–كمية الحركة الخطية $(\underline{p})$: هى حاصل ضرب كتلة الجسيم m فى سرعتة $\underline{v}$ اى ان $\underline{p} = m\underline{v}$

واذا كانت القوة المؤثرة على جسيم هى $F_1, F_2, ... F_N$ فيمكن كتابة القانون الثانى للحركة على الصورة التالية:

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + ...\underline{F_N} = \mu \frac{d(\underline{p})}{dt} = \mu \frac{d(m\underline{v})}{dt}$$

حيث $\underline{F}$ هى محصلة جميع القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم ، μ هى ثابت التناسب وتعتمد قيمــة μ على نوع الوحدات المستخدمة وهى تكون مساوية للواحد الصحيح فى الحالتين التاليتين:

أ–فى حالة النظام العالمى للوحدات *(SI Units)* وفية تكون وحدة الكتلة هـــى الكيلوجـــرام kg ، ووحـــدة الطول هى المتر m ، ووحدة الزمن هى الثانية s ، ووحدة القوة هى النيوتن N .

ب–فى حالة النظام العلمى للوحدات *(SS Units)* وفية تكون الكتلة هى الجرام gm ، ووحدة الطول هـــى السنتميتر cm ، ووحدة الزمن هى الثانية s ، ووحدة القوة هى الداين *dyne*.

وعندما تكون $\mu = 1$ فان القانون الثانى للحركة يكون على الصورة التالية:

$$\underline{F} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m\frac{d\underline{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\underline{v} \quad \therefore \underline{F} = m\underline{a} + \dot{m}\underline{v}$$

حيث تحدد $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ هى المعدل الزمنى لتغير كتلة الجسيم وفى الحالة الخاصة والتى تكون فيها كتلة الجسيم ثابتة أثناء حركته فإن $\dot{m} = 0$ وبذلك يصير القانون الثانى لنيوتن على الصورة الشهيرة $\underline{F} = m\underline{a}$

2- القانون الثانى للحركة يربط بين كميات تختلف طبيعتها تماما والربط هو من خلال علامة التساوى (=) التى فى المعادلة $\underline{F} = m\underline{a}$ مع ان القوة ليست هى حاصل ضرب الكتلة فى العجلة.

3- القوة هى محصلة جميع القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم ، والعجلة التى يتحرك بها الجسيم تكون دائما فى إتجاه محصلة القوى المؤثرة علية.

4- النسبة بين مقدارى محصلة القوى المؤثرة على الجسيم وعجلتة هى كتلة الجسيم كما ينص القانون الثانى أى ان $m = \frac{\underline{F}}{\underline{a}}$

وهذا يعتبر تعريف ميكانيكى للكتلة ، اى ان الكتلة تعبر عن مدى مقاومة الجسيم لتغيير حركتة من السكون ، فكلما زادت كتلة الجسيم كلما زادت القوة اللازمة لتحريكة .

5- القانون الثانى للحركة هى معادلة إتجاهية تسمى مركباتها بمعادلات الحركة ويمكن صياغتة على صورة إتزان ديناميكى بين قوتين هما القوة الحقيقية(وهى محصلة القوى الخارجية الميكانيكية والمجالية= $\underline{F}$) ، والقوة القصورية (وهى قوة مدافعة الجسيم عن بقاء حالتة الميكانيكية= $-m\underline{a}$)

ويسمى القانون فى صورته الجديدة مبدأ دالامبرت ويمكن كتابة معادلته على الصورة $\underline{F} + (-m\underline{a}) = 0$

واقرب الامثلة على تطبيق هذا المبدا هو ان الارض (كجسيم) متزنا إتزانا ديناميكيا تحت تأثير قوة جذب الشمس لها (قوة حقيقية مجالية) والقوىة الطاردة المركزية (قوة قصورية)

ج- القانون الثالث للحركة:

لكل فعل رد فعل مساوى لة فى القوة ومضاد لة فى الاتجاة

12- **القوة** *force*: هى مؤثر يعمل او يحاول ان يعمل على تغيير حالة الجسيم من سكون او حركة الى سكون.

13- **الشغل** *Work Done*: هو حاصل ضرب القوة فى المسافة التى يتحركها الجسيم فى إتجاة خط عمل القوة .

14- **العجلة** *Acceleration*: اذا كانت السرعة معطاة كدالة فى الزمن s فيمكن التعبير عن العجلة بدلالة معدل تغير السرعة بالنسبة للمسافة كما بالمعادلة التالية: $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d\underline{v}}{ds}.\frac{ds}{dt} = v.\frac{d\underline{v}}{ds}$ ويمكن إيجاد السرعة إذا علمت العجلة باستخدام التكامل:

$\underline{v}(t) = \int d\underline{v} = \int_o^t \underline{a}.dt + \underline{v}(0)$ حيث $\underline{v}(o)$ هى السرعة الابتدائية للجسيم.