البـــــاب السادس

-المركز ومراكز الثقل -Centroids and Centeres of Gravity-

-عزوم القصور الذاتي -Moment of Inertia-

1.5 المراكز ومراكز الثقل

1.1.5 مقدمة

2.1.5 أهمية المراكز

3.1.5 مركز اثقل ومركز الكتله

4.1.5 مراكز المساحات والخطوط

5.1.5 العزم الاول للمساحه

6.1.5 التماثل والتناظر

7.1.5 المراكز ومركز الثقل للاشكال المركبه

8.1.5 تحديد المراكز بواسطة التكامل

2.5 عزوم القصور الذاتي

1.2.5 مقدمة

2.2.5 عزم القصور الذاتي للمساحات

3.2.5 نظرية المحاور المتوازية

4.2.5 عزم القصور الذاتي للمساحات المركبه

5.2.5 عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل

6.2.5 تعريفات وعلاقات اخرى

1.5 المراكز ومراكز الثقل

1.1.5 مقدمة

من المعروف أن كل جسم يتركب من جزيئات، وأن كل جزيء يجذب بواسطة الارض من خلال مركزه حيث تؤثر قوة الجذب (Force of attraction) التي تتناسب مع كتلة الجزيء في اتجاه عمودي الى اسفل، وتعرف بوزن الجسم، وعلى ذلك تعرف قوة الجاذبية الارضية للجسيم بالوزن وتكون متجهة نحو مركز الارض، وحيث أن المسافه بين الجزيئات المختلفة للجسم ومركز الارض ثابته نسبياً لذلك يمكن أخذ تأثير هذه القوى في خطوط متوازية وتكون محصلة القوى الجاذبية المتوازية في الفراغ ممثلة لوزن الجسم.

لقد اثبتت التجارب والدراسات انه يمكن ايجاد نقطه واحدة في الجسم تمر خلالها، وتؤثر فيها محصلة هذه القوى المتوازية، وتكون هذه النقطة داخل الجسم أو على امتداده ولكل اوضاع الجسم. وتسمى هذه النقطة ومركز الثقل أو مركز المساحة (Center of Gravity and Centroid) وجدير بالملاحظة، بإن لكل جسم نقطة لمركز الثقل أو الكتله.

في هذا الباب سنتعلم طرق كيفية تعيين موقع مركز الثقل (الكتله) لمختلف الاجسام.

مركز ,,Centroid,, مصطلح يستخدم في حالة كون الحسابات تتعلق بالشكل الهندسي فقط. عندما نتكلم على الجسم الحقيقي نستخدم المصطلح ,,مركز الثقل,, (Center of Gravity). وعندما تكون الكثافة منتظمة في جميع اجزاء الجسم. فإن المركز ومركز الثقل متطابقان. في حين اذا كانت الكثافة متغيرة في اجزاء الجسم المختلفة. فإن هاتين النقطتين عادة لا تنطبقان بعضهما على بعض.

2.1.5 أهمية المراكز (Importance of Centroids)

أن أهمية المراكز تبرز في استخدامات عمليه كثيرة ومتنوعة ومنها:

1. تعيين محور التعادل (neutral axis) وهو الخط الذي يكون الاجهاد عنده يساوي صفراً. حيث أنه من المعروف في مقاومة المواد أن محور التعادل يمر في مركز مساحة مقطع العتبات.
2. لأنتظام الاجهادات على السطح المقطع الانشائي يجب ان توضع الاحمال على العضو الانشائي. بحيث يمر خط عمل محصلتها في مركز مساحة مقطع العضو الانشائي.
3. تبرز اهمية مراكز المساحات في موضوع عزم القصور الذاتي حيث ان المحور الذي يمر في مركز المساحة يسمى محوراً مركزياً وهذا له اهمية كبيرة في ايجاد عزم القصور الذاتي.
4. أن اهمية مراكز المساحات تبرز ايضاً من خلال الحاجة الى استخدام العزوم الاستاتيكي للمساحة (Statical Moment of Area) حيث ان عزم المساحة بالنسبة الى محور معين يساوي حاصل ضرب المساحة في المسافة العمودية من مركزها الى المحور، وعزم المسلحة له استخدامات عديدة في مقاومة الواد لحساب احهادات القص وغيرها في المنشئات المختلفة، كما يستخدم في موضوع الحركة لأيجاد الازاحة لجسم خاضع لتأثير قوى متغسيرة، واحيانا يطلق على هذا العزم:

العزم الاول للمساحة (First Moment of Area)

سيلاحظ الطلبه اهمية المراكز خلال دراستهم الهندسية مستقبلا، حيث ان هناك استخدامات اخرى غير التي ذكرت سيتم التعرف عليها خلال مختلف مراحل الدراسة الهندسية لذلك فإنه من الضروري الالمام الجيد بموضوع مراكز الثقل والمساحات وعزومها نظراً لاهميتها.

3.1.5 مركز الثقل ومركز الكتله (Center of Gravity and Center of Mass)

لتوضيح كيفية ايجاد مركز الثقل نقوم بدراسة حالة صفيحة مستوية (ثنائية الابعاد) ذات سمك ثابت، غير منتظمة الشكل كما هو مبين في الشكل (1.5).

لذلك نقوم بتقسيم هذه الصفيحة الى عدد (n) من العناصر (الاجزاء) الصغيرة رمز لها بالرمز (dw) حيث يكون لكل عنصر من هذه العناصر احداثياته الخاصة به، وعليه فإن احداثيات العنصر الاول (x_1, y_1)، واحداثيات العنصر الثاني (x_2, y_2)... واحداثيات العنصر (n) هي (x_n, y_n)، اما قوه الجاذبية لهذه العناصر (اوزانها) فتكون ايضا حسب ارقامها $dw_1, dw_2 .... dw_n$، وكل من هذه الاوزان يمر في مركز كل عنصر من هذه العناصر.

أن قوى الجذب الصغيرة هذه ما هي الا عبارة عن منظومة قوى متوازية ومتجهة مباشرة الى مركز الارض، ومحصلتها عبارة عن قوة واحدة مكافئة تكون في نفس الاتجاه ومقدارها هو (W) يمكن الحصول عليه بجمع هذه القوى الصغيرة (الاوزان) كما يلي:-

$$W = dW_1 + dW_2 + ...dW_n$$

وتؤثر في نقطة مثل $C(\bar{x}, \bar{y})$ والتي تعتبر مركز ثقل هذه الصفيحة ككل.

ومن اجل الحصول على احداثيات النقطة $C(\bar{x}, \bar{y})$ نقوم بايجاد العزم حول المحاور x,y حيث ان عزم المحصلة (W) حول أي محور من المحاور حسب نظرية فاريجونون (Varignon theorem) يكون مساوياً لمجموع العزوم حول نفس المحور لقوة الجاذبية الصغيرة للعناصر (dw) المؤثرة على كل عنصر.

$$\sum M_y : \bar{x}W = x_1 dW_1 + x_2 dW_2 ....x_n dW_n \; ....(1.5)$$

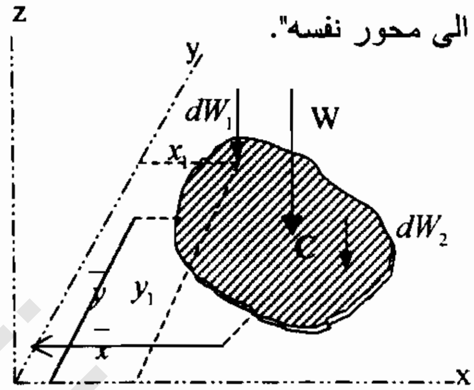
$$\sum M_x : \bar{y}W = y_1 dW_1 + y_2 dW_2 ....y_n dW_n \; ....(1.5)$$

اذا تم زيادة عدد العناصر المكونة للصفيحة والذي يعني نقص حجم كل عنصر فسنحصل بأخذ النهاية (Limit) على التعبير التالي

$$\left.\begin{aligned} W &= \int dW \\ \bar{x}W &= \int x\,dW \\ \bar{y}W &= \int y.dW \end{aligned}\right\} ....(3.5)$$

أن المعادلات (5.3) تعرف الوزن W والاحداثيات $(\bar{x},\bar{y})$ هي احداثيات مركز الثقل C للصفيحة المستوية الموضحة في الشكل (1.5).

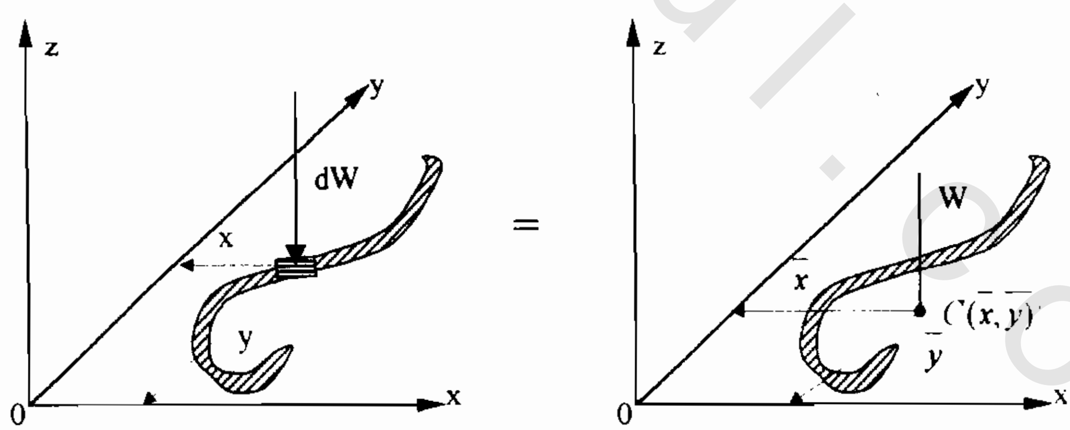
أي أن مسألة تعيين مركز الثقل لجسم ما هي الا عبارة عن تعيين النقطة التي تمر بها محصلة الجذب الارضي المؤثرة على الجسم. وتحليليا يتم تعيين المحصلة بتطبيق القاعدة الاساسية للعزوم والتي تنص على أن "عزم المحصلة بالنسبة الى محور معين يساوي مجموع عزوم مركباتها مقيسه بالنسبه الى محور نفسه".



الشكل (1.5) احداثيات مركز الثقل

كما يمكن اشتقاق العلاقات وذلك لايجاد احداثيات مركز الثقل لسلك يقع في مستوى واحد. مع ملاحظة أن مركز الثقل للسلك (c) ممكن أن يكون واقع في نقطة ما في مستوى السلك وليس على السلك نفسه كما هو مبين في الشكل (2.5).

$$\sum M_y : \bar{x}W = \sum x.dA \quad , \quad \sum M_x : \bar{y}W = \sum y.dA$$



الشكل (2.5) مركز الثقل لسلك

4.1.5 مركز المساحات والخطوط (Centroids of Areas and Lines)

أن حسابات المراكز تقع ضمن ثلاثة انواع معلومة. وتعتمد على شكل الاجســـام فيمــا اذا كان: مساحة ، أو خطاً أو حجماً.

1.المساحات (Areas):

عندما يكون الجسم المراد ايجاد مركز ثقله صفيحة مستوية متجانسه فوزنه (W) هـــو عبارة عن حاصل ضرب كثافته الوزنية في حجمه.

$$W = \rho.gtA$$

حيث أن:

لكثافة الوزنية لمادة الصفيحة (وزن وحدة الحجوم) ρ -

تسارع الجاذبية الارضية $\left(g = 9{,}81 m/s^2\right)$ g-

سمك الصفيحة t-

مساحة الصفيحة A-

وكما أشرنا سابقاً فإنه لأيجاد مركز مساحة هذا الجسم (الصفيحة) نقوم بتقسيم هذا الجسم الـــى عناصر صغيرة حيث يكون وزن كل عنصر من هذه العناصر الصغيرة يساوي حـــاصل ضــرب حجم ذلك العنصر في الكثافة الوزنية لمادة الصفيحة ρ .

$$dW = \rho gt.dA$$

حيث أن: مساحة عنصر صغيرمن عناصر الصفيحة -dA

وبأخذ العزم الاول للمساحة حول المحور x والمحور y حيث أن:

$$\sum M_y = \bar{x}.W = \sum xW$$
$$\sum M_x = \bar{y}.W = \sum yW$$

وبالتعويض عن W نحصل على أن:

$$\rho.gt.A\bar{x} = \rho.gt.dA_1 + \rho.gt.dA_2 .... = \rho.gt.\sum A_x$$

وبأختصار الكميات الثابتة المشتركة، ρ, g, t من الطرفين نحصل على:-

$$\bar{x}A = x_1dA_1 + x_2dA_2 .... + x_ndA_n$$

وكذلك اذا عوضنا في معادلة العزم حول المحور x نحصل على:

$$\bar{y}A = y_1 dA_1 + y_2 dA_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + y_n dA_n$$

$\bar{y}A, \bar{x}A$: تعني عزم المساحة بالنسبة الى المحورين x,y على التوالي.

وكما لاحظنا أن عزم المساحة يساوي مجموع عزوم المساحات الصغيرة التي تتقسم اليـــها المساحة الكلية (A) وعليه نستدل على تعريف عزم المساحة الذي هو عبارة عن ,,حاصل ضـــوب المساحة في المسافة العمودية من مركز المساحة الى محور العزوم ويرمز له بالرمز (S).

وأذا تم زيادة عدد العناصر المكونة للصفيحة وتطبيق مفهوم النهاية فإننـــا ســـوف نحصـــل على:

$$\bar{x}A = \int x.dA \Rightarrow \bar{x} = \int \frac{x.dA}{A} = \frac{S_y}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.5)$$

$$\bar{y}A = \int y.dA \Rightarrow \bar{y} = \int \frac{y.dA}{A} = \frac{S_x}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.5)$$

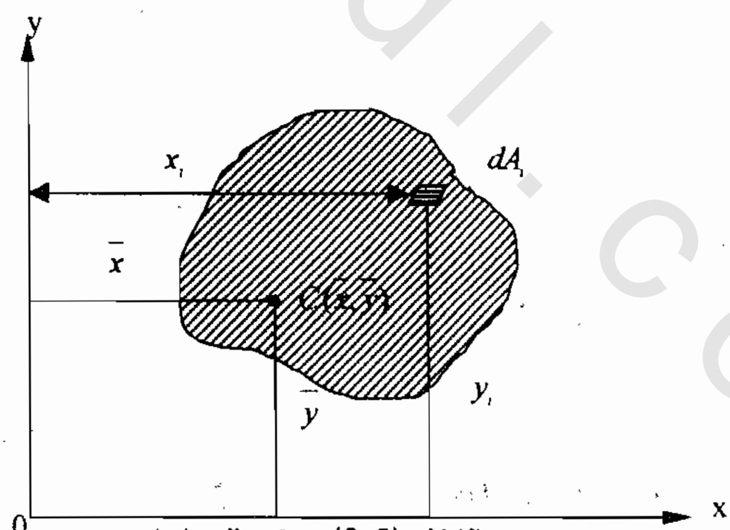
حيث أن:

S_x – العزم الاول للمساحة حول المحور x.

S_y –العزم الاول للمساحة حول المحور y.

وهكذا بواسطة المعادلتين (4.5) ، (5.5) نستطيع الحصول على احداثيـــات مركـــز المســـاحة أو الثقل للصفيحة متجانسة حيث تعرف $C(\bar{x},\bar{y})$ بمركز المساحة للصفيحة كما هو مبين في الشـــكل (3.5).

dA_i – عنصر من عناصر الصفيحة حيث i تتغير من 1،2.......،n.



الشكل (3.5) مركز المساحات

بالنسبة للخطوط يمكن اعتبارها محاور لأسلاك متجانسة وعليه فإن مقدار قوة الجذب الصغيرة للعنصر (dw) -الوزن- ممكن كتابته على النحو الاتي:-

$$dw = \rho.gadl$$

حي ان:-

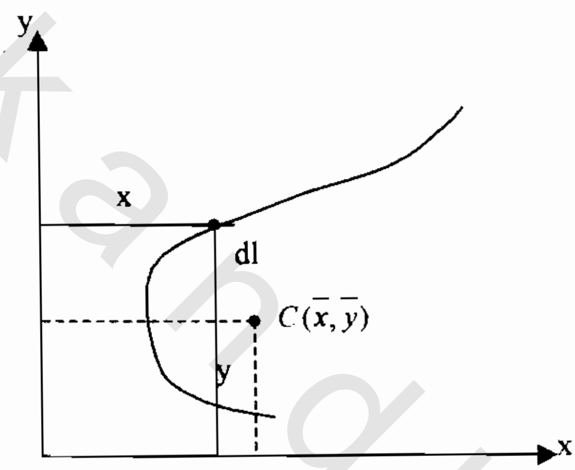
a- المقطع الثابت لمساحة الخط.

dl- طول العنصر الواحد.

وبالتعويض عن (dw) في المعادلتين (5.4) ، (5.5) والاختصار يمكننا الحصول على احداثيات مركز الخط $C(\bar{x},\bar{y})$ كما هو مبين في الشكل (4.5) حيث أن:

$$\bar{x}L = \int x.dl \Rightarrow \bar{x} = \int \frac{x.dl}{L} \quad \text{.......................(6.5)}$$

$$\bar{y}L = \int y.dl \Rightarrow \bar{y} = \int \frac{y.dl}{L} \quad \text{.......................(7.5)}$$



الشكل (4.5) مركز الخطوط

5.1.5 العزم الاول للمساحة First Moment of Araes

العزم الاول للمساحة أو ما يسمى العزم الاستاتيكي (Statical Moment of Araes) كما أشرنا سابقاً من الخواص الهامة للمساحات المستوية وله استخدامات عديدة ومختلفة وبذات في علم مقاومة المواد لحساب الاجهادات، ويكون هذا العزم حول خط في مستوى المساحة ويرمز له كما أشرنا ايضا سابقاً بالرمز (S) مذيلاً بحرف (Subscript) يبين الخط والمحور الذي يؤخذ حوله

هذا العزم. ويكون العزم الاستاتيكي حول المحور (x-x) مثلاً هو S_x حيث:

$$S_x = \int y.dA \qquad (6.5)$$

والعزم الاستاتيكي حول المحور (y-y) هو:

$$S_y = \int x.dA \qquad (6.5)$$

حيث تضرب كل مساحة متناهية الصغر (dA) في بعدها العمودي عن المحور الذي يؤخذ حوله العزم.

وتكون وحدة هذا العزم Cm^2 أو m^2. ومن الممكن أن تكون اشارته موجبه أو سالبه كما يجوز ان تنعدم قيمته وتساوي الصفر.

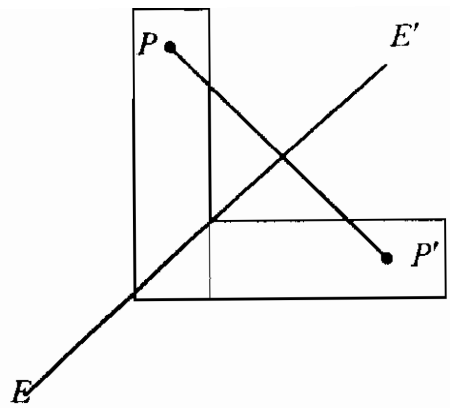
بعد تعريف العزم الاول للمساحة يمكننا من خلال هذا التعريف تعريف مركز المساحة (Centroid) بإنه ,.نقطة في مستوى المساحة يكون العزم الاستاتيكي للمساحة حول أي خط يمر بها في المستوى مستوياً للصفر أي أن:

$$S_x = S_y = 0$$

6.1.5 التماثل والتناظر (Symmetry)

تعتبر خاصية التماثل (التناظر) ذو اهمية كبيرة في تسهيل عملية تعيين وايجاد مراكز المساحات والثقل.

تكون المساحة A متماثلة حول محور مثل EE' اذا كانت كل نقطة مثل P في مستوى المساحة تقترن بنقطة اخرى مثل P' من المساحة نفسها بشكل يكون فيه الخط PP' عمودي على EE' والذي يمكن تقسيمه الى جزئين متساوين بواسطة هذا المحور كما هو موضح في الشكل (5.5)، كما يمكن القول ان الخط (L) متناظر بالنسبة الى المحور (EE') اذا تحقق نفس الشرط.



الشكل (5.5)

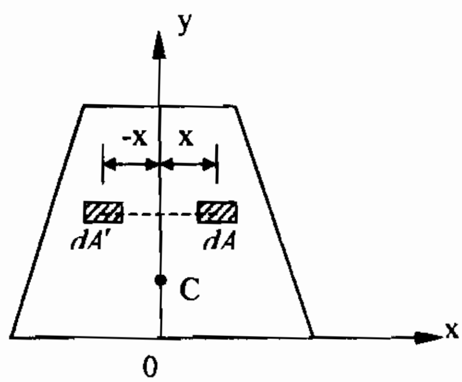
أما عندما تكون مساحة ما مثل A أو خط مثل L يمتلكان محور تماثل مثل EE'، فأن العــــزم الاول لهذه المساحة او هذا الخط بالنسبة لهذا المحور يكون مساوياً للصفر، ومركز الثقـــل يكـــون واقعاً على ذلك المحور.

لتوضيح ذلك نقوم بدراسة المساحة A الموضحة في الشكل (6.5) والمتماثلة بالنسبة للمحور (y) حيث نلاحظ ان لكل عنصر من المساحة مثل (dA) ذو احداثيات افقية (x) يقترن مع عنصـــر في المساحة (dA') وله احداثيات افقية (x-) وعليه ينتج عن ذلك بإن التكـــامل للمعادلـــة (7.5) يكون مساوياً للصفر. لذلك فإن العزم الاول للمساحة حول المحــــور y يكـــون مســـاويا للصفـــر ($S_y = 0$) واعتماد على ذلك نجد أن الاحداثي الافقي $\bar{x}$ لمركز الثقل لهذه المساحة ايضا يســـاوي الصفر حسب المعادلة (4.5) حيث:-

$$S_y = \int x.dA = 0$$

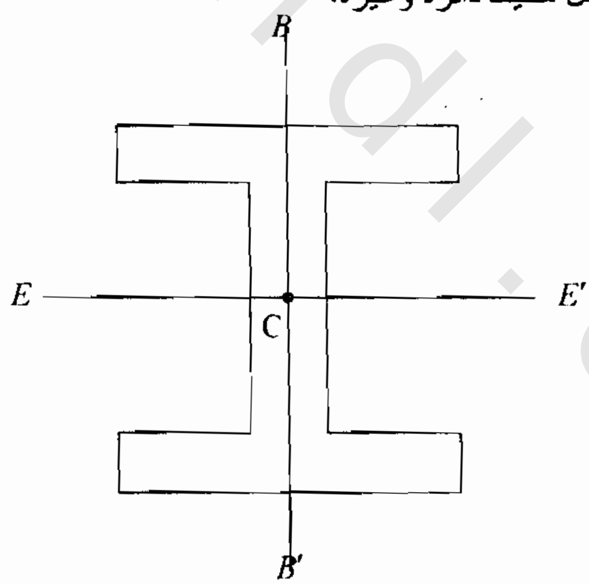
$$\bar{x}A = \int x.dA = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

لذلك اذا كانت مساحة ما مثل (A) او خط مثل (L) يمتلكان محور تناظر (تماثل)، فإن مركـــز الثقل (C) يقع على ذلك المحور.



الشكل (6.5)

كذلك يمكن ملاحظة انه اذا كانت لدينا مساحة او خط يمتلكان محورين للتناظر فإن مركـــز الثقل لهذه المساحة أو لهذا الخط يجب ان تقع على نقطة تقاطع محوري التماثل كما هــو موضــح على الشكل (7.5) وهذه الميزة تمكننا من حساب مراكز المساحات المختلفة للأشكال الشائعة مثــل المربعات، والدوائر، والمستطيلات، والمثلثات متساوية الساقين، أو أشكال متماثلة اخرى بالاضافــة الى مراكز الخطوط مثل محيط دائرة وغيره.



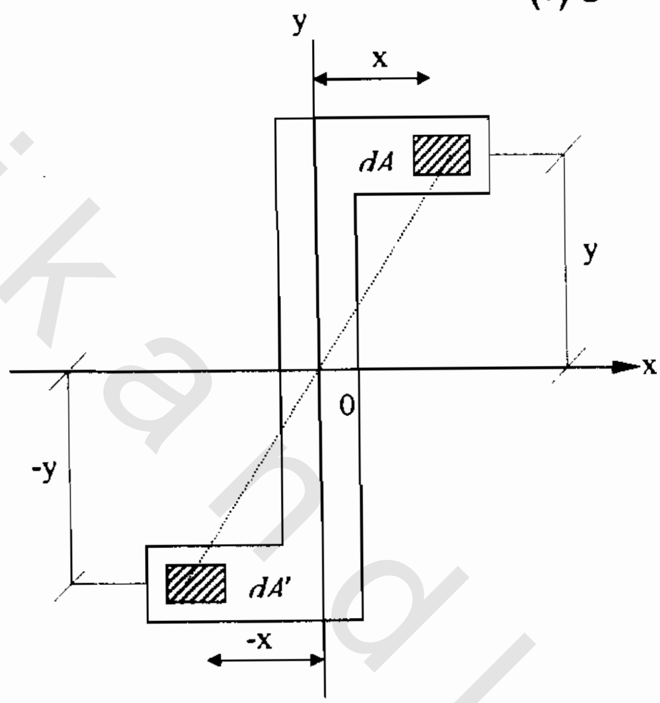
الشكل (6.5)

يمكن القول أن المساحة A متماثلة بالنسبة للمركز (0) اذا كان كل عنصر من عناصر هـــذه المساحة (dA) ذو احداثيات x,y يقترن بعنصر من المساحة (dA') ذو احداثيات x,-y- كما هــو موضح في الشكل (8.5) وعليه ينتج أن العزم الاول للمساحة حول المحور (x) وحول المحـــور (y) مساويان للعنصر:-

$$S_x = \int y.dA = 0 \quad , \quad S_y = \int x.dA = 0$$

ومنه: $\bar{x} = 0 \quad , \quad \bar{y} = 0$

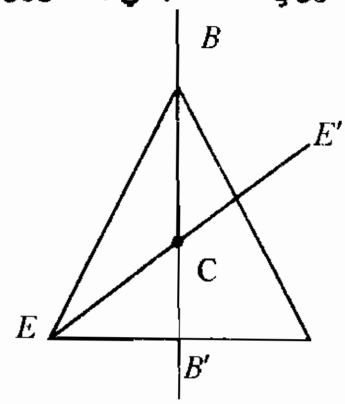
أي احداثيات مركز المساحة $C(\bar{x},\bar{y})$ تساوي العنصر، وهذا يعني بإن مركز المساحة يكـــون منطبقاً على مركز التماثل (0)



الشكل (8.5)

كما يمكن اثبات ذلك بالنسبة لخط متماثل بالنسبة لمركز مثل (0) بنفس الطريقة.

يجب ملاحظة أن أمتلاك شكل معين لمركز تماثل وهذا مهم جداً كما هو موضح في الشـــكل (8.5)، كما أن أمتلاك الشكل لمحوري تماثل لايعني بالضرورة امتلاكـــه لمركــز تمــاثل شــكل (9.5).

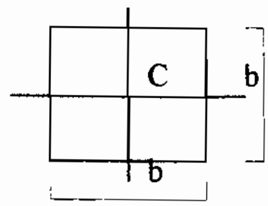
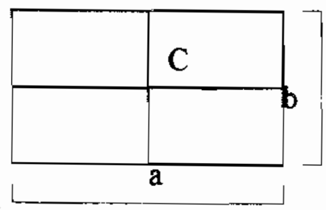
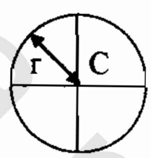
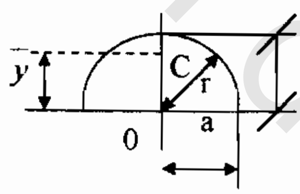
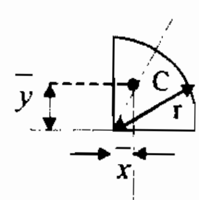
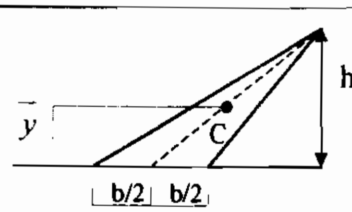


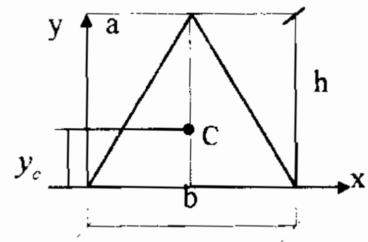
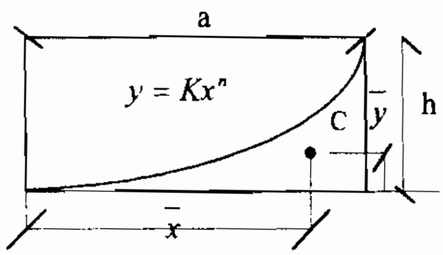
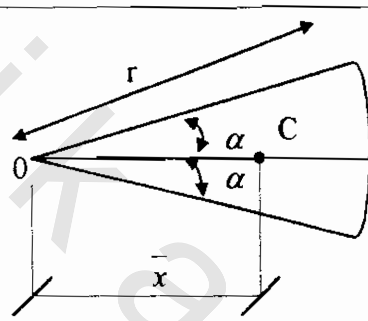
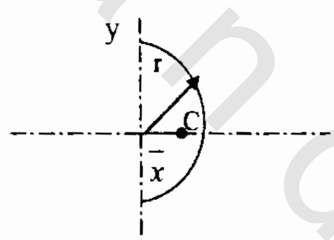
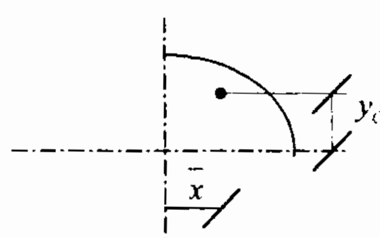
الشكل (9.5)

ولكن اذا كان لشكل معين محوري تماثل يتقاطعان بزاوية قائمة لكل منهما فإن نقطة تقاطعــهما سوف تكون مركز تماثل شكل (7.5)

أن الجدول (1.5) يوضح مراكز مساحات اشكال شائعة مختلفة مثـــل المربــع والمســتطيل والدائرة ونصف دائرة وربع دائرة ومثلث متساوي الساقين ومساحة تحت منحنى (قطع مكـــافئ) وقطاع دائرة وغيره.

الجدول (1.5) –مراكز الاشكال الهندسية الشائعة.

الشكل	المخطط الهندسي	المساحة	$\bar{x}$	$\bar{y}$
المربع		b.b	b/2	b/2
المستطيل		Ab	a/2	b/2
الدائرة		πr^2	r	0
نصف دائرة		$\frac{ab\,\pi}{2}$	0	$\frac{ab\,\pi}{2}$
ربع دائرة		$\frac{ab\,\pi}{4}$	$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$
مثلث		$\frac{bh}{2}$	0	$\frac{h}{3}$

مثلث متساوي الاضلاع		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$
القطع المكافئ المساحة تحت المنحنى		$\frac{ah}{n+1}$	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}$
قطاع دائره		ar^2	$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0
نصف محيط دائرة		πr	$\frac{2r}{\pi}$	0
ربع محيط دائرة		$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$

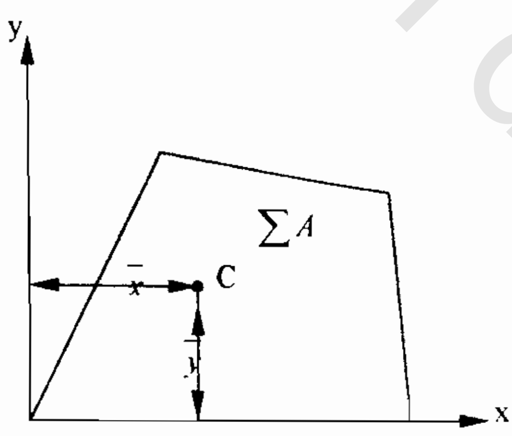
7.1.5 المراكز ومركز الثقل للأشكال المركبة

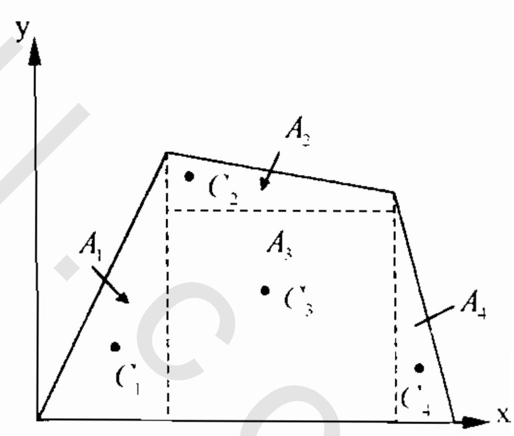
(Centroid and Center of Geavity of composite Figures)

في المجالات الهندسية يوجد عدد كبير من الاشكال المستخدمة التي تتألف من تراكيب من الاشكال الهندسية المعروفة والشائعة التي أشرنا اليها سابقاً في جدول (1.5) مثل المربعات والمستطيلات أو المثلثات أو الدوائر أو أية اشكال أخرى يمكن الحصول على مراكزها بسهولة. كما أن هناك اشكالاً تتألف من مقاطع انشائية حيث تعطى مراكز هذه المقاطع في جداول خاصة في الكتب الدليله عندما يكون بالامكان تقسيم الشكل الى عدد من الاجزاء المعلومة المقدار. عند ذلك يمكن الحصول على احداثيات المركز للشكل ككل باستخدام خواص الاجزاء.

أن كان لدينا مساحة معينة فإنه بألامكان تقسيمها الى اجزاء، وكل جزء من هذه الاجزاء معلوم المساحة فضلاً عن أن مركز الجزء معلوم ايضاً. عندئذٍ فإن عزم المساحة الكلية يساوي مجموع عزوم مساحات الاجزاء. ويمكن تطبيق المعادلات رقم (4.5) ، (5.5) لتعيين احداثيات مركز المساحة الكلية المركبة.

لتوضيح ذلك نقوم بدراسة المساحة المركبة الموضحة في الشكل (a.10.5) وذلك لأيجاد مركزها C. لذلك نقوم بتقسيمها اولاً الى عده اشكال كما هو مبين في الشكل (b.10.5) حيث تصبح المساحة المركبة مجموعة من الاجزاء الشائعة المألوفة مثل المثلث والمربع والمستطيل.





الشكل (10.5)

نلاحظ بعد تقسيم المساحة المركبة أننا حصلنا على ثلاثة مثلثات ومستطيل.

الآن يمكننا ايجاد احداثيات مركز المساحة الكلية $C(\bar{x},\bar{y})$ باستخدام عـــزم المســـاحة الاول. فمثلاً لايجاد $\bar{x}$ نقوم بإيجاد عزم المساحة الاول حول المحور y، اما الاحداثي العمودي $\bar{y}$ عـــن طريق ايجاد عزم المساحة الاول حول المحور x حيث:

$$S_x = \bar{y}(A_1 + A_2 + \dots\dots\dots A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots\dots\dots\dots\dots \bar{y}_n A_n$$
$$S_y = \bar{x}(A_1 + A_2 + \dots\dots\dots A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots\dots\dots\dots\dots \bar{x}_n A_n$$

أو:

$$S_x = \bar{y}\sum A = \sum \bar{y}A \quad \dots\dots\dots(8.5)$$
$$S_y = \bar{x}\sum A = \sum \bar{x}A \quad \dots\dots\dots(9.5)$$

حيث يمكن ايضا كتابة احداثيات مركز المساحة كما يلي:-

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} \\ \bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots(10.5)$$

وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على احداثيات المركز أو مركز الثقـل للخطـوط والاحجـام والاسـلاك المركبـة حيـث تسـتبدل المسـاحة A بـــالكتل $(m_1, m_2 \dots\dots m_n)$ وبـــالأطوال $(L_1, L_2 \dots\dots\dots L_n)$، والحجوم $(v_1, v_2 \dots\dots\dots v_n)$ الخ.

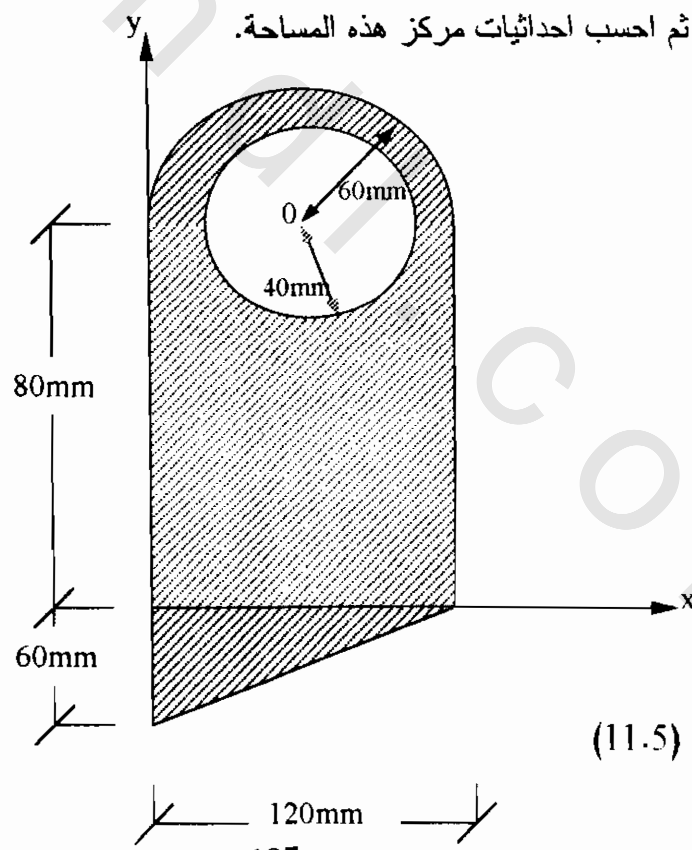
اذا أزيل جزء او بعض تلك الاجزاء من المساحة الكلية، فإن هذه الاجزاء المزالـــة تطـرح. ويكون العزم المحصل حول أي محور أو مستوى مساوياً للمجموع الجبري لعزوم هذه الاجزاء.
أن هذه الطريقة في حساب احداثيات المركز أو مركز الثقل تجنبنا اللجوء الى التكامل علـــى شرط ان تكون المساحة أو الكتلة أو الحجم معلومة الاجزاء، وكذلك المركز لكل جزء في الشـــكل أو الجسم. وعند استعمال هذه الطريقة يكون من الافضل عاده توضيح الاجزاء التي يتكون منـــها الشكل برسومات تخطيطية.
لكن وفي الحياه العملية احيانا لا يمكن تحديد مساحة ما أو حجم بدلالـــة اشـــكال هندســية بسيطة أو بإشكال يمكن تمثيلها رياضياً ولذلك وفي مثل هذه الحالات يكون من اللازم الرجوع الـــى الطرق التقريبية (method of opproximation).

وأخيراً يجب الاخذ بعين الاعتبار الاشارات أي عندما يقطع محور العزم الجسم أو المساحة ويقع مركز جزء من الاجزاء على جهة من المحور ومركز جزء أخر على الجهة الاخرى من المحور. عند ذلك من الضروري أعطاء اشارات مختلفة للذراعين عند كتابة معادلة العزوم لتعيين مركز الجسم أو المساحة أو الخط. قد تظهر أشارة البعد للمركز الجسم سالبة أو موجبة. وهذا يعني أن المركز يقع في هذه الجهة أو تلك من المحور وحسب الفرضية. كما أن أشارة الكمية (حجم أو مساحة أو طول) قد تكون موجبة أو سالبة فيما اذا كانت تلك الكمية مضافة الى أو مطروحة من المجموع. جمع العزوم للاجزاء هي عملية جمع جبري. وعزم الجزء هو حاصل ضرب كميتين احدهما الذراع، لذلك الناتج قد يكون موجباً أو سالباً حسب اشارتي هاتين الكميتين فاذا كانتا متشابهتي الاشارة فالعزم يكون سالباً أي مطروحاً.

أن دراسة الامثلة التالية سوف توضح أكثر الطريقة التي يتم بها الحصول على المركز $C(\bar{x},\bar{y})$ للمساحات والاشكال المركبة المختلفة.

مثال (1.5)

أوجد العزم الاول للمساحة حول المحور x والمحور y للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (11.5). ثم احسب احداثيات مركز هذه المساحة.



الشكل (11.5)

الحـــــل:

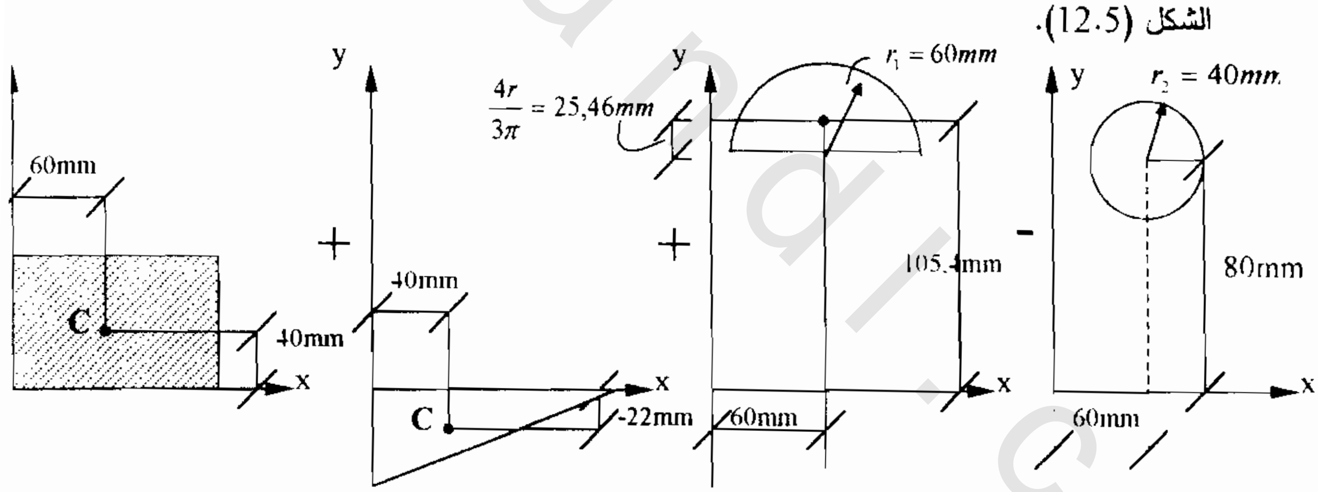
يمكن اعتبار المساحة المظللة المركبة عبارة عن حاصل جمع مستطيل ونصف دائرة ومثلث ناقصاً دائرة لذلك نقوم بتقسيم المساحة الى الاشكال المشار اليها أعلاه وايجاد لكـــل منـــها العـــزم حول المحور x، والمحور y ومن ثم ايجاد احداثيات مركز هذه المساحة ايضاً.

أن المبدأ الاساسي في الحل يعتمد على تقسيم الشكل المظلل المعطى الى عدد من الاشـــكال الهندسية بجيث يكون صافي المجموع يساوي الشكل الاصلي المطلوب.

ومن المناسب لتسهيل عملية الجمع للقيم المختلفة وضع الجدول. مع ملاحظة وضع الاشـــارة الصحيحة أمام كل حد من الحدود حيث نعتبر مساحة معينة موجبة أو سالبة أستناداً الى كون هـــذه المساحة تضاف الى أو تطرح من صافي مساحة الشكل.

أن اشارات احداثيات المراكز تتبع التقليد الرياضي المعروف، أي أن الاحداثيات الافقيـــة (x) موجبة الى يمين محور (y) وسالبة الى يسار المحور (y) كما أن الاحداثيات العموديـــة موجبـــة فوق محور (x) وسالبة تحت محور (x).

نعود الآن الى حل المثال المدروس حيث نقوم بتقسيم المساحة الى الاشكال الموضحة فـــي الشكل (12.5).



الشكل (12.5)

لتسهيل الجمع للقيم المختلفة نضع هذه القيم على شكل جدول. أن الجدول (2.5) يبين جميع القيم المطلوب ايجادها للاشكال المختلفة .

الشكل	المساحة (A)، mm^2	$\bar{x}, mm$	$\bar{y}, mm$	$\bar{x}A, mm^3$	$\bar{y}A, mm^3$
المستطيل	$(120)(80) = 9,6 \times 10^3$	60	40	576×10^3	384×10^3
المثلث	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3,6 \times 10^3$	40	-20	144×10^3	-72×10^3
نصف دائرة	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5,655 \times 10^3$	60	105,46	$339,3 \times 10^3$	$596,4 \times 10^3$
الدائرة	$-\pi(40)^2 = -5,02 \times 10^3$	60	80	$-301,6 \times 10^3$	$-402,2 \times 10^3$
	$\sum A = 13,828 \times 10^3$			$\sum \bar{x}A = 757,7 \times 10^3$	$\sum \bar{y}A = 506,2 \times 10^3$

الآن نقوم بإيجاد المطلوب الاول وهو العزم الاول للمساحة حول المحور x باستخدام المعادلة (8.5) حيث:

$$S_x = \sum \bar{y}A = 506,2 \times 10^3\, mm^3$$
$$S_y = \sum \bar{x}A = 757,7 \times 10^3\, mm^3$$

أما أحداثيات مركز المساحة الكلية فيمكن الحصول عليها كما يلي:

$$\bar{x}\sum A = \sum \bar{x}A : \bar{x}(13,82 \times 10^3\, mm^3) = 757,7 \times 10^3$$

ومنه:

$$\bar{x} = 54,8 mm$$

$$\bar{y}\sum A = \sum \bar{y}A : \bar{y}(13,82 \times 10^3\, mm^3) = 506,2 \times 10^3\, mm^3$$

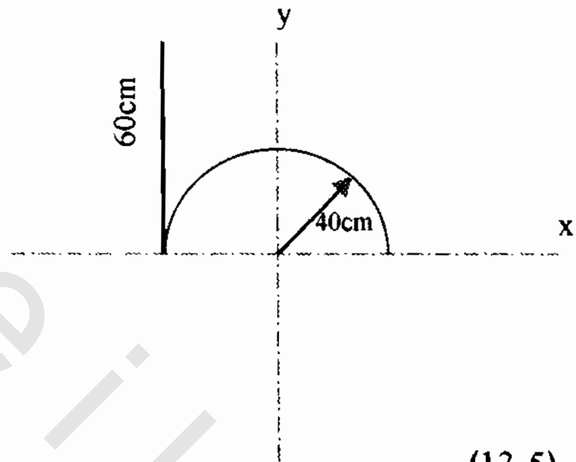
ومنه:

$$\bar{y} = 36,6 mm$$

وهكذا حصلنا على أحداثيات مركز المساحة المظللة حيث C(54,8،36,6).

مثال (2.5)

سلك ذو مقطع ثابت متجانس ومنتظم محني كما هو مبين في الشكل (12.5). أوجد أحداثيات مركز السلك بالنسبة الى المحاور المبينة.



الشكل (13.5)

الحـــل:-

من الشكل نلاحظ أن السلك يكافئ خطين أحدهما مستقيم طوله 60cm والاخر نصف دائرة قطرها 40cm.

من الجدول (1.5) الخاص بالاشكال الشائعة نجد أن مركز نضيف محيط دائرة يقـع علـى مسافة $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$ من محور x ومع أخذ الاشارات بعين الاعتبار نحصل على:-

$$\bar{x}L = \sum xL : \bar{x}(L_1 + L_2) = x_1L_1 + x_2L_2$$

$$\bar{x}(60 + 40\pi) = 60(-40) + 40\pi(0)$$

$$\bar{x} = (185,66) = -240$$

ومنه:

$$\bar{x} = -12,92cm$$

$$\bar{y}L = \sum yL : \bar{y}(L_1 + L_2) = y_1 L_1 + y_2 L_2$$

$$\bar{y}(60 + 40\pi) = 30 \times 60 (40\pi)\left(\frac{2 \times 40}{\pi}\right)$$

$$\bar{y} = (185,66) = 5000$$

ومنه:

$$\bar{y} = 26,93cm$$

8.1.5 تحديد المراكز بواسطة التكامل

(Determination of centeroids by integration)

يستخدم التكامل لتحديد مكان احداثيات المركز للمســاحة، أو للخــط أو للحجــم لاي شــكل هندسي، وكذلك لتحديد مركز ثقل أو مركز الكتله لأي جسم.

كما هو معروف التكامل هي عمليه جمع كميات متناهية في الصغر. فهي اذاً مكافئة لعمليــة جمع كميات محدودة. فعلى سبيل المثال لو عبرنا عن مساحة الجزء الصغير (a) بصيغة التفــاضل فيكون رمزها (dA) وهي عبارة عن جزء صغير من المساحة الكلية A وحيث أن:

$$A = \int dA$$

فإن معادلات ايجاد مركز المساحة A ستكون على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} A\bar{x} &= \int x.dA \\ A\bar{y} &= \int y.dA \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (11.5)$$

كما أن طول الخط L بصيغة االتكامل :

$$L = \int dL$$

حيث أن dL تمثل طول جزء صغير جداً من الخط L وتصبح المعادلات المســـتخدمة لأيجــاد مركز الخط بصيغة التكامل.

$$\left.\begin{aligned} L\bar{x} &= \int x.dL \\ L\bar{y} &= \int y.dL \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (12.5)$$

عند الحل بطريقة التكامل بتعيين المراكز، عادة نختار ما يسمى بالشريحة التفاضلية بـــاحدى الصيغ التالية:-

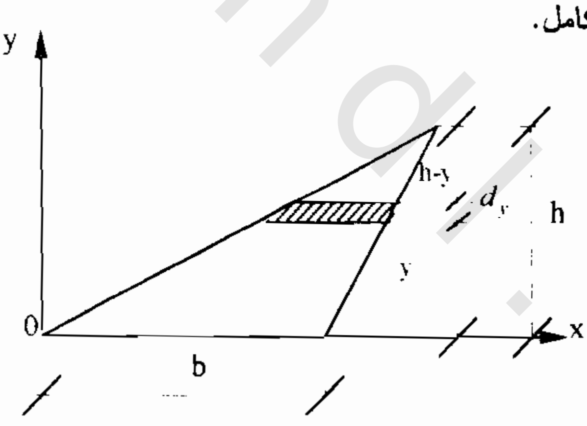
1.نختار الشريحة بحيث تكون موازية الى محور العزوم. أي أن كل نقطة من نقاط الشريحة تبعـد نفس البعد عن محور العزوم.

2.أو نختار الشريحة التفاضلية بحيث يكون مركزها معلوم الموقع وبذلك يكون عـــزم الشـــريحة بالنسبة إلى المحور المطلوب مساويا الى حاصل ضرب الشريحة في بعد مركزها عن المحور.

أن الامثلة المتنوعة الآتية توضح تتابع الخطوات المستخدمة لتحديد المركـــز للأشـــكال الهندسية، وكذلك مركز الثقل للأجسام المادية المختلفة.

مثال (3.5)

عين موقع مركز مساحة المثلث الذي قاعدته b وارتفاعه h المبيـــن فـــي الشـــكل (14.5) باستخدام طريقة التكامل.



الحـــل:-

1.نجعل محور x منطبقاً على القاعدة.

2.نختار شريحة (dA) موازيه لمحور x فتكون مساحة هذه الشريحة:

$$dA = x\,d_y$$

3. نطبق المعادلة:

$$A\bar{y} = \int y.dA$$

بالتعويض

$$\frac{1}{2}bh.\bar{y} = \int_0^h y.xd_y$$

من تشابه المثلثين في الشكل (13.5) نحصل على:

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

ومنه:

$$x = \frac{b}{h}(h-y)$$

نقوم بالتعويض عن قيمة x في معادلة التكامل حيث:-

$$\frac{bh}{2}.\bar{y} = \frac{b}{h}\int_0^h (h-y)y.d_y$$

$$= \frac{bh^2}{6}$$

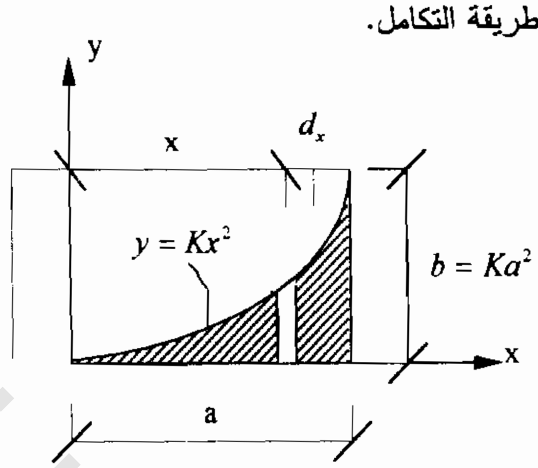
ومنه:

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة فيما اذا أعتبرنا القاعدة اي من الضلعين الاخرين وحينئذٍ يعتبر الارتفاع الجديد للقاعدة.

مثال (4.5)

عين مركز المساحة المظللة والمبينة في الشكل (15.5) بين محور x والمستقيم x=a والقطع المكافئ $y = Kx^2$ بطريقة التكامل.



الشكل (15.5)

الحـــــل:-

نختار شريحة تفاضلية للمحور y كل نقطة من نقاطها تبعد نفس المسافة عـــن المحـــور y ومساحتها.

$$dA = yd_x$$

كما أن المساحة الكلية A نجدها بطريقة التكامل حيث:

$$A = \int dA$$

وبالتعويض عن (dA) نجد:

$$A = \int_0^a x.dA = \int_0^a Kx^3.dx$$

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{x} = \frac{1}{4}Ka^4$$

ومنه:

$$\bar{x} = \frac{3}{4}a$$

ولأيجاد $\bar{y}$ يمثل المسافة بين محور x ومركز مساحة الشريحة (dA) والذي يساوي ($\frac{1}{2}y$)

على أعتبار أن المساحة dA مستطيل أرتفاعه y وقاعدته d_x وبالتعويض في المعادلة اعلاه:

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{y} = \int_0^a \left(\frac{1}{2}y\right) y\, d_x = \frac{1}{2}K^2 \int_0^a x^4\, d_x$$

$$\left(\frac{1}{3}Ka^3\right)\bar{y} = \frac{1}{2}K^2 \frac{a^5}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}Ka^2$$

عندما x=a,y=b

$$b = Ka^2$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3}{10}b$$

2.5 عـــزوم القصـــور الذاتــــي (Moment of Inertia)

1.2.5 مقدمة

سنتطرق في هذا البند الثاني من الباب الى موضوع عزم القصـــور الذاتـــي للمســاحات والكتل، أو ما يسمى أحيانا بالعزم الثاني للمساحة – (Second Moment of Area).

يستخدم عزم القصور الذاتي للمساحات في التصاميم الانشائية لذلك فهو يفيـــد بصـــورة خاصة المهندسين المدنيين في حين نجد أن عزم القصور الذاتي للكتل يستفاد خاص المهندســـين الميكانيكيين والكهربائيين العاملين في مجال تصاميم الآلات والمكائن وغيرها، بالاضافة الـــى أن هناك عدد كبير من القوانين والمعادلات الهندسية الهامة التي لها علاقة بعلم مقاومة المواد التـــي تتطلب ايجاد قيم تكامل العزم الثاني لمساحات أو كتل ما حول محور.

2.2.5 عزم القصور الذاتي للمساحات (Area Moment of Inertia)

ويكون هذا العزم حول خط ما في مستوى المساحة ويرمز له بالرمز (I) مذيلاً بحرف واحـد هكذا (I_x) أو حرف مكرر هكذا (I_{xx}) وكلاهما يرمز لعزم القصور الذاتي حول المحور (x-x). وتكون قيمته كما يلي:

$$I_x = \int y^2 . dA \qquad (5.13)$$

ونحصل عليه بضرب كل مساحة متناهية في الصغر (dA) في مربع بعدها عـن المحـور (x-x).

وبالمثل نجد أن عزم القصور الذاتي حول المحور y:

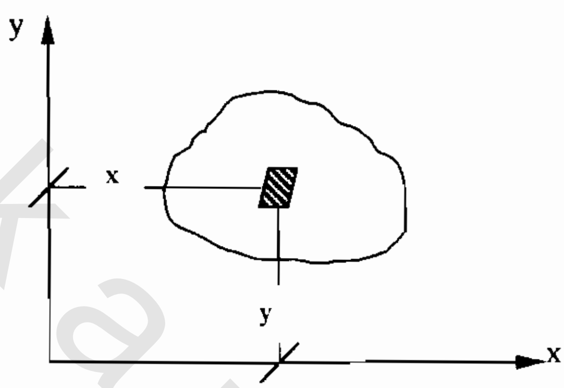
$$I_y = \int x^2 . dA \qquad (5.14)$$

وكما أشرنا يسمى هذا المقدار أحيانا –العزم الثاني للمساحة،وتكون وحداتـــه بالســـنتمترات أو الامتار من الدرجة الرابعة (Cm^4, m^4) وقيمته دائماً موجبة ولا تساوي صفراً.

لو أمعنا النظر في المصطلح الرياضي لعزم القصور الذاتي لوجدناه لا يعني شيئاً لوحده من الناحية الفيزيائية فهو اذاً مجرد تعبير رياضي يرمز له بالحرف (I).

والتعريف الرياضي لعزم القصور الذاتي لمساحة معينة يعني أنه لدينا مساحة معينة مثل (A) قسمت الى أجزاء وعناصر صغيرة مثل (dA، حيث أن كل عنصر من هذه العناصر ضرب في مربع بعدها عن المحور المراد أخذ العزم حوله.

أن تعبير "العزم الثاني للمساحة" يستخدم أحيانا بدلاً عن "عزم القصور الذاتي للمساحة" وذلك لأن عملية ضرب المساحات التفاضلية في مربع بعدها عن المحور الذي هو عزم القصور الذاتي لها، وما هي الاعملية ضرب عزم المساحة التفاضلية في ذراعها مرة أخرى كما هو موضح في الشكل (16.5)



الشكل (17.5)

في حالة المساحات المركبة تعد أشارة المساحات موجبة اذا كانت المساحة اضافة للمساحة الصافية للشكل المركب وتعد المساحة سالبة الاشارة اذا كانت تقلل من المساحة الصافية للشكل المركب، وبناءٍ على ذلك يطرح أو يضاف عزم القصور الذاتي النهائي لصافي المساحة، ولكن لو أخذنا اية مساحة بشكل منفرد فإن عزم القصور الذاتي لها يكون موجباً دائماً لان المساحة بحد ذاتها موجبة وليست سالبة.

3.2.5 نظرية المحاور المتوازية

- Parallel – Axis Theorem -

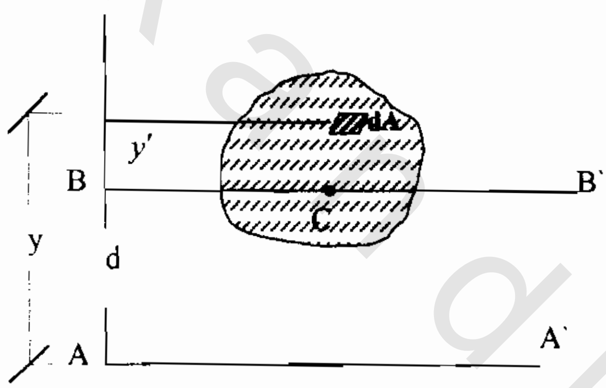
في أحيان كثيرة في المجالات الهندسية المختلفة يلزم نقل عزم القصور الذاتي من محور الى محور أخر يوازيه وذلك كما هو معروف يتطلب أجراء تكامل أخر.

هناك أسلوب وصيغة لنقل عزوم القصور الذاتي دون الحاجة الى أجراء تكامل أخر وذلك باستخدام ما يعرف "نظرية المحاور المتوازية".

لتوضيح ذلك لنأخذ مساحة ما مثل (A) المبينة في الشكل (17.5) والتي يمر المحور (BB') من خلال مركزها (C).

كما اشرنا سابقاً بإن المحور الذي يمر بمركز المساحة C يسمى محوراً مركزياً، وعزم القصور الذاتي حول هذا المحور هو:

$$I = \int y^2 . dA$$



الشكل (17.5)

أما عزم القصور لنفس المساحة بالنسبة لمحور أخر جديد مثل (AA') يمكن الحصول عليه بواسطة المعادلة التالية:

$$I = \int y^2 . d_y = \int (y' + d)^2 . dA$$

حيث أن:

$$y = y' + d$$

d: تمثل المسافة العمودية بين المحورين AA' ، BB'.

y': هي المسافة بين العنصر dA والمحور الذي يمر في مركز المساحة C وهو المحور BB'.

وعليه نحصل على:

$$I = \int y'^2 .dA + 2d\int y'.dA + d^2\int dA \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.15)$$

حيث يكون التكامل الاول ($\int y'^2 .dA$) هو عزم القصور الذاتي حول المحور الذي يمر بمركز المساحة (المحور المركزي BB')، أما الحد الثاني على يمين المعادلة فيمثل ($2d\int y'.dA$) العزم الاول للمساحة (S) حول المحور BB' وتعتبر قيمته هنا مساوية للصفر لان العزم الاول للمساحة كما أشرنا سابقاً هو:

$$S = \int y.dA = y.A$$

البعد (y) هنا يمثل البعد بين المركز (C) والمحور BB' لذلك فإن $y' = 0$ لان المحور BB' يمر بالمركز (C)، أما الحد الاخير التكامل الثالث ($\int dA$) فهو عباره عن المساحة الكلية (A) وهكذا نحصل من المعادلة على:

$$I_{AA} = I_{BB'} + Ad^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.16)$$

أن المعادلة (16.5) توضح نظرية المحاور المتوازية -صيغة النقل لعزم القصور الذاتي- (Parallel-Axis Theorem) والتي تنص على أن .. عزم القصور الذاتي لمساحة ما لأي محور في مستوى المساحة يكون مساوياً لعزم القصور الذاتي للمساحة بالنسبة للمحور الذي يمر بالمركز (C) لهذه المساحة وموازياً لذلك المحور مضافاً اليه الحد المحول، والذي يتكون من حاصل ضرب المساحة في مربع المسافة بين المحورين,,.

وهنا يجب ملاحظة نقطتين مهمتين:-

1. يجب أن يمر أحد المحاور خلال مركز المساحة.
2. أن المحاور التي يحدث بينها نقل يجب أن تكون متوازية.

باستخدام نظرية المحاور المتوازية يمكننا ايجاد عزوم القصور الذاتي للمساحات والاشكال المركبة حول أي محور.

4.2.5 عزم القصور الذاتي للمساحات المركبة

Moment of Inertia for Composite Areas

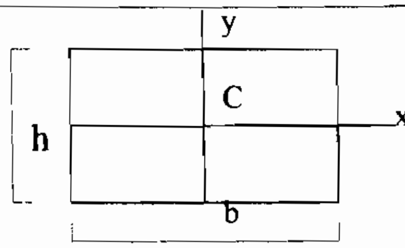
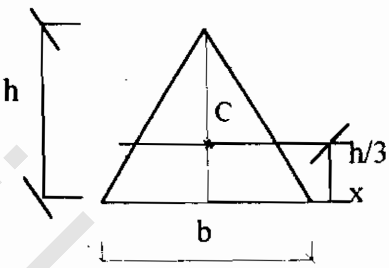
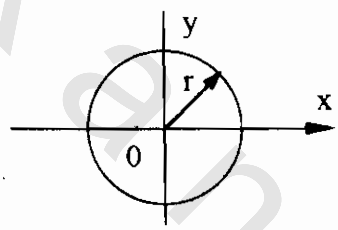
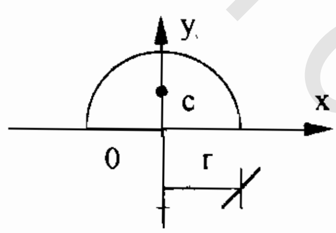
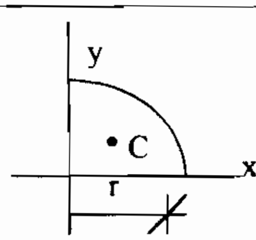
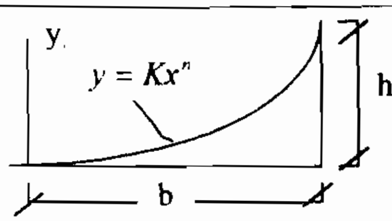
المساحات المركبة كما أشرنا سابقاً كثيراً ما تقابلنا في المجالات الهندسية المختلفة، حيث أنها تتكون و تتألف من مجموعة أشكال هندسية معروفة وشائعة مثا الدوائر والمربعات والمستطيلات والمثلثات أو أية أشكال أخرى يمكن الحصول على عزم القصور الذاتي لها بسهولة.

إذا يمكن تقسيم أي مساحة مركبة مثل A الى أجزاء هندسية منتظمة (مستطيلات ، دوائر ....وغيرها) يكون عزم القصور الذاتي لهذه الاجزاء معلوم، وبعد ذلك يمكن ايجاد عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة المعطاه حيث يتم أن عزم القصور الذاتي للمساحة المركبة يكون مساوياً لمجموع القصور الذاتي لكل جزء من هذه الاجزاء على حده. حيث يتم ايجاد عزم القصور الذاتي لكل جزء من الاجزاء بالنسبة لنفس المحور قبل جمعها.

عندما تكون المساحة أو المقطع متكونا من عدد كبير من الاجزاء المعروفة، فمن الافضل عاده أن تجدول النتائج بدلالة المساحة A وعزم القصور الذاتي حول محور يمر بالمركز.

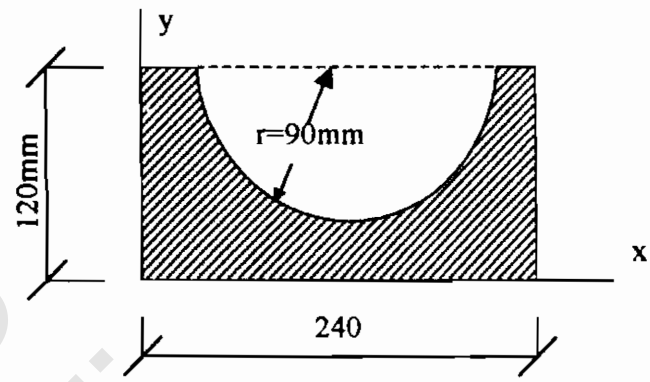
أن الجدول (3.5) يبين عزم القصور الذاتي والمركز للاشكال الهندسية الشائعة والمعروفة والتي تساعد الطالب في حل المسائل المتعلقة بايجاد عزم القصور الذاتي للمساحات والاشكال المركبة المختلفة.

جدول (3.5) عزم القصور الذاتي والمراكز للاشكال الهندسية المعروفة.

الشكل	المخطط الهندسي	المساحة ,,A,,	عزم القصور الذاتي I
المستطيل Rectangle		hb	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$
المثلث Triangle		$\frac{1}{2}bh$	$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$
الدائرة Circle		πr^2	$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
نصف دائرة Semicircle		$\frac{\pi r^2}{2}$	$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
ربع دائرة Quarter Circle		$\frac{\pi r^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$
قطع مكافئ General Spandrel		$\frac{bh}{n+1}$	$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)}$ $I_y = \frac{hb^3}{n+3}$

مثال (5.5)

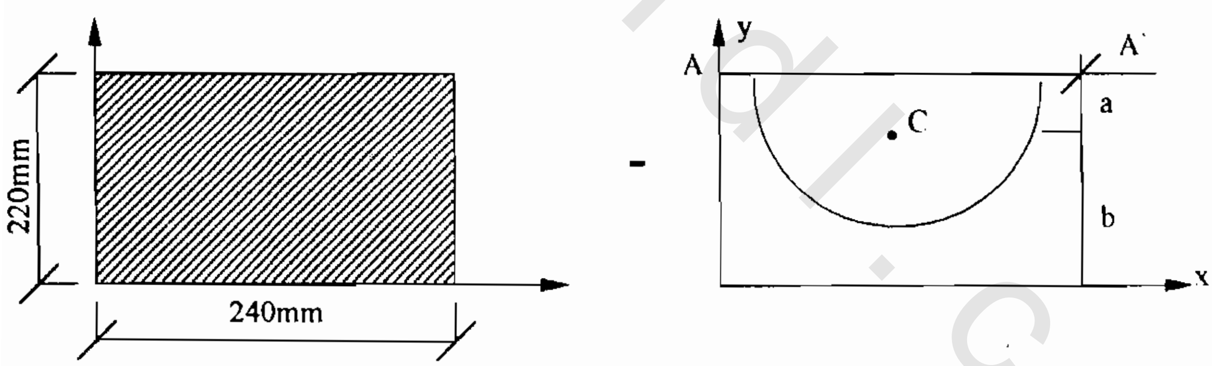
أوجد عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (18.5) حول المحور x.



الشكل (18.5)

الحـــــل:-

يمكن أعتبار المساحة المظللة على أنها تساوي مستطيل (120mm×120mm) مطروحـــاً منها نصف دائرة بنصف قطر (r=90mm). كما هو موضح في الشكل (19.5)



الشكل (19.5)

بالرجوع الى جدول (3.5) نجد أن عزم القصور الذاتي I_{x_0} للمستطيل هو

$$I_{x_0} = \frac{1}{12} bh^3$$

أما عزم القصور الذاتي لهذا المستطيل فهو:-

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240)\times(120) = 138{,}2\times10^6\ mm^4$$

بالنسبة لنصف الدائرة فإن عزم القصور الذاتي حول المحور x يمكن ايجاده كما يلي:-

مركز نصف الدائرة C بالنسبة للمحور AA'

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times90}{3\pi}38{,}2mm$$

والمسافة (b) بين مركز نصف الدائرة C والمحور المراد أيجاد العزم حول x هي:

$$b = 120mm - a = 120mm - 38{,}2mm = 81{,}8mm$$

من الجدول (3.5) نجد أن عزم القصور حول المحور AA' هو:

$$I_{AA'} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(90)^4 = 25{,}76\times10^6 mm^4$$

أما مساحة نصف الدائرة فتساوي

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(90)^2 = 12{,}72\times10^3 mm^2$$

الآن وباستخدام نظرية المحاور المتوازية نستطيع الحصول على I_{x_0} بالنسبة للمحور AA'

$$I_{AA'} = I_{x_0} + Aa^2$$

$$25{,}76\times10^6 mm = I_{x_0} + (12{,}72\times10^3)(38{,}2)$$

ومنه نجد:

$$I_{x_{x0}} = 7{,}20\times10^6\ mm$$

الآن وباستخدام هذه النظرية نحصل على I_x المطلوب ايجاده حيث:-

$$I_x = I_{x_0} + Ab^2 = 7{,}20\times10^6 + (12{,}72\times10^3)(81{,}8)^2$$

$$= 92{,}3\times10^6\ mm^4$$

الآن نستطيع الحصول على عزم القصور الذاتي للمساحة الكلية المظللة وذلـــك بطـــرح عـــزم القصور الذاتي للمستطيل من عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة:-

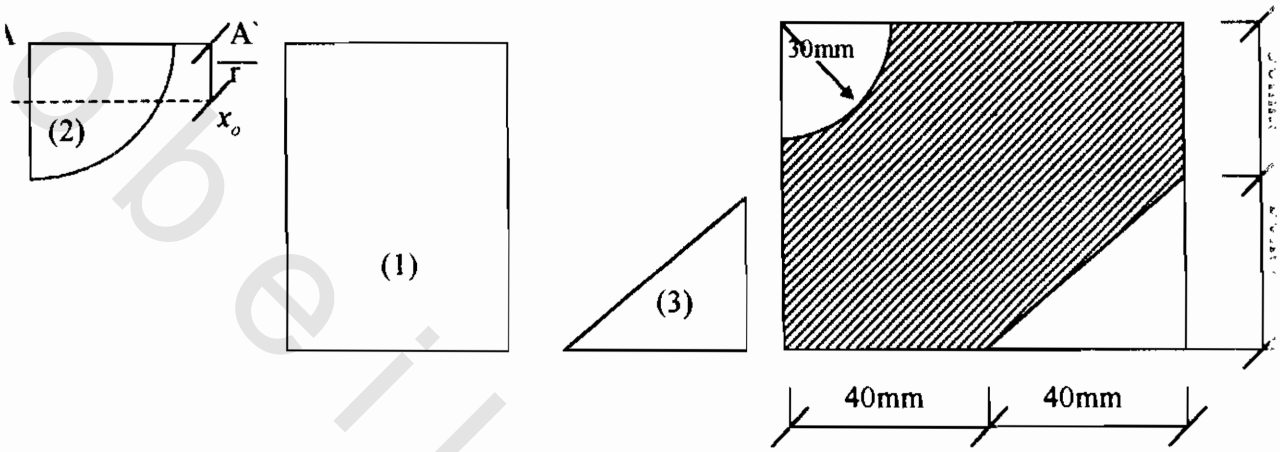
$$I_{x_{\text{شكل}}} = I_{x_{\text{المستطيل}}} - I_{x_{\text{للدائرة}}}$$

$$= 138{,}2\times10'\ mm^4 - 92{,}3\times10^6\ mm^4$$

$$= 45{,}9\times10^6 mm^4$$

مثال (6.5)

أحسب عزم القصور الذاتي حول المحور x للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (20.5).



الشكل (20.5)

الحـــل:-

نلاحظ من الشكل (20.5) أن المساحة المركبة تتكون من مساحة المستطيل (1) الموجبة مطروحاً منها المساحات السالبة وهي مساحة ربع الدائرة (2) ومساحة المثلث (3).

بالنسبة للمستطيل (1) يكون عزم القصور الذاتي حول المحور x هو:-

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(80)(60)^3 = 5,76 \times 10^6 mm^4$$

عزم القصور الذاتي لمساحة المثلث السالبة (3) حول قاعدته أي حول محور x يكون:-

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = -\frac{1}{12}(40)(30)^3 = 0,09 \times 10^6 mm^4$$

أما بالنسبة لعزم القصور الذاتي لربع الدائرة حول محور القاعدة x فيتم الحصول عليه باستخدام تسلسل الخطوات التالية:-

أولاً:

$$I_{AA'} = -\frac{\pi r^4}{16}$$

$$= -\frac{\pi}{16}(30)^4 = -0,1590(10)^6 mm^4$$

ثانياً: نقوم بنقل هذه النتيجة عبر المساحة:

$$\bar{r} = \frac{4r}{3\pi} = 12,73\,mm$$

وبواسطة نظرية نقل المحاور نحصل على عزم القصور الذاتي للجزء (2) حول المحور الذي يمر خلال المركز هو

$$I_{x_0} = I - Ad^2 = -0,1590(10)^6 - \left(-\frac{\pi(30)^2}{4}(12,73)^2\right)$$

$$= -0,0445(10)^6\,mm^4$$

أن عزم القصور الذاتي للربع الدائرة حول المحور x يصبح الآن كالاتي:-

$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$

$$= -0,0445(10)^6 + \left(-\frac{\pi(30)^2}{4}\right)(60-12,75)^2$$

$$= -1,624(10)^6\,mm^4$$

والآن أصبح بإمكاننا ايجاد عزم القصور الذاتي للمساحة حول المحور x المطلوب إيجاده حيث:-

$$I_{x(\text{المساحه المركبة})} = I_{x(\text{المستطيل})} - I_{x(\text{ربع الدائرة})} - I_{x\text{للمثلث}}$$

$$= 5,7(10)^6 - 1,624(10)^6 - 0,09(10)^6$$

$$= 4,046(10)^6\,mm^4$$

يجب ملاحظة أن المحور x_0 يشار إليه في جميع الامثلة على أنه المحاور الذي يمر في مركز المساحة.

أن المساحة الصافية للشكل في المثال السابق هي

$A =$ مساحة المستطيل - مساحة ربع الدائرة - مساحة المثلث

$$= 60(80) - \frac{1}{4}\pi(30)^2 - \frac{1}{2}(40)(30)$$

$$= 3493\,mm^2$$

5.2.5 عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل

(Moment of Inertia by Integration)

عند ايجاد عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل، من الافضل عامة اختيار المساحة التفاضلية بحيث تكون أما:

1. كل الاجزء التفاضلية للمساحة تبعد نفس البعد من المحور الذي ينسب إليه عـــزم القصـــور الذاتي.
2. أو نختار المساحة التفاضلية dA بحيث أن عزم القصور الذاتي لها يكون معلوم. عندئذٍ يكون عزم القصور الذاتي هو مجموع عزوم القصور الذاتية للأجزاء (الشرائح).

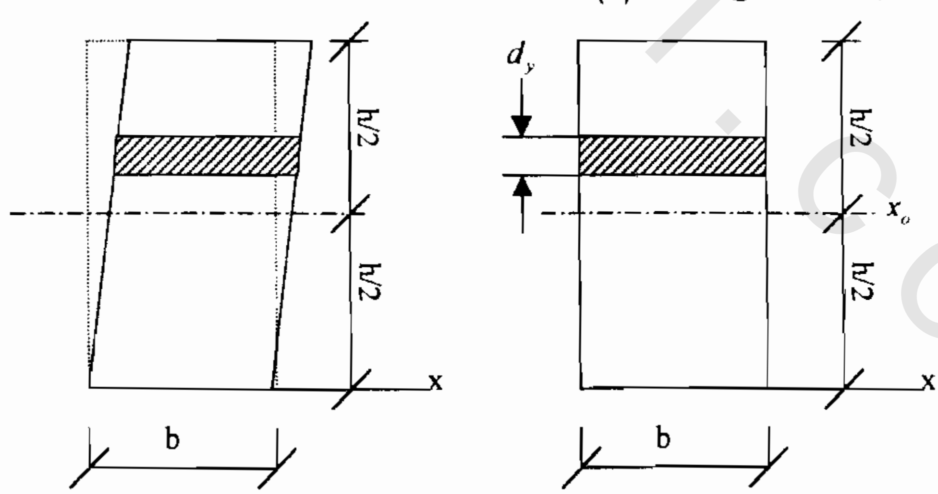
وكما هو الحال بالنسبة للمراكز، فإنه يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي كما أشرنا سابقاً للاشكال المركبة، وذلك بتجمع عزوم القصور الذاتية للاجزاء المختلفة للشكل بالنسبة لمحور مشترك لاخذ عزم القصور الذاتي حوله.

أن الامثلة الاتية ستوضح طريقة ايجاد عزم القصور الذاتي للاشكال المختلفة.

مثال (7.5)

أحسب عزم القصور الذاتي لمستطيل قاعدته b وارتفاعه h ،بالنسبة إلى:

1. محور يمر بمركزه ويوازي قاعدته (b).
2. لمحور ينطبق على قاعدته (b).



الشكل (21.5)

الحـــــل:-

1.بالنسبة لمحور يمر بالمركز نختار شريحة تفاضلية كما هو مبين في الشكل (21.5) بحيـــث تكون كل أجزاء الشريحة عند نفس المسافة من المحور x_o المار بالمركز.

نتبع الخطوات الاتية للحل. مساحة الشريحة التفاضلية = dA

$$dA = b.d_y$$

عزم القصور الذاتي للشريحة التفاضلية= dI_{x_o}

$$dI_{x_o} = y^2.dA = y^2 b.d_y$$

عزم القصور الذاتي للمستطيل بالنسبة لمحور يمر بالمركز ويوازي القاعدة= I_x

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b.d_y = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8}\right)\right] = \frac{bh^3}{12}$$

2.أما عزم القصور الذاتي لمتوازي الاضلاع في الشكل (21.5) نفس القيم مثل ما للمســـتطيل، وذلك لان الشرائح التفاضلية التي تكون متوازي الاضلاع قد ازيحت جانبياً من مكانها علـــى المستطيل المشرط بنفس الابعاد المناظرة ولكنها لم تغـــير مســـافاتها مـــن محـــاور العـــزم المناظرة.

مثال (8.5)

أوجد عزم القصور الذاتي لمثلث قاعدته b وارتفاعه h بالنسبة الى:

1.محور ينطبق على قاعدته.

2.محور يمر بالمركز ويوازي القاعدة.

الحـــــل:

1.محور العزم ينطبق على القاعدة نختار شريحة تفاضلية كما هو موضـــح فـــي شـــكل (22.5). وبواسطة تشابه المثلثات نستطيع الحصول على الطول x حيث:

$$x = \frac{b}{h}(h - y)$$

وعزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور x يمكن الحصول عليه من المعادلة:

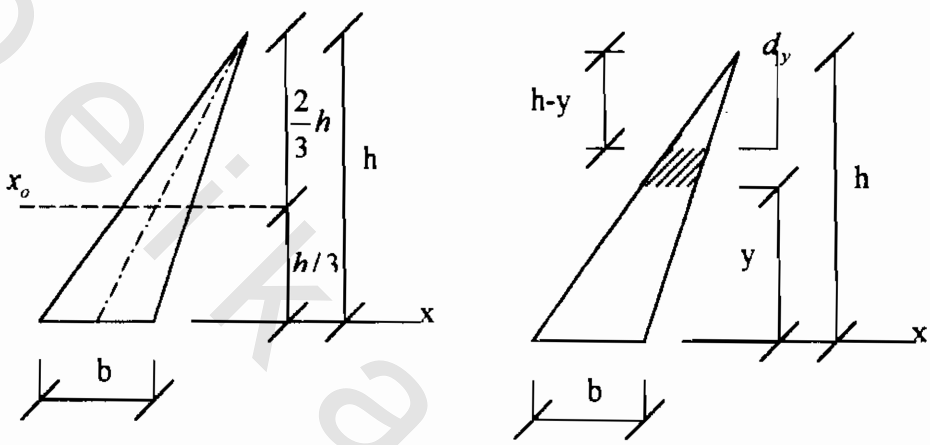
$$I_x = \int y^2 . dA$$

أما مساحة الشريحة التفاضلية dA

$$dA = x.d_y = \frac{b}{h}(-y)d_y$$

أما عزم القصور الذاتي للشريحة التفاضلية بالنسبة للمحور x = dI_x

$$dI_x = y^2 . dA = y^2 \frac{b}{h}(h-y)d_y$$



الشكل (22.5)

أن عزم القصور الذاتي للمثلث بالنسبة لمحور x = I_x حيث:-

$$I_x = \int_0^b y^2 . dA = \int_0^b y^2 . x . d_y$$

$$= \int_0^b y^2 \frac{b}{h}(h-y).d_y = \frac{b}{h}\left(\int_0^h hy^2 . d_y - \int_0^h y^3 . d_y\right)$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

2.أما عزم القصور الذاتي حول المحور الذي يمر بالمركز ويوازي القاعدة b فيمكن الحصول عليه بنقل القيمة المعروفة (I_x) من المحور x المنطبق على القاعدة الى المحور x_o المار بالمركز والموازي للمحور x حيث أن مسافة النقل تساوي ($\frac{h}{3}$) كما هو مبين في الشكل (22.5) لذا نحصل على:

$$I_x = I_{x_o} + Ad^2$$

وعليه:

$$\frac{bh^3}{12} = I_{x_o} + \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

ومنه:

$$I_{x_o} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18}$$

وبذا يكون

$$\frac{bh^3}{36}$$

6.2.5 تعريفات وعلاقات أخرى.

في هذا البند سيتم عرض بعض الخواص الرئيسية الاخرى للمساحات المستوية والتي تلزم الطالب في دراسته الهندسية مستقبلاً والتي لابد من الاشارة اليها نظراً لأهميتها وأستخداماتها في المجالات الهندسية المختلفة.

ويمكن تلخيص هذه الخواص فيما يلي:-

1.العزم المشترك للقصور (Product of Intertia)

ويكون هذا العزم عاده حول خطين متعامدين في مستوى المساحة ويرمز له بالرمز I مذيلاً بحرفين يدلان على المحورين اللذين يؤخذ العزم بالنسبة لهما وتكون قيمته كما يلي:

$$I_{xy} = \int x.y.dA = I_{yx}$$

ووحده هذا العزم هي (Cm^4 أو m^4) أيضا كعزم القصور الذاتي ولكن قد تكون قيمته موجبه أو سالبة وقد تساوي صفراً.

2.العزم القطبي للقصور الذاتي (Polar Moment of Inertia)

ويكون هذا العزم حول خط ما عمودي على مستوى المساحة ويرمز لـــه بالرمز (I_p) والحرف P للدلالة على أنه عزم قطبي (Polar). وتكون قيمة هذا العزم كما يلي:

$$I_p = \int r^2 . dA$$

حيث r هي بعد المساحة المتناهية الصغر dA عن المحور العمودي أي بعدها عن نقطـــة تقاطع هذا المحور مع مستوى المساحة.

ووحدة هذا العزم هي (m^4 أو Cm^4) وقيمته دائما موجبة.

3.العزم القطبي كحاصل جمع عزمي قصور

(Polar Inertia As A Sum of Two Inertias)

حيث أن:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

وعلى ذلك يكون:

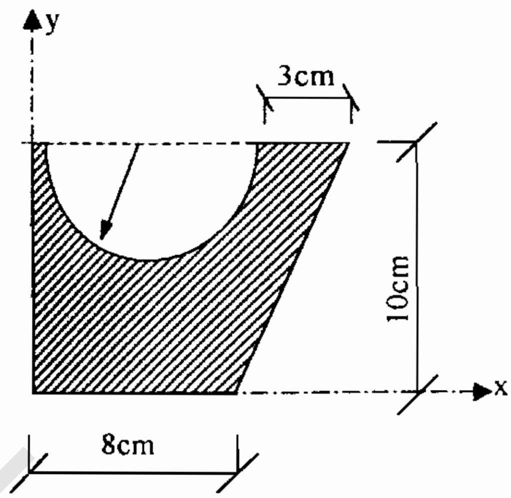
$$I_p = \int (x^2 + y^2) . dA$$

$$\therefore I_P = I_x + I_y$$

4.يجدر الاشارة الى أن عزم القصور الذاتي يمكن أيجاده بالنسبة لمحاور مائلة وخصوصاً عندمـــا يتعلق الامر في مقاومة المواد (Strenght if meterial) حيث يكون من اللازم تحديـــد عـــزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور التي تكون مائلة عن المحاورالعادية. ويمكن الحصول على ذلـك بواسطة التكامل أو بواسطة طرق اسهل تطبيقاً وهي طريقة المعادلات وطريقـــة دائـــر موهـــر MohR's Circle والتي يحتاج الطالب الى دراستها مستقبلاً.

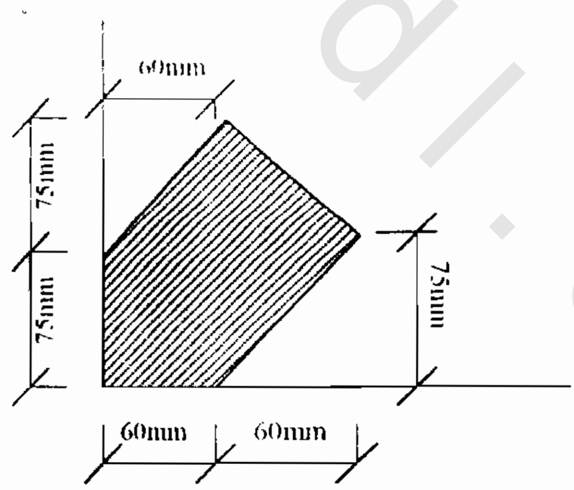
تمارين (6)

س1:- عين مركز المساحة المظللة والمبينة في الشكل (23.5) بالنسبة الى محوري y،x.



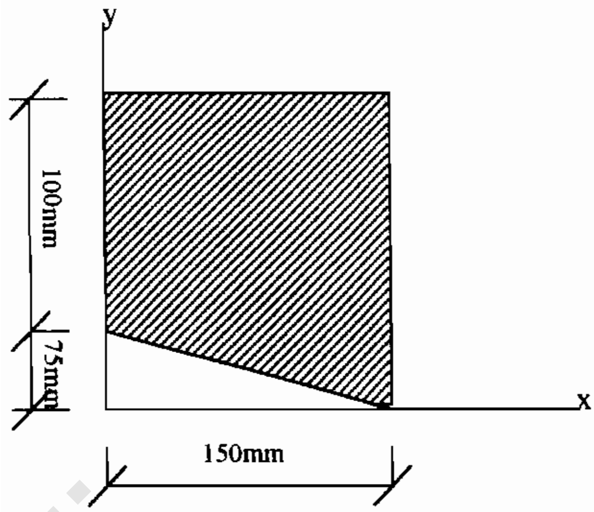
الشكل (23.5)

س2:- أوجد مركز المساحة للمساحة المظللة في الشكل (24.5)



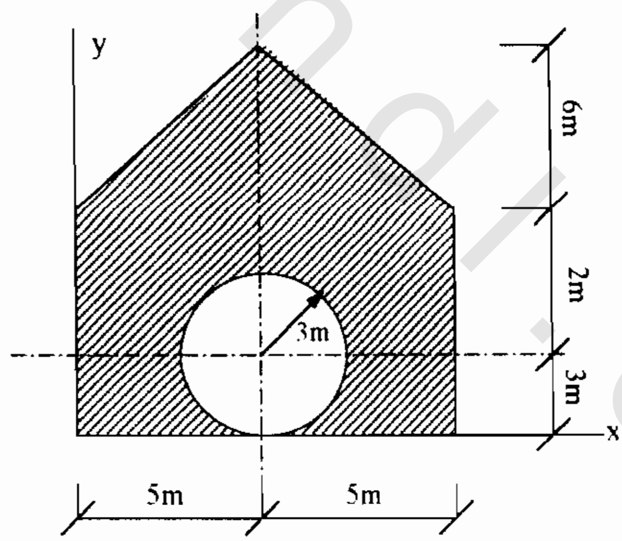
الشكل (24.5)

س3:- في الشكل (25.5) أحسب أحداثيات مركز المساحة للشكل المظلل.



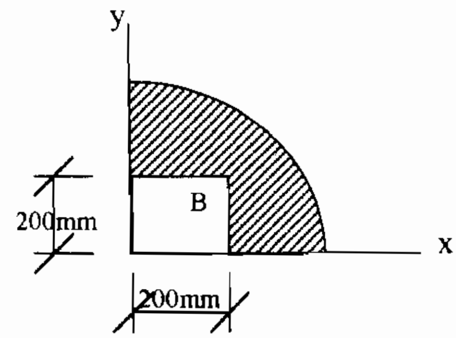
الشكل (25.5)

س4:- عين مركز المساحة المركبة المظللة والمبينة في الشكل (26.5).



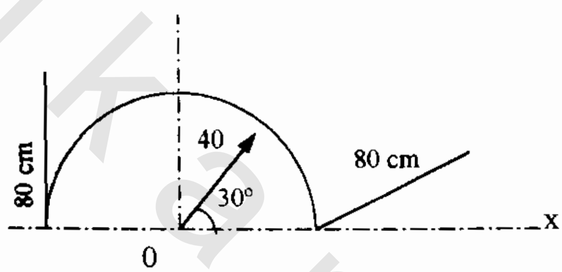
الشكل (26.5)

س5:- عين مركز المساحة المظللة والمبينة في الشكل (27.5)



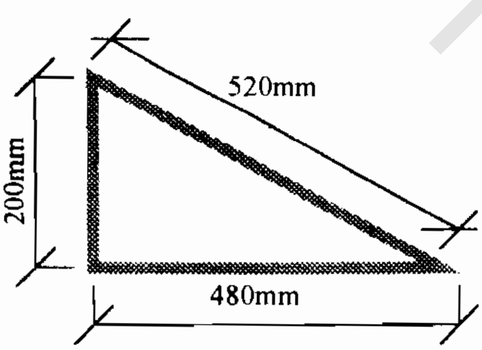
الشكل (27.5)

س6:- سلك متجانس ذو مقطع منتظم وثابت محني كما هو مبين بالشكل (28.5). أوجد احداثيات مركز ثقله.



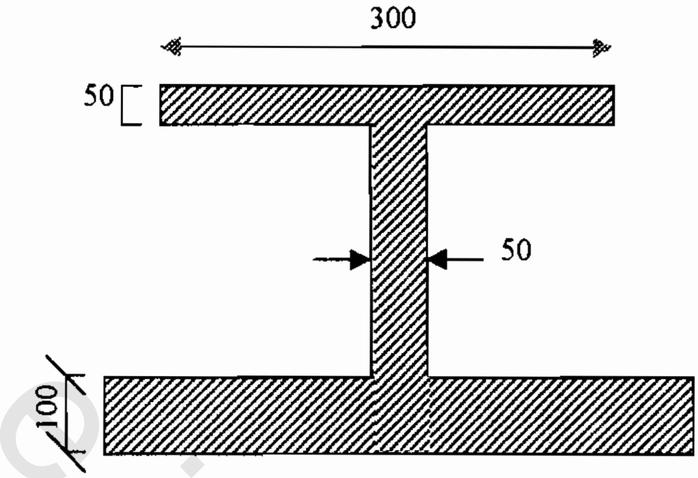
الشكل (28.5)

س7:- الشكل (29.5) يبين سلك متجانس. أوجد مركز الثقل لهذا السلك.



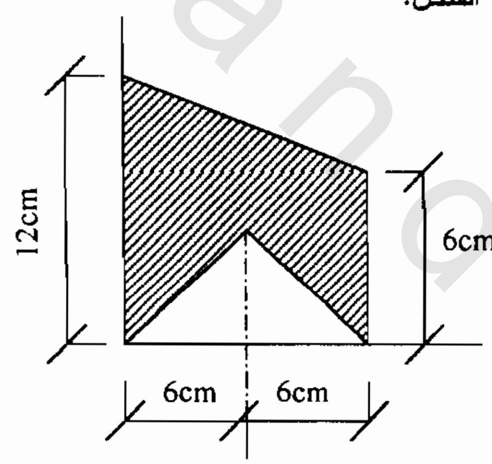
الشكل (29.5)

س8:- مقطع على شكل حرف I (I-Section) مصنوع من ثلاثة مستطيلات ابعادهـــا بـــالملمتر كما هو مبين في الشكل (30.5). حدد مكان المركز لمساحة هذا المقطع.



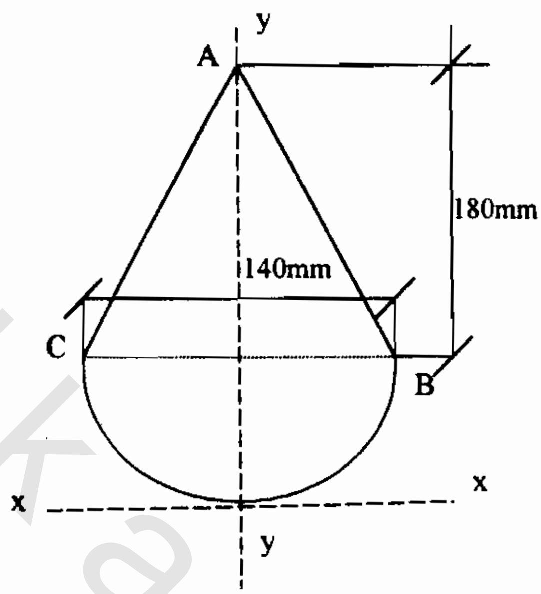
الشكل (30.5)

س9:- حدد مكان المركز للمساحة المظللة في الشكل (31.5) وأوجد ايضا المركز للخطوط التـــي تحدد المساحة المظللة في الشكل.



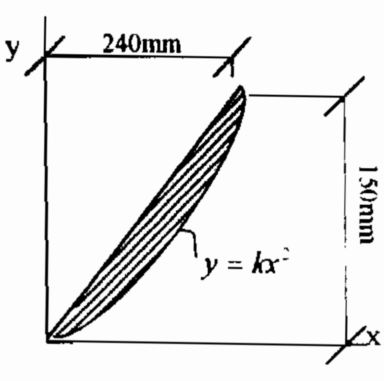
الشكل (31.5)

س**10**:- جسم يتكون من مخروط دائري قائم مصمت أرتفاعه 180 mm وقطر قاعدتـــه 140 mm، مصنوع من مادة كثافتها $5000\ kg/m^3$ وموضوع على نصف كره لـــها نفـس قطر قاعدة المخروط ومصنوعة من معدن كثافته $8100\ kg/m^3$. حدد مكان مركز الكتله للجسم كما هو مبين في الشكل (32.5).

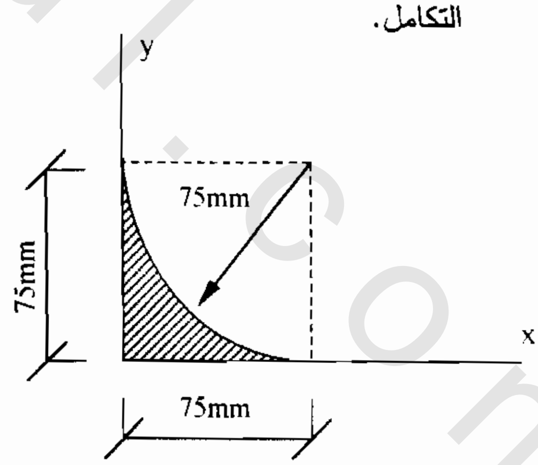


الشكل (32.5)

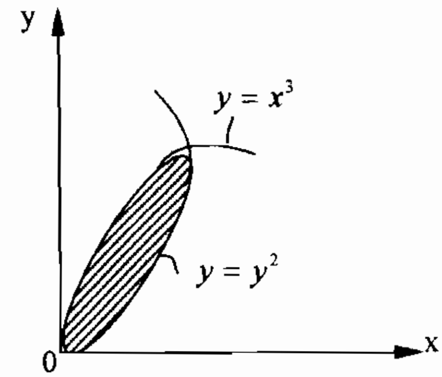
س**11**:- في الاشكال (33.5) ولغاية (36.5). أوجد أحداثيـــات المركـز للمســاحات بواسـطة التكامل.



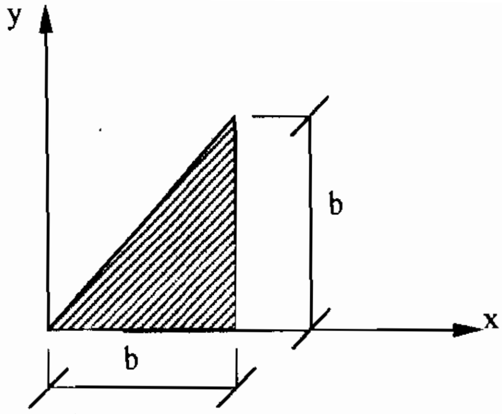
الشكل (33.5)



الشكل (34.5)

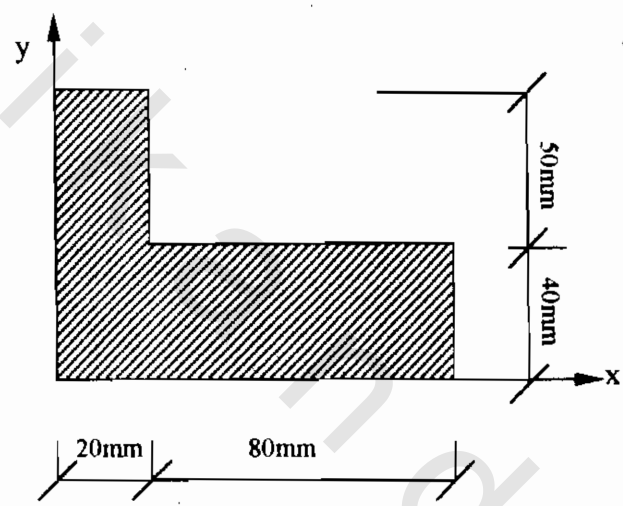


الشكل (36.5)



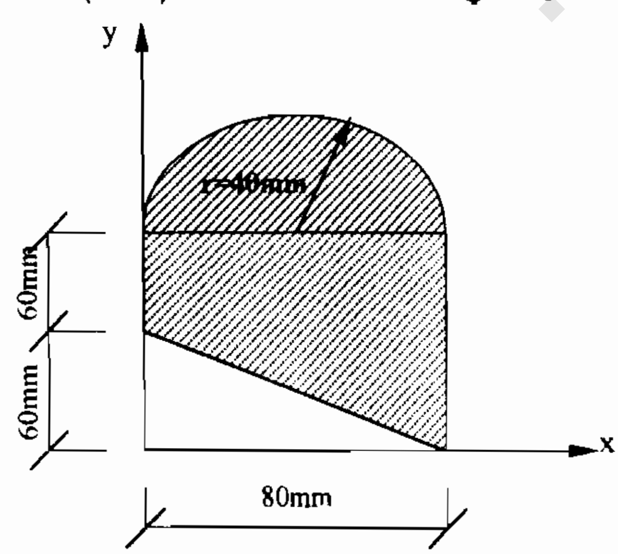
الشكل (35.5)

س12:- أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة بالشكل (37.5) بالنسبة الى محور x والمحور y.



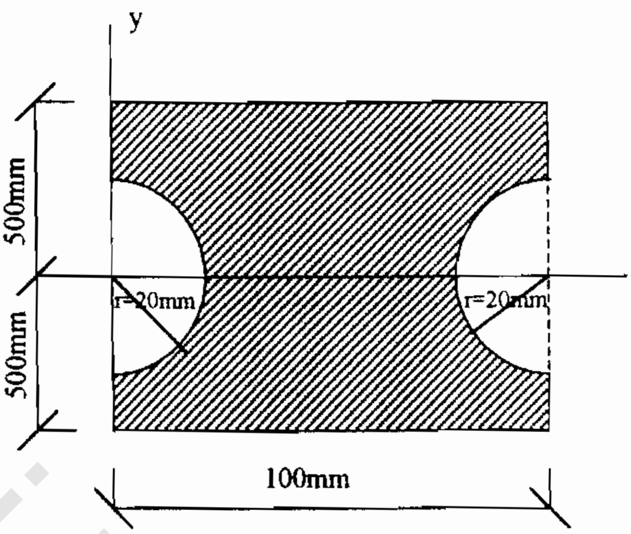
الشكل (37.5)

س13:- أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة بالشكل (38.5) بالنسبة لمحور x.



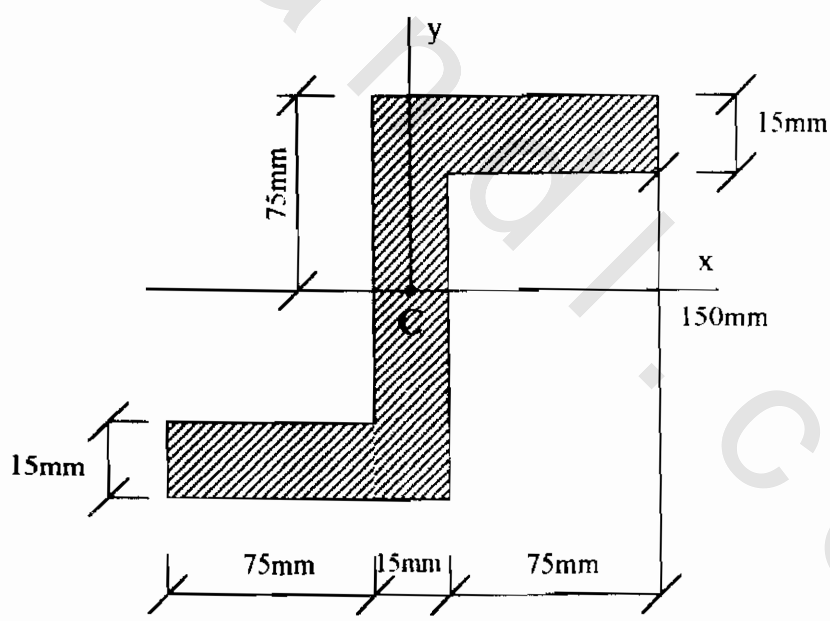
الشكل (38.5)

س14:- أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (39.5) حول المحــــور y.



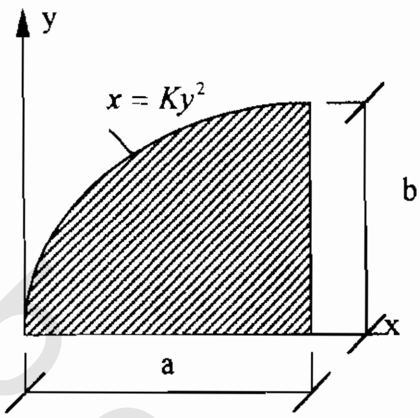
الشكل (39.5)

س15:- أحسب عزم القصور الذاتي للمساحة المظللة والمبينة في الشكل (40.5) حول المحــــور x.

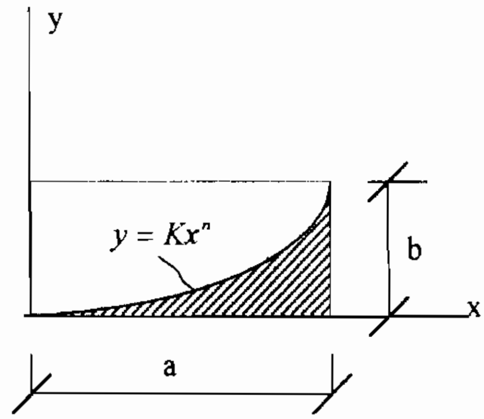


الشكل (40.5)

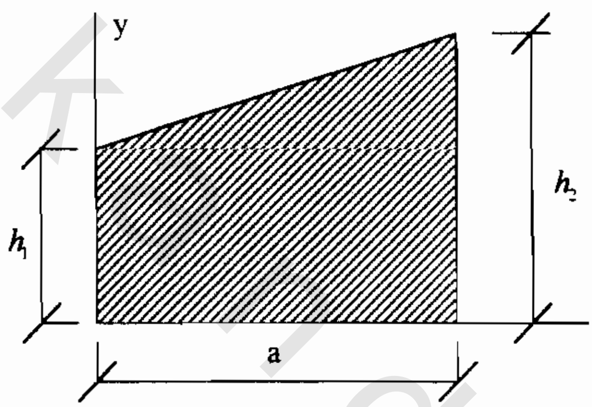
س16:- أحسب عزم القصور الذاتي بواسطة التكامل للمساحات المظللة والمبينة في الاشكال (41.5) ولغاية (43.5) للمحور y.



الشكل (41.5)



الشكل (42.5)



الشكل (43.5)