# الباب الرابع

# أتزان الأجسام الجاسئة

## Equilibrium of Rigid Bodies

## 1.4 مقدمة

تقدم الدراسة في هذا الباب خصائص وتأثيرات الانواع المختلفة من القوى والعزوم على المنشآت والتركيبات الهندسية، حيث يعتبر هذا الباب أساس في دراسة علم المكيانيكا، ودراسة مواضيع أخرى. ويعتبر ذو أهمية كبيرة وعلى الطالب أن يفهم معنى القوى والعزوم باتقان.

في الباب السابق تم التعامل مع الاجسام على أساس أن أبعادها الهندسية متناهية الصغر، أو مهملة وليست ذو أهمية في حل المسألة المكيانيكية، وأطلق عليها "الجسيمات".

لكن هذه النظرة الى الاجسام لاتكون دائماً ممكنة بشكل عام، وذلك عند النظر الى الجسم على أنه مجموعة أو منظومة من الجسيمات ذو مسافات ثابتة بين بعضها البعض، لذا فإنه في هذه الحالة يجب أن يؤخذ حجم الجسم (أبعاده) بعين الاعتبار بالاضافة الى حقيقة أن القوى سوف تؤثر على جسيمات مختلفة ولهذا تطبيقات مختلفة وهامة في علم السكون.

يمكن أعتبار الجسم جاسئاً أذا كان غير قابل للتشوه، مع أن بعض الآلات والتركيبات الهندسية الصناعية لا يمكن أعتبارها أجسام جاسئة بشكل مطلق لأنها تتشوه بفعل تأثير الحمولات المعرضة لها، لكن هذه التشوهات تعتبر صغيرة ولاتؤثر عاده على ظروف الاتزان أو الحركة للمنشئ المدروس.

أن الجسم الجاسئ يمثل حالة خاصة من منظومة جسيمات تكون فيها الابعاد النسبية لهذه الجسيمات ثابتة.

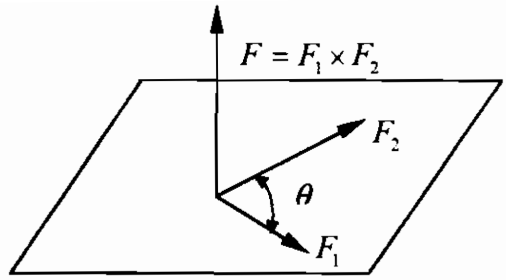
أن دراسة تأثير منظومات القوى على الاجسام الجاسئة تتضمن دائماً حساب حاصل الضرب المتجهي والقياس لقوتين، وخاصة عند ايجاد عزوم القوى حول نقطة أو محور، لذلك فإن اساسيات جبر المتجهات سيتم تقديمه في هذا الباب نظراً لاهميته في حلول المسائل والتطبيقات المختلفة.

## 2.4 حاصل الضرب المتجهي لقوتين

**(Vector Product of Two Vectors)**

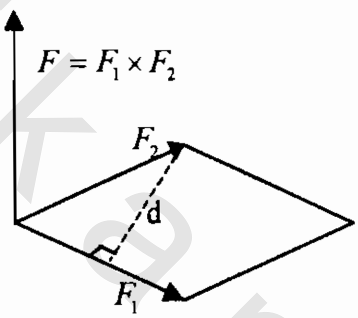
حاصل الضرب المتجهي لقوتين مثل $\overline{F_1}$ ، $\overline{F_2}$ هو متجه $\overline{F}$ الذي يحقق الشروط التالية:

1. خط تأثير المتجه $\overline{F}$ يجب أن يكون عمودي على المستوى الذي يحتوي القوتين $\overline{F_1}$ ، $\overline{F_2}$ كما هو مبين في الشكل (1.4)




الشكل (1.4)

2. قيمة حاصل الضرب المتجهي $\overline{F}$ هو عبارة عن مساحة متوازي الاضلاع المتكـــون مـــن $F_2$ و $F_1$ كما هو مبين في الشكل (2.4) حيث أن:-




الشكل (2.4)

مساحة متوازي الاضلاع تساوي:-

$|F| =$ القاعدة × الارتفاع

$$|F| = F_1 . d \qquad (1.4)$$

لكن نلاحظ أن الارتفاع (d) هو عبارة عن المركبة العمودية للقوة $F_2$ وتساوي:

$$d = F_2 \sin\theta$$

ومنه نجد أن قيمة حاصل الضرب المتجهي العددية للقوتين $F_1$ ، $F_2$ هي:

$$|F| = |F_1 \times F_2| = F_1 . d = F_1 . F_2 \sin\theta \qquad (2.4)$$

أي أن قيمة حاصل الضرب المتجهي للقوتين $F_2$ و $F_1$ يساوي حاصل ضرب قيمة القــوة $F_1$ في قيمة القوة $F_2$ في جيب الزاوية المحصورة بينهما $\theta$.

حيث أن الزاوية $\theta$ تقع ضمن القيم التالية:

$$0^\circ < \theta < 180^\circ$$

أذا كانت الزاوية $\theta$ تساوي $0^\circ$ أو $180^\circ$ فإن $\overline{F}=0$ ، أي أن القوتيــن $\overline{F_2}$ و $\overline{F_1}$ متوازيتان.

3.أتجاه حاصل الضرب المتجهي ,,المتجه $F$ ,, يحدد حسب قــاعدة اليــد اليمنـــى (Right-handed tridad) والموضحة في الباب الثاني، حيث أن أتجاه المتجـــه النــاتج ($\overline{F}$) يكــون باتجاه دوران اليد اليمنى عندما تدار من القوة الاولى $\overline{F_1}$ الى القـــــوة $\overline{F_2}$ أي بعكــس دوران عقرب الساعة.

وهكذا أذا تحققت الشروط الثلاث المذكورة أعلاه فإن المتجه ($\overline{F}$) يعتبر نــاتج حــاصل الضرب المتجهي للقوتين $\overline{F_2}$ و $\overline{F_1}$ :

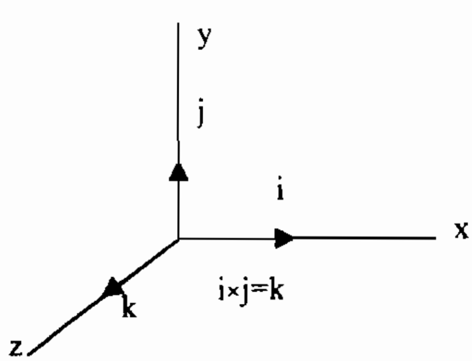
$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2}$$

وطبقاً للشرط الثالث فإن الترتيب يعتبر مهم جداً في عملية الضرب حيث أن:

$$\overline{F_1} \times \overline{F_2} = -(\overline{F_2} \times \overline{F_1})$$

## 3.4 التعبير عن حاصل الضرب المتجهي بواسطة المركبات الافقية والرأسية.

نقوم الآن بتطبيق عملية حاصل الضرب المتجهي على وحدات المتجهات (i ,,j,k) التي لها القيمة العددية تساوي واحد واتجاهها في تعامد كل منها على الآخر كما هــو مبيــن فــي الشكل (3.4) حيث:




الشكل (3.4)

| | | |
|---|---|---|
| i×i=0 | j×i=-k | k×i=j |
| i×j=k | j×j=0 | k×j=-i |
| i×k=-j | j×k=i | k×k=0 |

أما بالنسبة لحاصل الضرب المتجهي لقوتين مثل $F_2$ ، $F_1$ معرفتان بدلالة المركبات على المحاور الكارتيزية كما يلي:

$$F_1 = F_{1x}i + F_{1y}j + F_{1z}\boldsymbol{k}$$
$$F_2 = F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}\boldsymbol{k}$$

فيكون:-

$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} = \left(F_{1x}i + F_{1y}j + F_{1z}\boldsymbol{k}\right) \times \left(F_{2x}i + F_{2y}j + F_{2z}\boldsymbol{k}\right)$$

يمكن الحصول على ناتج حاصل الضرب باستخدام المحددات حيث:-

$$\overline{F} = \overline{F_1} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix}$$

وبفك هذا المحدد نحصل على:

$$F = \left(F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y}\right)i + \left(F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z}\right)j + \left(F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x}\right)k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4)$$

ومنه نجد أن المركبات الثلاث لمتجه حاصل الضرب المتجهي ( F) هي:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1y}F_{2z} - F_{1z}F_{2y} \\ F_y &= F_{1z}F_{2x} - F_{1x}F_{2z} \\ F_z &= F_{1x}F_{2y} - F_{1y}F_{2x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.4)$$

## 4.4 تعريف الجسم الجاسئ ( Rigid Body)

أشرنا سابقاً على أن الجسم الجاسئ هو الجسم الذي لا يحدث فيه تشـــوه، بفعـل تـأثير القوى المختلفة عليه، وحيث أن الجسم الجاسئ يمثل حالة خاصة من مجموعـــة الجســيمات، فيمكن تعريفه على أنه:

"مجموعة أو منظومة الجسيمات، لا تتغير المسافة بين أي جسيمين فيها مـهما كـانت القـوى المؤثرة عليها" أي أن الجسم الجاسئ يطلق على "تجمعاً من الجسيمات ذات المفـــهوم للجسـم الجاسئ، فإن جميع النظريات والقواعد المشروحة بالنسبة للجسيمات في الباب الســابق تكـون ايضا صحيحة بالنسبة للأجسام الجاسئة.

## 5.4 العزم (Moment or Torque)

أذا أثرت قوة ما على جسم بحيث تدفع الجسم للدوران حول أي محور لا يقطع خط عمـل هذه القوة ولا يكون موازياً لها، فإن هذا الدافع للدوران يسمى بعزم القوة ويرمز لـــه بـالرمز ($\overline{M}$) ويصطلح عليه عادة بعزم التدوير أو الدوران.

أن تاثير القوى على الاجسام الجاسئة تدرس وتوضح من خلال دراستنا لمكيتان مـــهمتان وهما عزم القوة حول نقطة وعزم القوة حول محور، كما يعتبر تأثير العزوم علـــى الاجســام الجاسئة من تركيبات والآليات هندسية اساس في دراسة علم الميكانيكـــا وخاصـــة الاســتاتيكا وايضا في دراسة مواضيع أخرى لذا فإن هذا البند يعتبر ذو أهمية كبرى.

### 1.5.4 عزم القوة حول نقطة (Moment of a Force about a Point)

لنفرض أن القوة $F$ تؤثر على الجسم الجاسئ في نقطة A ، كما هو مبين فـــي الشــكل (4.4)، فإن هذه القوة حول نقطة أختيارية مثل O يمكن الحصول عليـــه باســتخدام حــاصل الضرب المتجهي كما يلي:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F} \qquad (5.4)$$

حيث :

$M_o$: عزم القوة $F$ حول النقطة O.

$\overline{r}$ : متجه الموضع وهو الخط الواصل بين نقطة تأثير القوة على الجسم الجاسئ (A) والنقطة المراد ايجاد العزم حولها (O).

$\overline{F}$ : القوة المؤثرة على الجسم الجاسئ.

كما أشرنا سابقاً عند تعريف حاصل الضرب المتجهي لمتجهين، بإن اتجاه ناتج حاصل الضرب المتجهي عمودي على المستوى الذي يحتوي القوة $\overline{F}$، ومتجه الموضع $\overline{r}$ وأن الترتيب مهم جداً حيث أن:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F} = -(\overline{F} \times \overline{r})$$

وأن الاتجاه يحدد حسب قاعدة اليد اليمنى

أما بالنسبة للقيمة القياسية لها العزم (magnitude of the moment) فيمكن الحصول عليها كما يلي:

$$M_o = F.d \quad \text{......} (6.4)$$

حيث أن:

d: تمثل المسافة العمودية من النقطة المراد ايجاد العزم حولها (O) الى خط تأثير القوة $F$، كما هو مبين في الشكل (4.4).

نلاحظ أن المسافة (d) هي عبارة عن المركبة العمودية لمتجه الموضع $\overline{r}$ حيث:

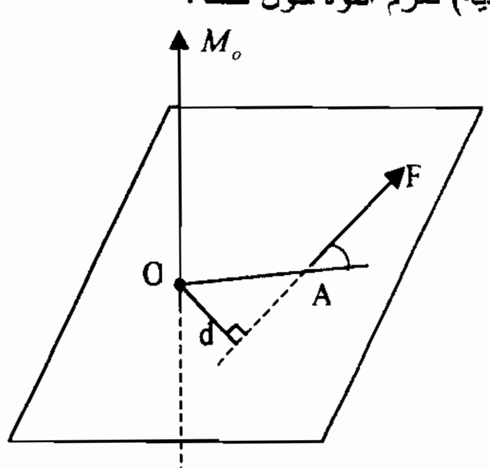
$$d = r\sin\theta$$

حيث: $\theta$ − هي الزاوية المحصورة ما بين القوة $F$ ومتجه الموضع r.

ومنه نجد أن:

$$M_o = F.d = F.r.\sin\theta \quad \text{......} (7.4)$$

هي القيمة القياسية (العددية) لعزم القوة حول نقطة.

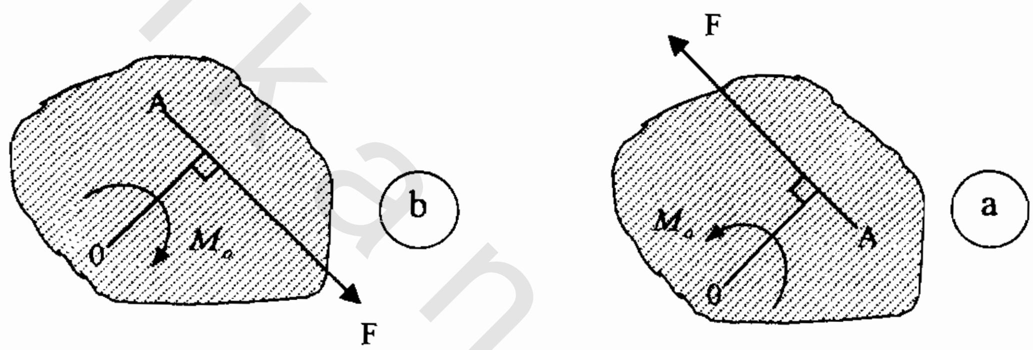



الشكل (4.4)

ويعرف عزم القوة حول أي نقطة بإنه حاصل ضرب القوة والمسافة العمودية بين تلك النقطـــة وخط تأثير القوة وتسمى المسافة العمودية ($d$) عاده بذراع القوة. ويمثل عزم القوة حول نقطة قابليتها لتدوير الجسم الذي تؤثر عليه حول المحور العمودي على المستوى الذي يحوي القـــوة وذراعها.

أن عزم القوة كمية متجهة لذا فإن هذه الكمية لها اتجاه ومقدار ونقطة تأثير حســـب مـــا يتوجب لتحديد أي كمية متجهة أخرى.

أن أتجاه عزم القوة يكون موجباً اذا كانت القوة تعمل على تدوير الجسم حـــول النقطـــة المراد أيجاد العزم حولها بعكس دوران عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (a.5.4)، أما أذا كانت القوة تعمل على تدوير الجسم حول النقطة المراد أيجاد العـــزم حولـــها مـــع أتجـــاه عقارب الساعة فإن اتجاه العزم يكون سالباً كما هو مبين في الشكل (b.5.4).




$M_o = -F.d$
دوران مع عقارب الساعة
ويلاحظ أن $M_o$ داخل من الورقة

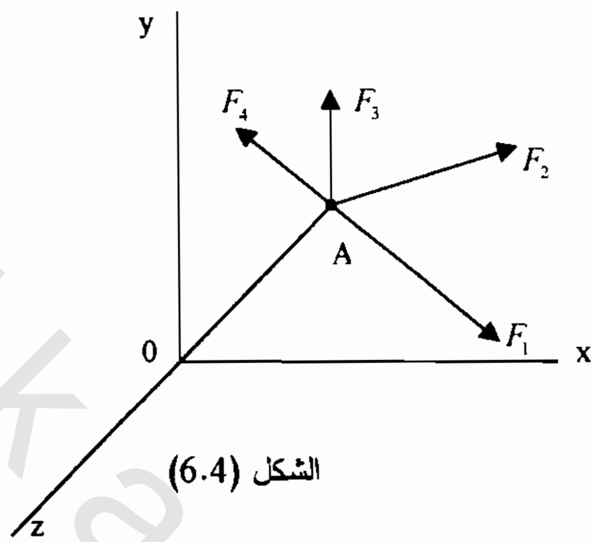
$M_o = +F.d$
دوران عكس عقارب الساعة
ويلاحظ أن $M_o$ خارج من الورقة

الشكل (5.4)

أما حالة في كون القوة لا تقع في مستوى عمودي على محور العزم كما أشـــرنا ســـابقاً، وخاصة بالنسبة للقوى المستوية فإنه يتوجب تحليل القوة الى مركباتها الافقية والرأسية حيـــث يصبح عزم القوة مساوياً لمجموع عزوم المركبتين المذكورتين حسب ما يسمى بمبدأ العـــزوم (Principle of momentes) بالنسبة للقوى المستوية والذي ينص على أن,, عـــــزم القـــوة حول أي نقطة يكون مساوياً لمجموع عزوم مركبات هذه القوة حول نفس النقطة,,. وهذا مـــا يعتبر من الاساسيات في علم الاستاتيكا النظرية.

أما بالنسبة لعزم محصلة مجموعة قوى ملتقية في نقطة واحدة في الفراغ فيمكن الحصول عليه حسب نظرية فاريجنون (Varignon's Theorem).

لنفرض أن القوى............ $F_1, F_2, F_3,$ ملتقية في نقطة واحدة مثل (A) في الفراغ، كما هو مبين في الشكل (6.4).




الشكل (6.4)

باستخدام حاصل الضرب المتجهي لمتجهين يمكن أيجاد عزم هذه القوى حول النقطة 0 حيث:

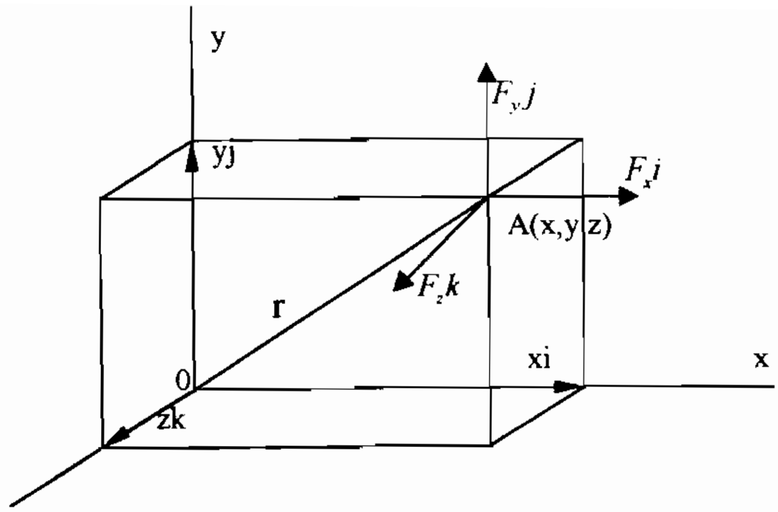
$$M_o = r \times (F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots\ldots) = r \times F_1 + r \times F_2 + r \times F_3 \ldots\ldots\ldots (8.4)$$

وذلك حسب نظرية فريجنون التي تنص على أن ..العزم حول نقطة مثل (0) لمحصلة عدة قوى ملتقية في نقطة واحدة في الفراغ مساوياً لمجموع عزوم كل قوة من هذه القوى حول النقطة (0) كل على حدة،..

## 2.5.4 المجموع الجبري لعزوم القوى

لمعرفة مقدار عزم قوة في الفراغ من الافضل تحليلها الى مركباتها، على المحاور الكارتيزية الثلاث x,y,z.

لنفرض أن المطلوب أيجاد عزم القوة F في الفراغ المعرفة بدلالة مركباتها الثلاث على المحاور الكارتيزية $F_x, F_y, F_z$ والمؤثرة في النقطة (A) ذات الاحداثيات (x,y,z) حول النقطة (0) كما هو مبين في الشكل (7.4).




الشكل (7.4)

أذا القوة F معرفة بدلالة المركبات الثلاث كما يلي:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

أما متجه الموضع r فهو الخط الواصل بين النقطة A(x,y,z) ونقطة 0(0,0,0) ويمكن أيجاد مركباته ايضا باستخدام التغير في الاحداثيات كما أشرنا سابقاً حيث:

$$d_x = x_2 - x_1 = x - 0 = x$$
$$d_y = y_2 - y_1 = y - 0 = y$$
$$d_z = z_2 - z_1 = z - 0 = z$$

ومنه:

$$\overline{r} = xi + yj + zk$$

وأخيراً العزم حول النقطة (0) يساوي:

$$\begin{aligned} \overline{M_o} &= \overline{r} \times \overline{F} \\ &= (xi + yj + zk) \times (F_x i + F_y j + F_z k) \\ &= (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k \\ &= M_x i + M_y j + M_z k \end{aligned}$$

إذاً مركبات العزم الثلاث هي:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\} \text{..........................................................} (9.4)$$

وكما أشرنا سابقاً يمكن إيجاد حاصل الضرب المتجهي بطريقة المحدد حيث:

$$\overline{M_o} = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

لنحصل على نفس الناتج، حيث تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع للوقت.

أما في حالة حساب عزم القوة F المؤثرة في نقطة (A) حول نقطة أختيارية مثـل (B) أي ليست نقطة الاصل (0) فإن:

$$M_B = \overline{r_{A/B}} \times F$$

حيث أن:-

$r_{A/B}$ – هو الخط الواصل بين النقطة A الى النقطة B، ومركباته هي:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad , \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad , \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

أي العزم حول النقطة B هو عبارة عن:

$$M_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$

أو باستخدام المحددات

$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

أما إذا كانت القوة F واقعة في مستوى واحد مثل (xy)، أي الاحداثي z=0، ومركبة القوة $F_z = 0$ فإن العزم حول نقطة الاصل (0) هو:

$$M_o = M_z = xF_y - yF_x$$

وفي حالة نقطة أختيارية مثل $B(x_B, y_B)$ فإن العزم $M_B$ هو:

$$M_B (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

### 3.5.4 عزم القوة حول محور

**(Moment of a Force about a Given Axis)**

بعد دراستنا للمفهوم الاول عزم القوة حول نقطة، وللمجموع الجبري لعزوم القوى، نقوم بدراسة المفهوم الثاني، الذي كما أشرنا يعمل على مساعدتنا على فهم تأثير القوى على الاجسام الجاسئة وتوازنها، الا وهو عزم القوة حول محور.

لناخذ القوة $\overline{F}$ التي تؤثر على جسم جاسئ في نقطة A. أن عزم هذه القوة حول نقطة 0 يمكن الحصول عليه من خلال العلاقة:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F} \qquad (10.4)$$

كما هو مبين في الشكل (8.4) ولنفرض أن الخط 0L هو محور يمر خلال النقطة 0.

نقوم الان بتعريف عزم القوة F حول المحور (0L) $M_{0L}$ على أنه مسقط العزم $M_o$ على المحور (0L) ونرمز له بالرمز (0C) كما هو مبين في الشكل (8.4).

أن متجه الوحدة على طول الخط 0L يرمز له بالرمز $\lambda$ وباستخدام العلاقات السابقة وحاصل الضرب القياسي والمتجهي يمكننا كتابة العلاقة بالنسبة لعزم القوة حول المحور كمايلي:

$$M_{0L} = \lambda M_o = \lambda.(r \times F) \qquad (11.4)$$

حيث أن:-

$M_{0L}$ - عزم القوة F حول المحور 0L.

$M_o$ - عزم القوة F حول النقطة 0.

r - متجه الموضع وهو الخط الواصل بين النقطة A إلى نقطة 0.

$\lambda$ - متجه الوحدة على طول المحور 0L.

كما يمكن أيجاد العزم $M_{0L}$ باستخدام المحددات حيث:

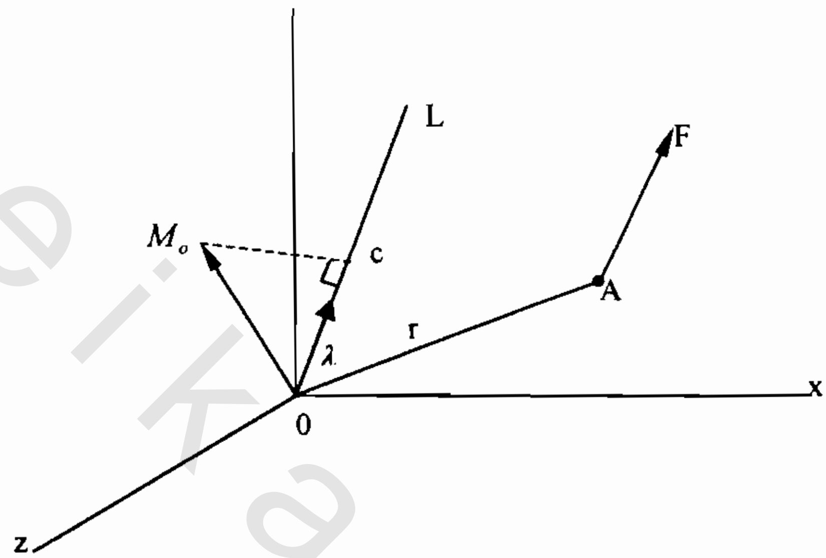
$$\boldsymbol{M}_{0L} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (12.4)$$

حيث أن:

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$: عبارة عن أتجاه جيب ـ للمحور 0L.

$F_x, F_y, F_z$: مركبات القوة F على المحاور الكارتيزية الثلاث.

$x, y, z$: أحداثيات التغيرات بين 0،A.




الشكل (8.4)

أن المعنى الفيزيائي لعزم القوة F حول المحور 0L يظهر بشكل افضل أذا قمنا بتحليل القوة F إلى مركباتها الافقية و الرأسية (حسب قاعدة متوازي الاضلاع) $F_1$ ،$F_2$ كما هو مبين في الشكل (9.4). حيث أن $F_1$ تكون موازية للمحور 0L، و $F_2$ تقع في المستوى (P) العمودي على المحور 0L.

كما نقوم بتحليل متجه الموضع r الى مركباته بنفس الطريقة إلى $r_2$ ، $r_1$.

وباستخدام هذه المركبات وطريقة التحليل نستطيع كتابة صيغة عزم القوة حول محور كمايلي:

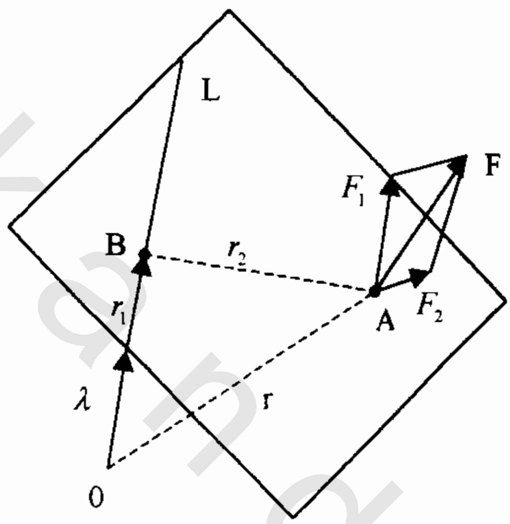
$$M_{0L} = \lambda[(r_1 + r_2)\times(F_1 \times F_2)]$$
$$= \lambda.(r_1 \times F_1) + \lambda.(r_1 \times F_2) + \lambda.(r_2 \times F_1) + \lambda.(r_2 \times F_2)$$

نلاحظ بإن حاصل الضرب للحدود الثلاث الاولى -ما عدا الحد الاخير الرابع- يكون مساوياً للصفر حيث أنها تتضمن متجهات متوازية وبذلك نحصل على:-

$$M_{0L} = \lambda.(r_2 \times F_2) \quad \text{.......................................................}(13.4)$$

أن حاصل الضرب المتجهي $(r_2 \times F_2)$ عمودي على المستوى P ويمثل عزم المركبة $F_2$ حول نقطة (B) نقطة تقاطع المحور 0L مع المستوى P. لذلك فإن حاصل الضرب القياسي $(M_{0L})$ سوف يكون موجب أذا كان $(r_2 \times F_2)$ والمحور 0L يكون لهما نفس السلوك.

ويكون سالباً أذا كان ذو حالات أخرى, حيث أن $F_2$ تعمل على دوران الجسم الجاسئ حول المحور 0L أما القوة $F_1$ فإنها تعمل على أنتقال النقطة A موازية للمحور لان المركبة $F_1$ موازية لمحور 0L وعلى هذا فإن عزم القوة F يقدر بعزم المركبة $F_2$ حول هذا المحور وبناء على ذلك نستطيع القول أن عزم القوة F حول محور مثل 0Lهو عبارة عن مقياس دوران هذه القوة حول محور الثابت 0L، والتي تساهم في الحركة الدورانية للجسم الجاسئ حول هذا المحور.

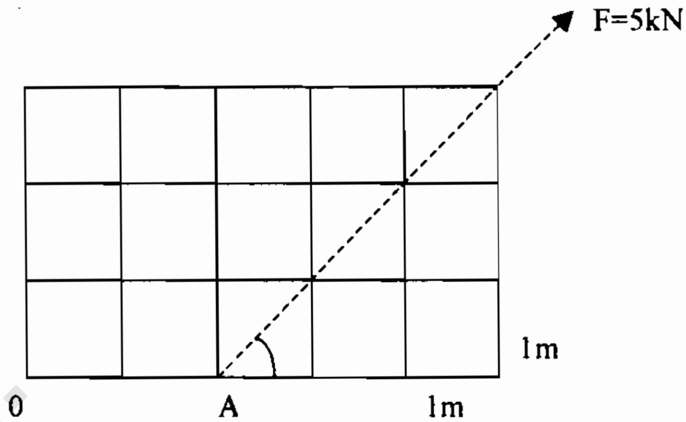



الشكل (9.4)

يلاحظ مما سبق أن عزم قوة ما حول محور موازي لها أو يقطعها في نقطة يساوي الصفر.

## مثال (1.4)

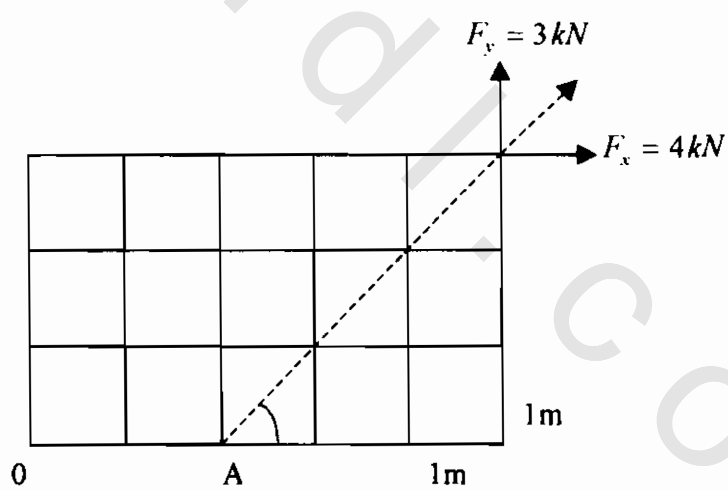
أوجد عزم القوة F=5kN، حول النقطة 0كما هو مبين في الشكل (10.4).




الشكل (10.4)

**الحـــــل:-**

نلاحظ أن القوة F لا تقع في مستوى عمودي على محور العزم، لذا يتوجب علينا تحليـــل القوة F إلى مركباتها الافقية والعمودية $F_x$ ،$F_y$ كما هو مبين في الشكل (11.4).




الشكل (11.4)

$$F_x = F\cos\theta = 5\left(\frac{4}{5}\right) = 4\,kN$$

$$F_y = F\sin\theta = 5\left(\frac{3}{5}\right) = 3\,kN$$

وحسب نظرية فاريجنون فإن عزم القوة $\overline{F}$ حول النقطة 0 يساوي المجموع الجبري لعزوم مركباتها حول نفس النقطة حيث:

$$\begin{aligned}\sum M_o \curvearrowleft^{+} &= F_x d_1 + F_y d_2\\ &= 4(3) + 3(6)\\ &= 12 + 18\\ &= 40\,kN\,m\end{aligned}$$

يلاحظ أن أشارة عزم القوة F موجب وذلك يعني أن عزم القوة F حول النقطة 0 بعكس أتجاه عقارب الساعة كما هو مبين في الشكل (11.4).

**مثال(2.4)**

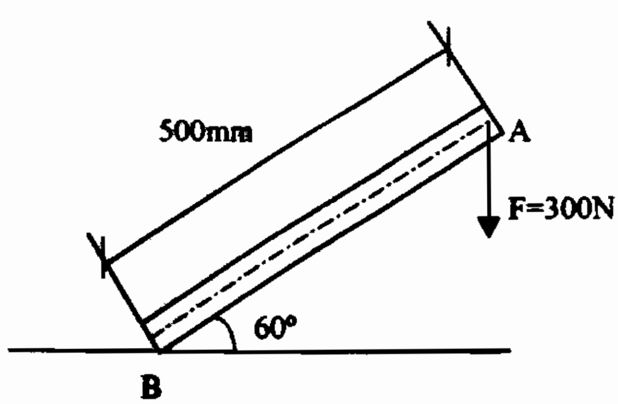
في الشكل (12.4) أوجد ما يلي:

1.عزم القوة F حول النقطة B.

2.قيمة القوة الافقية F الموضوعة في النقطة A والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم.

3.أصغر قوة نقوم بوضعها في نقطة A والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم في نقطة B.

4.كم بعد قوة مقدارها 750N عمودية للحصول على نفس قيمة العزم.




الشكل (11.4)

الحـــــل:

1. نقوم بتحويل القياس الى المتر حتى يتم الحصول على عزم بوحدة N.m.

عزم القوة F حول النقطة B يمكن أيجاده باستخدام العلاقة التالية:

$$M_B = F.d$$

حيث أن d هي المسافة العمودية بين خط تأثير القوة F والنقطة المراد إيجاد العزم حولها.

أذاً d تساوي:

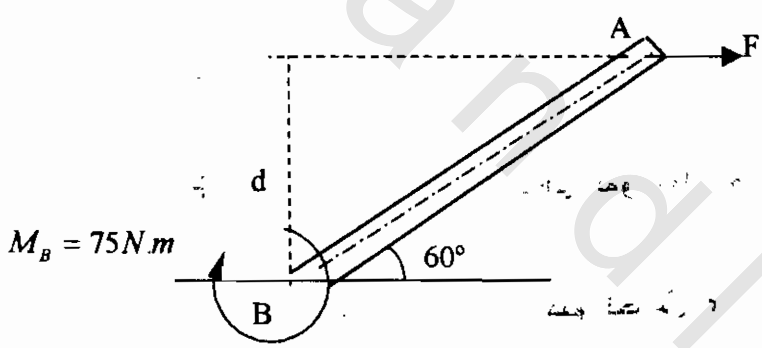
$$d = 0{,}5(m).\cos 60 - 0{,}25m$$

ومنه:

$$M_B = 300(N).0{,}25m = -75(N.m)$$

واتجاه العزم $M_B$ يتجه باتجاه عمودي على الورقة وداخل الورقة أي الاتجاه سالب (مـــع دوران عقارب الساعة).

2. الشكل (12.4) يبين القوة الافقية الموضوعة في النقطة A والتي يمكــن الحصــول علــى قيمتها باستخدام العلاقة نفسها حيث:




الشكل (12.4)

$$M_B = F.d$$

لكن d المسافة العمودية (ذراع القوة F) بالنسبة لوضع القوة الافقي مبيــــن فــي الشــكل (12.4) ويساوي:

$$d = 0{,}5.\sin 60 = 0{,}433m$$

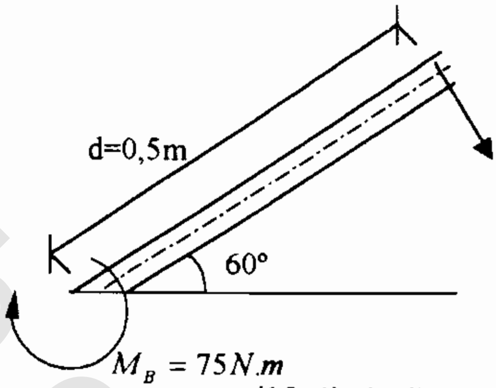
وبالتعويض في العلاقة السابقة:

$$75(N.m) = F.0{,}433m$$

ومنه:

$$F = \frac{75(N.m)}{0{,}433(m)} = 173.2N$$

3.نحصل على أصغر قوة موضوعة في النقطة (A) عندما تكون d أكبر مـا يمكـن. حيـث نلاحظ أن d أكبر ما يمكن عندما تكون مساوية 0,5m. الشكل (13.4) يوضح ذلك حيث:




الشكل (13.4)

$$M_B = F.d$$

$$75(N.m) = F.0,5(m)$$

ومنه:

$$F = \frac{75(N.m)}{0,5(m)} 150N$$

4.نقوم بوضع القوة F=750N في نقطة أختيارية مثل C كما هو مبين في الشـــكل (14.4)

وباستخدام نفس العلاقة نحصل على:

$$M_B = F.d$$

$$75(N.m) = 750.d$$

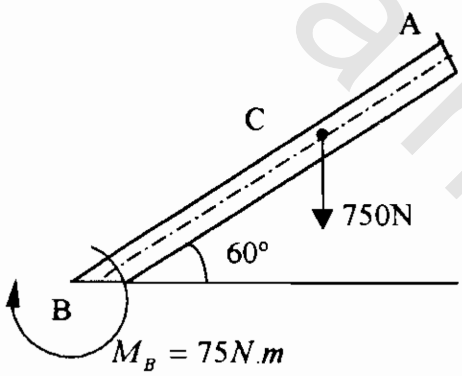
ومنه:

$$d = \frac{75}{750} = 0,1m$$

لكن d بانسبة لوضع القوة العمودي هي:

$$d = BC.\cos 60°$$

$$0,1 = BC.0,5$$



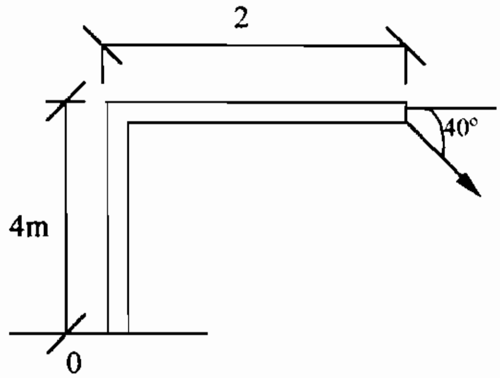

الشكل (14.4)

ومنه:

$$BC = \frac{0,1}{0,5} - 0,2m$$

## مثال (3.4)

أوجد عزم القوة F حول النقطة 0 كما هو مبين في الشكل (15.4).




الشكل (15.4)

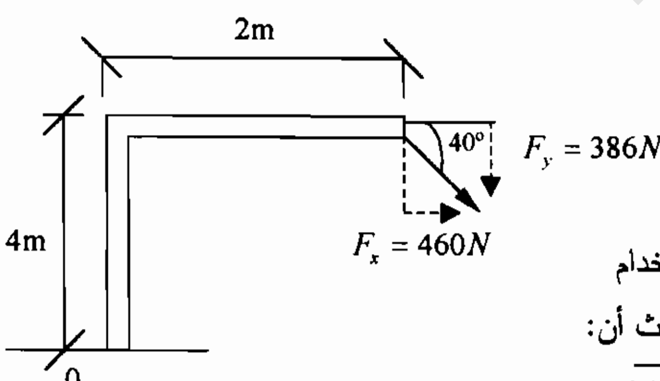
**الحـــــل:**

نقوم بتحليل القوة أولاً الى مركباتها الافقية $F_x$، والعمودية $F_y$ حيث:

$$F_x = 600\sin 40° = 460N \xrightarrow{+}$$

$$F_y = 600\sin 40° = 386 \downarrow^{-} N$$

الشكل (16.4) يوضح تحليل القوة F=600N الى مركباتها.




شكل (16.4)

نقوم الآن بإيجاد العزم باستخدام ضرب الكميات المتجهي حيث أن:

$$\overline{M_o} = \overline{r} \times \overline{F}$$

حيث أن:-

$$\overline{r} = 2i + 4J$$

$$F = 460i - 386J$$

ومنه وبالتعويض:

$$\begin{aligned} M_o &= (2j + 4J) \times (460i - 386.J) \\ &= 0 + 722k - (-1840k) \\ &= +2612k\,N.m \end{aligned}$$

أما قيمة هذا العزم فيمكن أيجاده باستخدام العلاقة

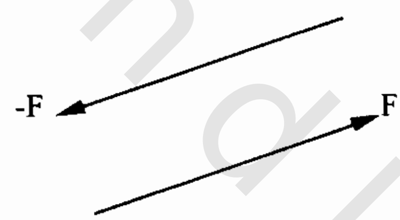
$$|M_o| = F_x.d_1 + F_y.d_2$$

$$|M_o| = 460 \times 2 + 382.2 = 2612\,N.m$$

وما حصلنا عليه هو القيمة القياسية لعزم القوة F $M_o = 2612\,N.m$ أما أتجاه هذا العزم فقد حصلنا عليه بواسطة ضرب الكميات المتجه $\overline{F}$ القوة و $\overline{r}$ متجه الموضع.

## 4.5.4 عزم الازدواج (Moment of Couple)

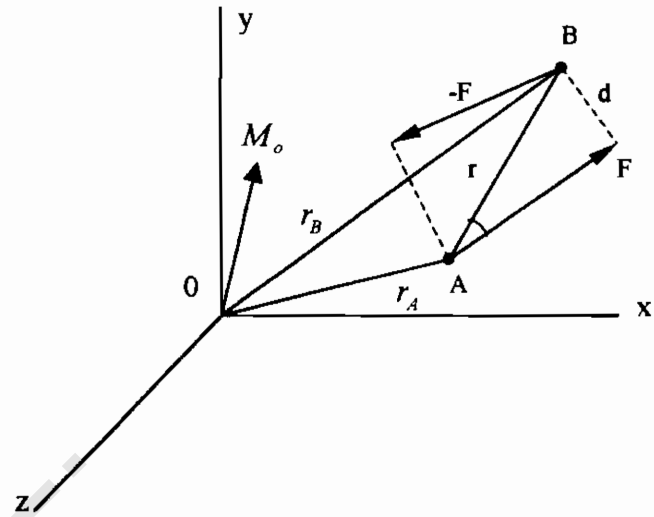
ينشأ الازدواج (Couple) عن قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وخطوط عمليهما ليستا على استقامة واحدة كما هو مبين في الشكل (17.4). أن العزم الناشئ عن هاتين القوتين يسمى بعزم الازدواج (Moment of Couple) الذي له خصائص هامة وفريدة تطبيقية في علم الميكانيك الهندسي.




الشكل (17.4) قوى الازدواج

إذا أخذنا في الاعتبار أن القوتين متساويتين في المقدار ومتوازيتين ومتعاكستين في الاتجاه مثل F،F– فإنه من الواضح أن محصلة هاتين القوتين أو مركباتها في أي أتجاه يساوي الصفر، أما تأثيرهما فيكون دافعاً لاحداث دوران في الجسم الذي تؤثران عليه أي بمعنى أخر محصلة العزوم حول نقطة معينة لا يساوي الصفر وذلك لان هاتين القوتين تعملان على تدوير الجسم.

لنفرض لدينا قوتين مثل F,-F متساويتين في المقدار ومتوازيتين ومتعاكستين في الاتجاه والمطلوب إيجاد مجموع العزوم لهاتين القوتين حول نقطة معينة مثل نقطة 0 كما هو مبين في الشكل (18.4).




الشكل (18.4)

أن مجموع العزوم للقوتين F,-F حول النقطة 0 يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\overline{r_A}\times\overline{F}+\overline{r_B}\times(\overline{-F})=(\overline{r_A}-\overline{r_B})\times\overline{F}$$

حيث أن $(r_A - r_B)$ يساوي (r) متجه الموضع بين نقطتي تأثير القوتين F,-F.

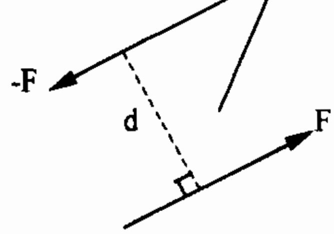
وبناء على ذلك نجد أن مجموع العزوم حول النقطة 0 يصبح:

$$\overline{M}=\overline{r}\times\overline{F} \quad \text{.......}(14.4)$$

حيث: $M$ يطلق عليه عزم الازدواج وهو متجه عمودي على المستوى الذي يحوي القوتين $\overline{\text{F}},\overline{\text{-F}}$ أما بالنسبة لمقدار هذا العزم.

$$M=r.F.\sin\theta=F.d \quad \text{.......}(15.4)$$

حيث أن d: هي المسافة العمودية بين خطي تأثير القوتين F,-F كما هو مبين في الشكل (19.4).



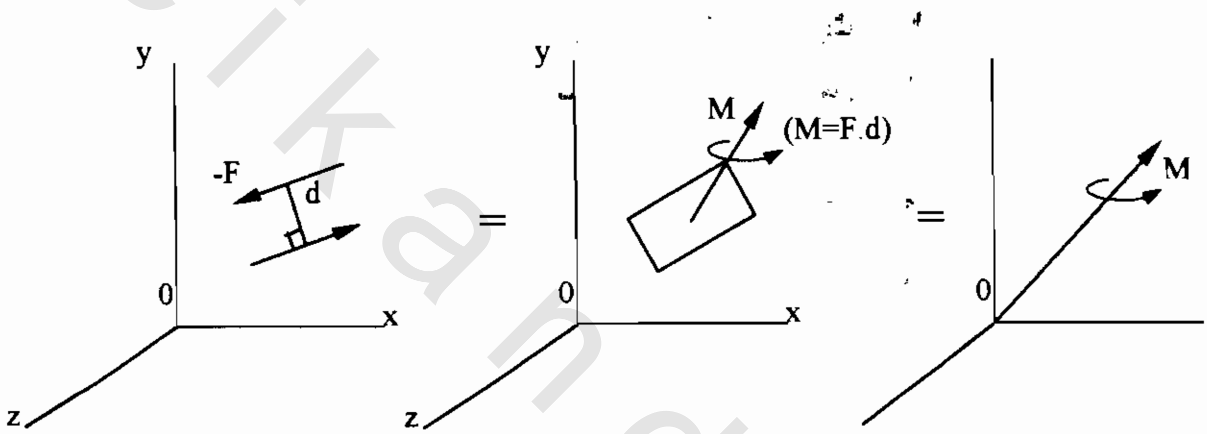

الشكل (19.4)

أن مقدار عزم الازدواج هو عبارة عن المجموع الجبري لعزوم القوتين F,-F حول أي نقطة أو محور وهو متجه عمودي حر. وله نفس وحدات العزم لانه ينتج عن حاصل ضرب القوة والمسافة فتكون وحدته،(N.m).

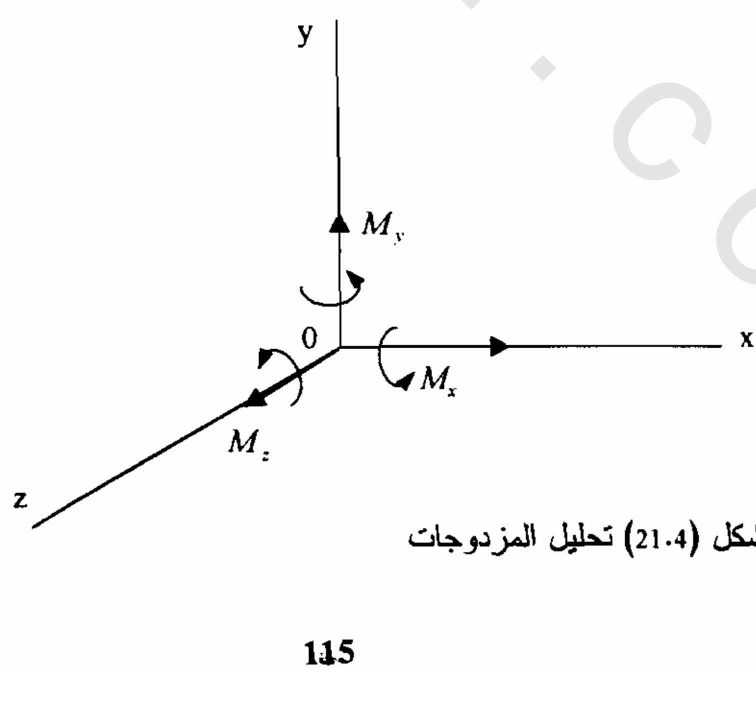
أن قيمة عزم الازدواج لا تعتمد على نقطة 0 نقطة الاصل وذلك لانه كما أشرنا متجه حر فلو كانت النقطة 0 نقطة أخرى لكانت النتيجة نفسها.

كما يمكن نقله الى مستو مواز للمستوى الذي يحويه أو تدويره في نفس المستوي أو تغيير قيمتي F و d بحيث تكون قيمته ثابتة.

المزدوجات (Couples) يمكن تمثيلها بمتجهات كما هو مبين في الشكل (20.4) كما يمكن تحليلها الى مركبات متجه أيضا مؤثرة على المحاور الكارتيزية الثلاث $M_x,M_y,M_z$ تمثل المستويات xy,zx,yz على التوالي كما هو مبين في الشكل (21.4).




الشكل (20.4) تمثيل المزدوجات




الشكل (21.4) تحليل المزدوجات

نلاحظ من الشكل (20.4) أن المزدوجات تمتلك نفس العزم سواء كانت في نفس المستوى أو في مستويات متوازية وتعتبر متكافئة لذلك لا حاجة لرسم القوى السولدة للمزدوج نفسه دائماً وإنما كفاية أن نرسم سهماً مساوياً بالقيمة والاتجاه لذلك المزدوج.

وكما أشرنا سابقا بإنه متجه حر لذلك عادة ما نختار نقطة تأثيره في نقطة الاصل 0.

### 5.5.4 تحليل القوة الى قوة ومزدوج

**(Resolution of a Force into a Force and Couple)**

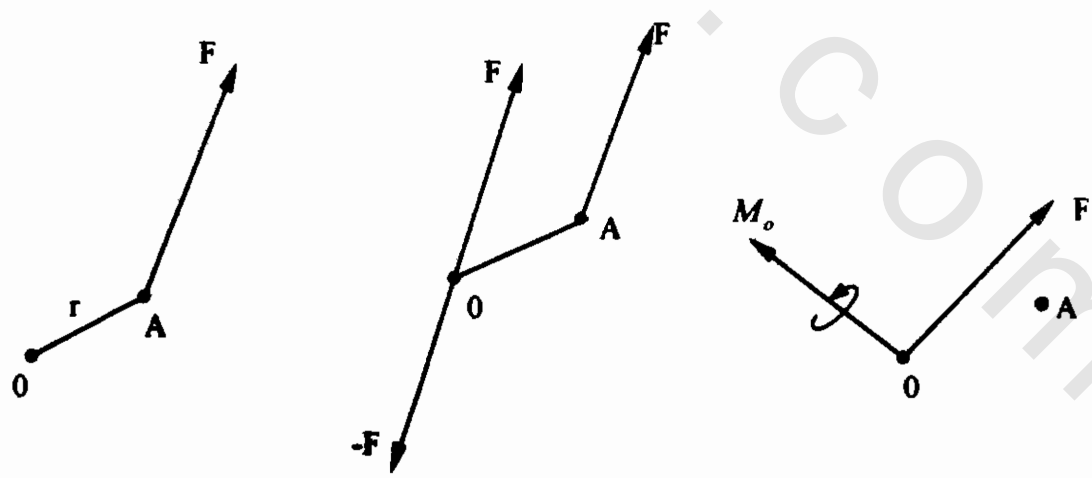
في كثير من الاحيان وخاصة في بعض المسائل أتزان الاجسام نحتاج الى تحويل موقع قوة ما وذلك لدراسة تأثيرها على الجسم الذي تؤثر عليه.

يمكننا القيام بذلك بإضافة قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ولهما نفس خط التأثير في موقع القوة الجديدة كما هو مبين في الشكل (22.4)، حيث يتشكل لدينا أزدواج (مزدوج) من القوة الاصلية وإحدى القوتين المضافتين، وقوة واحدة تعمل في الموقع الجديد وبهذا نكون قد حللنا القوة الى نظام قوة ومزدوج.

ولتوضيح ذلك نفرض أن قوة مثل $\overline{F}$ تؤثر على جسم جاسئ في نقطة A، فإنه من الممكن تحريكها الى نقطة اختيارية مثل (0)، شرط إضافة مزدوج له عزم مساوياً الى عزم القوة F حول النقطة (0) وهو $(M_o)$ عمودي على المستوى الحاوي على F,r. ولان $M_o$ هو متجه حر كما أشرنا سابقاً فيمكن أن نضعه في أي مكان من الجسم الجاسئ.

ولكننا عادة ما نضعه في نقطة (0) جنباً الى جنب مع القوة F وهذا الجمع بين القوة والمزدوج الذي حصلنا عليه يسمى نظام القوة–المزدوج (Force-Couple System).

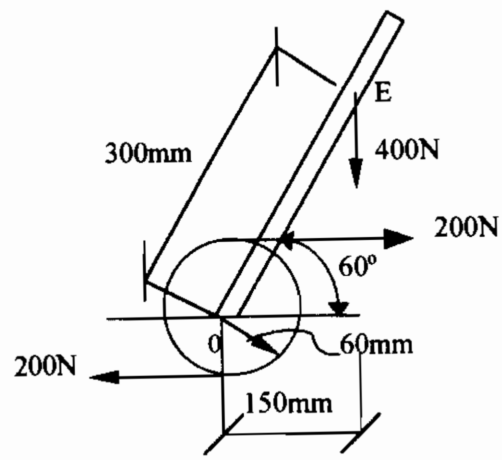
أن الشكل (22.4) يوضح كيفية الحصول على ذلك.




الشكل (22.4)

**مثال (4.4)**

عوض عن القوة والمزدوج في الشكل (23.4) بقوة واحدة مكافئة موضوعة على الذراع. وأوجد المسافة من المسند 0 الى نقطة تأثير هذه القوة المكافئة.




الشكل (23.4)

**الحـــل:-**

الخطوة الاولى:-

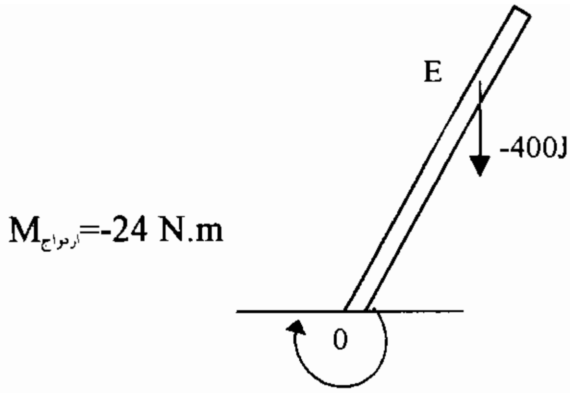
نقوم أولاً بإيجاد الازدواج الناتج من المزدوج للقوة 200N (مع التحويل من المليمـــتر الـــى المتر) حيث أن:

$$M_{\text{ازدواج}} = F.d$$

حيث d:- المسافة العمودية بين خطي تأثير القوتين

$$M_{\text{ازدواج}} = 200(0,06+0,06)$$
$$=-24\ N.m$$

كما هو مبين في الشكل (24.4)




الشكل (24.4)

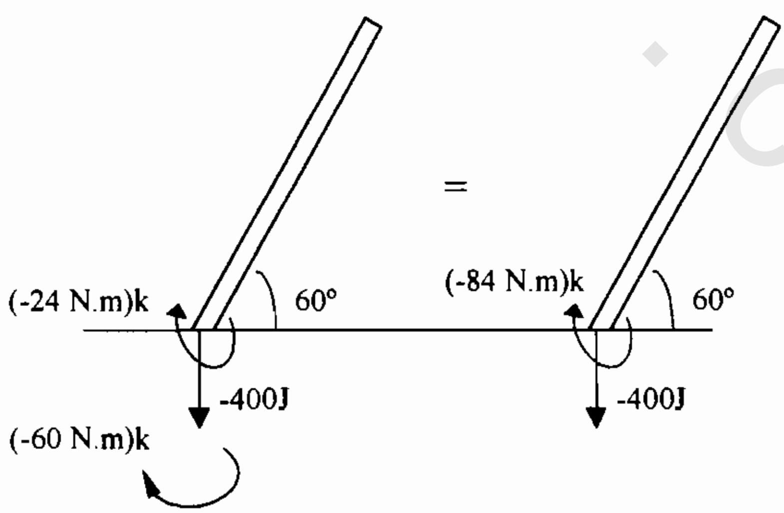
الخطوة الثانية:-

نقوم بنقل القوة (400J-) من النقطة E إلى النقطة 0 وذلك عن طريق إضافة قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ولهما نفس خط التأثير حيث يتشكل لدينا أزدواج (مزدوج) من القوة الاصلية (400J-) وأحدى هاتين القوتين المضافتين، وقوة واحدة تعمل في الموقع الجديد.

أي بمعنى أبسط نحرك القوة (400J-) من النقطة (E) الى النقطة (0) ونضيف عزم هذه القوة (400J-) حول النقطة 0 كما يلي:

$$
\begin{aligned}
M_o &= 0E \times F = [(0{,}3\cos 60)i + (0{,}3\sin 60) \times (-400J)] \\
&= (0{,}15i + 0{,}26J) \times (-400J) \\
&= -60k
\end{aligned}
$$

وتصبح المنظومة كما هو موضح في الشكل (25.4).




الشكل (25.4)

حيث قمنا بإضافة العزم (k 60-) الى العزم (k 24-) الناتج من المـــزدوج 200N لنحصـــل على:-

$$(-24N.m)k-(60N.m)k=(-84N.m)k$$

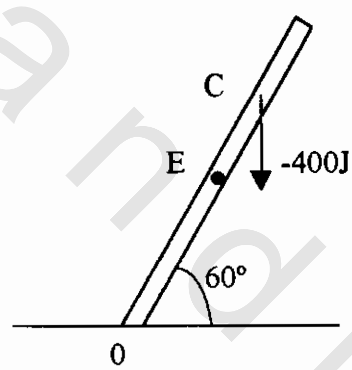
وهذا العزم k(84N.m-) يمكن حذفه بوضع القوة (400J-) في نقطة مثل C حسب الشـــرط التالي:

$$(-84N.m)k=0C\times F$$
$$(-84N.m)k=[0CCos60°i+0C\sin 60°J]\times(-400J)$$
$$(-84N.m)k=-0C\cos 60°(400)k$$

ومنه:

$$0C=\frac{(-84N.m)k}{-\cos 60°(400N)}=0{,}42m$$

إذاً يجب نقل القوة (400J-) الى مسافة مقدارها 0,42m على الذراع حتى نحصـــل علـــى نظام قوة واحدة مكافئة منا هو مبين في الشكل (26.4).




الشكل (26.4)

وهكذا عوضنا عن القوة والمزدوج في الشكل (23.4) بنظام قوة واحدة موضوعـــة علـــى الذراع حيث أن المسافة بين المسند 0 ونقطة تأثير القوة المكافئة (400J-) هي 0,42m وهـــو ما أردنا الحصول عليه.

## 6.5.4 تحويل منظومة من القوى الى قوة واحدة ومزدوج

## (Reduction of System of Force to one Force and Couple)

في هذا الجزء من الباب سنقوم بدراسة كيفية تحويل منظومة من القـــوى المؤثـــرة علـــى الجسم الجاسئ في عدة نقاط الى نظام قوة واحدة –ومزدوج.

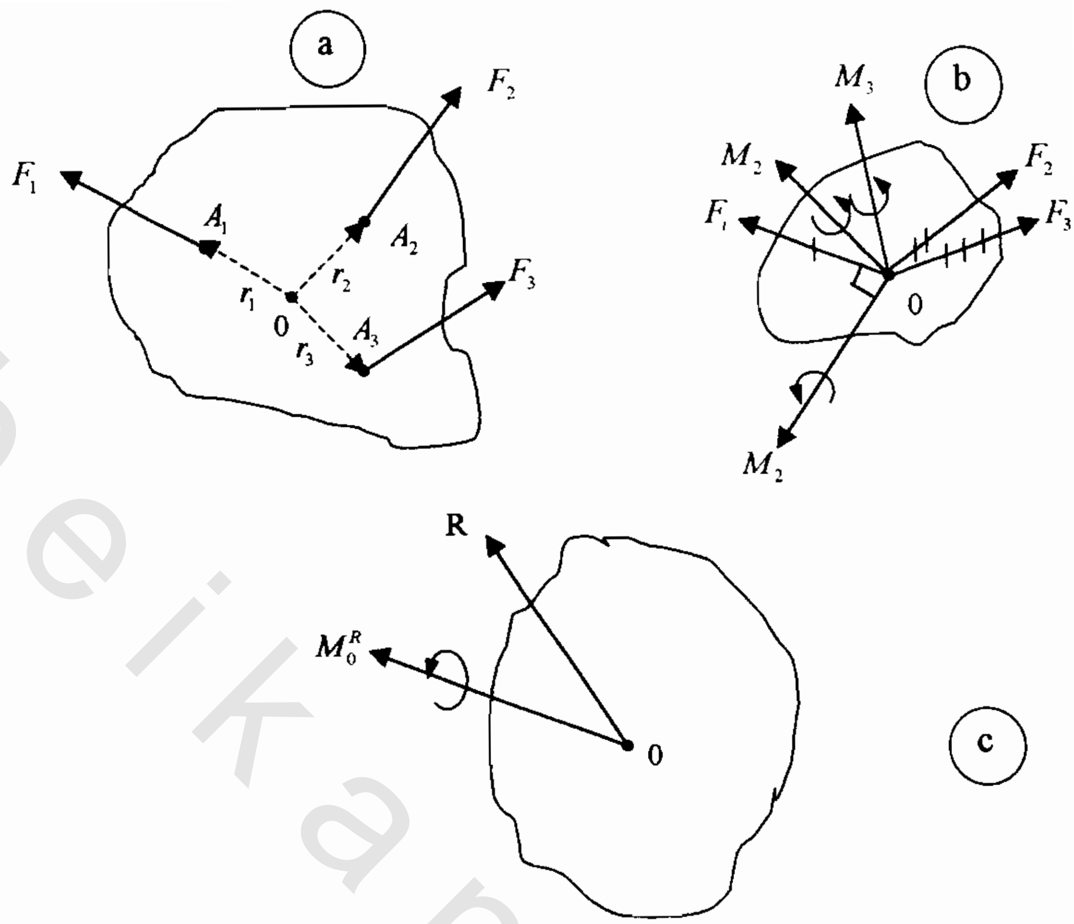
نفرض أن مجموعة من القوى مثل $F_1, F_2, F_3$ تؤثر على الجسم الجاسئ في نقاط مختلفـــة مثل $A_1, A_2, A_3$ كما هو مبين في الشكل (a.27.4).

لتحويل منظومة القوى الى نظام قوة –ومزدوج مكافئ نقوم بنقل كل قـــوة مـــن قـــوى المنظومة الى نقطة أختيارية مثل (0) مع أضافة عزم تلك القوة حول النقطة (0) ووضعه جنباً الى جنب مع القوة والذي يساوي ( r×F) كما هو مبين في الشكل (b.27.4).

بعد ذلك نقوم بإيجاد محصلة مجموعة القوى المؤثرة في النقطة (0) والتي رمزنـــا إليـــها بـــ(R)، بالاضافة الى إيجاد عزم محصلة هذه القوى حول النقطة (0) والذي يرمز له ( $M_0^R$) كما هو مبين في الشكل (c.27.4).

وبذلك نكون قد حولنا منظومة القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ في عدة نقاط الى نظـــام قوة واحدة–ومزدوج .

وعليه فإن أي منظومة من القوى مهما تكن معقدة من الممكن تحويلها الى مايسمى بنظام قـوة– ومزدوج مكافئ (Equivalent force-couple System) مؤثران في نقطة أختياريـــة مثـــل نقطة (0)، وهذا يعتبر من الاساسيات والمميزات الفريدة والهامة في حسابات علم الميكانيكا.




الشكل (27.4)

يمكن التعبير عن نظام القوة–والمزدوج المكافئ باستخدام المعادلات حيث:

$$R = \sum F \quad \text{.......} (16.4)$$

$$M_0^R = \sum M_o = \sum (r \times F) \quad \text{.......} (17.4)$$

حيث أن:

R– هي مجموع القوى (المحصلة).

$M_0^R$– محصلة العزم للمنظومة.

أما أذا كانت القوى معرفة بدلالة مركباتها الثلاث على المحاور الكارتيزية حيث:

$$F = F_x i + F_y J + F_z k$$

$$r = xi \quad + yJ \quad + zk$$

وبالتعويض في المعادلات (16.4) ، (17,4) عن r,F نجد أن:

$$R = R_x i + R_y J + R_z k \text{ ..........................................(18.4)}$$

$$M_0^R = M_x^R i + M_y^R J + M_z^R k \text{ ......................................(19.4)}$$

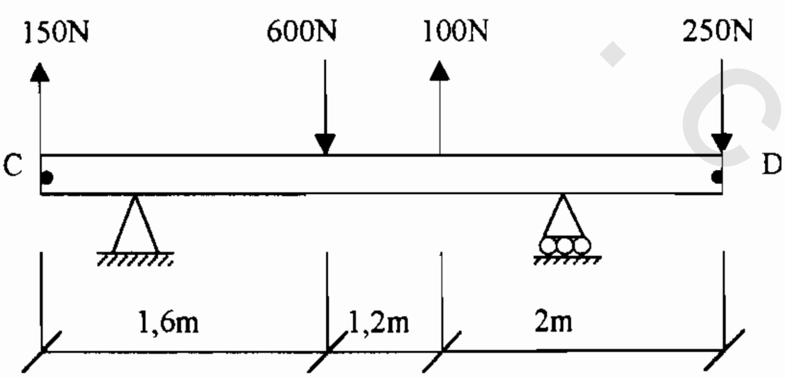
حيث أن $-R_x, R_y, R_z-$ تعطي مقياس قابلية منظومة القوى التي تجعل الجسم الجاسئ يتحرك حركة أنتقالية باتجاه المحاور z و y و x.

$M_x M_y, M_z$ تمثل مقدار قابلية القوى في النظام لتدوير الجسم حول المحاور z و y و x.

## مثال (5.4)

قلل مجموعة القوى المؤثرة على الجسر المبين في الشكل (28.4) إلى:

1.نظام قوة–ومزدوج مكافئ في النقطة C.
2.نظام قوة–ومزدوج مكافئ في النقطة D.
3.إلى قوة واحدة مكافئة.




الشكل (28.4)

**الحـــــل:-**

1.للحصول على منظومة أو نظام قوة-ومزدوج مكافئ في C نستخدم المعـادلتين (15.4) ، (16.4) حيث:-

$$R = \sum F$$
$$= 150j - 600j + 100j - 250j = -600J$$

$$M_C^R = \sum (r \times F)$$
$$= (1{,}6i) \times (-600J) + (2{,}8i) \times (100J) - (4{,}8i) \times (-250J)$$
$$= -(1880\,N.m)k$$

إذاً: $R = -600J \downarrow \ , M_C^R = -1880k$

وهكذا حصلنا على نظام قوة-ومزدوج مكافئ في نقطة C كما هــو مبيــن فــي الشــكل (29.4).


الشكل (29.4)

2.نظام قوة -ومزدوج مكافئ في النقطة D يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة حيث:

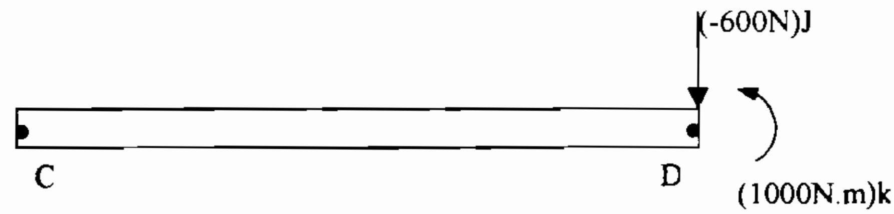
$$R = \sum F$$
$$= 150J - 600J + 100J - 25J = -600J$$

$$M_D^R = \sum (r \times F)$$
$$= -(2i) \times (100J) + (3{,}2i) \times (-600J) - (4{,}8i) \times (150J)$$
$$= +(1000\,N.m)k$$

إذاً

$R = -600J \downarrow \quad , \quad M_D^R = 1000k$

أن نظام قوة – ومزدوج مكافئ في النقطة D مبين في الشكل (30.4)




الشكل (30.4)

3. قوة واحدة مكافئة يمكن الحصول عليها كما يلي:-

يتم أزاحة المحصلة (R=-600J) الى مسافة مجهولة معينة مثل xi والتي بموجبها نحصل على نفس قيمة العزم ( $M_C^R = -1880K$ ) حيث:

$$M_C^R = r \times R$$
$$-1880k = xi \times (-600J)$$
$$-1880k = -x(600)k$$

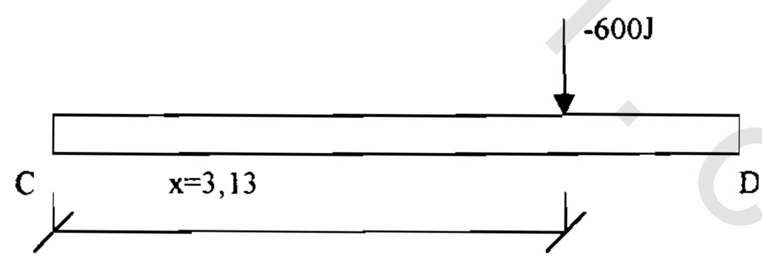
ومنه:

$$x = \frac{1880k(N.m)}{600k(N)} = 3{,}13m$$

وهكذا حصلنا على نظام قوة واحدة مكافئة:

$R = -600N \downarrow \quad , \quad x = 3{,}13$

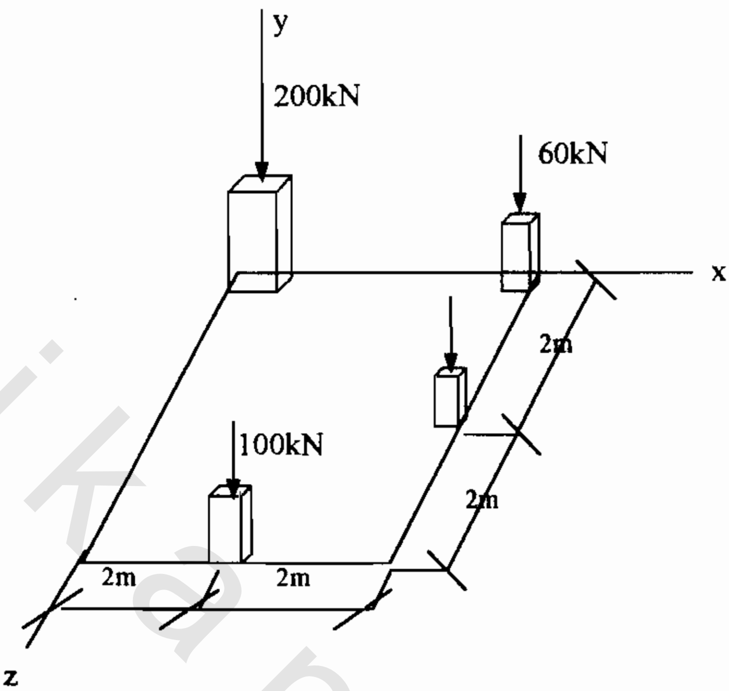
كما هو موضح في الشكل (31.4)




الشكل (31.4)

## مثال (6.4)

الشكل (32.4) يبين أساس خرساني مستند عليه أربعة أعمدة. أحسب متجه ونقطة محصلة الاثقال الاربعة المسلطة على الاعمدة.




الشكل (32.4)

الحل:-

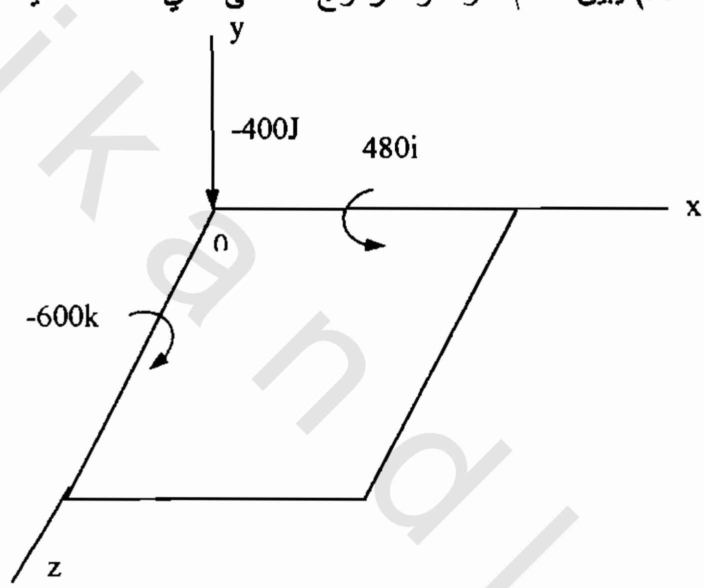
لايجاد متجه ونقطة تأثير محصلة الاثقال الاربعة المؤثرة على الاعمدة نقوم كخطوة أولى بتحويل منظومة القوى الاربعة إلى نظام قوة-مزدوج مكافئ في نقطة (0) باستخدام المعادلتين:

$$R = \sum F$$
$$M_0^R = \sum M_o = \sum (r \times F)$$

ومن الافضل عمل جدول لتسهيل الحل كما يلي:

| متجه الموضع r , (m) | القوة F,(kN) | عزم الازدواج $M_o^R = \sum(r \times F),(N.m)$ |
|---|---|---|
| 0 | -200J | 0 |
| 4i | -60J | -240k |
| 4i+2k | -40J | -160k+80i |
| 2i+4k | -100J | -200k+400i |
| | $R = \sum F = -400J$ | $M_o^R = 480i - 600k$ |

أن الشكل (33.4) يبين نظام القوة–والمزدوج المكافئ الذي حصلنا عليه في النقطة (0)




الشكل (33.4)

نقوم الآن كخطوة ثانية بتحويل نظام القوة–والمزدوج المكافئ الى قوة واحدة مؤثـــرة فـــي مستوى الاساس الخرساني في نقطة مثل (C) بحيث نحصل بموجبها على نفس العـــزم فـــي النقطة (0).

لذلك يجب علينا إيجاد أحداثيات النقطة (C) التي تحقق ذلك حيث:

$$M_0^R = r \times R$$

$$480i - 600k = (xi + zk) \times (-400J)$$

$$480i - 600k = -400 \times k + 400zi$$

ومنه نجد:

$$-400\times k = -600k$$

$$x=\frac{-600k}{-400k}=1,5m$$

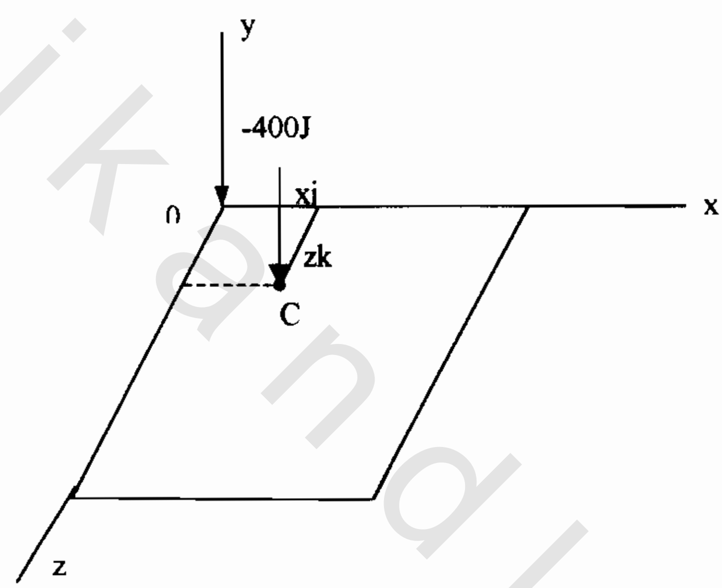
$$400zi = 480iz$$

$$z \quad =\frac{480i}{400i}=1,2m$$

وبذلك نكون قد حصلنا على نقطة تأثير محصلة الاثقال الاربعة حيث:

$$R=-400J$$

وتؤثر في النقطة C(1.5,0,1.2) كما هو مبين في الشكل (34.4).




الشكل (34.4)

## 6.4 أتزان الاجسام الجاسئة

**(Equilibrium of Rigid Bodies)**

أن دراسة أتزان الاجسام الجاسئة يعتبر من المبادئ الاساسية في علـم الاسـتاتيكا. ذلك يجب علينا معرفة نوعية القوى المؤثرة على الجسم الجاسئ من قوى عاملـة (Acting Forces)، والقوى المعروفة بردود الافعال (Reations) في الرتكزات(الدعـائم) والمسـاند والاتصالات.

أن حل المسائل المتعلقة بتوازن الاجسام الجاسئة يتطلب أنشاء وتوضيح القوى التي تؤثر على هذه الاجسام وتعد هذه الخطوة البداية السليمة والمهمة في حل مسائل الاتزان والتي تعتمد عليها شروط الاتزان الاستاتيكي بعد ذلك، لذلك يتم وضع مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) لهذا الجسم المدروس والذي يعتبر تمثل تخطيطي للجسم معزولاً عن بقية الاجسام يتضمن كافة القوى التي تؤثر بها الاجسام على الجسم محل الدراسة.

ولغرض رسم تخطيطات الجسم الحر لابد من التعرف على نوع القوة التي تؤثر على الجسم لكافة انواع (الدعائم) المساند والاتصالات. كما يجب تعريف كل قوة بمقداها المعلوم أو برمز عندما تكون القوة غير معلومة. ويمكن أفتراض أتجاه القوى غير المعلومة على أن يصحح هذا الافتراض فيما بعد أذا أظهر أنه غير صحيح.

سنقوم بالتعرف على طرق الارتكاز وردود الافعال في المنشاءات ثنائية الابعاد أولاً ومن ثم دراسة شروط الاتزان لهذه المنشاءات كما سنقوم بدراسة طرق التثبيت لجسم جاسئ في الفراغ وشروط أتزانه وذلك كما أشرنا سابقاً بإن دراسة علم السكون في الفراغ ذي الابعاد الثلاثة تجعل عملية الدراسة أكثر وضوحاً ومنطقيةٍ.

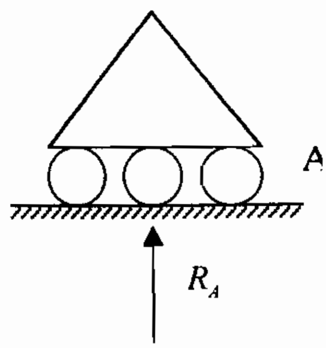
### 1.6.4 طرق الارتكاز وردود الافعال في مستوى

أي أن الجسم الجاسئ والقوى المؤثرة عليه تكون في مستوى واحد (ثنائي الابعاد)، وبالتالي فإن ردود الافعال التي تجعل هذا الجسم يبقى في موقعه سوف تكون في نفس المستوى.

أن ردود الافعال تتوقف على نوع الارتكاز (الدعائم) والتثبيت (Supports and connection) والتي تقسم الى أنواع مختلفة، ثنائية الابعاد ومنها:-

1. الارتكاز البسيط ويعتبر أبسط انواع الارتكاز، كحالة تلامس الاجسام الملساء، ويكون رد الفعل عمودي على مستوى التلامس، أو عمودي على أتجاه أيه حركة نسبية بينهما مثل: المتدحرجات – مسند متدحرج – (Roller support) ووصلة حبل، وتلامس مع سطح أملس.

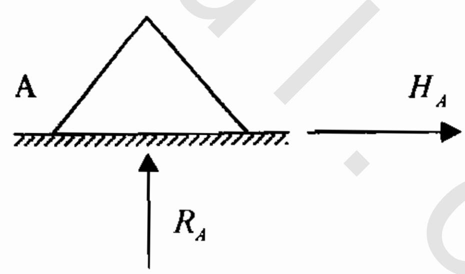
أن الشكل (35.4) يبين المسند المتدحرج أو المختلفة. ونظراً لان أتجاه رد الفعل في المركز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الاتزان.




الشكل (35.4) مستند متدحرج (Roler)

حيث - $R_A$ رد الفعل العمودي في المسند A.

2.الارتكاز المفصلي: المفصل (Hinge) عبارة عن تثبيت نقطة من الجسم بحيث يمكن أن يدور حولها. ورد الفعل في المفصل يكافئ قوة خط عملها مجهول كتلامس جسم مع سطح خشن وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مقداره وميله أو مركبتيه المتعامدتين $H_A, R_A$ كما هو مبين في الشكل (36.4).




الشكل (36.4) مفصل (Hinge)

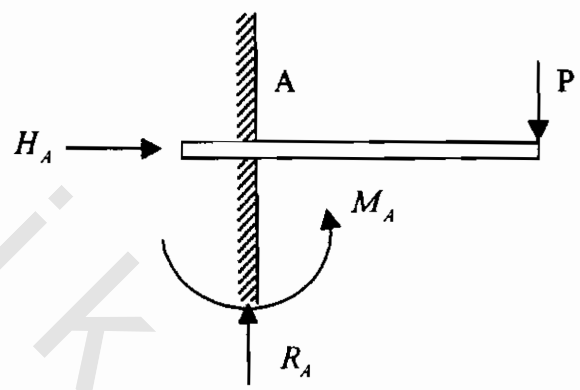
حيث:

$H_A$ - رد الفعل الافقي $H_A$ في المفصل A

$R_A$ - رد الفعل الافقي $R_A$ في المفصل A

3. التثبيت: مسند ثابت أو مثبت (Fixed support)

ويعني منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً أي أن رد الفعل يكون مكافئ لقـوة وعـزم ازدواج .,كحامل مثبت,. (عمود كهربائي). وعلى هذا يتألف رد فعل التثبيت من مجاهيل ثلاثـة هي: $M_A, R_A, H_A$. كما هو مبين في الشكل (37.4).




الشكل (37.4) مسند ثابت (Fixed support)

حيث:

$H_A$ - رد الفعل الافقي في المسند الثابت A.

$R_A$ - رد الفعل العمودي في المسند الثابت A.

$M_A$ - عزم التثبيت في المسند A.

## 2.6.4 شروط أتزان الجسم الجاسئ

كما أشرنا في البند السابق انه لدراسة أتزان الجسم الجاسئ يستكمل اولاً شكل القـوى المؤثرة وهي القوى الخارجية العاملة وردود الافعال الداخليـة المجهولـة فـي المرتكـزات والدعائم.

نعلم أن القوى الخارجية المؤثرة على جسم جاسئ ممكن تحويلها الى قوة-ومزدوج يؤثـران في نقطة أختيارية مثل 0.

فاذا كانت هذه القوة والمزدوج مساوية للصفر، فإن مجموعـة القـوى الخارجيـة تكـون منظومة ومساوية للصفر ايضا، وعندئذٍ يقال للجسم الجاسئ بإنه متزن أو فـي حالـة أتـزان استاتيكي.

أي أنه لكي يكون الجسم متزن يجب أن تكون محصلة القوى مساوية للصفر، ومجمـــوع العزوم لهذه القوى حول نقطة معينة مساوية للصفر.

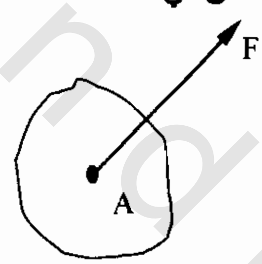
يمكن التعبير عن شروط الاتزان جبرياً باستخدام المعادلات حيث:

$$\sum F_x = 0 \quad \ldots\ldots (20.4)$$
$$\sum F_y = 0 \quad \ldots\ldots (21.4)$$
$$\sum M_A = 0 \quad \ldots\ldots (22.4)$$

أن المعادلات المبينة أعلاه تبين أن الجسم الجاسئ يكون في حالة أتزان عندمـــا تكـون مجوع القوى المؤثرة على المحور (x) مساوية للصفر، ومجموع القـــوى علـــى محـــور (y) مساوية للصفر، ومجموع عزوم القوى حول أي نقطة أختيارية من الجسم الجاسئ مثـــل (A) مساوية للصفر. وهذه الشروط تسمى بشروط الاتزان الاستاتيكي وهي لازمة وكافية للأتزان.

وأخيراً يجدر الاشارة الى أن القوى (الحمولات) الخارجية العاملة المؤثرة علـــى الاجســـام الجاسئة يمكن أن تكون ذو أشكال مختلفة ومنها:-

1.قوة مركزه في نقطة أو جزء من الجسم الجاسئ مثل القوة F ,,المركزه,, المبينة في الشـــكل (38.4) والتي تؤثر على الجسم الجاسئ في نقطة A.




الشكل (38.4)

2.القوى (الحمولات) الموزعة ومن بينها نوعان مهمان:-

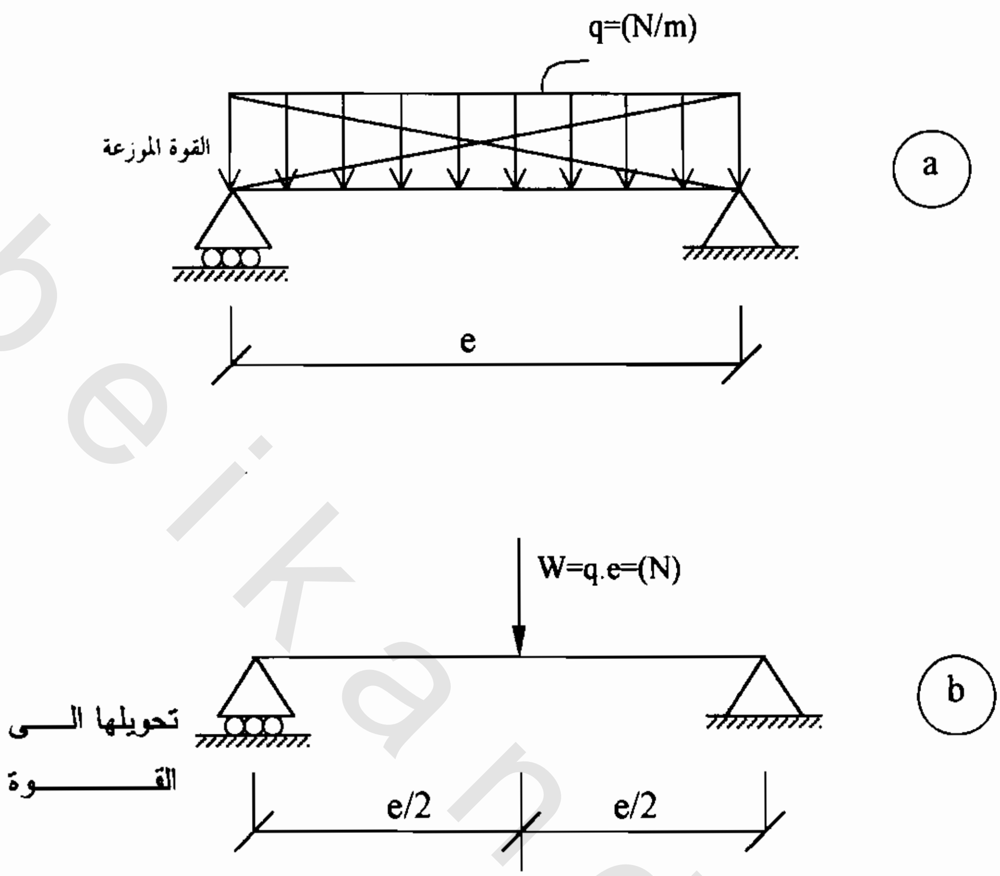
a) الاحمال الموزعة بإنتظام (uniformly distributed load).

b) الاحمال المتغيرة بإنتظام (uniformly varying load)

ويعبر عن هذه القوى والاحمال أعتيادياً بالنيوتن لكل متر طول، ما لم يشار خلافاً لذلـــك ويرمز لها بالرمز (N/m).

أن النوع الاول وهو الحمل الموزع بإنتظام يكون على شكل مستطيل ومن الامثلـــة على ذلك وزن عتبة مسنده أسناداً بسيطاً كما هو مبين في الشكل (a.39.4) حيث يعتـــبر (W) للعتبة حمولة موزعة بإنتظام على المتر الطولي لهذه العتبة.

عند حل المسائل المختلفة ورسم مخططات الاجسام الحـــرة (F.B.D) يجـب علينـا تحويل الحمل الموزع بقوة مركزه مكافئة كما هو مبين في الشكل (b.39.4)

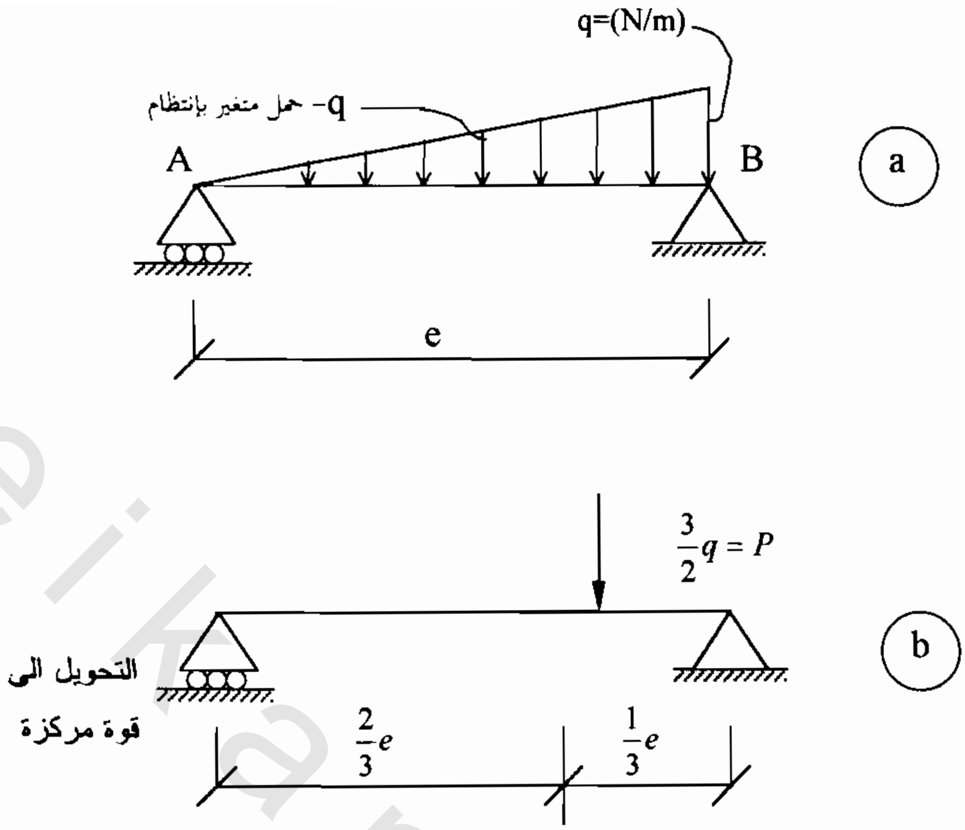



الشكل (39.4)

نلاحظ انه تم تحويل الحمولة الموزعة الى قوة مركزة تؤثر في مركز الثقل بالنسبة للمستطيل أي في منتصفه.

أما النوع الثاني فهو الحمولة الموزعة ,,المتغيرة بإنتظام,, وتكون هذه الحمولة علـــى الشــكل مثلث كما هو مبين في الشكل (a.40.4) ويجب أن نعوض عنها عند رسم مخطط الجسم الحـو بقوة مركزه مكافئة الشكل (b.40.4).

أن الاحمال المتغيرة بإنتظام تعمل على الجدران الرأسية والمائلة للخزانات المحتوية علــى السوائل، كما تعمل ايضا على العتبات والابنية المختلفة.




الشكل (40.4)

نلاحظ أن الحمل المتغير بإنتظام ( q) تم استبداله بقوة مكافئة ( P) حيث:

$$P = \frac{1}{2} e.q = (N)$$

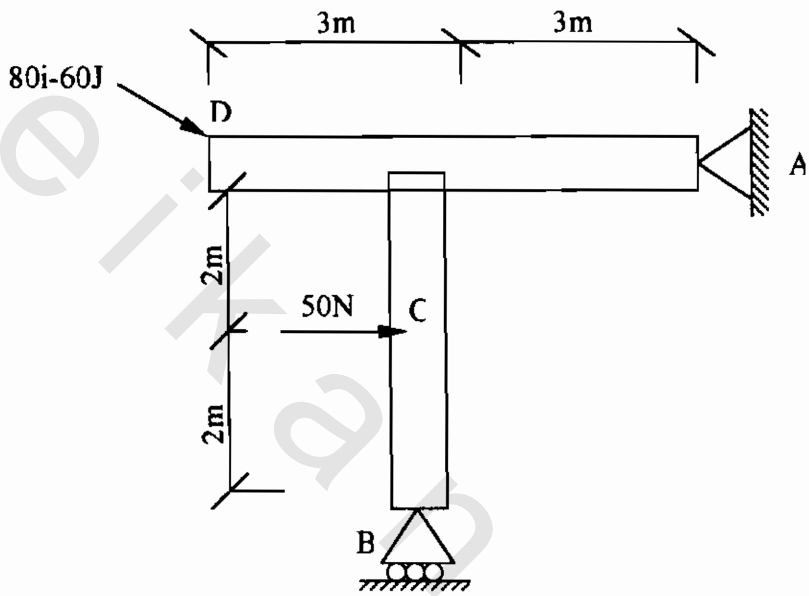
وهي مساحة مثلث الحمل الذي قاعدته e وارتفاعه (q) وتؤثر هذه القوة في مركز ثقل المثلث الذي يبعد عن المسند المتدحرج A مسافة $\left(\frac{2}{3}e\right)$ وعن المفصل B $\left(\frac{1}{3}e\right)$.

أن الامثلة ستوضح كيفية أستبدال وتحويل هذه الانواع من الاحمال الى قوى مركزه في نقطة واحدة.

**مثال (7.4)**

في الشكل (41.4) أطار أنشائي مسلط عليه قوتين مركزتين الاول تؤثر في النقطة (C) وتساوي 50N، والثانية معرفة بدلالة المركبات على المحاور الكارتيزية وتساوي (80i-60J) وتؤثر في النقطة (D).

أوجد ردود فعل المسند المتدحرج B والمسند المفصلي A على الاطار.

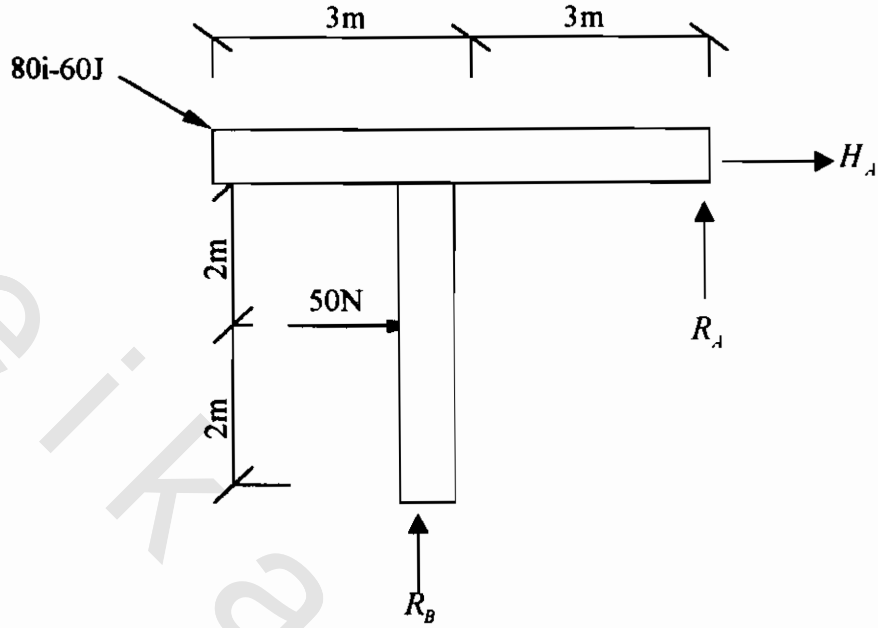



الشكل (41.4)

**الحـــل:**

نرسم نخطط الجسم الحر (F.B.D) للأطار موضحاً عليه كافة القوى الخارجية العاملة والداخلية من ردود أفعال كما هو مبين في الشكل (42.4). بالنسبة لرد فعل المسند المتدحرج B فهو قوة عمودية مفردة ونفرض أتجاهها الى أعلى ويرمز لها بالرمز ($R_B$). أما رد فعل المسند المفصلي A فيتكون من مركبتين الاولى عمودية الى أعلى ($R_A$) والثانية أفقية اتجاهها بالاتجاه الموجب لمحور (x) ويرمز لها بالرمز ($H_A$).

ولايجاد ردود الافعال بعد رسم مخطط الجسم الحر نضع شـــروط الاتـزان الاسـتاتيكي الثلاث حيث:




الشكل (42.4) مخطط الجسم الحر للأطار

$\sum F_x = \xrightarrow{+} = 0$; ................................................(1)

$80 + 50 + H_A = 0$

ومنه $H_A = -130N \longleftarrow$

اذاً رد الفعل الافقي في المسند (A) يعكس اتجاه المفروض

$\sum F_y \uparrow^+ = 0$; ................................................(2)

$R_A + R_B - 60 = 0$

$\sum M_A \curvearrowleft^+ = 0;$

$-R_B(3) + 50(2) + 60(6) = 0$ ................................................(3)

ومنه نجد: $R_B = 153{,}3 \uparrow^+$

وبالرجوع الى الشرط الثاني للاتزان وبالتعويض عن قيمة $(R_B)$ نجد رد الفعل $R_A$ حيث:

$R_A + 153{,}3 - 60 = 0$

ومنه:

$$R_A = -93{,}3\,N$$
$$= 93{,}3\,N\downarrow$$

أذاً رد الفعل $R_A$ في المسند A يعكس أتجاه أيضا ويعدل على مخطط الجسم الحر.

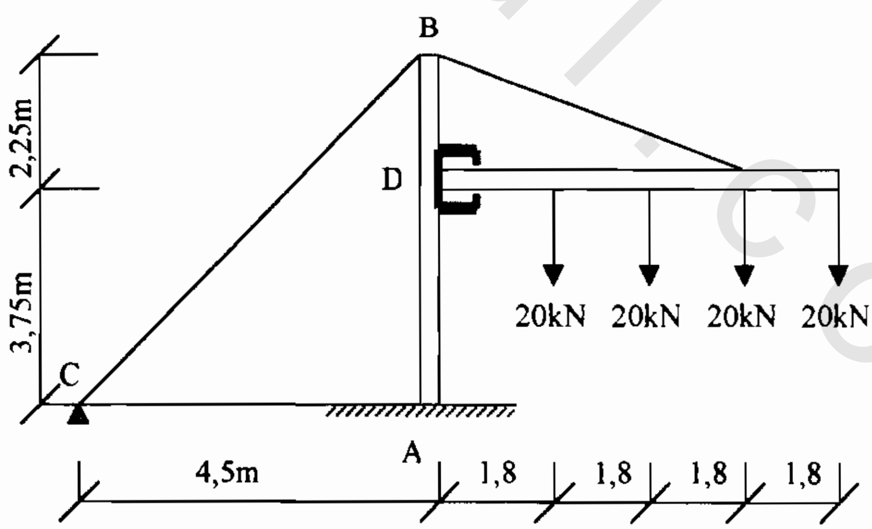
وهكذا حصلنا على ردود الافعال المجهولة الثلاث حيث نلاحظ أن المسائل المتعلقة بإيجاد ردود الافعال تحتاج الى عدم التسرع في الحل وفهم كيفية إيجاد العزوم حول نقطة بدقة وأتقان.

أن الخطوة الاخيرة في الحل هي التأكد من الحل ولذلك تستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العموي:

$$\sum F_y \overset{?}{=} 0\,;$$
$$R_A + R_B - 60 \overset{?}{=} 0$$
$$-93{,}3 + 153{,}3 - 60 = 0 \qquad (Check)$$

## مثال (8.4)

الشكل (43.4) هيكل مبين فيه أجزاء لسقف بناية. تؤثر عليه أربعة قوى مركزه مقدار الواحدة منها (20kN) مستقر بواسطة المسند المثبت عند النقطة (A) والسلك BC. أذا كان الشد في السلك BC=150kN. أوجد ردود الافعال في المسند المثبت (الثابت) (A).



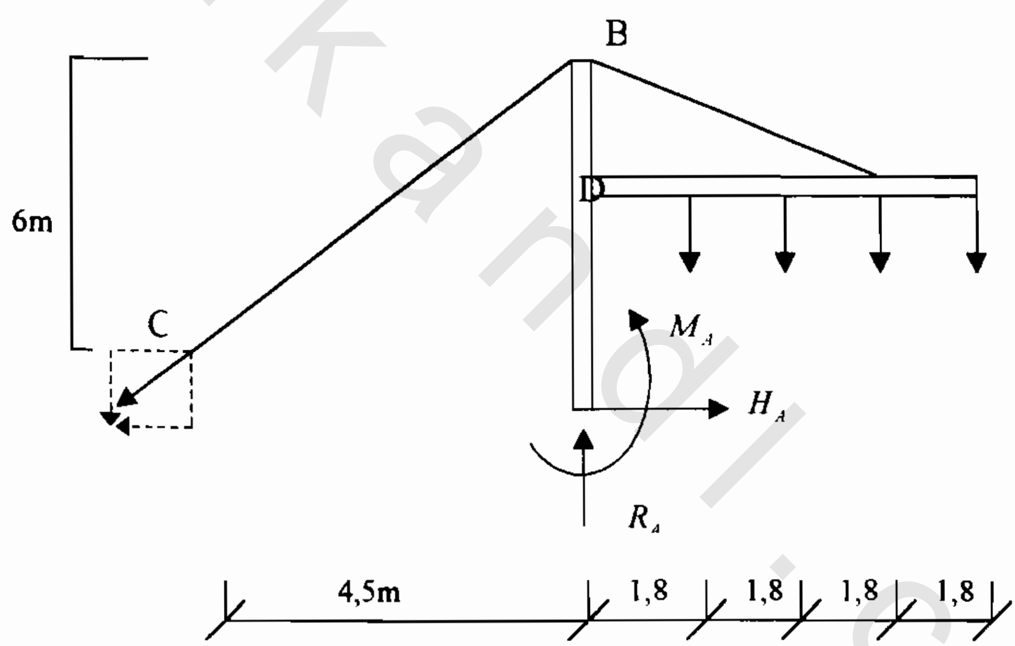

الشكل (43.4)

الحـــل:

نرسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) للهيكل موضحاً عليه كافة القوى من خارجية عاملة وداخلية كردود أفعال وشد في الاسلاك وغيره، وبعد ذلك نضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث لأيجاد القيم المجهولة المراد إيجادها. أن مخطط الجسم الحر مبين في الشكل (44.4).

حيث نلاحظ أن رد فعل المسند المثبت (الثابت) (Fixed support) يتكون من قوة عمودية $R_A$ وقوة أفقية ($H_A$) وعزم ($M_A$)، وأربعة حمولات خارجية كل منها (20kN) وقوة الشد في السلك BC=150N والتي يتم تحليلها باستخدام الابعاد الهندسية (نظرية فيثاغورس) الى مركبتين أفقية تؤثر على محور (x) وعمودية تؤثر على محور (y) وذلك لأخذها بعين الاعتبار عند وضع شروط الاتزان حيث:

$$BC = \sqrt{(4,5)^2 + (6)^2} = 7,5m$$




الشكل (44.4) مخطط الجسم الحر (F.B.D)

نضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث:

$$\sum F_x \xrightarrow{+} = 0 \ ;$$

$$H_A - \frac{4,5}{7,5}(150) = 0$$

ومنه:

$$H_A = 90kN \rightarrow$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \,;$$

$$R_A - 4(20) - \frac{6}{7,5}(150) = 0 \,;$$

$$R_A = +200kN = 200kN \uparrow$$

$$\sum M_A \circlearrowleft^{+} = 0 \,;$$

$$-20(7,2) - 20(5,4) - 20(3,6) - 20(1,8) + \frac{6}{7,5}(150)(4,5) + M_A = 0$$

ومنه نجد:

$$M_A = 360 - 540 = -180\,kN.m$$
$$= 180kN \curvearrowright$$

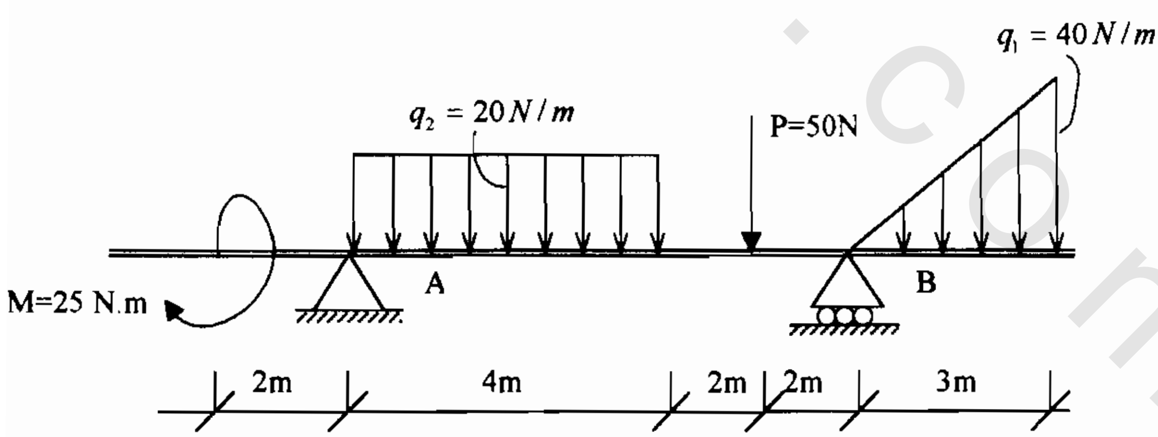
حصلنا على قيمة العزم $M_A$ سالبة لذا تعكس أشارته وتعدل على مخطط الجسم الحر.

للتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي والذي يجب أن يساوي الصفر.

## مثال (9.4)

الشكل (45.4) يبين عتبة (عارضة) ذات بروز جانبي ومسلط عليها القوة (الحمولة الموزعة المتغيرة بانتظام ($q_1 = 40N/m$) ، والقوة المركزة (P=50N)، والحمولة الموزعة بانتظام ($q_2 = 20N/m$)، وعزم ناتج عن أزدوج (M=25N.m). العتبة مسندة عند النقطة A بمسند مفصلي وعند النقطة B بمسند متدحرج (عجلة).

أوجد ردود الافعال عند A ، B على العتبة.




الشكل (45.4)

الحـــــل:

نرسم مخطط الجسم الحر شكل (46.4) للعتبة موضحاً عليه كافة القوى المؤثـــرة حيـث نقوم بتحويل الحمولات الموزعة $(q_2, q_1)$ الى قوى مركز تؤثر في نقطة واحدة حتى نســتطيع وضع شروط الاتزان الاستاتيكي.

يؤخذ الحمل الموزع بإنتظام على شكل مستطيل $q_2$ كقوة عمودية مفردة في مركز ثقــل الحمل (أي في منتصف المستطيل)، وتساوي:

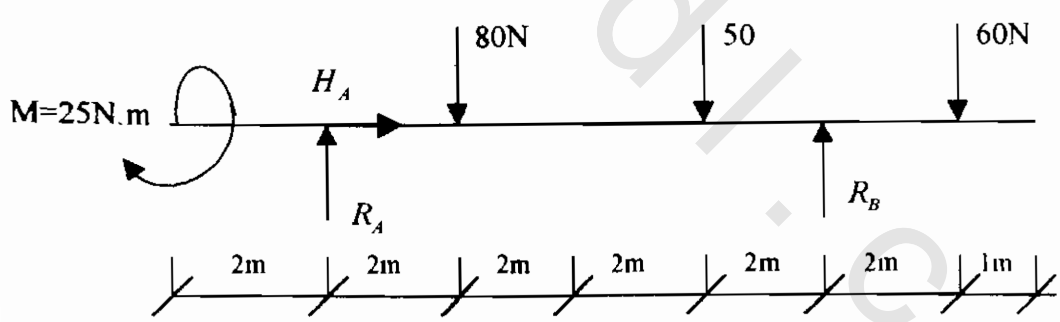
$$q_2 2.e = 20(N/m).4(m) = 80N$$

أما بالنسبة للحمولة المتغيرة بانتظام (على شكل مثلث) تستبدل بقوة مفردة تساوي:

$$\frac{3}{2}q_1 = \frac{3}{2} \times 40 = 60N$$

وهي مساحة مثلث الحمل الذي قاعدته (3m) وأرتفاعه 40N/m وتؤثر هــذه القــوة فــي مركز ثقل المثلث الذي يبعد (2m) من المسند المتدحرج B.

العزم M=25 N.m يظهر على مخطط الجسم الحر كما هو ويدخل فــي معادلـــة العــزم الشرط الثالث للأتزان حسب أشارته أذا كان باتجاه عقارب الساعة سالب، وأذا كـــان بعكــس عقارب الساعة موجب.




الشكل (46.4) مخطط الجسم الحر (F.B.D)

نقوم الآن بوضع شروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث لأيجاد ردود الافعال المجهولة حيث:-

$$\sum F_x \longrightarrow = 0\;;$$

$$H_A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0\;;$$

$$R_A + R_B - 80 - 50 - 60 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sum M_A \quad ^{+}= 0;$$

$$-60(10) + R_B(8) - 50(6) - 80(2) - 25 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

ومنه نجد رد الفعل $(R_B)$:

$$8R_B = 600 + 300 + 160 + 25$$

$$R_B = \frac{600 + 300 + 160 + 25}{8} = 135{,}6\,N$$

وبالرجوع الى معادلة رقم (2) نجد قيمة رد الفعل $R_A$:

$$R_A + 135{,}6 - 80 - 50 - 60 = 0$$

$$R_A = 54{,}4\,N$$

للتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمـــودي أو نجـــد عـــزوم القوى وردود الافعال حول نقطة أختيارية أخرى مثل B حيث يجب أن يكون مجموع العـــزوم مساوياً للصفر.

### 3.6.4 طرق التثبيت وردود الافعال في الفراغ

**Reactions at support and connection**

تقسم الارتكازات والدعائم الفراغية إلى:

1.أرتكاز حر (بسيط-أملس):

مثل أرتكاز مستوى أملس على وتد وفيه رد فعل عمودي على المستوى. كما هو مبين في الشكل (47.4)

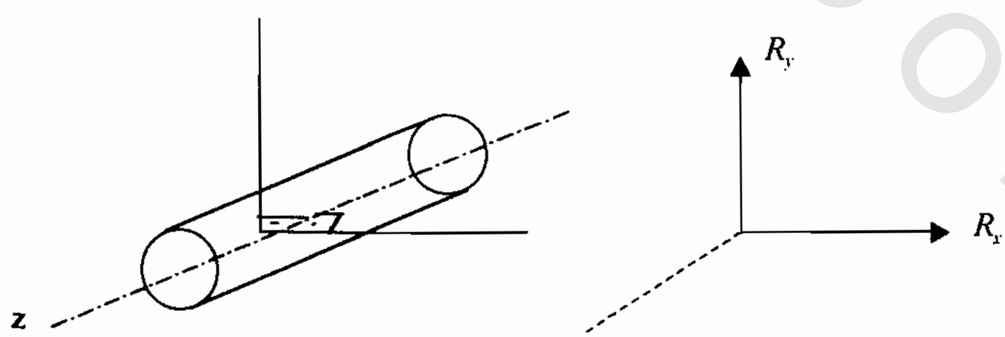

قوة معلوم خط تأثيرها- (مجهول واحد)

الشكل (47.4)

2.أرتكاز مفصلي أسطواني:

-مثل تلامس عجلة مع سطح خشن أو عجلة على سكة حديد-

وفيه يتواجد رد الفعل في المستوى العمودي على محور الاسطوانة. فاذا كان مثلاً محور الاسطوانة يطابق محور z يكون لرد الفعل مركبتين $R_x$ ، $R_y$ في أتجاه محوري $O_x$ ، $O_y$ على الترتيب كما هو مبين في الشكل (48.4).

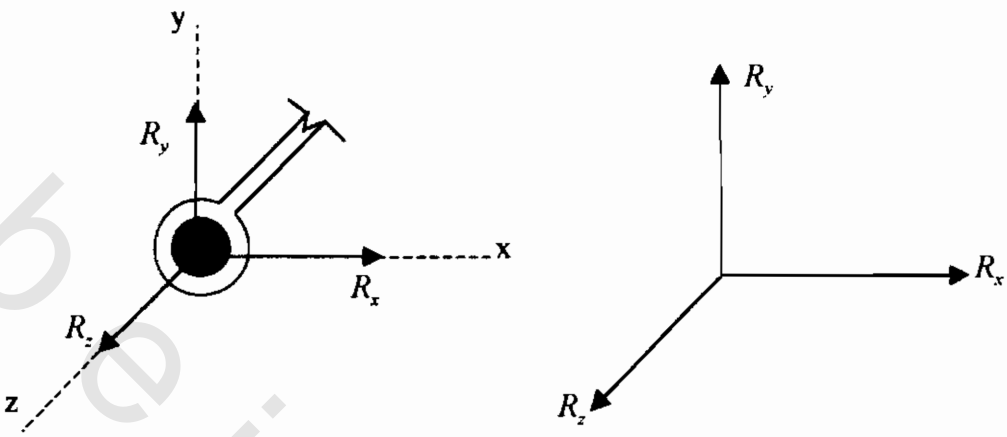



عدد المجاهيل أثنان ردين فعل في أتجاهين $O_x$ ، $O_y$

الشكل (48.4)

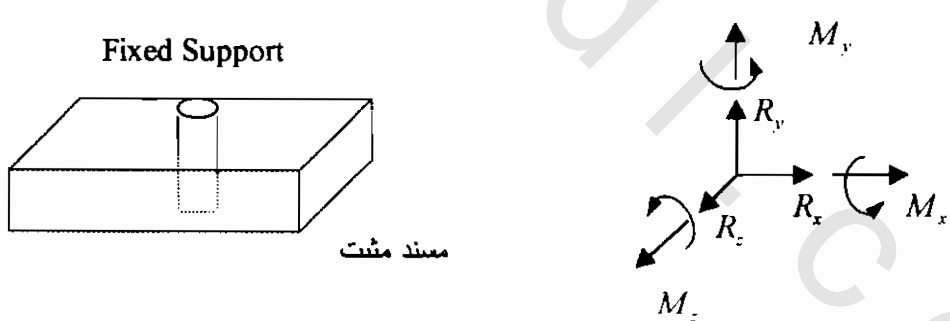
3.أرتكاز مفصلي كروي (أو ما يسمى مسند كروي: كرة–وتجويف).

وفيه يتألف رد الفعل من قوة عامة يمكن تحليلها الى ثلاث مركبات عند مركز المفصل. كما هو مبين في الشكل (49.4).




الشكل (49.4)

4.مسند مثبت في الفراغ (Fixed Support) يمنع الحركة الانتقالية والدوران وفيه تتألف ردود الافعال من ثلاثة ردود أفعال وثلاثة مزدوجات كما هو مبين في الشكل (50.4).




ثلاثة ردود أفعال قوى وثلاثة مزدوجات

الشكل (50.4)

أن أنواع المرتكزات المشار إليها أعلاه هي الاكثر أنتشار وشيوعاً بالاضافة الى وجود أنواع أخرى من الدعائم والمرتكزات في الفراغ لم نتعرض لذكرها.

## 4.6.4 شروط أتزان الجسم الجاسئ في الفراغ

**-Equilibrium of a Rigid Body in space-**

قبل عرض شروط الاتزان لجسم جاسئ مثبت في الفراغ يجب التأكيد علـــى أن حلـــول المسائل المتعلقة بإتزان جسم جاسئ في الفراغ تتطلب قراءة المسألة بإتقان، وتحديد المعلومـات المعطاة والنتائج المطلوب الحصول عليها، وبعد ذلك رسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحـــر (F.B.D) حيث يتم تعين عدد المعادلات الاتزان بعد أن يستكمل شكل القـــوى العاملـــة وردود الافعال في الدعائم والاتصالات المختلفة.

يقال للجسم الجاسئ في الفراغ بإنه في حالة أتزان عندما يكون مجموع القوى المؤثـــرة في الاتجاهات الثلاثة مساوياً للصفر، ومجموع العزوم حول أي ثلاثة محاور متعــــامدة علـــى بعضها البعض. وعلى ذلك فلأتزان أي جسم جاسئ ست شروط يعبر عنها جبرياً بالمعـــادلات التالية:

$$R_x = \sum F_x = 0 \quad , \quad R_y = \sum F_y = 0 \quad , \quad R_z = \sum F_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (24.4)$$

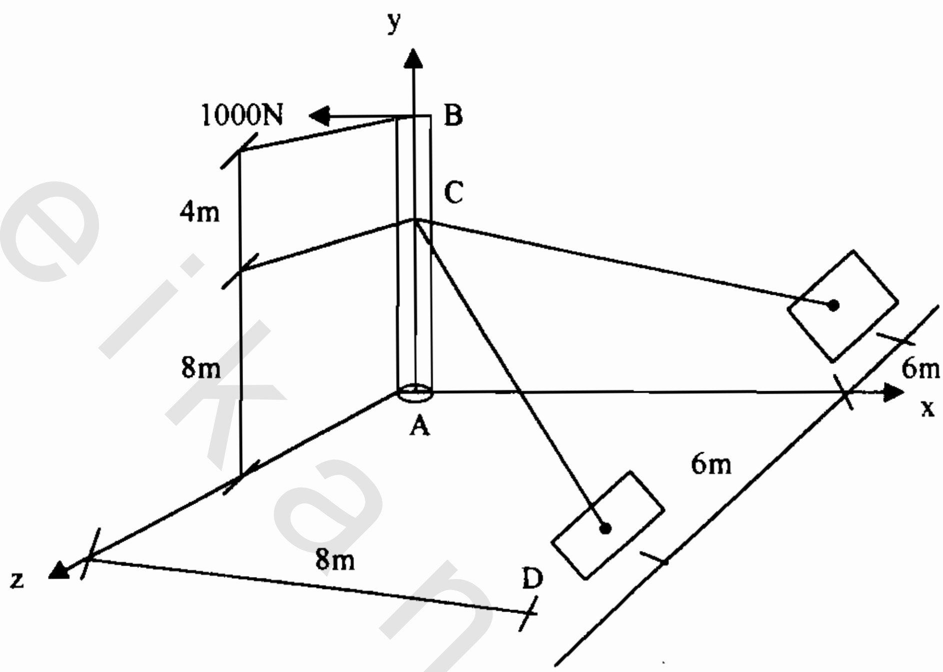
$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (25.4)$$

أن المعادلات (24.4) ، (25.4) مستقلة بحد ذاتها حيث يمكن أستخدام أحدهما بصــــرف النظر عن المعادلات الآخرى.

وبفضل هذه الشروط يمكننا الحصول على ستة مجاهيل مثل ردود أفعال في المرتكـزات والدعائم أو قوى شد مجهولة وغيره.

## مثال (10.4)

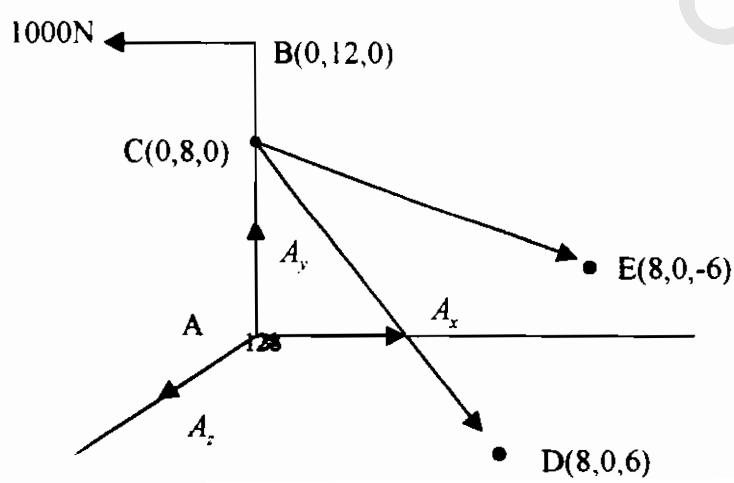
في الشكل (51.4) عمود AB مثبت بواسطة أرتكاز مفصلي كروي (كرة وتجويف) في نقطة A بسلكين CE ، CD ومسلط عليه قوة مقدارها (1000N) في النقطة B. عين ردود الافعال في المفصل الكروي A والشد في السلكين.




الحـــل:

نرسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) موضحا عليه القوى المعلومة والمجهولة ، حيث نلاحظ أن المسند عند النقطة (A) يؤثر بثلاثة مركبات (ردود أفعال) $A_x, A_y, A_z$ باتجاه المحاور الكارتيزية الثلاث x,y,z على التولي. الشكل (52.4).

الشد في السلكين يتطلب تحليل القوة المعرفة بنقطتين $T_{CE}$ ، $T_{CD}$.



الشكل (52.4) مخطط الجسم الحر

نحلل الشد بالاسلاك حيث:

$$\overline{CE} = 8i - 8J - 6k$$
$$|CE| = 12{,}8m$$

$$\overline{CD} = 8i - 8J + 6k$$
$$|CD| = 12{,}8m$$

نجد مركبات قوى الشد في الاسلاك حيث:

$$\overline{T_{CE}} = |T_{CE}| = .\frac{\overline{CE}}{|CE|} = T_{CE}(0{,}62i - 0{,}62J - 0{,}46k)$$

$$\overline{T_{CD}} = |T_{CD}| = .\frac{\overline{CD}}{|CD|} = T_{CD}(0{,}62i - 0{,}62J + 0{,}46k)$$

بعد تحليل قوى الشد في الاسلاك نقوم بوضع شروط الاتزان حيث:-

$$\sum F_x \xrightarrow{+} = 0 \quad ;$$
$$A_x + 0{,}62T_{CE} + 0{,}62T_{CD} - 1000 = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^{+} = 0 \quad ;$$
$$A_y - 0{,}62T_{CE} + 0{,}62T_{CD} = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$

$$\sum F_z \swarrow^{+} = 0 \quad ;$$
$$A_z - 0{,}46T_{CE} - 0{,}46T_{CD} = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\sum M_A = \sum r \times F \circlearrowright^{+} = 0;$$

$$(8J)\times(0{,}62T_{CE}i - 0{,}62T_{CE}J - 0{,}46T_{CE}k) + (8J)\times(0{,}62T_{CD}i - 0{,}62T_{CD}J - 0{,}46T_{CD}k) +$$
$$(12J)\times(-1000i) = 0$$

$$-5T_{CE}k - 3{,}88T_{CE}i - 5T_{CD}k + 3{,}88T_{CD}i + 12000k = 0$$
$$-3{,}88T_{CE}i + 3{,}88T_{CD}i = 0 \Rightarrow \quad T_{CE} = T_{CD}$$
$$-5T_{CE} - 5T_{CD} + 12000 = 0 \Rightarrow \quad T_{CE} = T_{CD} = 12000N$$

وبالتعويض عن قيم الشد في الاسلاك في المعادلات الثلاث نحصل على قيم ردود الافعال الثلاث $A_x, A_y, A_z$ حيث أن:-

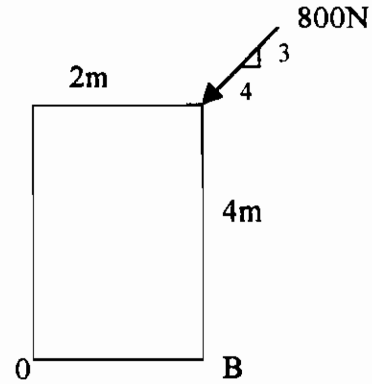
$$A_x = -500\,N = 500\,N \leftarrow$$

$$A_y = 1500\,N \uparrow$$

$$A_z = 0$$

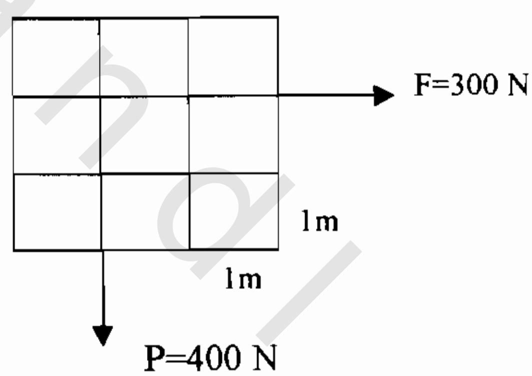
## تمارين (4)

س1:- أوجد عزم القوة 800N في الشكل (54.4) حول النقطة 0.



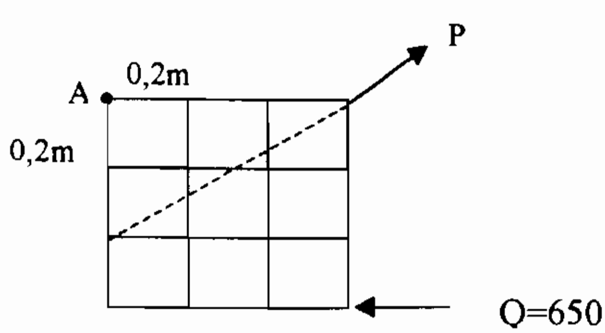

الشكل (53.4)

س2:- أوجد مجموع عزوم القوتين P ، F في الشكل (54.4) حول النقطة 0.



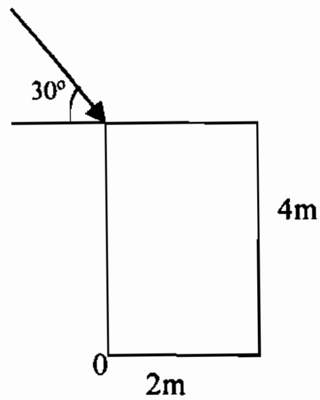

الشكل (54.4)

س3:- أذا كان مجموع عزوم القوتين Q، P حول نقطة A في الشكل (55.4) مساوياً للصفر. أوجد مقدار القوة P.



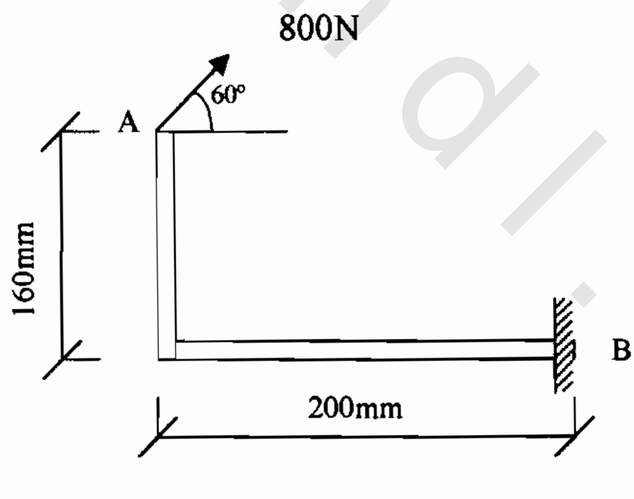

الشكل (55.4)

**س4:-** أذا كان عزم القوة P حول النقطة 0 يساوي 800N.m باتجاه عقارب الساعة. أوجد مقدار القوة P في الشكل (56.4).



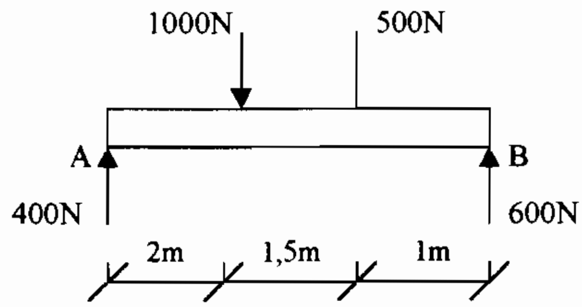

**الشكل (56.4)**

**س5:- أوجد عزم القوة P=800N حول النقطة B كما هو مبين في الشكل (57.4)**



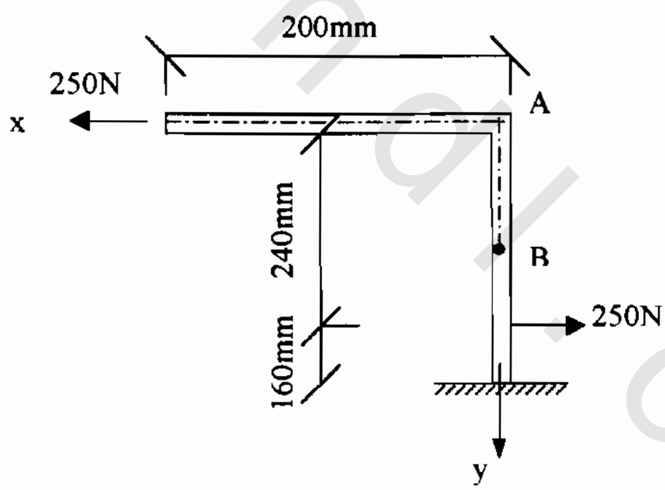

**الشكل (57.4)**

س6:- عوض عن منظومة القوى في الشكل (58.4) بقوة واحدة مفردة. حدد موقع هذه القوة بالنسبة لنقطة A.




الشكل(58.4)

س7:- يبين الشكل (59.4) لوح على شكل زاوية معرض لقوتين كل منها 250N. المطلوب منظومة القوى المؤثرة على اللوح بمنظومة مكافئة تتكون من قوة واحــــدة مقدارهــا 200N مسلطة عن النقطة B. أوجد الاحداثي y للنقطة B.



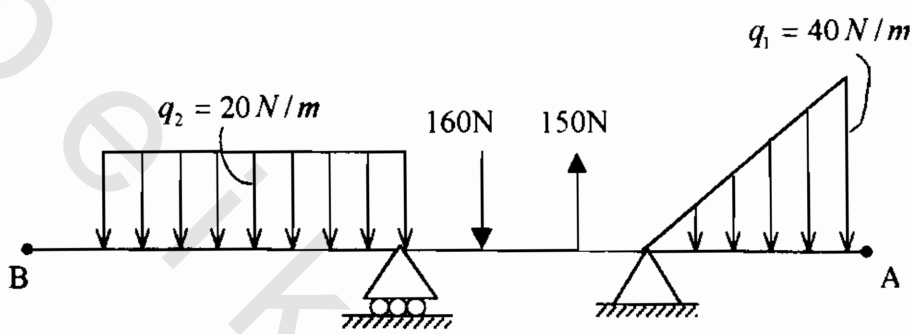

الشكل (59.4)

**س8:-** في الشكل (60.4) قلل منظومة القوى المؤثرة على الجسر إلى:-

1.منظومة قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة A.

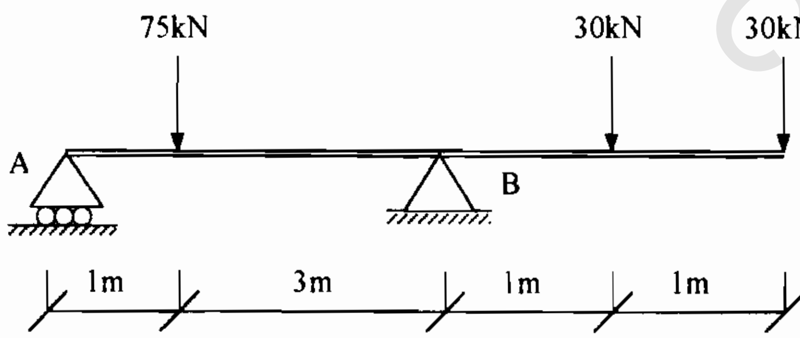
2.منظومة قوة-ومزدوج مكافئ في النقطة B.

3.قوة واحدة مكافئة.



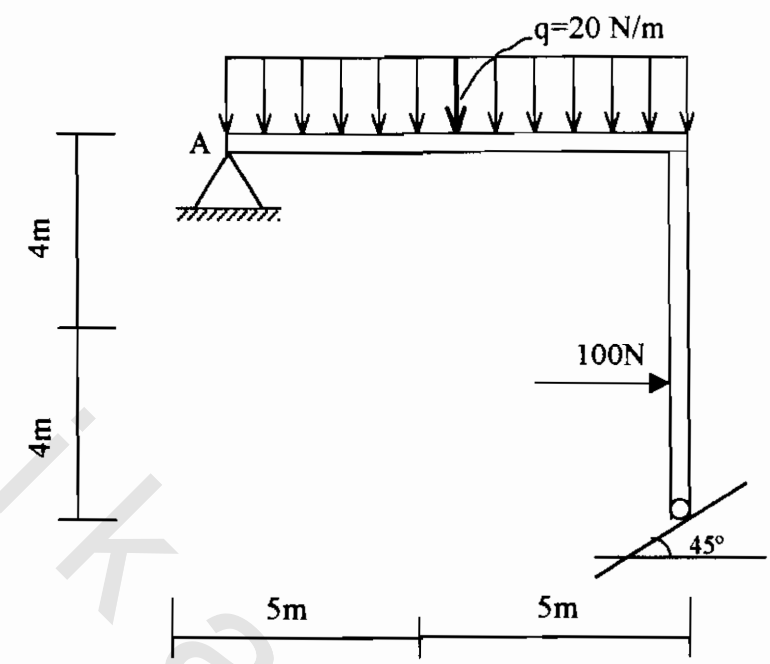

الشكل (60.4)

**س9:-** ثلاثة أثقال مسلطة الى الجسم المبين في الشكل (61.4). الجسر مسـند بمسـند فـي النقطة A (عجلة) ومفصل في النقطة B. أوجد ردود الافعال في A ، B على الجسر.



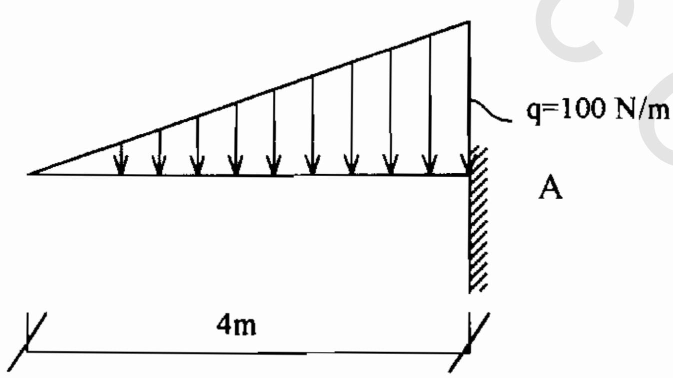

الشكل (61.4)

**س10:-** الشكل (62.4) يبين أطار أنشائي مثبت بمفصل عند النقطة A ومسند (عجلـــة) فـــي النقطة B. أوجد ردود الافعال في A ، B على الأطار.



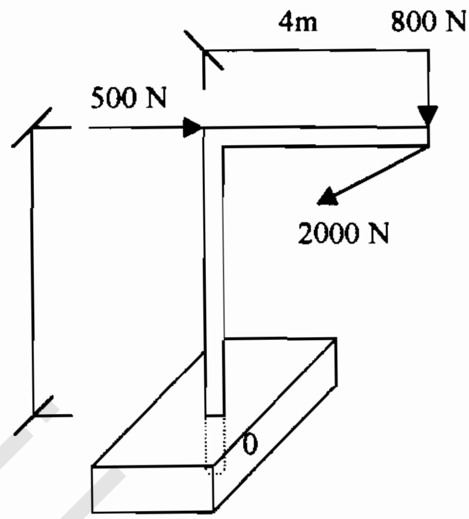

الشكل (62.4)

**س11:-** العتبة المبينة في الشكل (63.4) محملة بحمل متغير بإنتظام حيث (q=100 N/m) ومسند عند النقطة A بمسند مثبت (ثابت). أوجد ردود الافعال في المسند المثبت A.



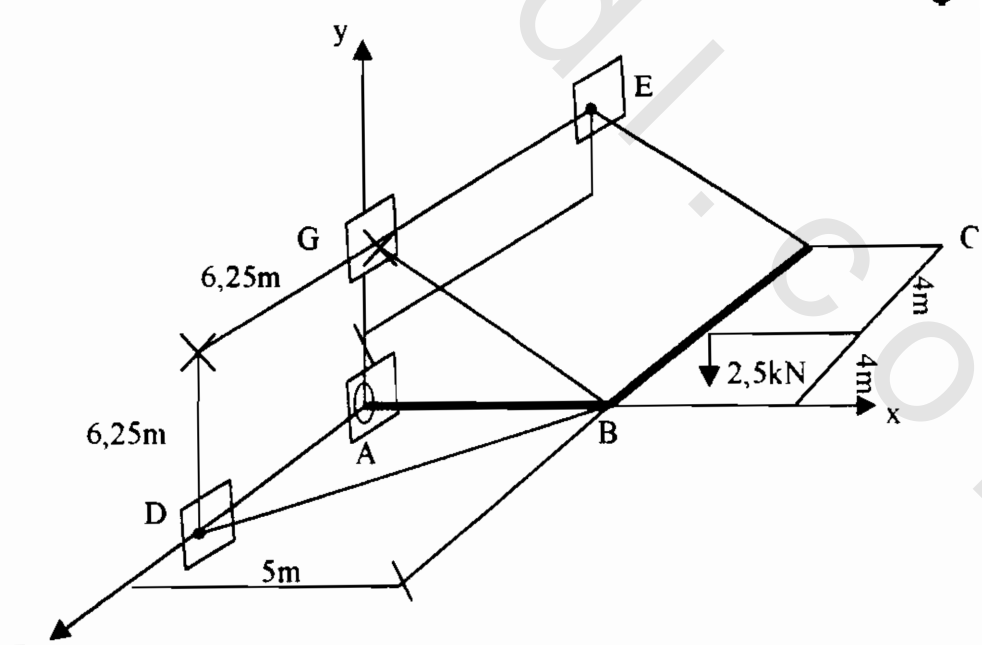

الشكل (63.4)

س12:- عمود مثبت بواسطة مسند ثابت في قاعدته (النقطة 0) تؤثر عليه قوى موازية للمحاور x,y,z كما هو مبين في الشكل (64.4). أوجد ردود الافعال في المسند 0.




الشكل (64.4)

س13:- الجسم الجاسئ ABC مسند بواسطة (كرة وتجويف) في النقطة A وثلاثة أسلاك، CE ، BD ، BG كما هو مبين في الشكل (65.4). أوجد ردود الافعال في المسند A والشد في الاسلاك الثلاثة.




الشكل (65.4)