البـــــاب الثالث

اتزان الجسيمات

1.3 مقدمة

تقدم الدراسة في هذا الباب خصائص وتأثيرات الانواع المختلفة لمنظومات القوى وطرق إيجاد محصلتها ، (Force systems and Resultants) كما تعنى بدراسة عمليات تركيب وتحليل هذه المنظومات وشروط توازنها . حيث يعتبر هذا الباب البنية الاساسية في دراسة علم الميكانيكا وايضاً في دراسة المواضيع الاخرى لذا فان هذا الباب يعتبر ذو اهمية كبيرة وعلى الطالب ان يفهم معنى القوى وطرق ايجاد محصلاتها وشروط توازنها باتقان .

2.3 القوة (Force)

وهي العامل الرئيسي في الاستاتيكا يمكن تعريفها بانها تأثير جسم على جسم آخر وهي كمية متجهة (Vector Quantity) وهي المدرك الحسي من نوع الشد او الضغط الذي يعمل على تغير حالة الحركة او السكون للاجسام ما لم يتوازن او يتلاشى تأثيره بفعل عوامل اخرى من نوعه .

والقوى بطبيعتها تظهر موزعة على الاسطح او الاحجام . بتركيز منتظم او غير منتظم . ولكن كثيراً ما تمثل مجموعة منها بقوة مركزة (Concentrated Force) تعمل في نقطة تأثير او على خط عمل محدد .

ولتحديد تأثير قوة على جسم ما يجب ان تعرف الخصائص التالية .

1 . مقدار القوة .

2 . اتجاه الخط الذي تعمل على طوله القوة (أي طول OX او OY على طول خط يعمل زاوية مقدارها الى الشمال او الغرب ..... وما الى ذلك) والذي يعرف بخط عمل القوة .

3 . طبيعة القوة (أي فيما اذا كانت القوة شدأ او ضغطاً) ويستدل على ذلك بوضع رأس سهم (Arrow Head) .

4 . النقطة التي تؤثر عندها او خلالها القوة على الجسم وتسمى نقطة تأثير القوة .

وبناءً على ذلك نرى ان الوصف الكامل لفعل القوة يتطلب معرفة مقدارها واتجاهها ونقطة تأثيرها .

ويمكن الحصول على القوة عن طريق تسليط القوة اما بالتلامس الميكانيكي (Mechanical Contact) مباشرة او بالفعل (التأثير) عن بعد (Remote Action) كتسليط (تأثير) القوة

الارضية والكهربائية والمغناطيسية . اما القوى الاخرى فاسلط من خلال التلامس الطبيعي المباشر . ويتم حساب مقدار القوة بواسطة مقارنتها بقوى اخرى معلومة باستخدام التوازن المكيكانيكي ، او بما تحدثه من استطالة في زنبرك (spring) معير ومقارنة مقادير القوى المختلفة على هذا الاساس ، وتستخدم لهذه الغاية وحدات قياسية هي النيوتن (N) .

ويجب ان تراعى بعناية خصائص القوة المعبر عنها بقانون نيوتن الثالث فيصاحب فعل القوه دائماً برد فعل المساوي للقوة في المقدار والمعاكس في الاتجاه.

وهنا يكون من الضروري التمييز بين الفعل ورد الفعل، حيث يتم دلك بسهولة عندما يعزل الجسم الذي نحن بصدده وتمثل القوة المبذولة على الجسم(وليست القوة المبذولة به) ومن السهل الوقوع في أخطاء حيث اعتبار القوة احدى القوتين المذكورتين، ما لم يكن هناك تمييز بين كل فعل ورد فعل.

3.3 المحصلة (Resultant)

تعرف المحصلة منظومة القوى التي تؤثر على جسيم ما بأنها أبسط منظومة قوى يمكنها ان تحل محل المنظومة الاصلية من دون ان تغير تأثيرها على ذلك الجسيم. ويمكن أن تكون المحصلة قوه واحدة، أو قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وتسمى المزدوج (Couple) ، أو أن تكون المحصلة في حالات معينة قوة ومزدوجاً.

عندما تكون قيمة المحصلة $|R|$ لاية منظومة قوى مساويه للصفر فأن الجسيم يكون في حالة توازن وأن هذه المنظومة لا تغير من حالة الجسيم الحركية. وهذه الحالة تعتبر مدخل إلي عام السكون. اما الحالة الأخرى فهي عندما تكون محصلة منظومة القوى لاتساوي الصفر فيكون الجسم في حالة متغيرة ويمتلك تسارعاً معيناً.

ومن هنا يتبين أن دراسة محصلات منظومات القوى له أهمية قصوى في علم المينكانيكا وتوازن المنشئات.

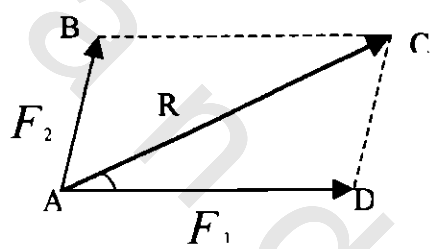
4.3 تركيب القوى وتحليلها

تستخدم طريقة التركيب وطريقة التحليل لمنظومات القوى لايجاد المحصلةالكلية ($\vec{R}$) المؤثرة على جيسيم ما، حيث كثيراً ما تقابلنا مجموعة من القوى الملتقية في نقطة وذلك عند

دراسة اتزان جسيم مثلا إذ انه باعتباره نقطة مادية فإن القوى المؤثرة عليه تلتقي جميعا في تلك النقطة.

1.4.3 تركيب القوى (Composition of Forces)

وهي عملية استبدال منظومة قوى بمحصلتها، حيث يمكن استخدام القانون المعروف بقانون متوازي اضلاع القوى لتركيب أي قوتين متلاقيتين وينص على انه اذا اثرت قوتان على جسيم فإن تأثيرهما معا يعادل تأثير قوة واحدة تسمى المحصلة (Resultant) تعمل على قطر متوازي الاضلاع المكون من القوتين والشكل (1.3) يوضح هذا القانون. حيث ان محصلة القوتين $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ هي القوة المفردة $\vec{R}$. وبالأمكان ايجاد قيمة واتجاه المحصلة $\vec{R}$ بيانيا برسم كل من $\vec{F}_1$ ، $\vec{F}_2$ بمقياس رسم معين يتناسب مع مقدارهم وبالاتجاه المحدد لكل قوة متمثلتين بالمتجهين $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ثم نكمل متوازي الاضلاع BC ، DC فيكون طول قطره AC مساويا لمقدار المحصلة $|R|$.



الشكل(1.3) يوضح قانون متوازي الاضلاع لايجاد المحصلة.

ويمكننا تحديد اتجاه المحصلة بالنسبة للقوة $\vec{F}_1$ بقياس قيمة الزاوية ( ). كذلك تحديد مقدار المحصلة $|R|$ وذلك بتطبيق قانون جيب التمام للمثلث ACD حيث أن:

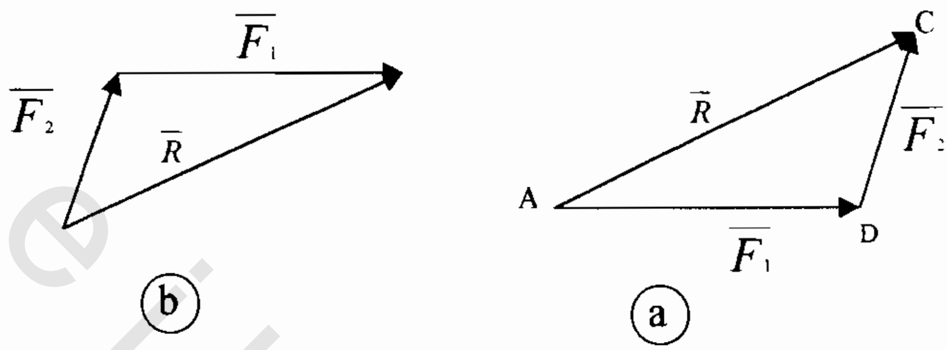
$$|R| = \sqrt{(F_1)^2 + (F_2)^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\beta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.3)$$

وباستخدام قانون الجيوب (قاعدة لامي) لنفس المثلث يمكننا ايجاد اتجاه المحصلة:

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F_1}{\sin\theta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

ومن خلال دراسة قانون متوازي الاضلاع يمكننا استنتاج قانون المثلث الذي يستخدم ايضا لمعرفة وايجاد مقدار واتجاه المحصلة لأي قوتين متلاقيتين، فمن الشكل (1.3) يتضح أن الضلع (DC) مساو في المقدار ومواز للضلع (AB) الذي يمثل ($\vec{F}_2$).

المثلث ADC الموضح في الشكل (a.2.3) يبين ان المحصلة $\vec{R}$ والتي تربط (A) مع $\vec{C}$ سيكون لها نفس مقدار واتجاه قطر متوازي الاضلاع ABCD. وفي هذا المثلث تم تمثيل القوة $\overline{F_2}$ بالمتجه الحر $\overline{DC}$ مساويا في المقدار وموازيا للضلع $\overline{AB}$ وكذلك يمكننا رسم المثلث ABC كما في الشكل (b.2.3) ويمثل فيه الضلع BC متجها حرا مساويا في المقدار وموازيا للضلع AD.



الشكل (2.3) يوضح قانون المثلث لأيجاد محصلة قوتين

ولان بعد كل ما تقدم يمكننا كتابة قانون مثلث القوى الذي ينص على انه عند تمثيل قوتين متلاقيتين بمتجهاتها الحرة ترسم بداية المتجه الثاني من نهاية المتجه الاول فإن المتجه المحصلة هو الضلع الثالث للمثلث وان اتجاه المحصلة هو من بداية المتجه الاول إلي نهاية المتجه الاخير.

2.4.3 تحليل القوى (Resolution of Forces).

تعتمد هذه الطريقة على تحليل القوى إلي ما يسمى بالمركبات (Components) المتعامدة حيث يتم تحليل القوى اولا في اتجاهين متعامدين كالاتجاه الافقي والاتجاه الرأسي مثلا وبعد ذلك يتم اعادة التركيب للحصول على المحصلة.

في علم السكون لا تكون القوى بزوايا قائمة عادة. ولغرض ايجاد محصلة منظومة قوى يتم تحليل كل قوة من هذه المنظومة إلي زوج من المركبات المتعامدة لكي تسهل عملية حسلب المحصلة ولغرض شرح طريقة التحليل هذه.

نفرض أن القوة $\overline{F}$ الموضحة في الشكل (3.3) تؤثر على جسم معين لمحاولة تحريكه في الاتجاهين الايمن و الاعلى. وبعد اختيار المحاور بين الموجبين لاتجاه القوى والمتمثلين

بالتجاه إلي اليمين (X-axis) والاتجاه إلي الاعلى (Y-axis) يمكننا تسقيط القوة $\overline{F}$ على هذين المحورين للحصول على المركبتين الافقية والرأسية F_X و F_Y والتي تعتبر قيم عددية. كذلك يمكننا تحديد العلاقة بين هاتين المركبتين والقوة الاصلية F وذلك باستخدام جيب وجيب تمام الزاوية التي تصنعها القوة F مع المحور X وهي

$$\cos\theta = \frac{F_X}{F} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{F_Y}{F}$$

وعادة تكتب المركبات الافقية و الرأسية على النحو الآتي:

$$F_X = F\cos\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

$$F_Y = F\sin\theta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.3)$$

كما ويمكن التعبير عن القوة $\overline{F}$ بدلالة المركبات الافقية والرأسية وذلك باستخدام وحدات المتجه على المحاور الكارتيزية على النحو التالي

$$\overline{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.3)$$

ومن البديهي أيضا أيجاد مقدار محصلة أي قوتين متعامدتين باستخدام العلاقة التالية:-

$$|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.3)$$

أما بالنسبة لاتجاه المحصلة فهو:-

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7.3)$$

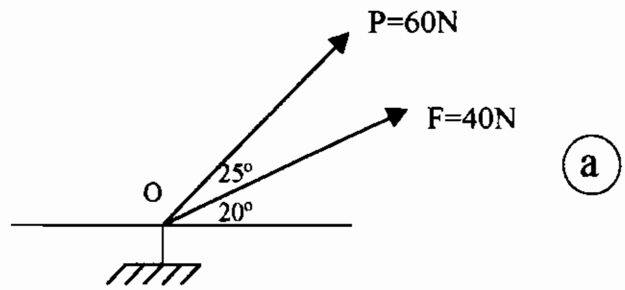
الزاوية ( ) تقاس عكس عقرب الساعة مع المحور الافقي الموجب (X) الى القوة $\overline{F}$. كذلك بالامكان احيانا اعطاء الزاوية بين القوة F والمحور (Y) عند ذلك تكون المركبة الافقية($F_x = F\sin\theta$) والمركبة الرأسية ($F_y = F\cos\theta$).

من المعادلة رقم (7.3) يتضح أن المحصلة تأخذ أربعة أتجاهات مختلفة على أتجاه كل من F_x ، F_y وهذه الاتجاهات هي:-

1. الى أعلى اليمين ، أي عندما تكون المركبتان F_x ، F_y موجبتين الى اليمين والى الاعلى على التوالي.
2. الى اسفل اليمين ، عندما تكون F_x موجبة الى اليمين و F_y سالبة الى أسفل.
3. الى أعلى اليسار ، عندما تكون F_x سالبة الى اليسار و F_y موجبة الى الاعلى.
4. الى أسفل اليسار، عندما تكون F_x ، F_y سالبتان الى اليسار والاسفل على التوالي.

مثال(3 . 1)

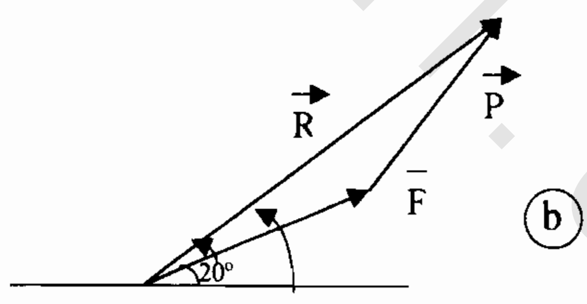
أوجد مقدار واتجاه القوتين F ، P في الشكل (a.4.3)



الشكل (4.3)

الحل:-

لايجاد مقدار وأنجاه المحصلة يمكننا أستخدام طريقة تركيب القوى حيث يمكننا جمع متجهات القوى F ، P مع بعضها باسلوب من الرأس الى الذيل طبقا لقانون المثلث كما هو موضح في الشكل (b.4.3) حيث يمكن ايجاد المحصلة من المثلث بواسطة قانون جيب التمام.



الشكل(4.3)

حيث أن الزاوية (β) هي الزاوية المقابلة للمحصلة وهنا نقوم بايجادها كما يلي

$$\beta = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$$

$$|R| = \sqrt{(40)^2 + (60)^2 - 2.40.60.\cos 155^\circ} = 97.73N$$

وبتطبيق قانون الجيوب وأستخدام قيمة $|R|$ المحسوبة يمكن أيجاد الزاوية (α) **والتـــي** أتجــاه المحصلة مع محور معلوم وهنا وهو المحور الأفقي الموجب (X) حيث:

$$\frac{R}{\sin\beta}=\frac{P}{\sin\theta} = \frac{97.73}{\sin 155^\circ}=\frac{60}{\sin\theta}$$

ومنه $\sin\theta = 0.257 \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(0.257)$

$$\theta = 15^\circ$$

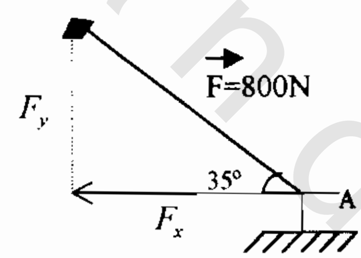
لكن الزاوية α هي

$$\alpha = 20+\theta = 20^\circ + 15^\circ = 35^\circ$$

وهكذا باستخدام العلاقتين (1.3) ، (2.3) استطعنا الحصول على مقدار واتجاه **المحصلــــة** للقوتين باستخدام تركيب القوى طبقا لقانون المثلث.

مثال (2.3)

أوجد المركبة الافقية والرأسية للقوة $\overline{\text{F}}$ في الشكل (5.3)



الشكل(5.3)

الحل:-

باستخدام العلاقتين (3.3) ، (4.3) نجد أن المركبات هي:-

$$F_x = -F.\cos\theta = -800\cos 35^\circ$$
$$= -655N \leftarrow$$
$$F_y = F\sin\theta = 800\sin 35^\circ$$
$$= 459N \uparrow^{+}$$

نلاحظ أن المركبة الافقية قيمة سالبة وذلك لان القوة واقعة الى أعلى اليســـار حيـــث أن F_x سالبة الى اليسار و F_y موجبة الى أعلى.

كما يمكننا الان التعبير عن القوة $\vec{F}$ بدلالة مركبتها وباستخدام واحدت المتجه على المحاور الكارتيزية كما يلي :

$$\bar{F} = -655\hat{i} + 459\hat{j}$$

كما ويمكننا ايجاد وحدة القوة $\hat{F}$ حسب التعريف الذي أشرنا اليه في السابق حيث أن وحدة المتجه للقوة $\hat{F}$ يساوي:

$$\hat{F} = \frac{\bar{F}}{|F|} = \frac{655\hat{i} + 459\hat{j}}{800}$$

$$= -0.81\hat{i} + 0.57\hat{j}$$

مثال(3.3)

أذا علمت بأن المركبتين لقوة معينة هما $F_X = 400N$ و $F_y = -300N$. أوجد مقدار وأتجاه القوة $\vec{F}$ والزاوية θ التي تصنعها مع المحور X.

الحل:

الشكل(6.3) يوضح أتجاه كلتا المركبتين. فبعد أكمال متوازي الاضلاع (حيث نعيد تركيب القوة بأستخدام مركبتها) فيمثل القطر القوة F وبإمكاننا أيجاد مقدارها وأتجاهها على النحو التالي:-

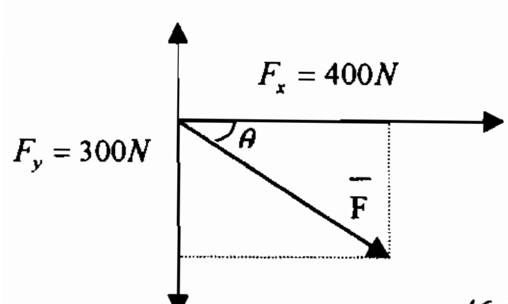
$$|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} = \sqrt{(400)^2 + (-300)^2} = 500N$$

وبإستخدام العلاقة (7.3) نستطيع ايجاد الزاوية:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{300}{400}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{400}\right) = 37^{\circ}$$

حيث أن الزاوية θ تساوي 37° الى أسفل نحو اليمين كما هو موضح في الشكل (6.3)



الشكل (6.3)

5.3 محصلة منظومة عدة قوى ملتقية في مستوى

كثيرا ما تقابلنا مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة وذلك عند دراسة أتزان جسيما معينا اذ أنه بأعتباره نقطة مادية فإن القوى المؤثرة عليه تلتقي جميعا في تلك النقطة.ولما كانت محصلة أي قوتين تمر بنقطة تلاقيهما تبعا لقانون متوازي أضلاع القوى فإن محصلة مجموعة القوى الملتقية تمر بنقطة تلاقيها وبذا يبقى علينا فقط تعيين مقدار وميل المحصلة.

أن ايجاد محصله عده قوى متلاقية يتطلب حساب مجموع متجهاتها . وهناك طريقتان رئيسيتان ومتميزتان وهما:

1.5.3 الاستاتيكا البيانية أو يسمى طريقة الرسم البياني

وهذه الطريقة تعتمد على الرسم والتخطيط بمقاييس رسم مناسبة، وتعرف هذه الطريقة أيضا بالطريقة التخطيطية (Graphical Method) وتستخدم لايجاد محصلة عدة قوى متلاقية في مستوى واحد كما تسمى ايضا بقانون مضلع القوى (Force Polygon)

ويعني المهندسين على الاخص بدراسة وتطوير هذا النوع من الاستاتيكا ويرجع اليهم الفضل في أبتكار الكثير من طرقها وتطبيقاتها وخاصة في هندسة الانشاءات المدنية.

ولأيجاد المحصلة بهذه الطريقة يتبع الخطوات التالية:

1. يرسم اولا رسم تخطيطي يبين فيه مقدار واتجاه كل قوة.
2. يتم اختيار نقطة ملائمة تكون البداية لجمع كل القوى (أخذين بعين الاعتبار اتجاهات كل هذه القوى) في أتجاه دوري واحد.
3. بعد ذلك يغلق المضلع الحاصل بوصلة نقطة البداية المختارة بنقطة النهاية المتجهة للقوة الاخيرة ، ويوضح سهم على هذا الخط الاخير بحيث يكون أتجاهه من نقطة بداية المتجه الاول للقوة الاولى الى نقطة نهاية المتجه للقوة الاخيرة ، وهكذا نحصل على مقدار وأتجاه متجهه المحصلة الكلية لهذه القوى.

أما أذا وقعت نقطة النهاية في مضلع القوى على نقطة البداية قيل أن مضلع القوى مقفل وتتلاشى في هذه الحالة محصلة القوى (R) وعلى هذا فالشرط البياني لتلاشي محصلة مجموعة من القوى الملتقية هو أن يكون مضلع القوى مقفلا وهذا شرط أتزان هذه القوى ويقال عندئذ بإن منظومة القوى في حالة أتزان.

وستوضح طريقة الحل لهذه المثالين طريقة الرسم البياني للحصول على محصلة منظومة عدة قوى متلاقية وواقعة في مستوى واحد.

مثال(6.3)

لوح التقوية المبين في الشكل (a.7.3) معرض لتأثير أربع قوى تتلاقى عند النقطة (0). أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى باستخدام الطريقة التخطيطية (طريقة مضلع القوى).

الحل:

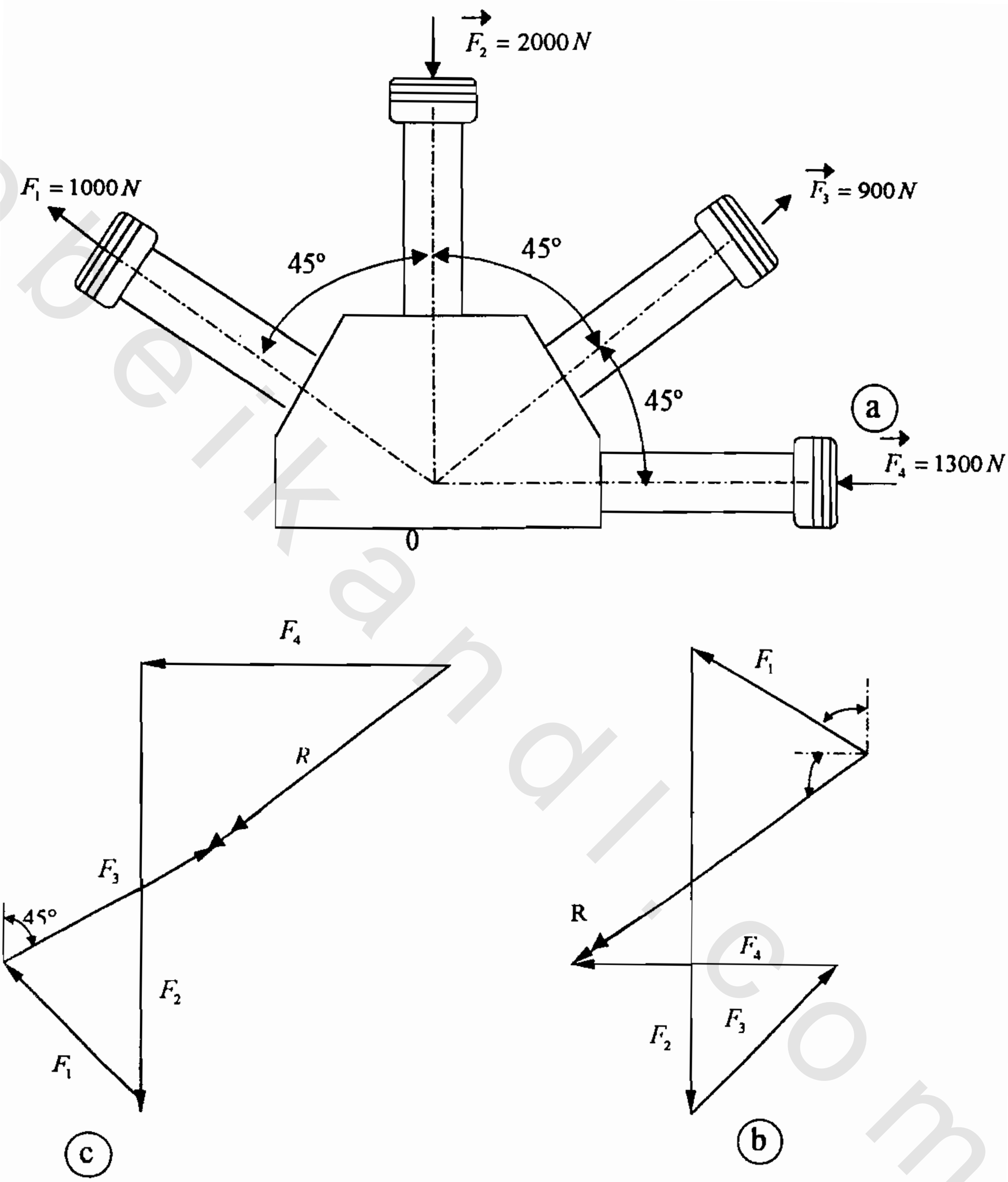
1. يتم اختيار مقياس رسم مناسب وليكن مثلا 200 نيوتن يساوي سنتمترا واحد.
2. يبدأ برسم القوه ($\overrightarrow{F_1}$) موازية لوضعها الاصلي حسب خاصية نقل المتجهات في مواضع لانهائية موازية لوضعها الاصلي دون أي تغير في قيمتها، وبعد ذلك تجمع كل القوى بالاسلوب من الرأس إلى الذيل كما موضح في الشكل(b.7.3).
3. بعد ذلك ترسم القوة المحصلة($\overrightarrow{R}$) من نقطة الاصل للقوة ($\overrightarrow{F_1}$) إلى رأس القوة $\overrightarrow{F_4}$.
4. بقياس المحصلة وبالرجوع إلى مقياس الرسم نجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية مع القوة $\overrightarrow{F_4}$ نحصل ايضا على أتجاه هذه المحصلة حيث أن:

$|R| = 1067\ N$

$\theta = 31^\circ$

وبما أن جمع الكميات المتجه كما أشرنا سابقا في باب المتجهات يكون حسب قانون التبديل ذو صفة تبادلية لذا فإنه سيتم الحصول على نفس النتائج من الرسم المبين في الشكل (c.7.3) وفس هذه الحالة يكون:

$$R = F_4 + F_2 + F_1 + F_3$$



$\vec{F_2} = 2000\,N$
$F_1 = 1000\,N$
$\vec{F_3} = 900\,N$
45°
45°
45°
a
$\vec{F_4} = 1300\,N$
0
F_4
F_1
R
F_3
45°
F_2
F_1
R
F_4
F_3
F_2
c
b

الشكل (7.3)

مثال (7.3)

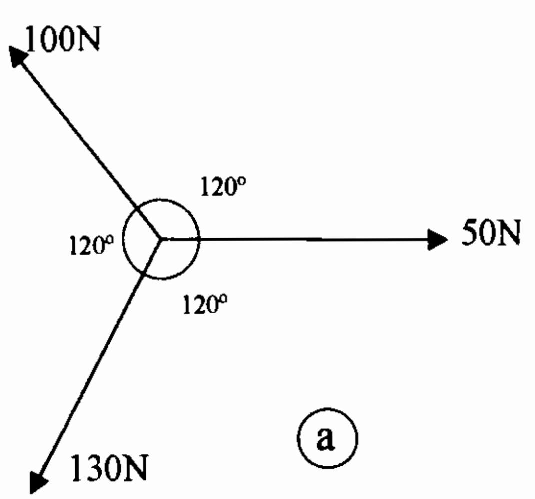
جسم تؤثر عليه ثلاث قوى مقاديرها 50N ، 100N ، 130N مأخوذة على الترتيب كما هو مبين في الشكل (a.8.3) أوجد مقدار وأتجاه محصلة هذه القوى باستخدام مضلع القوى (طريقة الرسم البياني).

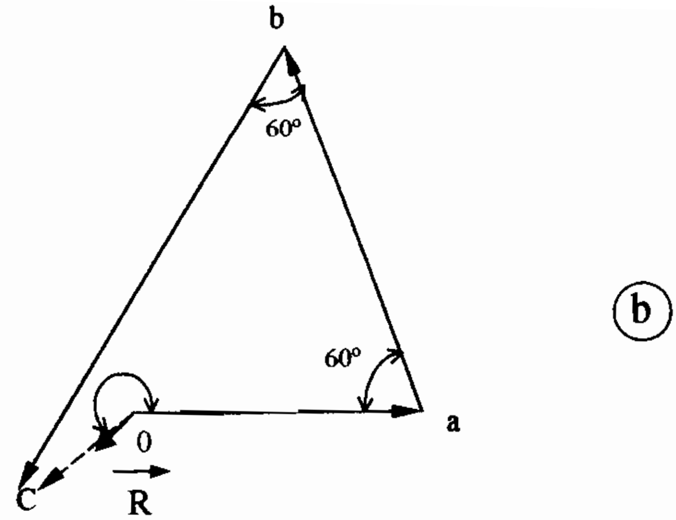
الحل:-

يبين الشكل (b.8.3) الرسم التخطيطي الذي يوضح مقدار وأتجاه القوى الثلاث.

لايجاد محصلة هذه القوى نتبع الخطوات التالية:

1. يتم اختيار نقطة ملائمة مثل (0) وبما أن هذه القوى هي متجهات موقعية أي المتجهات المحدد موقعها خطيا فنقطة (0) مهمة جدا واختيارها يجب أن لايكون عشوائيا ثم يرسم خطا أفقيا مثل (Oa) مساويا للقوة 50 نيوتن بمقياس رسم مناسب.
2. من النقطة (a) برسم الخط مساويا لمقدار القوة 100 نيوتن بنفس مقياس الرسم السابق وموازيا للمتجه القوة الثانية من الرسم التخطيطي.
3. بنفس الطريقة ومن النقطة (b) يرسم الخط (bc) مساويا لمقدار 130 نيوتن بنفس مقياس الرسم وموازيا للمتجه القوة الثالثة من الرسم التخطيطي.
4. توصل نقطة البداية (0) بنقطة النهاية (c) فيتم الحصول على مستقيم (oc) الذي يعطي مقدار واتجاه القوة المحصلة للقوى الثلاثة المعطاة.
5. بقياس (oc) وحسب مقياس الرسم يكون مقدار محصلة القوى الثلاث يساوي (70N) وتؤثر في أتجاه بميل زاوية مقدارها 202 على (oa) أي أن الزاوية $\theta = 202^\circ$ كما هو موضح في الشكل (b.8.3).





الشكل (8.3)

2.5.3 الاستاتيكا التحليلية (طريقة التحليل)

وهي تعتمد على التحليل والحساب ، وتتبنى على تحليل منظومات القوى المتلاقية إلـى مركبتها في أتجاهين وليكونا متعامدين كالافقي والرأسي (العمودي) ثم جمع هذه المركبات فـي كل أتجاه على حدة جمعا جبريا، وبعد ذلك يتم أعادة التركيب للحصول على المحصلـة الكليـة (R).

لنفرض أن القوى المعطاه $\overline{F}_4, \overline{F}_3, \overline{F}_2, \overline{F}_1$ ، ......وأن زوايا ميلها على الافقـي (أي مع محور X) هي $\theta_4, \theta_3, \theta_2, \theta_1$,...... على الترتيب فإن المركبة الافقية للمحصلـة (R_x) تساوي مجموع المركبات الافقية للقوى المعطاة أو على شكل معادلات كما يلي:

$$R_X = \sum F_X = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 + F_3 \cos\theta_3 + F_4 \cos\theta_4$$

والمركبة الرأسية (R_y) تساوي مجموع المركبات الرأسية للقوى المعطاة

$$R_y = \sum F_X = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + F_3 \sin\theta_3 + F_4 \sin\theta_4$$

وهاتان المعادلتان هما التعبير عن أن مسقط المحصلةR على كل من المحوريـن Y,X يساوي مجموع المساقط الفردية كما سبق توضيحه في باب المتجهات.

وذلك نستطيع الحصول على مقدار المحصلة R باستخدام قانون متوازي الاضلاع حيث أن:

$$|R| = \sqrt{(R_X)^2 + (R_y)^2} \quad \text{.........} (10.3)$$

وكذلك يمكننا ايجاد اتجاه المحصلة حيث أن الزاوية (α) تمثل زاوية ميـــل المحصلـــةR عن محور X.

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \quad \text{.........} (11.3)$$

وأما خلط عملها الحقيقي فيمر بملتقى القوى المعطــــاة أي أن محصلـــة منظومـــة القـــوى المتلاقية في نقطة واحدة والتي تقع في مستوى واحد ي قوة واحدة تمر بنقطة تلاقيا.

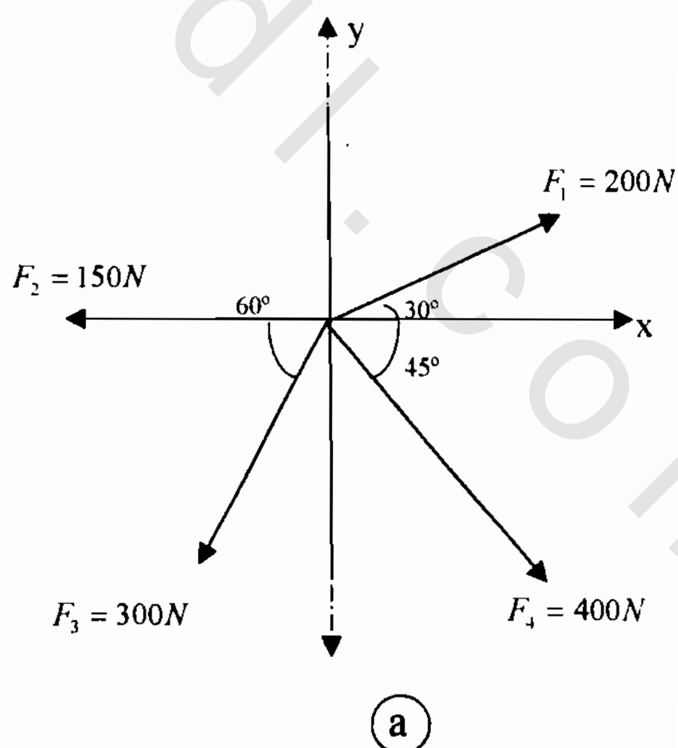
أما الشرطان التحليليان لتلاشي محصلة القوى المتلاقية هما

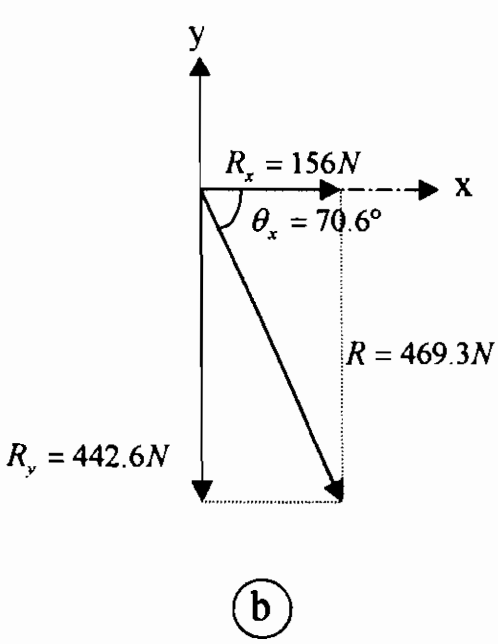
$$R_x = 0 \quad , \quad R_y = 0 \quad \text{.........} (12.3)$$

أن دراسة المثالين التالين ستوضح الطريقة التحليلية للحصول على محصلة منظومة قـــوى متلاقية وواقعة في مستوى واحد.

مثال (8.3)

أوجد محصلة منظومة القوى المتلاقية كما و مبين في الشكل (a.9.3)





الشكل (9.3)

الحل

نقوم بإيجاد المحصلة بطريقة التحليل على النحو التالي.

نبدأ أولا بإيجاد مركبات المحصلة من مجموع الجبري للمركبات الافقية والرأسية للقوى الاصلية وذلك باستخدام المعادلتين (8.3) و (9.3) حيث:

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum F_x \\
&= F_1x + F_2x + F_3x + F_4x \\
&= 200\cos 30^\circ - 150\cos 0^\circ - 300\cos 60^\circ + 400\cos 45^\circ \\
&= 173.2 \quad - \quad 150 \quad - \quad 150 \quad + 282.8 \\
R_x &= +156N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_y &= \sum F_y \\
&= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \\
&= 200\sin 30^\circ - 150\sin 0^\circ + 300\sin 60^\circ - 400\sin 45^\circ \\
&= -442.6N
\end{aligned}
$$

أما باستخدام المعادلتين (10.3) ، (11.3) فإننا نتمكن من ايجاد المحصلة واتجاهها حيث:

$$
\begin{aligned}
|R| &= \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(156)^2 + (-442.6)^2} \\
&= 469.3N
\end{aligned}
$$

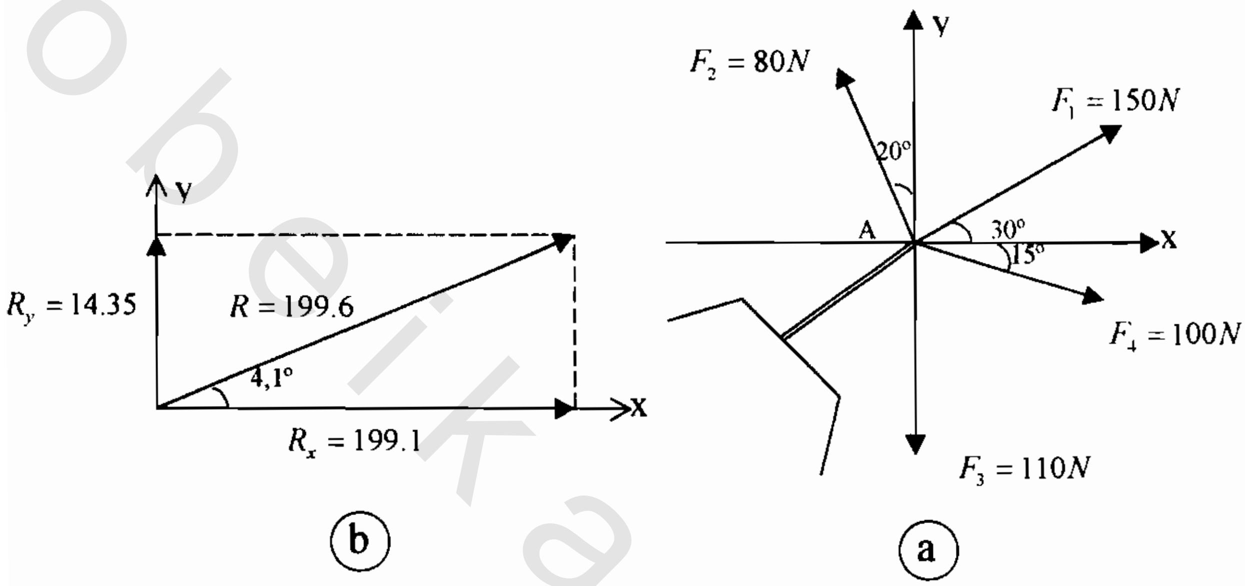
$$\tan\theta_x = \frac{R_y}{R_x} = \frac{442.6}{156} = 2.837$$

$$\theta_x = \tan^{-1}(2.837) = 70.6^\circ$$

عند حل هذا المثال أعتبر الاتجاهين إلى اليمين والاعلى موجبين لذا فإن الاشارة الموجبة لمجموع المركبات الافقية (R_x) تعني أن اتجاهها هو إلى اليمين. أما الاشارة السالبة لمجموع المركبات العمودية (R_y) فتعني انها باتجاه الاسفل. والشكل (b.9.3) يوضح هذه الاتجاهات واتجاه المحصلة النهائية (R) وهي $\theta_x = 70.6^\circ$ نحو إلى الاسفل إلى اليمين.

مثال (9.3)

أوجد مقدار واتجاه محصلة منظومة القوى المؤثرة على جسيم A كما هو موضـــح فـــي الشكل (a.10.3)



الشكل (10.3)

الحل:

نبدأ بإيجاد مركبات المحصلة من المجموع الجبري للمركبات الافقيـــة والرأسـية للقـوى الاصلية وذلك بأستخدام المعادلتين (8.3) ، (9.3) حيث

$$
\begin{aligned}
R_x &= \sum F_x \\
&= F_1x + F_2x + F_3x + F_4x \\
&= F_1 \cos 30° - F_2 \sin 20° - F_3 \cos 270° + F_4 \cos 15° \\
&= 150 \cos 30° - 80 \sin 20° - 110 \cos 270° + 100 \cos 15° \\
&= 129.9 \quad - \quad 27.4 \quad - \quad 0 \quad + \quad 96.6 \\
&= 199.1N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_y &= \sum F_y \\
&= F_1 y + F_2 y + F_3 y + F_4 y \\
&= F_1 \sin 30° + F_2 \cos 20° - F_3 \sin 270° + F_4 \sin 15° \\
&= 150 \sin 30° - 80 \cos 20° - 110 \sin 270° + 100 \sin 15° \\
&= \quad 75 \quad - \quad 75.2 \quad - \quad 110 \quad + \quad 25.4 \\
&= 14.3
\end{aligned}
$$

وبأستخدام المعادلتين (10.3)، (11.3) فإنه من الممكن ايجاد المحصلة كمقدار وأتجاهه حيث:-

$$|R| = \sqrt{(119.1)^2 + (14.3)^2} = 199.6N$$

$$\tan\theta_x = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3}{199.1}$$

ومنه:

$$\theta_x = \tan^{-1}\left(\frac{14.3}{199.1}\right) = 4.1°$$

بعد الحصول على المركبات الافقية (R_x) والرأسية (R_y) للمحصلة وايضا الحصول على أتجاه هذه المحصلة (θ_x) نقوم بعملية التركيب لهذه المركبات حسب قانون مضلع القوى (متوازي الاضلاع) للحصول على المحصلة النهائية (R) الموضحة في الشكل (b.10.3).

6.3 القوى في الفراغ (Forces in Space)

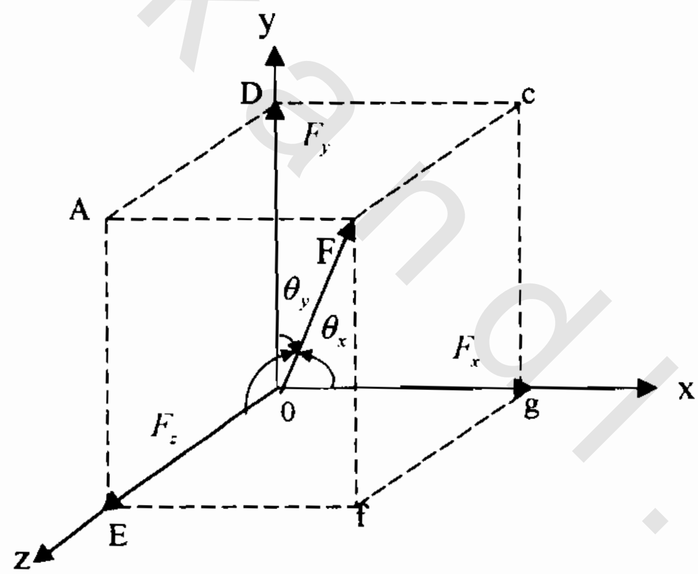
بعد دراستنا للقوى في مستوى واحد نتعرض في هذا البند إلى دراسة القوى الفراضغية أي القوى الواقعة في الفراغ نظرا لاهمية ذلك في دراسة علم السكون، كما أشرنا سابقا ، أذ أن الاعتقاد العميق الذي أكدته التجارب والابحاث منذ سنين بوجوب الانتقال من المسائل الخاصة إلى المسائل العامة أي دراسة علم السكون في الفراغ ذي الابعاد الثلاثة وبالتالي دراسة القوى وخصائصها وطرق ايجاد هذه الدراسة أقرب إلى الواقع وأكثر وضوحا ومنطقية.

1.6.3 تحليل القوى في الفراغ (Resolution of Forces in Space)

نقوم في هذا البند اولا بدراسة تحليل قوه في الفراغ (Space) إلى مركبتها (F_x, F_y, F_z) وهي مركبات متعامدة كما هو مبين في الشكل (7.3) حيث أنه يمكننا تحليل القوة ($\vec{F}$) أولا إلى مركبتين ينطبق خط الاولى (Og) والثانية على (OA) بواسطة قانون متوازي الاضلاع وبعد ذلك يعاد تحليل المركبة التي ينطبق خط عملها على (OA) إلى مركبتين ينطبق خط عملها على (OD,OE).

نلاحظ كذلك من الشكل (11.3) أن المركبات الثلاث المتعامدة للقوة $\vec{F}$ وهي (F_x, F_y, F_z) تتناسب مع الابعاد (OE و OD وog) على التوالي أي أن:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= Og = F\cos\theta_x; \\ F_y &= OD = F\cos\theta_y; \\ F_z &= OE = F\cos\theta_z; \end{aligned}\right\}$$



الشكل (11.3) تحليل القوه في الفراغ

ولأعادة تركيب القوى المتعامدة الثلاث نجد أن:

$$(OB)^2 = (Og)^2 + (OA)^2 = (Og)^2 + (OD)^2 + (OE)^2$$

لذا فإن:

$$(F)^2 = (F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2$$

ويمكننا أن نعيد كتابة القوه الاصلية أي الحصول على مقدار هذه القوة $|\vec{F}|$ على النحو التالي:

$$|F| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13.3)$$

كما يمكن التعبير عن القوة F بدلالة مركباتها الثلاثة .

باستخدام وحدات المتجهات على المحاور الكارتيزية الثلاثة $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ كما يلي:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \quad \text{..........} (14.3)$$

أما وحدة المتجه للقوة $\hat{F}$ فيمكن كتابتها على الصورة التالية حسب تعريف وحدة القوة:

$$\hat{F} = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}} \quad \text{..........} (15.3)$$

أن حلول المثالين التالين ستوضح طريقة الحصول على مركبات قوة في الفضاء واتجاهاتها واعادة تركيبها.

مثال (4.3)

أوجد قيمة القوة $\bar{F}$، وقيم الزوايا الثلاث $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ أذا علمت أن مركبات القوة $\bar{F}$ هي :

$$F_x = 200N \quad , \quad F_y = 300N \quad , \quad F_z = 600N$$

الحل:

لاعادة تركيب القوه $\bar{F}$ بدلالة المركبات الثلاث على المحاور الفراغية تستخدم العلاقة (14.3) حيث

$$\vec{F} = 200\hat{i} - 300\hat{j} + 600\hat{k}$$

نقوم الان بايجاد قيمة القوة $\bar{F}$ باستخدام العلاقة (13.3)

$$|F| = \sqrt{(200)^2 + (-300)^2 + (600)^2}$$
$$= 700N$$

أما الزوايا فإننا نستطيع أيجادها على النحو التالي:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{|F|} = \frac{200}{700} \Rightarrow \theta_x = \cos^{-1}\frac{200}{700} = 73.5°$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-300}{700} \Rightarrow \theta_y = \cos^{-1}\frac{-300}{700} = 115.5°$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{|F|} = \frac{600}{700} \Rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\frac{600}{700} = 31°$$

مثال (5.3)

أوجد المركبات الثلاثة المتعامدة F_x, F_y, F_z للقوه في الشكل (11.3) أذا كـــان مقدارهــا 500N إذا علمت أن $\theta_x = 60°, \theta_y = 45°, \theta_z = 120°$

الحل:

$$F_x = F\cos\theta_x = 500.\cos 60° = 250N$$
$$F_y = F\cos\theta_y = 500.\cos 45° = 354N$$
$$F_z = F\cos\theta_z = 500.\cos 120° = -250N$$

ومنه نستطيع أعادة تركيب هذه القوة باستخدام العلاقـــة (9.3) واســـتخدام متجـــهات الوحـــدة الفضائية في الاتجاهات الفراغية الثلاثة كما يلي:

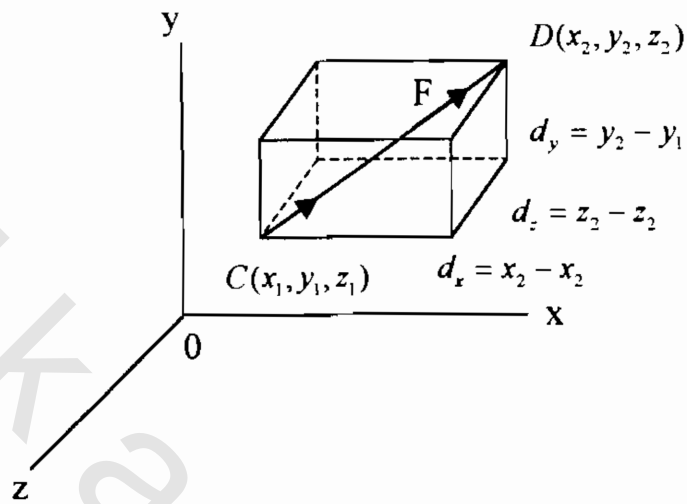
$$\overline{F} = 250\hat{i} + 354\hat{J} - 250\hat{k}$$

ولأيجاد وحدة المتجه للقوة $\vec{F}$ نستخدم العلاقة (15.3):

$$\hat{F} = \frac{250\hat{i} + 354\hat{J} - 250\hat{k}}{500}$$
$$\hat{F} = 0.5\hat{i} + 0.70\hat{J} - 0.5\hat{k}$$

2.6.3 القوى الفراغية المعرفة بمقدارها ونقطتين على خط تأثيرها
(Forces Define by Its Magnitude and two pointes on Its line of Action)

في كثير من الاحيان يتم تعريف القوة في الفراغ وخاصة في المسائل المتعلقة بتأثير القوى في الفراغ بذكر مقدارها $|F|$ ونقطتين مثل $C(x_1, y_1, z_1)$ و $D(x_2, y_2, z_2)$ على خط تأثيرها كما هو مبين في الشكل (12.3)



الشكل (12.3) قوه معرفة بمقدارها ونقطتين على خط تأثيرها

بواسطة البعد بين نقطتين في الفراغ يمكن ايجاد التغير في احداثيات النقطة $M(x_1, y_1, z_1)$ والنقطة $N(x_2, y_2, z_2)$ على المحاور الفراغية الثلاث كما هو موضح في الشكل (12.3) وبذلك نحصل على مركبات المتجه $(\overline{MN})$ والمسافة (d) بين النقطة M والنقطة N كما يلي:

$$d_x = x_2 - x_1 \quad , \quad d_y = y_2 = y_1 \quad , \quad d_z = z_2 - z_1$$

والمتجه $\overrightarrow{MN}$ يمكن كتابته على النحو التالي

$$\overrightarrow{MN} = d_x i + d_y j + d_z k \quad \text{.......}(16.3)$$

والمسافة (d) بين النقطتين يمكن ايجادها:

$$d = |MN| = \sqrt{d_x + d_y^2 + d_z^2} \quad \text{.......}(17.3)$$

ولان نستطيع الحصول على وحده المتجه الفراغية للخط (MN) والتي يرمز لها بــالرمز (λ) كما يلي:-

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{|MN|} = \frac{t}{d}(d_x i + d_y J + d_z \hat{k}) \quad \ldots\ldots (18.3)$$

وبالرجوع إلى القوة ($\overrightarrow{F}$) وباستخدام ماحصلنا عليه نجد أن القوة $\overrightarrow{F}$ هي:

$$\overrightarrow{F} = |F|\lambda = \frac{F}{d}(d_x i + d_y J + d_z k) \quad \ldots\ldots (19.3)$$

ومن العلاقة (19.3) نحصل على مركبات القوة F المعرفة بمقدارها ونقطتين علـــى خـط تأثيرهما حيث:-

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad , \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad , \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad \ldots\ldots (20.3)$$

أما بالنسبة لاتجاه القوة F فيمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \quad , \quad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \quad , \quad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \quad \ldots\ldots (21.3)$$

2.6.3 محصلة منظومة قوى فراغية متلاقيه.

-Addition of Coccurrent Forces in Space-

أن استخدام الاستاتيكا البيانية (طريقة الرسم البياني) ومضلع القوى عند ايجاد محصلـــة عدة قوى متلاقية في الفراغ يعتبر غير عملي وصعبا نوعا ما، لذا فإنه عاده ما يتــم اســتخدام الاستاتيكا التحليلية (طريقة التحليل) لايجاد محصلة عدة قوى متلاقية في الفراغ، حيـــث يتــم جمع المركبات على المحاور الفراغية الثلاث لهذه القوى ومن ثم تركيب القوة المحصلة بدلالـة هذه المركبات.

لنفرض وجود ثلاث قوى مثل $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ متلاقية في الفراغ حيث أن هذه القوى معرفـة بدلالة مركباتها على المحاور الفراغية الثلاث على الصورة التالية:

$$\overrightarrow{F_1} = F_{1x} i + F_{1y} J + F_{1z} k$$
$$\overrightarrow{F_2} = F_{2x} i + F_{2y} J + F_{2z} k$$
$$\overrightarrow{F_3} = F_{3x} i + F_{3y} J + F_{3z} k$$

فإن المحصلة $\overline{R}$ يمكن ايجادها عن طريق جمع المركبات الثلاث لهذ القوى على المحاور الفراغية على النحو التالي:-

$$R = \sum F = F_1 + F_2 + F_3$$
$$= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})i + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})J + (F_{1z} + F_{3z} + F_{3z})k$$
$$= R_x i + R_y J + R_z k = \sum (F_x i + F_y j + F_z k)$$
$$= \left(\sum F_x\right)i + \left(\sum F_y\right)j + \left(\sum F_z\right)k$$

حيث أن:

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \quad \text{.......}(22.3)$$
$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \quad \text{.......}(23.3)$$
$$R_z = \sum F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} \quad \text{.......}(24.3)$$

أما مقدار القوة المحصلة $|R|$ واتجاهها $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ مع المحاور الفراغية الثلاث فيمكن كتابته على النحو التالي:

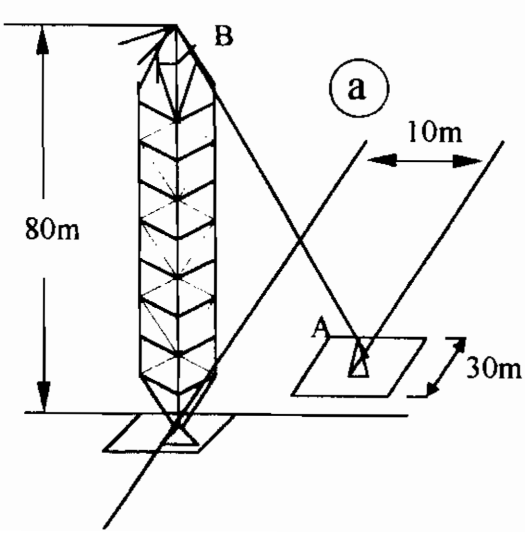
$$R\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \text{.......}(25.3)$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \quad , \quad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \quad , \quad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \quad \text{.......}(26.3)$$

أن دراسة المثالين التاليين سيوضح القوى المعرفة بمقدارها ونقطتين على خط تأثيرها وكذلك أستخدام الطريقة التحليلية للحصول على محصلة عدة قوى متلاقية في الفراغ وإعادة تركيبها.

مثال (6.3)

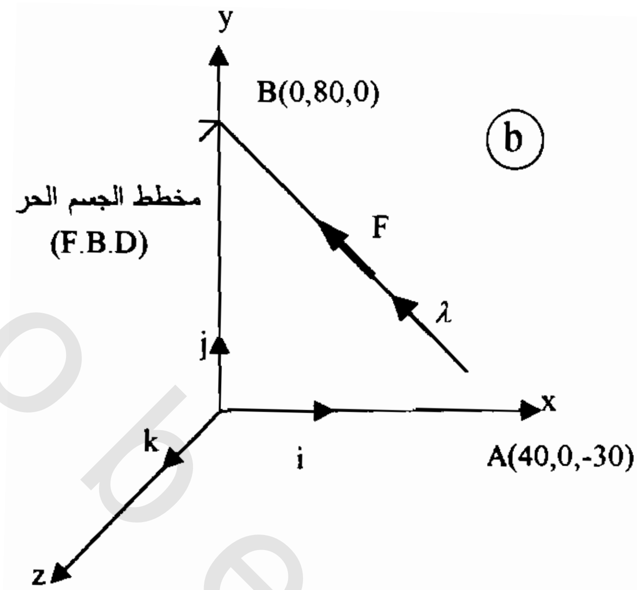
في الشكل (a.13.3) مبين عمود مربوط الى سلك عند النقطةA. اذا علمت أن الشد في السلك 2500N ، أوجد مركبات قوة الشد في السلك في نقطة A واتجاه هذه القوة $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ مع المحاور الفراغية الثلاثة.



الحل:

نقوم برسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) كما هو مبين في الشكل (b.13.3) ومن هذا الشكل نلاحظ أن قوى الشد في السلك $\overrightarrow{AB}$ معرفة بمقدارها ونقطتين على خط تأثيرهما A ، B.

يمكن الحصول على AB على النحو التالي:



$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 40 = -40m$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 80 - 0 = 80m$$
$$d_z = z_2 - z_1 = 0 - (-30) = 30m$$

اذا:

$$\overrightarrow{AB} = -40\hat{i} + 80\hat{J} + 30\hat{k}$$

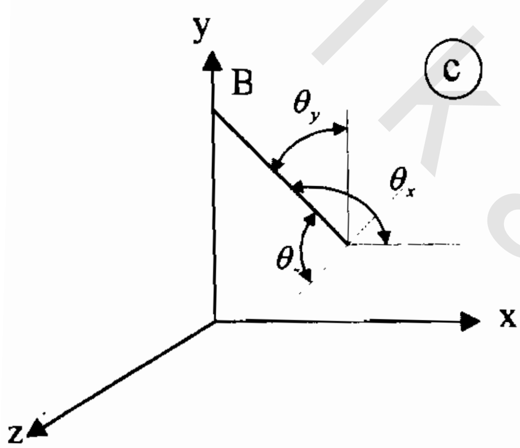
أما المسافة $|AB|$ فيمكن الحصول عليها:

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$
$$= \sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2} = 94.3\,m$$

أما وحدة المتجه الفضائية للخط λ_{AB} فنحصل عليه:

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{-40\hat{i} + 80\hat{J} + 30\hat{k}}{94{,}3}$$

وباستخدام λ_{AB} نستطيع ايجاد مركبات قوة الشد في السلك AB حيث:



$$\overrightarrow{F} = F\lambda_{AB} = |F|\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = \frac{2500}{94.3}[-40\hat{i} + 80\hat{j} + 30\hat{k}]$$
$$\overline{F} = -1060\hat{i} + 2120\hat{J} + 795\hat{k}$$

ومنه نجد ان مركبات قوة الشد الثلاث على المحاور الفراغية هي:

$$F_x = -1060N \quad , \quad F_y = 2120N \quad , \quad F_z = 795N$$

اما بالنسبة لاتجاه هذه القوة مع المحاور الفراغية الثلاث كما هو مبين في الشكل (c.13.3) فيمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة (21.3) على النحو التالي:

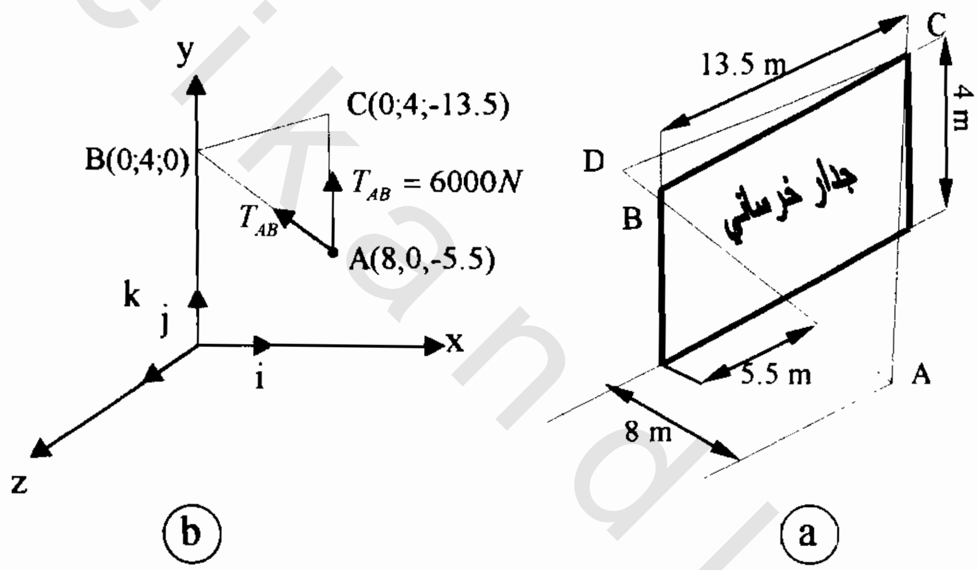
$$Cos\theta_x = \frac{F_x}{|F|} = \frac{-1060N}{2500N} \quad ; \quad \theta_x = Cos^{-1}\left(\frac{-1060}{2500}\right) = 115°$$
$$Cos\theta_y = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-2120N}{2500N} \quad ; \quad \theta_y = Cos^{-1}\left(\frac{2120}{2500}\right) = 32°$$
$$Cos\theta_z = \frac{F_z}{|F|} = \frac{795N}{2500N} \quad ; \quad \theta_z = Cos^{-1}\left(\frac{795}{2500}\right) = 71.5°$$

وهكذا حصلنا على المركبات قوة الشد المعرفة بواسطة مقدارها ونقطتين على خـــط تأثيرهـــا وعلى أتجاهها مع المحاور الفراغية الثلاث.

مثال (7.3)

في الشكل (a.14.3) مبين مقطع من جدار خرســـاني (Precast-concrete Wall) مثبت بواسطة أسلاك (Cables)، اذا علمت أن الشد في السلك AB يساوي 4000N والشـــد في السلك AC يساوي 600N.

أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الناتجة عن الشد في الاســـلاك AB، AC عنـــد نقطة A.



الشكل (14.3)

الحل:-

نقوم برسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) ، والذي يوضح عليه جميع القـــوى المؤثـــرة من قوى شد في الاسلاك وغيرها كما يوضح على المخطط احداثيات النقاط المعرفـــة القـــوى على خط تأثيرها والقياسات اللازمة الاخرى كما هو موضح في الشكل (b.14.3) من مخطـط الجسم الحر نلاحظ أن قوى الشد في السلكين معرفتان بمقدار ونقطتين على خط التأثير لذلـــك نقوم بإيجاد $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{AB}$.

أولا: السلك AB.

$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 8 = -8$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 4 - 0 = 4$$
$$d_z = z_2 - z_1 = 0 - (-5.5) = -8$$

نقوم الان بكتابة $\overrightarrow{AB}$ بإستخدام متجهات الوحدة i,J,k على المحاور الفراغية الثلاث حيث:

$$\overrightarrow{AB} = -8i + 4j + 5.5k$$

أما مقدار المسافة بين النقطة (A) والنقطة (B) فيمكن الحصول عليها على الصورة التالية:

$$|AB| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{(-8)^2 + (4)^2 + (5.5)^2} = 10.5m$$

والان نستطيع الحصول على المركبات قوة الشد في السلك AB كما يلي:

$$\overrightarrow{T_{AB}} = |T_{AB}|.\lambda_{AB} = T_{AB}.\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|};$$
$$\overrightarrow{T_{AB}} = \frac{4200}{10.5}\left[-8i + 4J + 5.5k\right]$$
$$\overrightarrow{T_{AB}} = -3200i + 1600J + 200k$$

ثانيا: السلك AC

$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 8 = -8$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 4 - 0 = 4$$
$$d_z = -13.5 - (-5.5) - -8$$

ونقوم ايضا بكتابة $\overrightarrow{AC}$ حيث

$$\overrightarrow{AC} = -8i + 4j - 8k$$

أما مقدار AC فيمكن ايجاده كما يلي:

$$|AC| = \sqrt{(-8)^2 + (4)^2 + (-8)^2} = 12m$$

ونقوم ايضا بإيجاد مركبات قوة الشد في السلك AC على النحو التالي:

$$\overrightarrow{T_{AC}} = |T_{AC}|.\lambda_{AC} = |T_{AC}|.\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|};$$
$$= \frac{6200}{12}(-8i + 4J - 8k)$$
$$= -4000i + 2000j - 4000k$$

ولأيجاد محصلة القوى الناتجة عن الشد في الاسلاك AB ، AC يمكن أستخدام العلاقة التالية حيث:

$$R = \sum F = T_{AB} + T_{AC} = -7200i + 3600J - 1800k$$

أما مقدار واتجاه المحصلة فيمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة (25.3) ، (26.3) حيث:-

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-7200)^2 + (3600)^2 + (-1000)^2} =$$
$$= 8250N$$

أما الاتجاه

$$Cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = -\frac{7200}{8250} \Rightarrow \theta_x = 150.8°$$
$$Cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{3600}{8250} \Rightarrow \theta_y = 64.1°$$
$$Cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = -\frac{1800}{8250} \Rightarrow \theta_z = 102.6°$$

وهكذا حصلنا على مقدار محصلة عدة قوى متلاقية في الفراغ عن طريق التحليل.

7.3 أتزان الجسيمات (Equilibrium of Particles)

في القرن السابع عشر قام العالم اسحق نيوتن بوضع ثلاثة قوانين أساسية للحركة (Newton Laws of Motion) والتي تعتبر البنية والقاعدة الاساسية لعلم الميكانيكا.

وينص قانون نيوتن الاول للحركة (Newton First Law) على أنه « إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسيم ما مساوية للصفر ، أستمر هذا الجسيم على حالته في سكون (إذا كان في حالة سكون) أو حركة منتظمة وفي خط مستقيم (إذا كان يسير في حركة منتظمة) » . ولابد في هذه الحالة أن ينسب السكون أو الحركة الى مناطات (هيكل) اسناد محدده (Frame Reference) يبين موضع الجسيم المناسب حيث عادة من وجهة النظر العملية يأخذ هيكل الاسناد مرتبط بسطح الارض، وتعرف مناطات الاسناد القصور الذاتية (Intertial Frames of Reference)، وهذا التعريف يتأتى من خاصية القصور الذاتي (Inertial) لكل جسيم والتي تحدد بقاءه ساكنا أو في حالة حركة منتظمة اذا انعدمت القوى الخارجية المؤثرة عليه.

الاتزان هو التعبير الذي يستخدم في حالة ما إذا كانت المحصلة الكلية لمنظومة من القوى المؤثرة على جسيما ما مساوية للصفر، أي أنه اذا اثرت مجموعة من القوى على جسيم

ما، وكانت تلك القوى مرتبة بحيث يبقى الجسيم تحت تأثيرها في حالة سكون (A T Rest) ، أو حالة حركة منتظمة لاتتغير (Uniform Motion) قيل عن الجسيم أنه في حالة أتزان ويقال عن هذه القوى أنه متوازية.

ويمكن التعبير عن الشروط اللازمة لاتزان جسيم بإستخدام الاستاتيكا البيانية (طريقة الرسم البياني) بيانيا، ويتضمن ذلك في أن يكون مضلع القوى المؤثرة على الجسيم مقفلا أي أن ذلك يعني تلاشي المحصلة نهائيا.

كما ويمكن التعبير عن الشروط اللازمة لاتزان جسيم تحت تأثير منظومة قوى معينة باستخدام الاستاتيكا التحليلية (طريقة التحليل) جبريا وذلك يتضمن وضع معادلات جبرية، حيث يمكن بواسطة هذه المعادلات والعلاقات معرفة قوة واحدة أو عدة قوى غير معلومة أو رد فعل المؤثر على الجسم الذي في حالة أتزان ويتوقف عدد القوى التي يمكن ايجادها على نوع مجموعة القوى المتضمنة.

لنجاح دراسة جسيم متزن يتعين وجود طريقة يمكن بها تعيين التمثيل الصحيح لكل القوى المؤثرة على الجسم تحت شروط معلومة للمجموعة، لذا فإنه عند دراسة مجموعة من القوى المؤثرة على الجسم، سواء كانت تلك القوى معلومة أو غير معلومة بعد هذا يمكن تحديد أنواع مجموعات القوى وعدد القوى الغير المعلومة في المجموعة. كما لايمكن حذف اية قوة من القوى الموجودة، أو إدخال قوة غير موجودة على القوى المؤثرة على الجسم، لانه في كلتا الحالتين سيكون ذلك خطرا، بل ومنبعا مشتركا لصعوبات كبيرة في علم الميكانيكا الاستاتيكيه.

لذلك يتم استخدام الرسم المخطط للجسم أو جزء من الجسم أو لمجموعة أجسام بمعزل تام عن بقية الاجسام الاخرى. حيث يبين على هذا الرسم كل القوى المؤثرة عليه بواسطة الاجسام الاخرى ويطلق على هذا الرسم بالرسم البياني للجسم الحر أو (مخطط الجسم الحر).

1.7.3 الرسم البياني للجسم الحر (Free Body Diagram)

كما ذكرنا سابقا أن دراسة أتزان الجسيمات تنضوي تحت دراسة علم الاستاتيكا (علم السكون) وهذا العلم مهم للغاية للمهندسين حيث يأخذون لهذا العلم كل أعتبار عندما يقومون بتصميم الانشاءات أو الآلات المختلفة من تصميم الجسور والعمارات والمكائنات بالمصانع ومحطات الكهرباء وغيرها.

ومسائل الاتزان كما سبق وأن ذركنا تتطلب تحديد ومعرفة كل القوى المعلومة وغير المعلومة المؤثرة على الجسيم، لذا يلزم رسم مخطط الجسم الحر الذي يمكننا من حلول هذه المسائل.

أن الرسم البياني للجسم الحر (F.B.D) هو الرسم التخطيطي للجسم أو جزء من الجسم أو مجموعة أجسام بمعزل تام عن بقية الاجسام الاخرى ويتضمن كافة القوى ثلاثة مميزات أساسية هي:

أولا: أنه رسم مخطط (كروكي) للجسم.

ثانيا: يبين الجسم بمعزل تام أي مفصول أو مقطوع من الاجسام الاخرى المؤثرة عليه.

ثالثا: يبين على الرسم التخطيطي تأثير الاجسام الاخرى ممثلة بقوة أي أن الرسم البياني لمخطط الجسم الحر (F.B.D) يظهر فيه القوى المؤثرة على هذا الحسم.

تمثل كل قوة في هذا المخطط، أما بمقدارها اذا كانت معلومة، أو برمز(حرف) اذا كانت غير معلومة وبفرض اتجاه القوة الغير معلومة عندما لايكون واضحا لاول وهلة من ثم يصحح هذا الاتجاه المعروض أذا ثبت عدم صحته، كما يبين الميل أو زاويه الميل لكل قوة لاتكون في وضع أفقي أو عمودي واحداثيات النقاط أن وجدت حسب نظام الاحداثيات المستخدمة لحل المسالة مثل(القوى المعرفة بنقطتين على خط تأثيرها).

وستوضح الامثلة الموضحة في هذا الباب الرسم البياني لمخطط الجسم الحر (F.B.D) توضيحا كافيا والذي يتوجب على الطالب الالمام الكامل به نظرا لاهميته.

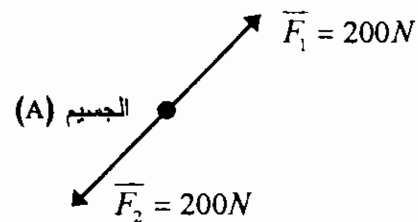
2.7.3 أتزان جسيم في مستوى واحد

(Equilibrium of a Particle n tow dimention)

في البنود السابقة من هذا الباب تم دراسة الطرق المختلفة المستخدمة لأيجاد محصلة منظومة عدة قوى مؤثرة على جسيم ما. لكننا لم نتعرض الى أنه من الممكن في بعض الحالات أن تكون محصلة هذه القوى (R) مساوية للصفر والتي تقودنا الى تعريف أتزان جسيم ما في مستوى واحد.

«يقال للجسم أنه في حالة أتزان عندما تكون محصلة منظومة كل القوى المؤثرة عليه مساوية للصفر».

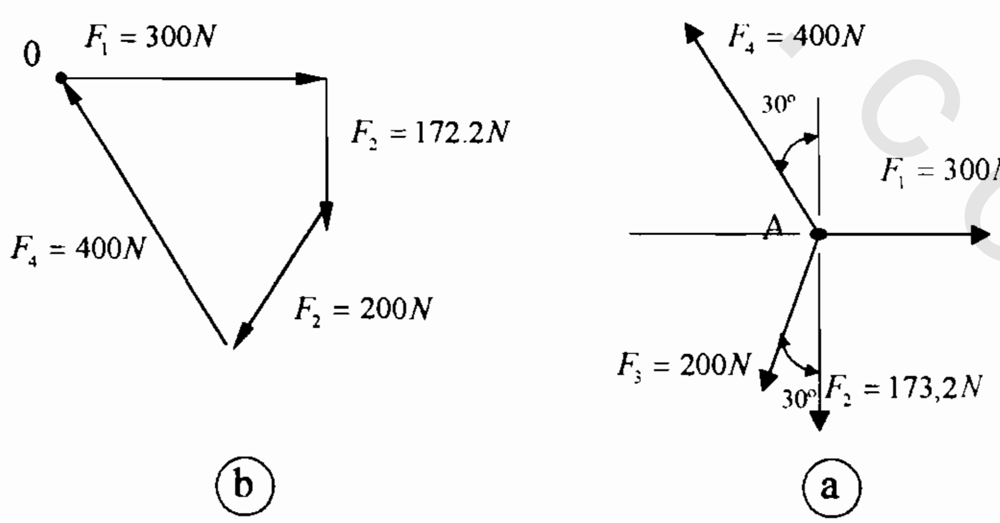
إذا أثرت قوتين $\overline{F_1}$ ، $\overline{F_2}$ على جسيم ما، فإن هذا الجسيم يمون في حالة أتزان أذا كانت هاتين القوتين متساويتين في المقدار، ويؤثران على خط تأثير واحد ومتعاكستان في الاتجاه أي أن محصلة هاتين القوتين R مساوية للصفر وهذه الحالة موضحة في الشكل (15.3).



الشكل (15.3)

أما في حالة تأثير أربع قوى أو أكثر على جسيم ما مثل الجسيم (A) كما هو مبين في الشكل (a.16.3) فإنه يمكن ايجاد محصلة هذه القوى بإستخدام الاستاتيكا البيانية (طريقة الرسم) بيانيا وذلك برسم مضلع القوى (Force Polygon) المبين في الشكل (b.16.3) حيث نبدأ برسم القوة الاولى $\overrightarrow{F_1}$ عند النقطة (0) (بالتوازي حسب خاصية نقل المتجهات الى مواضع لانهائية موازية لوضعها الاصلي) حسب قاعدة من الرأس الى الذيل (tip-to tail fashion)، فإذا وجدنا أن رأس القوة $\overrightarrow{F_4}$ ينطبق على نقطة البداية (0) للقوة الاولى $\overrightarrow{F_1}$ فإننا نحصل على مضلع قوى مقفل، وتكون المحصلة في هذه الحالة مساوية للصفر، والجسم في حالة أتزان تحت تأثير القوى الاربعة المؤثرة عليه.

أن مضلع القوى المقفل الموضح على الشكل (b.16.3) يبين أتزان الجسيم (A) بيانيا باستخدام طريقة الرسم.



الشكل (16.3)

كما يمكن التعبير عن أتزان الجسيم A باســتخدام الاسـتاتيكا التحليليــة (طريقــة التحليــل (Resolution of force) عن طريق المعادلات الجبرية على النحو التالي:

$$R = \sum F = 0 \ldots\ldots (27.3)$$

أو باستخدام مركبات القوى الافقية والرأسية حيث:-

$$\left(\sum F_x\right)i + \left(\sum F_y\right)J = 0 \qquad \text{أو} \qquad \sum F_x i + \sum F_y J = 0$$

أي شروط أتزان جسيم في مستوى يعبر عنه جبريا بالمعادلتين التاليتين

$$\sum F_x = 0 \ldots\ldots (28.3)$$

$$\sum F_y = 0 \ldots\ldots (29.3)$$

والان نقوم بالرجوع الى الجسيم A الموضح في الشكل (a.16.3) والمؤثرة عليه اربــع قوى لدراسة حالة أتزانه حسب الطريقة التحليلية حيث نقوم بتحليل هذه القوى الــى مركباتــها الافقية والرأسية وثم نقوم بوضع شروط الاتزان لنحصل على مايلي:

$$\sum F_x = 0 \;;$$
$$= 300N - (200N)\sin 30° - (400N)\cos 30°$$
$$= 300N - 100N - 200N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \;;$$
$$= -173{,}2N - (200N)\cos 30° - (400N)\cos 30°$$
$$= -173{,}2N - 173{,}2N + 346.4N = 0$$

وهكذا نلاحظ أن شروط أتزان الجسيم A قد تحققت وأن الجسيم A في حالة اتزان .

3.7.3 أتزان جسيم في الفراغ

(Equilibtium of a Particle in Space)

بعد دراستنا لأتزان جسيم ما في مستوي واحد نقوم الأن بدراسة اتــزان جســيم فــي الفراغ (ذو الابعاد الفراغية الثلاثة) (in three-dimensional).

لكي يحصل أتزان للجسيم في الفراغ يجب أن تكون محصلة القوى الفراغيــة المؤثــرة عليه مساوية للصفر.

ويمكن التبير عن أتزان جسيم في الفراغ جبريا على النحو التالي حيث:

$$R = \sum F = 0$$

وباستخدام مركبات محصلة القوى الفراغية على المحاور الفراغية الثلاث يمكن التعبير عن شروط أتزان جسيم في الفراغ على الصورة التالية:

$$R_x = \sum F_x = 0 \qquad (30.3)$$

$$R_y = \sum F_y = 0 \qquad (31.3)$$

$$R_z = \sum F_z = 0 \qquad (32.3)$$

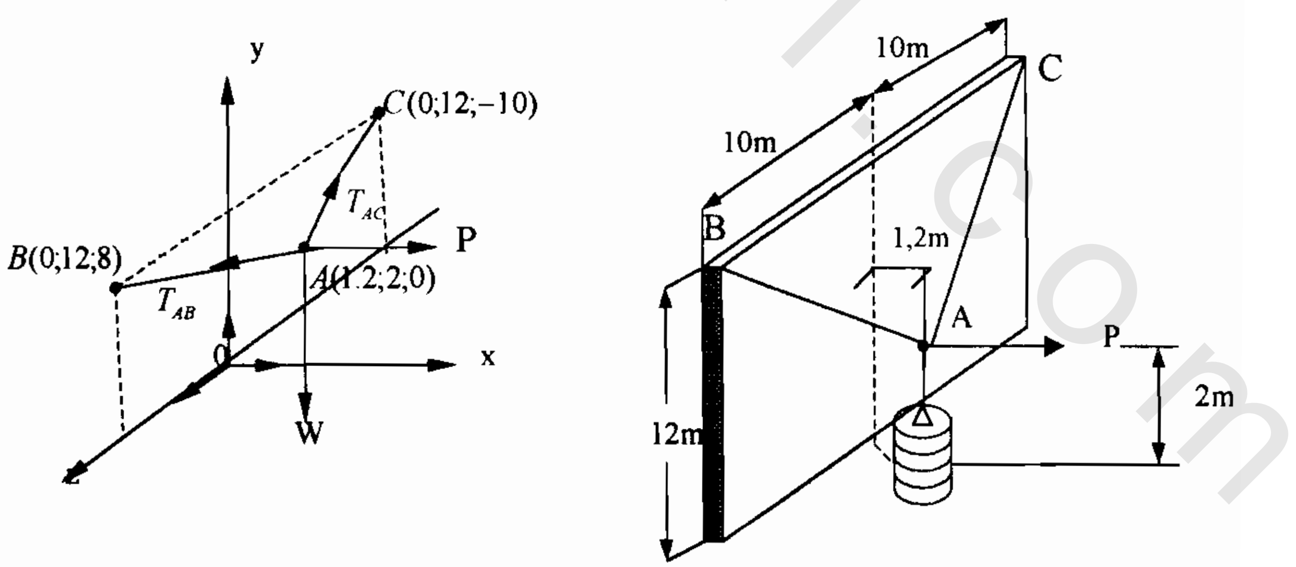
يمكن استخدام هذه المعادلات الثلاثة لايجاد ثلاث كميات غير معلومة، وعادة ما تكون هذه المجاهيل الثلاث (المركبات الثلاث لقوة واحدة، قيمة ثلاث قوى معروفة الاتجاه، ثلاثة ميول).

لذلك يتم كما أشرنا سابقا رسم المخطط البياني للجسم الحر (F.B.D) ومن ثم وضع شروط الاتزان الثلاث وبعد ذلك حل المعادلات لايجاد الكميات والمجاهيل المطلوب ايجادها.

أن دراسة المثال التالي سيوضح كيفية رسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للمسائل الفراغية (F.B.D) وتكوين المعادلات الثلاثة وحلها والحصول على المجاهيل المطلوب ايجادها وهذه المسائل تعتبر مهمة وعلى الطالب الالمام بها وفهمها باتقان.

مثال(8.3)

ثقل كتلته(200 kg) استقر في وضعه بواسطة سلكين AB و AC مربوطان الى جدار خرساني عمودي القوة الافقية P عمودية على مستوى الجدار كما هو مبين في الشكل (a.17.3) . أوجد مقدار القوة الافقية (P) والشد في كلا السلكين.



الشكل (17.3)

الحل:

نقوم كخطوة أولى لحل مثل هذه المسائل الفراغية برسم المخطط البياني للجسم الحر المبين في الشكل (b.17.3) حيث نلاحظ أن قوى الشد في السلكين AC ، AB معرفتان بواسطة نقطتين على خط التأثير.

لذا فإننا نقوم بإيجاد λ_{AC} ، λ_{AB} متجهات الوحدة الفضائية لهذه القوى حيث

أولا: السلك AB

$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 1.2 = -1.2m$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 12 - 2 = 10\ m$$
$$d_z = z_2 - z_1 = 8 - 0 = 8\ m$$

$\overrightarrow{AB}$ يمكن كتابته على الصورة التالية:

$$\overrightarrow{AB} = d_x i + d_y J + d_z k = 1{,}2i + 10j + 8k$$

أما بالنسبة لمقدار $|AB|$ والذي يعتبر المسافة مابين النقطة A، والنقطة B فنحصل عليه كما يلي:

$$d = |AB| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = \sqrt{(-1{,}2)^2 + (10)^2 + (8)^2} = 12.86m$$

$$\lambda_{AB} = \frac{AB}{|AB|} = \frac{1{,}2i + 10j + 8k}{12.86} = -0{,}093i + 0{,}77j + 0{,}62k$$

ومنه:-

$$\overrightarrow{T_{AB}} = |T_{AB}|.\lambda_{AB} = -0{,}93T_{AB}i + 0{,}77T_{AB}j + 0{,}62T_{AB}k$$
$$= -0{,}93T_{AB}i + 0{,}77T_{AB}j + T_{AB}0{,}62T_{AB}k$$

ثانيا: السلك AC

$$d_x = x_2 - x_1 = 0 - 1.2 = -1.2m$$
$$d_y = y_2 - y_1 = 12 - 2 = 10\ m$$
$$d_z = z_2 - z_1 = 10 - 0 = 10\ m$$

باستخدام متجات الوحدة على المحاور الفراغية الثلاث i,j,k نقوم بكتابة $\overrightarrow{AC}$ حيث:

$$AC = -1{,}2i + 10j - 10k$$

$$\lambda_{AB} = \frac{AC}{|AC|} = \frac{-1{,}2i + 10j - 10k}{\sqrt{(1{,}2)^2 + (10)^2 + (-10)^2}} = \frac{-1{,}2i + 10j - 10k}{14{,}19m}$$
$$= -0{,}084i + 0{,}705j - 0{,}705k$$

$$\overline{T_{AC}} = |T_{AC}|.\lambda_{AC} = -0{,}084T_{AC}i + 0{,}705T_{AC}j - 0{,}705T_{AC}k$$
$$= -0{,}084T_{AC}i + 0{,}705T_{AC}j - 0{,}705T_{AC}k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

ومن مخطط الجسم الحر (F.B.D) نلاحظ أن القوة P واقعة على المحور x ، باستخدام ايضا متجهات الوحدة على المحاور الفراغية الثلاث

$$P=Pi$$

أما بالنسبة لكتلته فيتم تحويلها الى كمية متجهة (W) الوزن حيث:

$$W=-mgj=-(200kg)(9{,}81m/s^2)j=(-1962N)j \quad\ldots\ldots (2)$$

والآن نستطيع وضع شروط الاتزان في الفراغ لاتزان الجسم A كما يلي:

$$\sum F=0 \qquad , \qquad T_{AB}+T_{AC}+P+W=0$$

أو باستخدام العلاقات (1) ، (2) ، (3) حيث القوى هذه معرفة بدلالة وحدات المتجهات i,J,k حيث:

$$\sum F_x=0 \qquad , \qquad -0{,}093T_{AB}-0{,}084T_{AC}+P=0 \quad\ldots\ldots (1)$$

$$\sum F_y=0 \qquad , \qquad 0{,}77T_{AB}-0{,}705T_{AC}-1962=0 \quad\ldots\ldots (2)$$

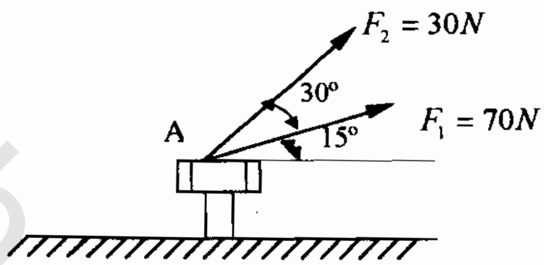
$$\sum F_z=0 \qquad , \qquad 0{,}622T_{AB}-0{,}705T_{AC}=0 \quad\ldots\ldots (3)$$

بحل هذه المعادلات بإحدى الطرق الرياضية المعروفة نستطيع الحصول على قيم الكميات الغير معروفة من قوى شد في الاسلاك (AC,AB) كما نستطيع الحصول على مقدار القوة (P) التي تجعل المنظومة في حالة أتزان.

واخير وبعد حل هذا السؤال الذي وضح كيفية التعامل مع الاسئلة المتعلقة بالاتزان في الفضاء نؤكد على أن الخطوة الهامة في حل مثل هذه الاسئلة هو الدقة في رسم مخطط الجسم واظهار كل القوى المؤثرة والملتقية بالاضافة الى نقاط احداثيات كل قوة معرفة بواسطة نقطتين ومقدار في الفراغ.

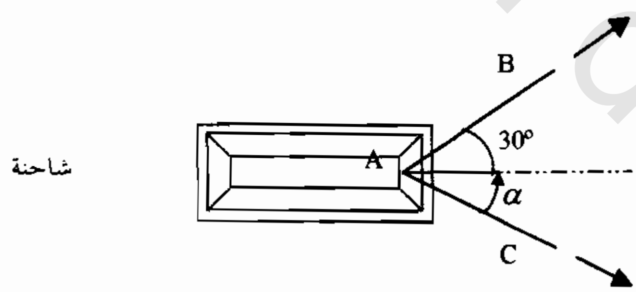
أسئلة وتمارين (3)

س1 المسمار A معرض لتأثير قوتان $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$. كما هو مبين في الشكل (18.3). أوجد محصلة هاتين القوتين.



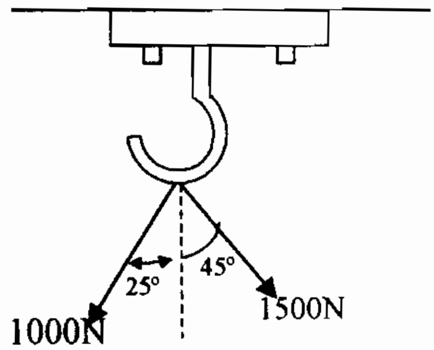
الشكل (18.3)

س2 شاحنة مسحوبة بواسطة حبلين ، كما في الشكل (19.3) أذا علمت أن الشد في الحبل AB مساويا لـ2500N والزاوية α مساوية 25°، ومحصلة هاتين القوتين الناتجتين من الشد باتجاه المحور الافقي للشاحنة أوجد بواسطة المثلثات الشد في السلك AC، ثم أحسب محصلة القوتين الناتجة من نقطة A.



الشكل (19.3)

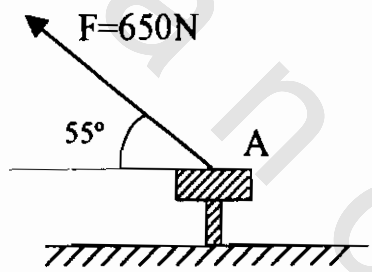
س3 أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين الموضحين على الشكل (20.3)



الشكل (20.3)

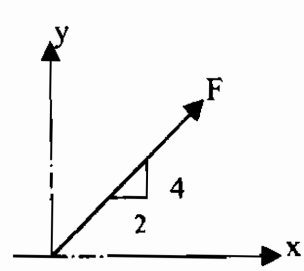
س4 قوة مقدارها (650N) تؤثر على المسمار A كما هو موضح في الشكل (21.3). أوجـــد مركبات هذه القوة الافقية والرأسية.

كما هو مبين في الشكل (22.3)



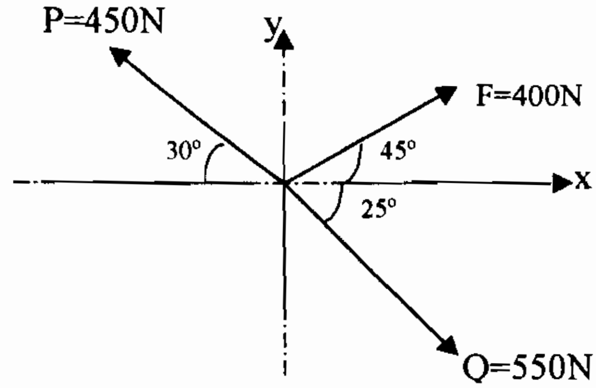
الشكل (21.3)

س5 إذا علمت أن المركبة الافقية للقوة F تساوي 200N. أوجد مقدار ومركبتها الرأسية كمـــا هو مبين في الشكل (22.3)



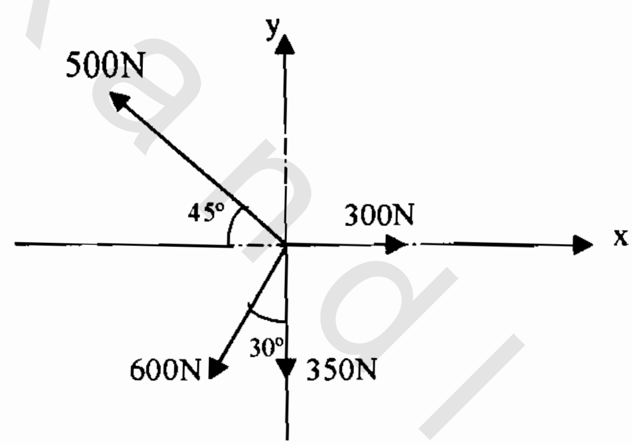
الشكل (22.3)

س6 أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى Q , P , F كما و مبين في الشكل (24.3)



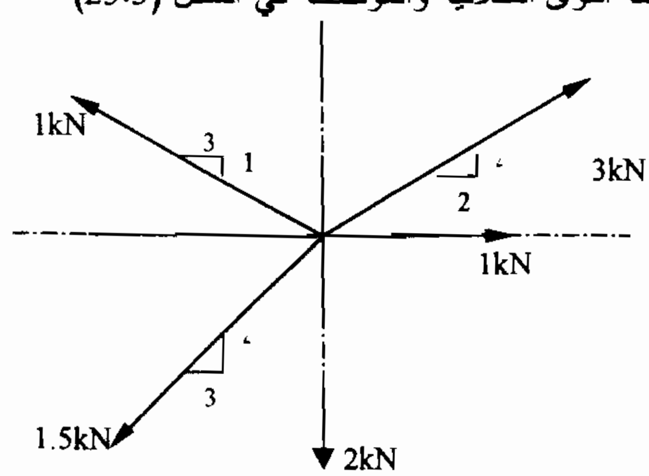
الشكل (24.3)

س7 أوجد محصلة منظومة القوى المتلاقية في الشكل (25.3)

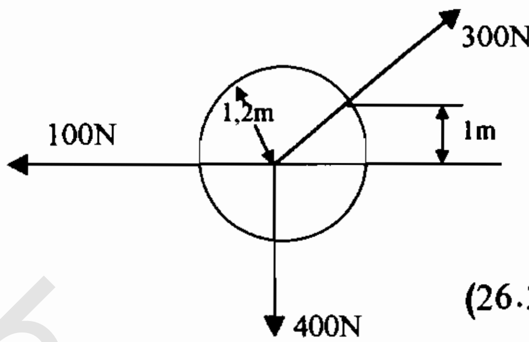


الشكل (25.3)

س8 أوجد محصلة منظومة القوى المتلاقية والموضحة في الشكل (25.3)

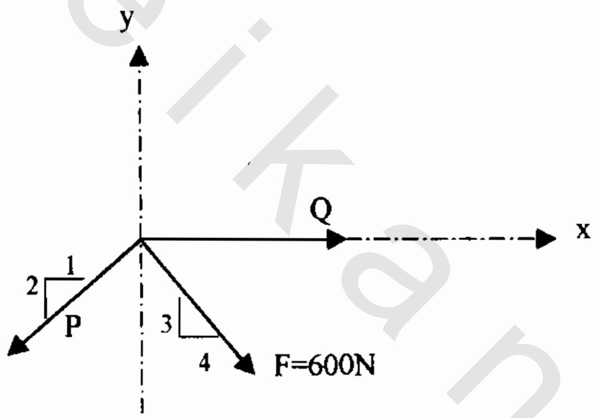


س9 أوجد محصلة القوى التي تؤثر على الجسيم في الشكل (26.3)



الشكل (26.3)

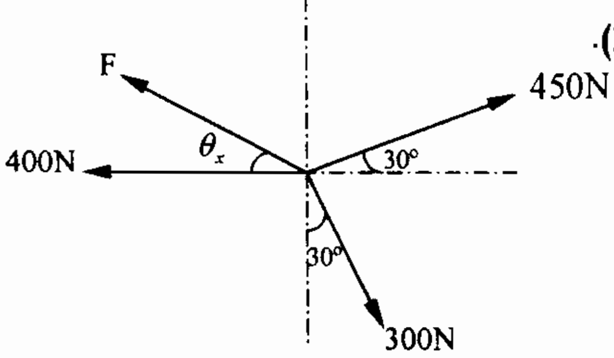
س10 في الشكل (27.3) إذا علمت أن محصلة القوتين P,Q هي القوه F. أوجد مقدار كـــل من هاتين القوتين.



الشكل (27.3)

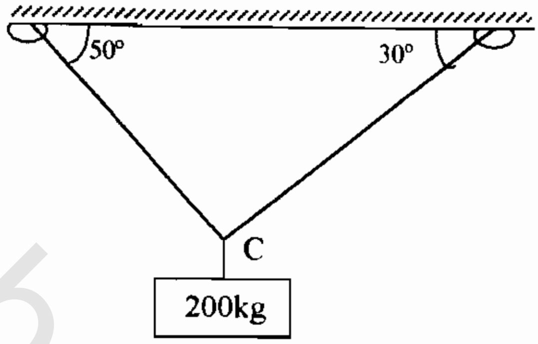
س11 في الشكل (27.3) أوجد مقدار القوتين Q,P إذا علمت أن محصلة القوى الثلاث هـــي قوة عمودية الى اسفل وتساوي 720N.

س13 إذا علمت قيمة محصلة القوى المتلاقية تساوي 250N بصورة عمودية الـــى أعلـــى.
أوجد قيمة القوة F والزاوية (   )
كما هو مبين في الشكل (28.3).



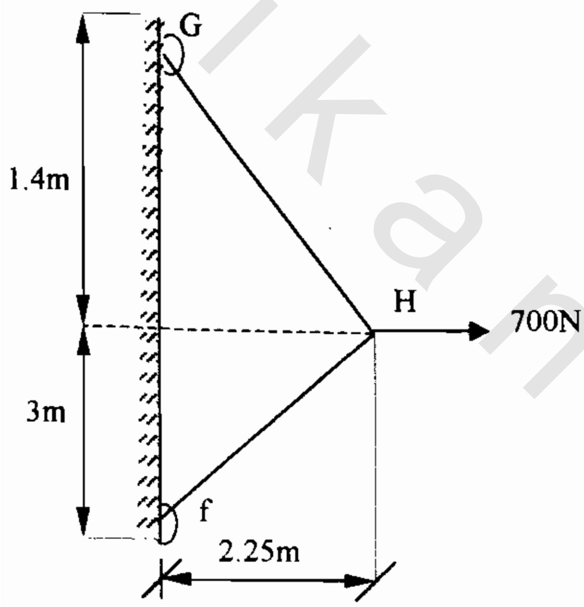
الشكل (28.3)

س14 في الشكل (29.3) ثقل معلق بواسطة سلكين ملتقيان في النقطة C. أوجد الشد الناتج في السلكين BC و AC.



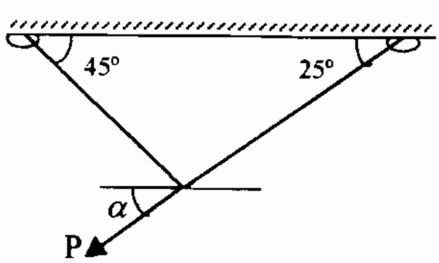
الشكل (29.3)

س15 أوجد الشد في السلكين HF و HE كما هو موضح في الشكل (30.3)



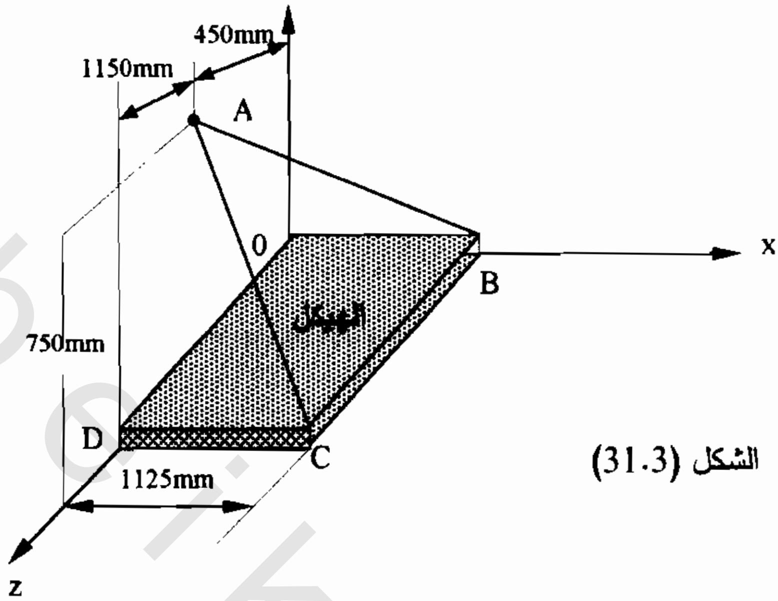
الشكل (30.3)

س16 في الشكل (31.3) اذا كانت قوة الشد في السلك AC=600N ، والسلك BC=750N. أوجد مقدار القوة (P) واتجاهها التي تجعل المنظومة متزنة.



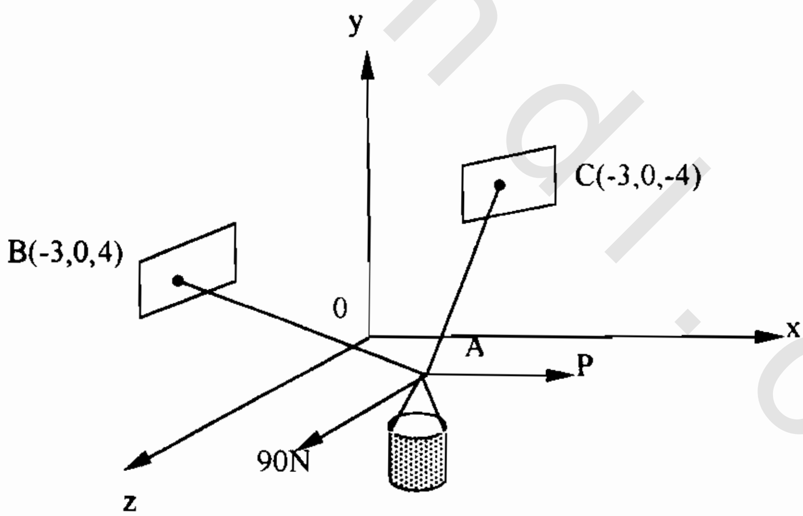
الشكل (31.3)

س17 في الشكل (31.3) الهيكل مثبت بواسطة اسلاك، وإذا علمت أن الشد في الســـلك AB مساويا 1450N. أوجد مركبات الشد في السلك AB من الهيكل النقطة B.



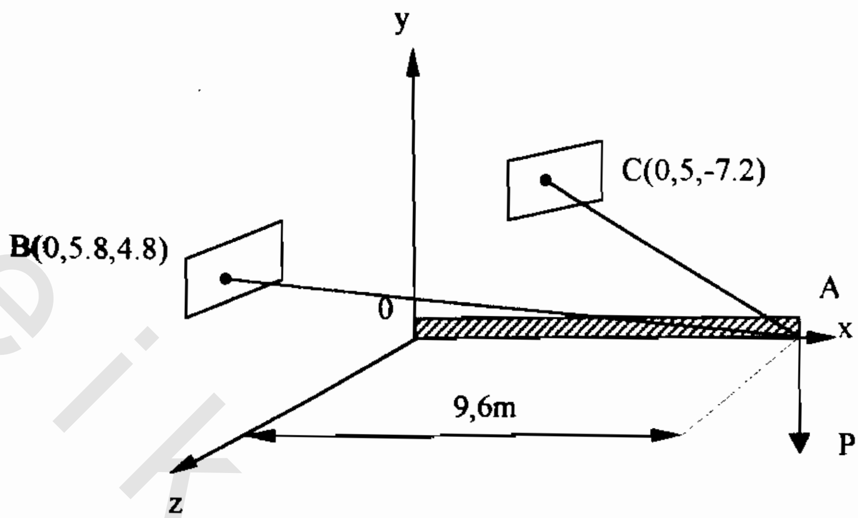
الشكل (31.3)

س18 الشكل (32.3) حاوية وزنها 300N، ومثبتة الى النقطة C، B فـــي جـــدار بواســـطة اسلاك ، وتؤثر عليها قوة مقدارها 90N. أوجد مقدار القـــوة الافقيـــة (P) التـــي تجعـــل المنظومة في حالة أتزان ومن ثم أحسب الشد في السلكين AC، AB.



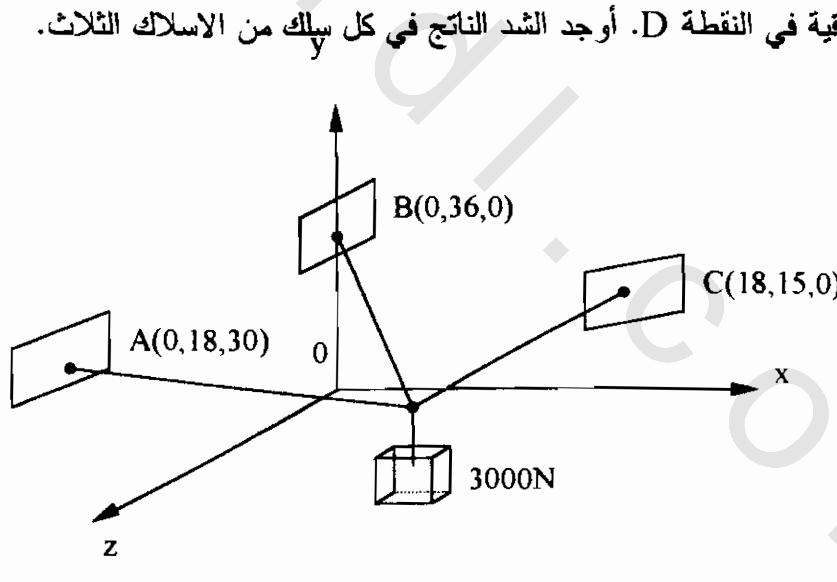
الشكل (32.3)

س19 في الشكل (33.3) أذا علمت أن قوة الشد في السلك AB=600N ، ومحصلة القـــوى للمنظومة باتجاه AO فقط. أوجد مقدار القوة (P)، وقوة الشد في السلك AC، ومحصلــة القوى للمنظومة بإتجاه AO.



الشكل (33.3)

س20 أستقر جسم وزنه 3000N في وضعه المبين في الشكل (34.3) بواسطة ثلاثة اســلاك متلاقية في النقطة D. أوجد الشد الناتج في كل سلك من الاسلاك الثلاث.



الشكل (34.3)