الفصل الثامن

قدرة المجموعات
(الأعداد الأساسيّة)

٨٤ – تكافؤ المجموعات

Équipotence d'ensembles . Equivalence of sets

يمكن للطفل الذي قد لا يعرف العدّ بعدُ أن يدرك فيما لو أن عدد الكراسي في غرفة ما مساو لعدد الأشخاص في هذه الغرفة . يكفيه من أجل ذلك أن يجعل كل شخص في الغرفة يأخذ مكاناً له على أحد الكراسي فيكون بذلك قد كون أزواجاً يتألف كل منها من شخص وكرسي . فاذا لم يبق كرسي دون شخص جالس عليه ولم يبق شخص دون كرسي يجلس عليه فإننا نقول عندئذ ، وكما مر سابقاً ، إن هناك تقابلاً بين مجموعة الأشخاص ومجموعة الكراسي أو نقول إن المجموعتين متكافئتان.

تعريف : نقول عن مجموعة سـ إنها **مكافئة** (كمياً) لمجموعة أخرى ع إذا أمكن أن نجد تقابلاً بين المجموعتين سـ و ع ، أي إذا أمكن أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً منطلقه سـ ومستقره ع . وبلغة الرموز :

سـ ≈ ع (تقرأ سـ تكافىء ع)

عندما يوجد تطبيق : تا : سـ ⟵ ع غامر ومتباين

ويقال عن كل مجموعتين متكافئتين إن لهما **القدرة ذاتها** .

مثال (١) : إن مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة مكافئة لمجموعة جميع الأعداد الصحيحة السالبة لأنه يمكن إيجاد تقابل بين هاتين المجموعتين كأن نقابل مثلاً بين كل عدد صحيح موجب بالعدد السالب الذي يساويه بالقيمة المطلقة .

مثال (٢) : إن المجموعة سـ = { ١، ٢، ٣ } لا تكافىء المجموعة ع = { ٢، ٣ } لأنه يستحيل علينا إيجاد تقابل بين المجموعتين .

مثال (٣) : إن المجموعة ط ، مجموعة الأعداد الطبيعية ، تكافىء المجموعة ز المكونة من الأعداد الموجبة الزوجية ، لوجود التطبيق الغامر والمتباين :

تا : ط ← ز

س ← ٢ س

فالعدد ١ من ط يقابله العدد ٢ من ز والعدد ٢ من ط يقابله العدد ٤ من ز وهكذا .

ملاحظة (١) :

إذا كان $سـ_1 \approx ع_1$ و $سـ_2 \approx ع_2$ و $سـ_1 \cap سـ_2 = ع_1 \cap ع_2 = \varnothing$ فإن $سـ_1 \cup سـ_2 \approx ع_1 \cup ع_2$ وذلك لأنه إذا كان هنالك تقابل بين $سـ_1$ و $ع_1$ وتقابل بين $سـ_2$ و $ع_2$ وحيث أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين $سـ_1$ و $سـ_2$ كما أنه لا يوجد أي عنصر مشترك بين $ع_1$ و $ع_2$ فإنه يوجد تقابل بين $سـ_1 \cup سـ_2$ و $ع_1 \cup ع_2$.

ملاحظة (٢) :

لا يمكن للمجموعة الخالية أن تكافىء سوى نفسها .

ملاحظة (٣) :

نستنتج من تعريف تكافؤ مجموعتين مباشرة أنه إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإن :

obeikandi.com

(١) سـ ≈ سـ فكل مجموعة تكافىء نفسها .

(٢) سـ ≈ ع ⇐ ع ≈ سـ .

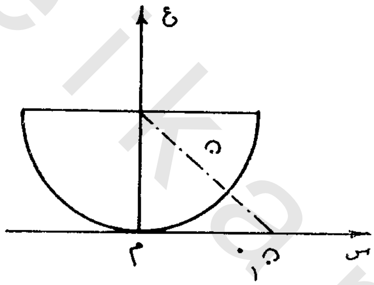
(٣) سـ ≈ ع و ع ≈ صـ ⇐ سـ ≈ صـ .

وهكذا نرى أن التكافؤ شأنه في ذلك شأن التساوي والتشابه في الهندسة منعكس ومتناظر ومتعدي .

مثال (٤) : لتكن سـ مجموعة نقط مستقيم (نأخذه محوراً للسينات) ولتكن ع مجموعة نقط نصف الدائرة :

س٢ + (ع − ١)٢ = ١   ع < ١

التي يقع مركزها في النقطة (٠، ١) . ان طرفي نصف الدائرة أي (١، ١) و (−١، ١) لا ينتميان إلى ع (حيث ع < ١) .



الشكل (٢٠٨)

إن سـ ≈ ع لأنه يمكن الحصول على تقابل بين مجموعة نقط سـ ومجموعة نقط ع ويكفي من أجل ذلك ان نقابل كل نقطة ن١ من المستقيم بالنقطة ن من نصف الدائرة التي تقع معها على نصف قطر واحد .

ثم إن المجموعة ع تكافىء المجموعة صـ المكونة من جميع نقط المجال المفتوح] −١، ١ [.

صـ = { س : −١ < س < ١ }

ولبرهان هذا التكافؤ يكفي أن نسقط نقط نصف محيط الدائرة على محور السينات (اسقاطاً قائماً) ونقابل كل نقطة بمسقطها .

وأخيراً فإن سـ ≈ صـ لأن سـ ≈ ع و ع ≈ صـ .

obeikandi.com

٨٥ - المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

سبق لنا في الفقرة ١٦ أن قسمنا المجموعات إلى منتهية وغير منتهية. ولقد اعتمدنا في هذا التقسيم على عملية العد حيث قلنا إن المجموعة المنتهية هي تلك التي يمكن أن ننتهي من عد عناصرها وإن المجموعة غير المنتهية هي التي لا تنتهي عملية عد عناصرها .

وسنحاول في هذه الفقرة تقديم تعريف دقيق لهذين النوعين من المجموعات كما اننا سنحاول بعد ذلك أن نميز بين الأنواع المختلفة للمجموعات غير المنتهية .

اذا رجعنا للمثال (٣) من الفقرة السابقة فإننا نلاحظ أن مجموعة الأعداد الطبيعية تكافىء مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ، التي هي مجموعة جزئية من المجموعة الأولى ، في حين أننا نلاحظ أن المجموعة سـ في المثال (٢) لا تكافىء المجموعة ع التي هي جزء من سـ .

وليس الأمر كذلك فقط بل إنه لا يمكن للمجموعة سـ أن تكافىء أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها . فهنالك فارق أساسي اذن ، بين المجموعة ط في المثال (٣) والمجموعة سـ في المثال (٢) ، فالأولى أمكن تكافؤها مع جزء منها مختلف عنها في حين لم يمكن ذلك في الثانية . نقول عن الأولى إنها مجموعة غير منتهية ، ونقول عن الثانية إنها مجموعة منتهية .

تعريف [١] : نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إذا أمكن تكافؤها مع جزء منها مختلف عنها ، وإلا فإننا نقول عنها إنها منتهية .

---

(١) يعود هذا التعريف الى ريتشارد ديدكند الذي ذكره في عام ١٨٨٨ في منشوره ، ما هى الأعداد وما ينبغي أن تكون ؟

نظرية : إذا كانت ج مجموعة منتهية و $ج_1$ مجموعة جزئية منها فان $ج_1$ تكون أيضاً منتهية .

البرهان :

إذا لم تكن $ج_1$ منتهية فهي غير منتهيــة ويوجد بالتــالي مجموعة $ج_2$ جزئية من $ج_1$ ومختلفة عنها بحيث $ج_1 \approx ج_2$. وبما أن ج − $ج_1$ منفصلة عن كل من $ج_1$ و $ج_2$ فإنه يكون حسب الملاحظة (١) :

$$ج_1 \cup (ج - ج_1) \approx ج_2 \cup (ج - ج_1)$$

أي : $$ج \approx ج_2 \cup (ج - ج_1)$$

ولكننا نرى بسهولة أن $ج_2 \cup (ج - ج_1) \subset ج$.

اذن ج تكافىء مجموعةجزئيةمنهامختلفة عنها وهذا مخالف للفرض .

ينتج من هذه النظرية أنه إذا كانت $ج_1$ غير منتهية و ج تحوي $ج_1$ فان ج تكون غير منتهية ، لأنه لو كانت ج منتهية فعندئذ تكون $ج_1$ (المجموعة الجزئية منها) منتهية وهذا خلاف الفرض .

مثال (١) : إن المجموعة ج المؤلفة من عنصر واحد ب : ج = {ب} هي مجموعة منتهية لأن ج تحوي مجموعة جزئية واحدة مختلفة عنها هي المجموعة الخالية . ومن الواضح أنه لا يمكن إيجاد تقابل بين ج والمجموعة الخالية .

والمجموعة ج المؤلفة من عنصرين ب و حـ : ج = { ب ، حـ } منتهية كذلك لأن ج تحوي ثلاث مجموعات جزئية مختلفة عنها {ب} و {حـ} و $\emptyset$ ولا يمكن إيجاد تقابل بين ج وبين أي من هذه المجموعات الجزئية . ومثل ذلك نرى أن كل مجموعـة تحوي عدداً محدوداً من العناصر هي مجموعـة منتهية ، حتى أن المجموعة المكونة من جميع الكتب في العالم هي مجموعة منتهية .

obeikandl.com

مثال (٢) : ان مجموعة نقط مستقيم غير منتهية لأنها تكافىء، كما مر سابقاً في المثال ٤ من الفقرة ٨٤ ، نقط القطعة]−١، ١[والتي تمثل مجموعة جزئية منها مختلفة عنها .

مثال (٣) : إذا كان ﻫ ≈ ب وكانت ﻫ منتهية فإن ب منتهية .

البرهان : إذا لم تكن ب منتهية فهي غير منتهية وبالتالي يوجد مجموعة $ب_١$ جزئية من ب ومختلفة عنها ومكافئة لها أي ب ≈ $ب_١$. لتكن $ﻫ_١$ عناصر ﻫ التي تقابل عناصرها عناصر $ب_١$ وفق التطبيق الغامر والمتباين الذي يقابل بين عناصر ﻫ وعناصر ب . ان $ﻫ_١$ مجموعة جزئية من ﻫ ومختلفة عنها . لنلاحظ أن $ﻫ_١ ≈ ب_١$ و :

$$ﻫ_١ ≈ ب_١ \wedge ب_١ ≈ ب \Leftarrow ﻫ_١ ≈ ب$$
$$ﻫ_١ ≈ ب \wedge ب ≈ ﻫ \Leftarrow ﻫ ≈ ﻫ_١$$

وبالتالي تكون المجموعة ﻫ غير منتهية وهذا خلاف الفرض .

٨٦ – المجموعات القابلة للعد

« Ensembles dénombrable . Denumerable sets »

تعريف : نقول عن مجموعة س إنها قابلة للعد اذا كانت مكافئة لمجموعة الأعداد الطبيعية أي اذا كان : س ≈ ط

يلاحظ أن س غير منتهية لأن ط غير منتهية أيضاً .

ملاحظة : بالعودة إلى تعريف المتوالية الذي مرّ في الفصل السابع نستطيع القول إن المجموعة القابلة للعد هي المجموعة التي يمكن كتابتها على شكل متوالية غير منتهية (أي تلك المجموعة التي يمكن ترقيم عناصرها) .

نتيجة : نستنتج من التعريف مباشرة أن كل مجموعة مكافئة لمجموعة قابلة للعد هي مجموعة قابلة للعد . وأن كل مجموعتين قابلتين للعد متكافئتان .

مثال (١) : ان مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة قابلة للعد لأنهــا مكافئة للمجموعة ط .

مثال (٢) : إن المجموعة ج : $\{ ١ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \ldots ، \frac{١}{\text{ن}} ، \ldots \}$ قابلة للعد

لأن التطبيق تا : ط ← ج

$$\text{س} \longrightarrow \frac{١}{\text{س}+١}$$

غامر ومتباين .

> **نظرية** : كل مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد هي (على الأكثر) مجموعة قابلة للعد (أي انها إما منتهية أو قابلة للعد) :

البرهان : لتكن أ مجموعة قابلة للعد فعندئذ يمكن كتابة هذه المجموعة على شكل متوالية .

$$\text{أ}_{١} ، \text{أ}_{٢} ، \ldots ، \text{أ}_{\text{ه}} ، \ldots \qquad (١)$$

لتكن أ' مجموعة جزئية من أ ولنفرض $\text{أ}_{\text{ه}_{١}}$ العنصر الأول من المتوالية (١) الذي ينتمي لـ أ' وليكن $\text{أ}_{\text{ه}_{٢}}$ العنصر الثــاني وهكــذا ... فإذا رمزنا لـ $\text{أ}_{\text{ه}_{١}}$ بـ $\text{ب}_{١}$ ولـ $\text{أ}_{\text{ه}_{٢}}$ بـ $\text{ب}_{٢}$ ... فعندئذ تكون أ' هي :

$$\text{ب}_{١} ، \text{ب}_{٢} ، \ldots$$

فهي إذن منتهية أو قابلة للعد حسبما تكون هذه المتوالية منتهية أو غير منتهية .

obeikandi.com

٨٧ – المجموعات غير القابلة للعد :

إذا لم تكن المجموعة منتهية وإذا لم تكن قابلة للعد فعندئذ نسميها **مجموعة غير قابلة للعد** .

ولكن هل توجد بالفعل مجموعات ليست قابلة للعد ؟ لأنه إذا لم توجد أية مجموعة من هذا النوع فلا حاجة للبحث في مثل هذه المجموعات . ان الجواب على هذا السؤال يتضح من النظرية التالية :

> **نظرية** : إن مجموعة الأعداد الحقيقيــة $٠ < س \leq ١$ ليست قابلة للعد .

البرهان : يكفي أن نبرهن أنه مهما كانت متوالية الأعداد الحقيقية :

$$ب_١ ، ب_٢ ، \ldots ، ب_ن ، \ldots \qquad (٠ < ب_ن \leq ١)$$

فإنه يوجد عدد حقيقي $ى$ ($٠ < ى \leq ١$) يختلف عن جميع عناصرها. وهذا يعني أن أي محاولة لترقيم جميع الأعداد الحقيقية في المجال المفروض فاشلة.

إن طريقة البرهان التي سنذكرها الآن ، والتي تسمى طريقة كانتور ، تعتمد على الفكرة التالية :

يمكن كتابة كل عدد $٠ < س \leq ١$ على شكل كسر عشري غير من الشكل :

$$٠ ، س_١ س_٢ س_٣ \ldots$$

حيث : $\quad ٠ \leq س_هـ \leq ٩ \quad (هـ = ١ ، ٢ ، ٣ ، \ldots)$

فالعدد $\frac{١}{٢}$ مثلا يكتب بالشكل : ... ٠,٤٩٩٩ والعدد ١ يكتب

obeikandi.com

بالشكل ... ٩٩٩و٠ وتتم هذه الكتابة بشكل وحيد . وهكذا نجد أن الأعداد $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ ، ... تكتب على شكل متوالية من تلك الكسور العشرية:

$$\begin{array}{cccccc} ٠٫ & ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} & ب_{٤١} & \ldots \\ ٠٫ & ب_{١٢} & ب_{٢٢} & ب_{٣٢} & ب_{٤٢} & \ldots \\ ٠٫ & ب_{١٣} & ب_{٢٣} & ب_{٣٣} & ب_{٤٤} & \ldots \\ ٠٫ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

الشكل (٢٠٧)

لنشكل الآن من العناصر القطرية في الجدول السابق العدد العشري ... $ب_{٣٣}$ $ب_{٢٢}$ $ب_{١١}$و٠ ولنكون عدداً عشرياً جديداً نحصل عليه من العدد السابق بأن نبدل بـ $ب_{نن}$ ($ن = ١، ٢، ٣، ...$) عدداً صحيحاً آخر $ح_{ن}$ ($٠ \leq ح_{ن} \leq ٩$) يختلف عن $ب_{نن}$ نفسه فعندئذ يكون هذا العدد العشري الجديد :

$$ى = \ldots ح_{٢} ح_{١} و٠$$

محققاً الشرط $١ \geq ى > ٠$ وهو يختلف عن كل عدد $ب_{ن}$ من المتوالية المذكورة لاختلافه عنه في الرقم النوني .

نظرية : كل مجموعة مكافئة لمجموعة غير قابلة للعد هي مجموعة غير قابلة للعد كذلك .

إن برهان هذه النظرية ينتج من التعريف مباشرة .

سنبرهن في التمارين المحلولة ان $]٠،١[\approx [٠،١]$ ، وبما أن المجموعة الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك .

نظرية : كل مجموعة غير منتهية $س$ تحوي مجموعة جزئية قابلة للعد .

البرهان : لنأخذ من $س$ عنصراً كيفياً $س_{١}$. فبما أن $س$ مجموعة غير

obeikandl.com

منتهية فانه يوجد في سـ − $\{س_1\}$ عنصر $س_2$ ويوجد في سـ − $\{س_1 ، س_2\}$ عنصر ثالث $س_3$ وهكذا ... نحصل بذلك على المجموعة القابلة للعد $\{س_1 ، س_2 ، س_3 ، ...\}$ الجزئية من سـ وهو المطلوب .

مثال (١) : إن مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى المجال المغلق [ب،حـ] هي مجموعة غير قابلة للعد. ذلك لأن التطبيق تا(س)=ب+(حـ−ب)س الغامر والمتباين يقابل بين المجال [٠ , ١] والمجال [ب ، حـ] ، فمجموعتا الأعداد الحقيقية المفروضتان متكافئتان . وحيث أن الأولى غير قابلة للعد فالثانية غير قابلة للعد كذلك .

نسمي المجال [٠, ١] المستمر Continuum ، Continu

وسنلاحظ في التمارين المحلولة أن جميع المستقيمات وأنصاف المستقيمات، إذا نظرنا اليها كمجموعات نقط متكافئة فيما بينها ومكافئة للمستمر .

ولنطرح الآن السؤال التالي :

لاحظنا فيما سبق أن المجموعة المنتهية لا تكافىء أي مجموعة جزئية منها مختلفة عنها وأن كل مجموعة جزئية من مجموعة منتهية هي كذلك مجموعة منتهية . ورأينا بعد ذلك أن المجموعة القابلة للعد تكافىء جزءاً منها (شأنها في ذلك شأن كل مجموعة غير منتهية) وأن المجموعات الجزئية لمجموعة قابلة للعد قد تكون قابلة للعد وقد تكون منتهية . ثم صادفنا بعد ذلك مجموعات ليست منتهية وليست قابلة للعد ، كمجموعة الأعداد الحقيقية في المجال المغلق [٠، ١] والتي دعوناها المستمر . ويمكننا بسهولة أن نرى أن المجموعات الجزئية للمستمر (والمجموعات المكافئة له) قد تكون مكافئة للمستمر وقد تكون قابلة للعد (كأن نختار في المجال [٠، ١] المتتالية $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ... التي تنتمي جميع عناصرها إلى

المجال المذكور وهي بحد ذاتها مجموعة قابلة للعد ، أو منتهية (كأن نأخذ العددين $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ كمجموعة جزئية من المستمر) .

والسؤال المطروح الآن : هل هنالك خطوة أخرى بعد هذه الخطوة؟ أي : هل توجد مجموعات غير منتهية وغير قابلة للعد ولا تكافىء المستمر ؟ إن الجواب على هذا السؤال بالإيجاب . فمجموعة التطبيقات الحقيقية المعرفة على المجال [٠,١] والتي تأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة من النوع المذكور . وقبل البرهان نذكّر بأنه يكفي كي يكون تطبيق مفروض مختلفاً عن تطبيق آخر معرّف على المنطلق ذاته أن يختلفا في قيمتيهما عند عنصر واحد على الأقل من المنطلق .

ولبرهان النظرية نفرض أن ادعاءنا غير صحيح وأن التطبيقات المشار اليها مكافئة للمستمر وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين المجال [٠،١] وبين مجموعة التطبيقات المذكورة ، فكل قيمة ب من المجال المذكور تقابل تطبيقاً واحداً نرمز له بـ $\text{تا}_{\text{ب}}$ (س) . لنكوّن الآن تطبيقاً جديداً حا (س) معرّفاً على المجال $٠ \leqq س \leqq ١$ بحيث يكون حا(ب)$\neq$$\text{تا}_{\text{ب}}$ (ب) من أجل كل قيمة ب من المجال المذكور (وهذا ممكن لأن المستقر يتكون من مجموعة الأعداد الحقيقية) . فالتطبيق حا (س) لا يطابق أي تطبيق $\text{تا}_{\text{ب}}$ (س) لأن $\text{تا}_{\text{ب}}$ (س) $\neq$ حا (س) من أجل س = ب على الأقل . وبما أن حا (س) أحد التطبيقات المعرفة على المجال [٠،١] ويأخذ قيمه في المستقر المذكور فإنه يجب أن يطابق أحد التطبيقات $\text{تا}_{\text{ب}}$ (س) . أي يجب أن يكون $\text{تا}_{\text{ب}}$ (ب) = حا (ب) وهذا غير صحيح حسب تعريف حا (ب) وهو المطلوب .

obeikandi.com

٨٨ – العدد الاساسي « Nombre Cardinal . Cardinal number » :

عندما أدخل الانسان مفهوم العدد العادي انطلق من شكل ابتدائي يعتمد على تجزئة الصحيح إلى عدد معين من الأجزاء ، ولكن إذا أردنا الحصول على تعريف دقيق للعدد العادي علينا أن نقلع عن هذا الشكل ونسلك السبيل التالي :

ننظر للعدد العادي على أنـــه زوج من الأعداد الطبيعية ب و حـ نكتبه ، وفق ما اعتدنا وألفنا ، بالشكل $\frac{ب}{حـ}$. ولكن حتى هذه النظرية لا تزيل كل لبس في هذا المفهوم الجديد فجميع الأزواج العددية $\frac{ب}{حـ}$ ، $\frac{٢ ب}{٢ حـ}$ ، $\frac{٣ ب}{٣ حـ}$ ، ... ليست إلا أشكالاً مختلفة للعدد العادي ذاته .

ولذلك فإنه علينا أن ننظر (أولاً) إلى كل زوجين عدديين من الشكل $\frac{ن . ب}{ن . حـ}$ و $\frac{ك . ب}{ك . حـ}$ على أنهما متكافئان ، وأن نعتبر (ثانياً) أن العدد العادي هو ممثل كيفي نختاره من بين الأزواج العددية المتكافئة ، وأن نتحقق (ثالثاً) عند استخراج قواعد الحساب في الأعداد العادية أن قاعدة الحساب لا تتعلق بالممثل الذي اخترناه (بعبارة أخرى : منسجمة مع التكافؤ المذكور) .

مثل ذلك يتم في حالة المجموعات المتكافئة . فاذا نظرنا ، على سبيل المثال ، في المجموعات المتكافئة :

{ انسان ، قلم ، كتاب } ، { ١ ، ٢ ، ٣ } ، { مدرسة ، صف ، مقعد } ، { الأرض ، القمر ، المشتري } .

وفي جميع المجموعات المكافئة لها ، وإذا اخترنا إحدى هذه المجموعات ،

المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} مثلاً ، كممثل لجميع هذه المجموعات المتكافئة فاننا نطلق عادة على هذه المجموعة التي اخترناها اسم **العدد الاساسي للمجموعات المذكورة أو (قدرة) هذه المجموعات .**

> **تعريف** : العدد الأساسي[1] أو (القدرة) مـ لمجموعة هو ممثل كيفي سـ نختاره من بين جميع المجموعات المكافئة لهذه المجموعة .

وقد نرمز لقدرة المجموعة سـ بالشكل |سـ| على أن لا يغرب عن البال أنه يمكن أن نبدل بالمجموعة سـ أية مجموعة مكافئة لها أي أن :

$$|سـ| = |ع| \quad لما \quad سـ \approx ع$$

ومهما يكن هذا التعريف مجرّداً إلا أنه يبدو في حـالة المجموعـات المنتهية لا غرابة فيه ، ذلك أنه لمعرفة عدد عناصر مجموعة منتهية نقوم بعملية عدّ لعناصرها فنحصل بهذا على العدد ٤ عند عملية العد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ الأمر الذي يجعلنا نعتبر العدد ٤ ممثلا بالمجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}.

وهكذا فإن العدد الأساسي لمجموعة منتهية هو عـدد عناصر هـذه المجموعة ن ، ونرمز له كذلك بالرمز ن ذاته .

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فإننا لا نعرف إلا عدداً بسيطاً من أصناف المجموعات المتكافئة ، ألا وهي المجموعات القابلة للعد ، التي

---

(١) يعرف كانتور العدد الأساسي لمجموعة بأنه ذلك المفهوم الذي يدرك بقوة التجريد والذي نلحقه بمجموعة متجاهلين طبيعة عناصرها والترتيب الذي تحتله هذه العناصر. فالعدد الأساسي هو ما تشترك به المجموعات المتكافئة فيما بينها .

ويذهب بعض المؤلفين إلى اعتبار العدد الأساسي مـ لمجموعة سـ هو جماعـة جميـع المجموعات المكافئة للمجموعة سـ .

يمكن اعتبارها ممثلة بالمجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } ، والمجموعات المكافئة للمستمر والمجموعات المكافئة لمجموعة التطبيقات المعرّفة في المجال [١،٠] . فاذا رمزنا للأعداد الأساسية لهذه الأصناف بـ ﭐ. ، ر. ، ﻫا. على الترتيب فاننا لا نكون بذلك قد عرفنا ، حتى الآن، سوى الأعداد الأساسية :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ﭐ. ، ر. ، ﻫا.

٨٩ – مقارنة الاعداد الاساسية :

> **تعريف** : إذا كانت لدينا مجموعتان س و ع وإذا كانت س مكافئة لمجموعة جزئية من ع ولكن ع لا تكافىء أية مجموعة جزئية من س فاننا نقول إن س ذات قدرة أقل (أو ذات عدد أساسي أصغر) من المجموعة ع ونكتب ذلك بالشكل :
>
> $$|س| < |ع|$$

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نبرهن أن العلاقة الأخيرة صحيحة عندما نستبدل بكل من س و ع مجموعة مكافئة لها . لنفرض من أجل ذلك أن س ≈ س′ و ع ≈ ع′ ولنفرض س ≈ ع١ حيث ع١ مجموعة جزئية من ع ولكن ع لا تكافىء أية مجموعة جزئية من س . فبما أن ع ≈ ع′ فانه يوجد تقابل بين ع و ع′ . ونجد في هذا التقابل أن ع١ تقابل مجموعة جزئية ع′١ من ع′ أي أن ع′١ ≈ ع١ ≈ س ≈ س′ وبالتالي س′ ≈ ع′١ أي أن س′ تكافىء مجموعة جزئية من ع′ . بقي أن نبرهن أن ع′ لا تكافىء أية مجموعة جزئية من س′ . لنفرض مؤقتاً أن ع′ تكافىء مجموعة جزئية من س′ فعندئذ نجد وفق الطريقة السابقة أن ع تكافىء مجموعة جزئية من س وهذا ما يناقض ما فرضناه وهو المطلوب .

obeikandl.com

من الواضح أن التعريف السابق يعطي في حالة الأعداد الأساسية المحدودة المفهوم المعروف « عدد أصغر من عدد آخر » .

ُيبرهن أن كل عددين أساسيين مـ و مـ١ قابلان للمقارنة مع بعضهما أي أنه إما أن يكون مـ < مـ١ أو مـ = مـ١ أو مـ > مـ١ . بعبارة أخرى : إن أية مجموعة كيفية من الأعداد الأساسية قابلة للترتيب حسب كبرها .

ملاحظة : أشرنا قبل قليل الى أن التعريف الأخير لا يعطي شيئاً جديداً إذا ما طبق على الأعداد الأساسية المحدودة . أما إذا انتقلنا إلى الأعداد الأساسية للمجموعات غير المنتهية ، هذه الأعداد التي نسميها عادة الأعداد غير المحدودة (أو ما وراء النهائية Transfinite cardinal numbers) فاننا نجد الحقائق التالية :

(١) إذا كان مـ عدداً أساسياً غير محدود ومـ١ عدداً أساسياً محدوداً فعندئذ يكون مـ١ < مـ لأنه اذا كانت سـ مجموعة ممثلة لـ مـ (وهي مجموعة غير منتهية) و ع مجموعة ممثلة لـ مـ١ (وهي مجموعة منتهية) فعندئذ يوجد في سـ مجموعة جزئية مكافئة لـ ع ولا يوجد في ع مجموعة جزئية مكافئة لـ سـ .

(٢) مهما كان العد الأساسي غير المحدود مـ فان مـ ≤ م. ، أي أن العدد م. أصغر الأعداد الأساسية غير المحدودة .

يكفي لبرهان ذلك أن نلاحظ أن كل مجموعة غير منتهية تحوي مجموعة قابلة للعد حسبما رأينا سابقاً .

(٣) بما أن م. ≤ ر. و م. ≠ ر. فانه يكون م. < ر.

(٤) إن ر. < با.

ولبرهان ذلك نلاحظ أنه اذا رمزنا بـ ر للمستمر وبـ ع لمجموعة

التطبيقات الحقيقية المعرفة في المجال [١،٠] فان ر تكافىء مجموعة جزئية من ع وذلك لأن مجموعة التطبيقات الثابتة والتي يساوي كل منها عدداً معيناً ى من المجال [١،٠] هى مجموعة جزئية من ع ومكافئة لـ ر. ثم إن ع لا تكافىء مجموعة جزئية من ر كما رأينا سابقاً وهو المطلوب.

ملاحظة : لم نتعرف حتى الآن إلا على ثلاثة أعداد أساسية غير محدودة . ترى هل توجد أعداد أخرى من هذا النوع ؟ نعم فهنالك عدد غير منته من الأعداد الأساسية غير المحدودة ، وهذا ينتج من الحقيقة التالية وهي أنه يوجد من أجل كل عدد أساسي عدد أساسي أكبر منه . وتفصيل ذلك نجده في النظرية التالية :

نظرية : إن العدد الأساسي لمجموعة أجزاء مجموعة أكبر من العدد الأساسي للمجموعة نفسها .

البرهان : إن برهان هذه النظرية يبدو واضحاً في حالة المجموعات المنتهية . فمجموعة أجزاء المجموعة الخالية ∅ هي { ∅ } ، وهي مجموعة مكونة من عنصر واحد ، ويوافق المجموعة الخالية العدد الاساسي (٠) في حين يوافق المجموعة المكونة من عنصر واحد العدد الاساسي ١ . ومجموعة أجزاء المجموعة {ب} المكونة من عنصر واحد هي { {ب} ، ∅ } ويوافقها العدد الاساسي ٢ ونعلم أن ٢ > ١ . وبشكل عام رأينا في التمرين المحلول رقم ٤٠ أن عدد أجزاء مجموعة تحوي ن عنصراً هو $٢^{ن}$ ومن السهل أن نبرهن أن ن < $٢^{ن}$.

أما في حالة المجموعات غير المنتهية فاننا سنسوق البرهان التالي الذي يشمل كذلك الحالة السابقة ، حالة المجموعات المنتهية ، لنرمز بـ ســ = ســ (س) لمجموعة عناصرها س ولنرمز بـ ســ ({ س })

للمجموعة التي تنتج عن سـ (س) بأن نبدل بكل س المجموعة {س} فتكون هذه المجموعة مكافئة لـ سـ . ولنرمز بـ ج (سـ) لمجموعة أجزاء سـ . من الواضح أن {س} ⊆ سـ ولذلك فان :

سـ ({س}) ⊆ ج (سـ)

وبالتالي فان سـ مكافئة لمجموعة جزئية من ج (سـ) . يكفي أن نبرهن أن ج (سـ) لا تكافىء أية مجموعة جزئية من سـ .

ليكن ج. ⊆ ج (سـ) ، سـ. ⊆ سـ

فاذا برهنا أن :

ج. ≈ سـ. ⇐ ج. ⊂ ج (سـ) (*)

فعندئذ لا يمكن لـ ج (سـ) أن تكافىء أية مجموعة جزئية من سـ لأنه طالما يصح الاقتضاء (*) من أجل أية مجموعة محتواة في نفسها بالمعنى الواسع فهو يصح من أجل ج نفسها وبالتالي ينتج :

ج ≈ سـ. ⊆ سـ ⇐ ج ⊂ ج (سـ)

وهذا غير ممكن ، فالمجموعة لا يمكن أن تكون محتواة تماماً في نفسها).
وهكذا نجد أن المسألة تؤول إلى برهان الاقتضاء (*) .

بما أن سـ. ≈ ج. فانه يوجد تقابل بين سـ. و ج. . لنرمز لهذا التقابل بالرمز حا :

حا : سـ. ← ج.

س ← حـ

وحيث أن كل عنصر حـ من ج. هو جزء من سـ فاما أن ينتمي س المقابل لهــذا العنصر (وفق حا) إلى حـ نفسه أو أن لا ينتمي .

لتكن حـ' المجموعة المكونة من كل عنصر س ∋ سـ. ولا ينتمي إلى المجموعة حـ المقابلة له وفق حا .

ان هذه المجموعة حـ' ، والتي هي مجموعة جزئية (قد تكون خالية)

obeikandi.com

من سـ ليست عنصراً من ج. لأنـــه لو كانت ح′ عنصراً من ج. فعندئذ يلزم أن يقابل ح′ عنصر س′ من سـ وفق حا. وهنا نكون أمام أحد احتمالين. اما أن يكون س′ ∋ ح′ وهذا غير ممكن (حسب تعريف ح′) أو أن يكون س′ ∌ ح′ وهذا غير ممكن كذلـك، لأن العنصر س′ باعتباره لا ينتمي إلى العنصر المقابل له وفق حا، فانه يلزم أن ينتمي لـ ح′ وفي هذا تناقض. وهكذا نرى أن ح′ ∌ ج. وبالتالي ج ⊃ ج (سـ) وهو المطلوب.

نظرية بيرن شتاين Bernstein في التكافؤ (مقارنة القدرات):

إذا كان لدينا مجموعتان سـ و ع فإنـــه لا يرد منطقياً عند دراسة التقابل بين هاتين المجموعتين، سوى الحالات الأربع التالية:

(١) يوجد تقابل بين سـ و ع وعندئذ يكون سـ ≈ ع.

(٢) يوجد تقابل بين إحدى المجموعتين (مثل سـ) ومجموعة جزئية من الثانية ومختلفة عنها، دون أن يكون العكس ممكناً أي لا يوجد تقابل بين ع وأية مجموعة جزئية من سـ مختلفة عنها.

(٣) يوجد تقابل بين كل من المجموعتين ومجموعة جزئية من الثانية مختلفة عنها.

(٤) لا يوجد أي تقابل بين أي من المجموعتين ومجموعة جزئية من الثانية مختلفة عنها.

من الواضح أن الحالتين الثالثة والرابعة غير ممكنتين في حالة المجموعات المنتهية فإما أن تصح الحالة الأولى (عندما يكون للمجموعتـين عـدد واحد من العناصر) أو أن تصح الحالة الثانية.

ويبرهن (بالاعتماد على مبدأ من مبادىء نظرية المجموعات يسمى مبدأ

الاختيار) أن الحالة الرابعة كذلك غير ممكنة في حالة المجموعات غير المنتهية .

أما بالنسبة للحالة الثالثة فقد تصح في حالة المجموعات غير المنتهية ، غير أنه في كل مرة تصح فيها هذه الحالة تصح الحالة الأولى كذلك كما يبدو من النظرية الآتية :

نظرية التكافؤ : إذا كانت كل من مجموعتين مكافئة لمجموعة جزئية من الثانية فعندئذ تكون هاتان المجموعتان متكافئتين .

لبرهان هذه النظرية انظر التمرين المحلول (٣٠١) .

٩٠ – جمع عددين أساسيين :

إذا سئل طفل عن مجموع ثلاث كرات مع خمس كرات فإنه يوحّد بين المجموعتين في مجموعة واحدة ثم يعد عناصر المجموعة الجديدة . إن ما قام به الطفل لا يمكن اعتماده بحذافيره عندما تكون المجموعتان مجردتين ، فكل من المجموعتين { ١ ، ٢ ، ٣ } و { ١ ، ٢ ، ٤ } يحوي ثلاثة عناصر غير أن مجموعة الاجتماع { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } تحوي أربعة عناصر فقط ، فهذه الطريقه لا تصلح إذن لجمع ٣ و ٣ . غير أننا إذا حرصنا على أن تكون المجموعات الممثلة منفصلة فعندئذ يمكن اعتماد ما قام به الطفل تماماً.

وعلى هذا إذا أردنا أن نجمع عددين أساسيين $م$ و $م_1$ نختار مجموعتين ممثلتين منفصلتين $ج$ و $ج_1$ ثم نوجد اجتماع هاتين المجموعتين $مج = ج \cup ج_1$ ويكون :

$$م + م_1 = |مج|$$

ولكي يكون لهذا التعريف معنى علينا أن نتحقق من ان العدد الأساسي $|مج|$ لا يتأثر إذا استبدلنا بالمجموعتين $ج$ و $ج_1$ مجموعتين

مكافئتين لهما على الترتيب $\text{ج}'$ و $\text{ج}_{\text{١}}'$ على أن تكون هاتان المجموعتان منفصلتين كذلك .

وبالحقيقة لما كان $\text{ج} \approx \text{ج}'$ و $\text{ج}_{\text{١}} \approx \text{ج}_{\text{١}}'$ فانه يكون حسب الملاحظة (١) من الفقرة (٨٤) .

$\text{ج} \cup \text{ج}_{\text{١}} \approx \text{ج}' \cup \text{ج}_{\text{١}}'$ وهو المطلوب .

يمكن أن نبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

(ا) $\text{مـ} + \text{مـ}_{\text{١}} = \text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}$

(ب) $(\text{مـ} + \text{مـ}_{\text{١}}) + \text{مـ}_{\text{٢}} = \text{مـ} + (\text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}_{\text{٢}})$

(حـ) إذا كان $\text{مـ}_{\text{١}} \geqq \text{ن}_{\text{١}}$ ، $\text{مـ}_{\text{٢}} \geqq \text{ن}_{\text{٢}}$ فعندئذ يكون :

$$\text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}_{\text{٢}} \geqq \text{ن}_{\text{١}} + \text{ن}_{\text{٢}}$$

(د) $\text{ا}_0 + \text{ن} = \text{ا}_0$ ، $\text{ا}_0 + \text{ا}_0 = \text{ا}_0$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

(هـ) $\text{ر}_0 + \text{ن} = \text{ر}_0$ ، $\text{ر}_0 + \text{ا}_0 = \text{ر}_0$ ، $\text{ر}_0 + \text{ر}_0 = \text{ر}_0$

(حيث ن عدد أساسي محدود) .

(و) إذا كان مـ عدداً غير محدود فعندئذ يكون : $\text{مـ} + \text{ا}_0 = \text{مـ}$

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الجمع لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $\text{مـ}_{\text{١}}$ ، ... ، $\text{مـ}_{\text{ك}}$ أعداداً أساسية و $\text{ج}_{\text{١}}$ ، ... ، $\text{ج}_{\text{ك}}$ مجموعات منفصلة ممثلة لها فان :

$$\text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}_{\text{٢}} + \ldots + \text{مـ}_{\text{ك}} = \left| \text{ج}_{\text{١}} \cup \text{ج}_{\text{٢}} \cup \ldots \cup \text{ج}_{\text{ك}} \right|$$

ويبرهن أن :

$$(\text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}_{\text{٢}}) + \text{مـ}_{\text{٣}} = \text{مـ}_{\text{١}} + \text{مـ}_{\text{٢}} + \text{مـ}_{\text{٣}}$$

obeikandl.com

٩١ – ضرب عددين أساسيين :

ليكن مـ و مـ_{1} عددين أساسيين و ج و ج_{1} مجموعتين (منفصلتين أو غير منفصلتين) ممثلتين لهذين العددين . نسمي العدد الأساسي للجداء الديكارتي للمجموعتين ج و ج_{1} حاصل ضرب مـ و مـ_{1} أي :

$$\text{مـ} \times \text{مـ}_{1} = |\text{ج} \times \text{ج}_{1}|$$

وإذا كانت $\text{ج}'$ و $\text{ج}_{1}'$ مجموعتين بحيث $\text{ج}' \approx \text{ج}$ و $\text{ج}_{1}' \approx \text{ج}_{1}$ فعندئذ يكون (كما يمكن للقارىء أن يبرهن ذلك بسهولة) :

$$\text{ج} \times \text{ج}_{1} \approx \text{ج}' \times \text{ج}_{1}'$$

وحاصل الضرب بالتالي مستقل عن المجموعتين الممثلتين للعددين مـ و مـ_{1} .

هذا ويمكن أن نذكر تعريف ضرب عددين أساسيين بالشكل التالي:

لنفرض أن العددين الأساسيين $\text{مـ} > 0$ ، $\text{ه} > 0$ ممثلان بمجموعتين سـ و ع (لا يشترط في هاتين المجموعتين أن تكونا منفصلتين) ولنكوّن المجموعة ر من جميع الأزواج المرتبة (س ، ع) حيث $\text{س} \in \text{سـ}$ و $\text{ع} \in \text{ع}$ فعندئذ يكون $\text{مـ} . \text{ه} = |\text{ر}|$. أما إذا كان أحد العددين مـ أو ه يساوي الصفر فإن $\text{مـ} . \text{ه} = 0$

يبرهن بسهولة (انظر التمارين المحلولة) :

(أ) $\text{مـ} \times \text{مـ}_{1} = \text{مـ}_{1} \times \text{مـ}$

(ب) $(\text{مـ} \times \text{مـ}_{1}) \times \text{مـ}_{2} = \text{مـ} \times (\text{مـ}_{1} \times \text{مـ}_{2})$

(حـ) $(\text{مـ} + \text{مـ}_{1})\, \text{مـ}_{2} = \text{مـ}\, \text{مـ}_{2} + \text{مـ}_{1}\, \text{مـ}_{2}$

(د) اذا كان $\text{مـ}_{1} \geqq \text{ن}_{1}$ و $\text{مـ}_{2} \geqq \text{ن}_{2}$ فعندئذ يكون :

$$\text{مـ}_{1}\, \text{مـ}_{2} \geqq \text{ن}_{1}\, \text{ن}_{2}$$

obeikandi.com

(هـ) ن × ﭐ. = ﭐ. (ن عدد أساسي محدود ≠ ٠)

(و) ﭐ. × ﭐ. = ﭐ.

(ز) ن × ر. = ر. (ن عدد أساسي محدود ≠ ٠)

(ح) ر. × ر. = ر.

ملاحظة : يمكن تعريف عملية الضرب لأكثر من عددين أساسيين وفق ما يلي : إذا كانت $م_{١}$ ، ... ، $م_{ك}$ أعداداً أساسية و $ج_{١}$ ، ... ، $ج_{ك}$ مجموعات ممثلة لها على الترتيب فإن :

$$م_{١} \times \dots \times م_{ك} = |ج_{١} \times \dots \times ج_{ك}|$$

★ ★

obeikandl.com

تمارين محلولة

٢٨٩ – برهن أنه مهما كانت المجموعات سـ و ع و صـ فإن :

١ – سـ × ع ≈ ع × سـ

٢ – (سـ × ع) × صـ ≈ سـ × ع × صـ

الحل :

١ – إذا استطعنا أن نجد تطبيقاً غامراً ومتبايناً معرّفاً على سـ × ع ويأخذ قيمه في ع × سـ نحصل على المطلوب .

إن التطبيق :

تا : (س، ع) ⟵ (ع، س)   س ∈ سـ و ع ∈ ع

المعرّف على سـ × ع والذي يأخذ قيمه في ع × سـ غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢ – إن التطبيق :

تا : (سـ × ع) × صـ ⟵ سـ × ع × صـ

((س ، ع) ، ص) ⟵ (س ، ع ، ص)

(س ∈ سـ ، ع ∈ ع ، ص ∈ صـ)

غامر ومتباين وهو المطلوب .

٢٩٠ – برهن : $[0,1] \approx [0,1[\;\approx\;]0,1[\;\approx\;]0,1]$

الحل :

١ – إن $[0,1] \approx]0,1[$ لأن التطبيق :

$$\text{تا}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & \text{لمّا } \text{س} = ٠ \\ \frac{١}{\text{ن}+٢} & \text{لمّا } \text{س} = \frac{١}{\text{ن}} \text{ حيث ن } \ni \text{ط}^* \\ \text{س} & \text{لمّا } \text{س} \neq ٠ \text{ ، } \frac{١}{\text{ن}} \text{ حيث ن } \ni \text{ط}^* \end{cases}$$

المعرّف على [٠،١] والذي يأخذ قيمه في] ٠،١ [غامر ومتباين.
واستناداً إلى هذا التابع يكون :

$$٠ \leftarrow \frac{١}{٢} \quad ، \quad ١ \leftarrow \frac{١}{٣} \quad ، \quad \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{١}{٤} \text{ ، } \ldots$$

$$\text{س} \leftarrow \text{س} \quad \text{عندما س} \neq ٠ \text{ ، } \frac{١}{\text{ن}}$$

٢ً – [٠،١] ≈ [٠،١ [

ان التطبيق :

$$\text{تا}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{لمّا } \text{س} = \frac{١}{\text{ن}} \\ \text{س} & \text{لمّا } \text{س} \neq \frac{١}{\text{ن}} \end{cases} \qquad \text{ن} \ni \text{ط}^*$$

المعرف على [٠،١] ويأخذ قيمه في [٠،١ [غامر ومتباين .

٣ً –] ٠،١] ≈] ٠،١ [

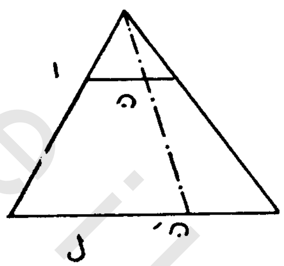
إن التطبيق تا (س) = ١ – س المعرف على] ٠،١] والذي يأخذ قيمه في] ٠،١ [غامر ومتباين وهو المطلوب .

obeikandi.com

٢٩١ – برهن أن أي مجال محدود مغلق (ل) من المحور الحقيقي، على أن ننظر اليه كمجموعة نقط يكافىء المستمر .

الحل :

يكفي من أجل ذلك أن نرسم المجال المفروض ونرسم القطعة [٠،١] من المحور الحقيقي كما في الشكل (٢٠٨) ونقابل كل نقطة من المستمر بالنقطة التي تقع معها على استقامة واحدة مارة بالنقطة م (نقطة تقاطع المستقيمين اللذين يصلان طرفي المجال بطرفي المستمر) .



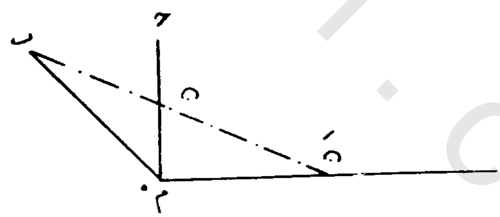
الشكل (٢٠٨)

نستنتج مما ذكر ومن خاصة التعدي أن أي مجالين محدودين متكافئان .

٢٩٢ – برهن أن نصف المستقيم يكافىء [٠،١[.

الحل :

إن الشكل (٢٠٩) يوضح كيف يمكن الحصول على تقابل بين م ح =[٠،١[



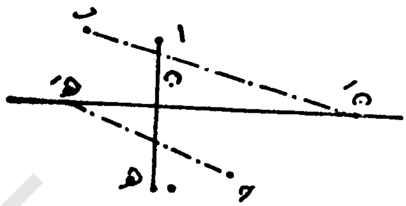
الشكل (٢٠٩)

ونصف المستقيم (يلاحظ أن ب ح // نصف المستقيم وأن ب لا تقع في الجهة التي يقع فيها نصف المستقيم بالنسبة للقطعة م ح وأنه باستثناء ذلك لا تخضع ب لأي شرط) .

obeikandi.com

٢٩٢ – برهن أن المستقيم يكافىء (١٬٠) .

الحل :



إن الشكل (٢١٠) يوضح المطلوب .

الشكل (٢١٠)

٢٩٣ – برهن أن مجموعة الأعداد الأولية قابلة للعد .

الحل :

لنبرهن أولاً أن هذه المجموعة غير منتهية . لنفرض مؤقتاً أنها منتهية ولنفرض أن ل أكبر عدد أولي ، عندئذ تكون مجموعة الأعداد الأولية (مرتبة حسب كبرها) هي :

{ ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ... ، ل } (١)

لنشكل العدد :

$$ء = (٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ \times \ldots \times ل) + ١$$

فإما أن يكون هذا العدد أولياً (وهذا يناقض فرضنا أن ل أكبر الأعداد الأولية) أو أن يكون غير أولي وعندئذ يقبل القسمة على عدد أولي واحد على الأقل مثل $ل_{١}$. ولكن لا يمكن لـ $ل_{١}$ أن يكون من الأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ل لأن ء لا يقبل القسمة على أي منها (باقي القسمة يساوي الواحد) . وهذا يدلنا على أن $ل_{١}$ لا ينتمي للمجموعة (١) وهذا يناقض ما افترضناه كذلك من أن المجموعة (١) تحوي جميع الأعداد الأولية ، فالمجموعة غير منتهية .

وبما أنه يمكن وضع الأعداد الأولية في متوالية (بترتيب الأعداد الأولية وفق كبرها) فانها تشكل مجموعة قابلة للعد . أو بشكل آخر ، لما كانت مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد

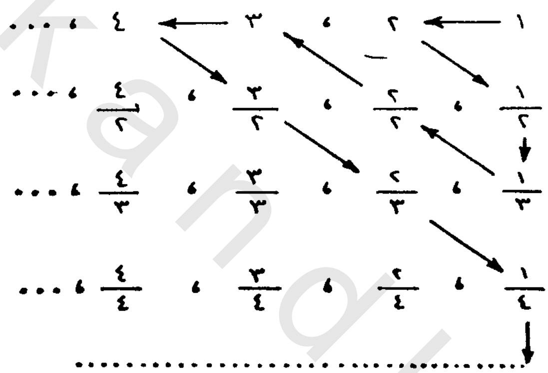
obeikandi.com

الطبيعية القابلة للعد فانها ، حسب نظرية سابقة ، قابلة للعد (على الأكثر) وحيث أنها ليست منتهية فهي قابلة للعد حتماً وهو المطلوب .

٢٩٤ – برهن أن مجموعة الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد .

الحـل :

لنشكل جدولاً على النحو التالي : نضع في السطر الأول جميع الأعداد العادية التي مخرجها ١ (الأعداد الطبيعية) مرتبة حسب كبرها ، ثم نكتب في سطر ثان جميع الأعداد العادية التي مخرجها ٢ مرتبة حسب كبرهـا كذلك وهكذا ... فنجد :



الشكل (٢١١)

لنرتب بعد ذلك الأعداد العادية (وفق الخط المرسوم) في متواليـة على أن نتجاوز كل عدد سبق أن مرّ مكافىء له فنجد :

$$١ ، ٢ ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، ٣ ، ٤ ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \ldots$$

ففي هذه المتوالية يمر كل عدد عادي موجب مرة واحدة فقط وهو المطلوب .

obeikandi.com

٢٩٥ – هل المجموعة :

ف = { (س ، ع ، ص) : (س^٢ + ع^٢ = ص^٢) ∧ (س ، ع ، ص ∈ ط*) }

المعروفة بمجموعة ثلاثيات فيثاغورث ، قابلة للعد ؟

الحل :

من الواضح أنه يلزم ويكفي لتكون الثلاثية المرتبة (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث أن يوجد مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه س و ع و ص على الترتيب . ومن ثلاثيات فيثاغورث الشهيرة نعلم ، على سبيل المثال ، الثلاثيات (٣ ، ٤ ، ٥) و (٦ ، ٨ ، ١٠) و (٥ ، ١٢ ، ١٣) .

وإذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث فان (ى س ، ى ع ، ى ص) ، حيث ى عدد صحيح موجب ، ثلاثية فيثاغورث أيضاً . وبالعكس إذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث وكان ى عاملا مشتركاً بين س و ع فانه يجب أن يكون ى عاملا لـ ص . وإذا كتبنا س = ى س$_١$ ، ع = ى ع$_١$ ، ص = ى ص$_١$ فعندئذ يكون :

$$(ى س_١)^٢ + (ى ع_١)^٢ = (ى ص_١)^٢$$

ومنه نجد أن (س$_١$ ، ع$_١$ ، ص$_١$) ثلاثية فيثاغورث أيضاً . نسمي كل ثلاثية فيثاغورث (أ ، ب ، حـ) ثلاثية فيثاغورث الأولية عندما لا يوجد عامل مشترك بين أ و ب و حـ . ومن الواضح عندئذ أن كل ثلاثية فيثاغورث تكتب بالشكل (ى أ$_١$ ، ى ب$_١$ ، ى حـ$_١$) حيث (أ$_١$ ، ب$_١$ ، حـ$_١$) أولية و ى عدد صحيح موجب .

سنبرهن أولاً أن ثلاثيات فيثاغورث الأولية قابلة للعد .

لتكن (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية . من الواضح أنه لا يمكن أن يوجد عامل مشترك بين أي اثنين من الأعداد الطبيعية س و ع و ص وإلا لكان هذا العامل ، باعتبار س^٢ + ع^٢ = ص^٢ ، عاملا مشتركاً

بين الأعداد الثلاثة . من هذا ينتج أنه لا يمكن لـ س و ع أن يكونا زوجيين معاً .

كذلك لا يمكن لـ س و ع أن يكونا فرديين معاً لأنه لو كانا فرديين معاً لاستطعنا أن نكتب :

س = ٢ ن + ١ ع = ٢ هـ + ١ (ن ، هـ ∋ ط)

ويكون :

ص٢ = (٢ ن + ١)٢ + (٢ هـ + ١)٢ = ٢ (٢ ن٢ + ٢ هـ٢ + ٢ ن + ٢ هـ + ١)

ومنه يتبين أن ص٢ قابل للقسمة على ٢ وبالتالي يكون ص زوجياً ، أي أن ص٢ قابل للقسمة على ٤ . وبالتالي يكون المقدار :

٢ ن٢ + ٢ هـ٢ + ٢ ن + ٢ هـ + ١ زوجياً وهذا غير ممكن .

لنبرهن بعد ذلك أنه إذا كانت (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية ، وإذا كان ع زوجياً فإن :

س = ك٢ − ل٢ ع = ٢ ك ل ص = ك٢ + ل٢

حيث ك و ل عددان صحيحان موجبان يحققان الشروط التالية :

(١) ك و ل أوليان فيما بينهما . (٢) ك > ل

(٣) أحد العددين ك و ل فردي والآخر زوجي .

وبالعكس إذا كان ك و ل عددين صحيحين موجبين محققين للشروط الثلاثة فإن (س ، ع ، ص) ثلاثية أولية .

لبرهان القسم الأول نلاحظ أن كلاً من س و ص فردي (لأن ع زوجي) وبالتالي يكون كل من ص + س و ص − س زوجياً ، أي انه يوجد عددان ب و حـ بحيث يكون :

ص + س = ٢ ب ص − س = ٢ حـ

إن العددين ب و حـ أوليان فيما بينهما لأنه إذا وجد عامل مشترك بينهما

obeikandi.com

فعندئذ يكون لـ ص و س عامل مشترك ، الأمر الذي يتنافى مع كون س و ص أوليين . وحيث أن $ع^٢ = ص^٢ - س^٢$ فان :

$$ع^٢ = ٤ ب ح$$

ولما كان ع زوجياً فإنه يوجد عدد ز بحيث يكون ع = ٢ ز ومنه :

$$ز^٢ = ب ح$$

وبما أن ب و ح أوليان فإنه يلزم أن يكون كل منهما مربع كامل ، أي أنه يوجد عددان صحيحان موجبان ك و ل أوليان فيما بينهما بحيث يكون :

$$ب = ك^٢ \qquad ح = ل^٢$$

وبالتالي نجد :

$$س = ك^٢ - ل^٢ \quad ، \quad ع = ٢ ك ل \quad ، \quad ص = ك^٢ + ل^٢ \qquad (*)$$

من الواضح أن ك > ل لأن س > ٠ كما أن أحد العددين ك و ل فردي والآخر زوجي ، لأنه لو كانا زوجيين لما كانا أوليين كما أنه لو كانا فرديين لكان كل من س و ص زوجياً وهذا يتنافى مع الفرض .

لبرهان القسم الثاني نفرض ك و ل عددين صحيحين موجبين يحققان الشروط الثلاثة المذكورة . فبما أن :

$$(٢ ك ل)^٢ + (ك^٢ - ل^٢)^٢ = (ك^٢ + ل^٢)^٢$$

فإن $س^٢ + ع^٢ = ص^٢$ أي أن (س ، ع ، ص) ثلاثية فيثاغورث . وهذه الثلاثية أولية لأن س و ص فرديان (اعتماداً على الشرط الثالث) كما أنه لا يوجد عامل مشترك بينهما ، لأن ذلك يستدعي وجود عامل مشترك بين ك و ل الأمر الذي يتنافى مع الشرط الأول .

وهكذا نجد أن هنالك تقابلاً بين مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الأولية التي يكون فيها ع زوجياً ومجموعة الأزواج (ك ، ل) ضمن الشروط الثلاثة المذكورة . لنلاحظ بعد ذلك أن مجموعة الأزواج (ك ، ل) ،

obeikandi.com

ضمن الشروط الثلاثة السابقة ، قابلة للعد . ويكفي من أجل ذلك أن نضع الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى ٢ ، ثم تلك التي مركبتها الثانية ٣ ، وهكذا ... ونرتب الأزواج في كل مرة وفق كبر المرتبة الثانية على أن نتجاوز تلك الأزواج التي لا تحقق مركبتاها الشروط الثلاثة فنجد :

(٢،١) ، (٣،٢) ، (٤،١) (٤،٣) ، (٥،٢) ،
(٥،٤) ، (٦،١) ، (٦،٥) ، (٧،٢) ....

نقابل كل زوج مرتب (ك ، ل) من هذه المجموعة بثلاثيتين أوليتين، في الأولى نحصل عليها بالتعويض في (*) والثانية تنتج من الأولى بتبديل موضعي س و ع .

وبما أن مجموعة الأزواج (ك ، ل) قابلة للعد فإن (س ، ع ، ص) المقابلة قابلة للعد كذلك ، ويتم ذلك وفق الجدول التالي :

ك	ل	س	ع	ص	ك	ل	س	ع	ص
٢	١	٣	٤	٥	٥	٤	٩	٤٠	٤١
٣	٢	٥	١٢	١٣	٦	١	٣٥	١٢	٣٧
٤	١	١٥	٨	١٧	٦	٥	١١	٦٠	٦١
٤	٣	٧	٢٤	٢٥	٧	٢	٤٥	٢٨	٥٣
٥	٢	٢١	٢٠	٢٩	٠	٠	٠	٠	٠

وهكذا تكون مجموعة ثلاثيات فيثاغورث الأولية موضوعة على شكل متوالية هي :

ث$_1$ = (٣ ، ٤ ، ٥) ، ث$_2$ = (٤ ، ٣ ، ٥)
ث$_3$ = (٥ ، ١٢ ، ١٣) ، ث$_4$ = (١٢ ، ٥ ، ١٣)
ث$_5$ = (١٥ ، ٨ ، ١٧) ، ث$_6$ = (٨ ، ١٥ ، ١٧)
ث$_7$ = (٧ ، ٢٤ ، ٢٥) ، ...

obeikandi.com

لننتقل بعد ذلك إلى ثلاثيات فيثاغورث بشكلها العام . لقد أشرنا فيما سبق اننا نستطيع الحصول على جميع ثلاثيات فيثاغورث انطلاقاً من الثلاثيات الأولية . فاذا وضعنا في السطر الأول من جدول، الثلاثية الاولية $ث_١$ والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالاعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) على التوالي ثم وضعنا في السطر الثاني الثلاثية الأولية $ث_٢$ والثلاثيات التي تنتج عنها بضرب كل مركبة من مركباتها بالأعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ...) على التوالي وهكذا ... وإذا رمزنا للثلاثيــة التي تنتج عن الثلاثية $ث_ن$ بضربها بـ ه بالرمز ه $ت_ن$ فاننا نحصــل على الجدول التالي :

$$\begin{array}{ccccc} ث_١ & ٢\,ث_١ & ٣\,ث_١ & ٤\,ث_١ & \dots \\ ث_٢ & ٢\,ث_٢ & ٣\,ث_٢ & ٤\,ث_٢ & \dots \\ ث_٣ & ٢\,ث_٣ & ٣\,ث_٣ & ٤\,ث_٣ & \dots \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

وكما في التمرين رقم (٢٩٤) نلاحظ أن هذه المجموعة قابلة للعد ، وأنه يمكن وضعها في متوالية من الشكل :

$ث_١$ ، $٢ث_١$ ، $ث_٢$ ، $ث_٣$ ، $٢ث_٢$ ، $٣ث_١$ ، $٤ث_١$ ، $٣ث_٢$، $٢ث_٣$ ، $ث_٤$،...

وهو المطلوب .

٢٩٦ – نعرّف العدد الجبري الحقيقي بأنه جذر حقيقي لمعادلة جبرية من الشكل :

$$ب_ن س^ن + ب_{ن-١} س^{ن-١} + \dots + ب_٢ س^٢ + ب_١ س + ب_٠ = ٠$$

حيث $ب_ن$ ، $ب_{ن-١}$ ، ... ، $ب_٢$ ، $ب_١$ ، $ب_٠$ أعــداد صحيحة وحيث ن عدد كيفي صحيح موجب و $ب_ن \neq ٠$.

برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقية قابلة للعد .

الحـل :

لنفرض $ب_ن > ٠$ (فان لم يكن الأمر كذلك غيرنا اشارة طرفي المعادلة) ولنكوّن العدد الصحيح الموجب :

$$ل = ن + ب_ن + |ب_{ن-١}| + \ldots + |ب_١| + |ب_٠| \qquad (*)$$

نسمي هذا العدد الذي لا يقل عن اثنين **رتبة المعادلة الجبرية** .

من الواضح أنه يقابل كل معادلة جبرية رتبة ، وانه يقابل كل رتبة عدد منته من المعادلات الجبرية لأن $ن \leqslant ل$ ، كما أن كلاً من $|ب_ك| \leqslant ل$ ($ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، \ldots ، ن$) وبهذا نتمكن من كتابة الاعداد الجبرية على شكل متوالية وفق ما يلي :

(١) نكتب الاعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات ذات الرتبة ٢ . ولكن من أجل $ل = ٢$ لا نجد سوى $ن = ١$ ، $ب_١ = ١$ ، أي اننا لا نجد سوى المعادلة $س = ٠$ وهذه لا تعطي سوى الجذر (صفر).

(٢) نكتب الأعداد الجبرية التي هي جذور المعادلات التي رتبتها ٣ . بالتعويض في (*) نجد الاحتمالات التالية :

$ن = ١$ ، $ب_١ = ٢$ ، $ب_٠ = ٠$ ؛ $ن = ١$ ، $ب_١ = ١$ ، $ب_٠ = \mp ١$ ؛

$ن = ٢$ ، $ب_١ = ١$ ، $ب_٠ = ٠$

والمعادلات الجبرية المقابلة هي :

$$٢ س = ٠ \quad ؛ \quad س \mp ١ = ٠ \quad س^٢ = ٠$$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) : $- ١ ، ١$

(٤) عندما يكون $ل = ٤$ نحصل على المعادلات الجبرية :

$$س \mp ٢ = ٠ \ ؛ \ ٢ س \pm ١ = ٠ \ ؛ \ ٣ س = ٠ \ ؛ \ س^٢ \mp ١ = ٠ \ ؛$$

$$س^{٢} \mp س = ٠ \quad ، \quad ٢ س^{٢} = ٠ \quad ، \quad س^{٣} = ٠$$

وهذه تعطي الجذور الجديدة التالية (مرتبة حسب كبرها) :

$$-٢ \ ، \ -\frac{١}{٢} \ ، \ +\frac{١}{٢}$$

فاذا تابعنا العمل على هذا الشكل نحصل على جميع الأعداد الجبرية الحقيقية مرتبة وفق متتالية . فمجموعة جميع الأعداد الجبرية الحقيقيـة قابلة للعد .

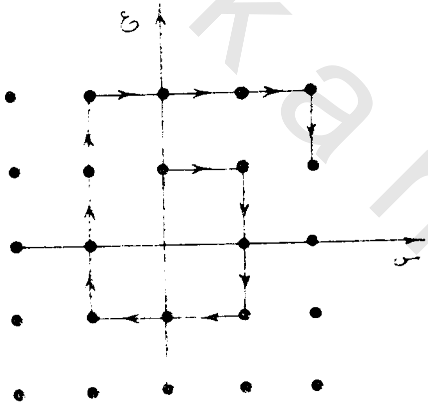
٢٩٧ – ان مجموعة نقط المستوي التي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

الحـل :

لنرتب النقط وفق الشكل فنحصل على :

(٠،٠) ، (٠،١) ، (١،١) ، (١،٠) ، (١ ، -١) ، (٠ ، -١) ...

الأمر الذي يؤكد المطلوب .



الشكل (٢١٠)

٢٩٨ – برهن ان اجتماع عناصر جماعة قابلة للعد (على الأكثر) من المجموعات القابلة للعد (على الأكثر) والمنفصلة مثنى مثنى هي قابلة للعد (على الاكثر) .

الحـل : لتكن :

$$\{ س_١ \ ، \ س_٢ \ ، \ ... \}$$

جماعة قابلة للعد (على الاكثر) من مجموعات قابلة للعد على الاكثر .

opeikandi.com

يمكن كتابة هذه المجموعات بالشكل :

$$\tilde{س}_{١} = \{ س_{١١} ، س_{٢١} ، س_{٣١} ، \dots ، س_{ن١} ، \dots \}$$

$$\tilde{س}_{٢} = \{ س_{١٢} ، س_{٢٢} ، س_{٣٢} ، \dots ، س_{ن٢} ، \dots \}$$

$$\tilde{س}_{٣} = \{ س_{١٣} ، س_{٢٣} ، س_{٣٣} ، \dots ، س_{ن٣} ، \dots \}$$

. . . .

$$\tilde{س}_{ن} = \{ س_{١ن} ، س_{٢ن} ، س_{٣ن} ، \dots ، س_{نن} ، \dots \}$$

. . . .

ويمكن كتابة اجتماع هذه المجموعات على شكل مجموعة قابلة للعد وفق ما يلي :

$$\{ س_{١١} ، س_{٢١} ، س_{١٢} ، س_{٣١} ، س_{٢٢} ، س_{١٣} ، س_{١٤} ، س_{٢٣} ، س_{٣٢} ، س_{٤١} ، \dots \}$$

(وقد رتبنا هذه العناصر مبتدئين أولاً بالعنصر الموجود في الزاوية العليا اليمنى وهو $س_{١١}$ ثم كتبنا بعد ذلك العنصرين $س_{٢١}$ ، $س_{١٢}$ ، ثم العناصر الواقعة على المستقيمات الموازية للمستقيم الذي يقع عليه العنصران $س_{١١}$ ، $س_{٢١}$ ، مبتدئين بأقربها منه وهكذا ... وعلى كل مستقيم نبدأ من الأعلى يساراً إلى الأسفل يميناً) .

٢٩٩ — برهن أن مجموعة الأعداد الحقيقيـة غير الجبرية (المتسامية Transcendent) ليست قابلة للعد .

الحـــل :

لو كانت هذه المجموعة قابلة للعد فعندئذ يكون اجتماع مجموعة الأعداد الجبرية وغير الجبرية قابلاً للعد (انظر التمرين السابق) وهذا يناقض ما نعلمه في أن مجموعة الاعداد الحقيقية غير قابلة للعد وهو المطلوب .

obeikandi.com

٣٠٠ – برهن أنه إذا كان ج١ =] ٠،١ [فان قدرة ج١ × ج١ هي قدرة المستمر (بعبارة أخرى : برهن أن قدرة نقاط المربع ٠ < س ≤ ١ ، ٠ < ع ≤ ١ هي قدرة المستمر) .

الحل :

من المعلوم أن كل عدد ينتمي للمجال] ٠،١ [يمكن كتابته على شكل كسر عشري غير منته (بشكل وحيد) . فاذا كان س و ع ، على سبيل المثال ، معطيين بالتمثيل العشري :

س = ٠,٣٠٦ ٠٠ ٧ ٨ ٩ ٠٠٠

ع = ٠,٠٠١ ٢ ٣ ٠٠٤ ٦ ٠٠٠

فاننا نكوّن في كل عدد مجموعات من الارقام بحيث تنتهي كل مجموعة عند أول رقم مغاير للصفر وعندئذ نقابل هذا الزوج من الاعداد بعدد ص على النحو التالي : نضع المجموعة الرقمية الاولى من س ثم المجموعة الرقمية الاولى من ع فالمجموعة الرقمية الثانية من س فالمجموعة الرقمية الثانية من ع وهكذا ... فيكون في مثالنا :

ص = ٠,٣ ٠٠١ ٠٦ ٢ ٠٠٧ ٣ ٨ ٠٠٤ ٩ ٦٠٠٠

فكل زوج (س،ع) يقابل عدداً وحيداً ص . وبالعكس : بما أن كل مجموعة رقمية من س أو ع هي مجموعة رقمية في ص فان كل ص تقابل تماماً زوجاً معيناً (س،ع) هو بالطبع ذلك الزوج الذي تكونت منه ، فالعدد :

ص = ٠,١١ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ١٠ ٠٠٠

يقابل :

س = ٠,١ ١ ٠١ ٠٠٠

ع = ٠,١ ٠١ ٠١ ٠٠٠

وبما أن هذا التقابل واحد لواحد فان ج١ × ج١ ≈ ج١ وهو المطلوب .

openkanz.com

٣٠١ – اذا كافأت كل مجموعة من مجموعتين مجموعة جزئية من الثانية فإن هاتين المجموعتين متكافئتان (نظرية كانتور – بيرنشتاين) .

الحل :

لتكن سـ و ع مجموعتين وليكن :

$$\text{ع} \approx \text{سـ}_{١} \subset \text{سـ} \quad ، \quad \text{سـ} \approx \text{ع}_{١} \subset \text{ع}$$

والمطلوب أن نبرهن أن $\text{سـ} \approx \text{ع}$.

بما أن $\text{ع} \approx \text{سـ}_{١}$ فان $\text{ع}_{١}$ تكافىء مجموعة $\text{سـ}_{٢}$ جزئية من $\text{سـ}_{١}$ ومنه نجد : $\text{سـ} \approx \text{سـ}_{٢}$ وبالتالي يوجد تطبيق تا : $\text{سـ} \to \text{سـ}_{٢}$ غامر ومتباين . ونجد ، وفق هذا التطبيق ، أن :

$$\text{سـ}_{١} \to \text{سـ}_{٣} \qquad (\text{سـ}_{٣} \subset \text{سـ}_{٢})$$
$$\text{سـ}_{٢} \to \text{سـ}_{٤} \qquad (\text{سـ}_{٤} \subset \text{سـ}_{٣})$$
$$\text{سـ}_{٣} \to \text{سـ}_{٥} \qquad (\text{سـ}_{٥} \subset \text{سـ}_{٤})$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

ولما كان تا غامراً ومتبايناً فان :

$$\text{سـ} - \text{سـ}_{١} \to \text{سـ}_{٢} - \text{سـ}_{٣}$$
$$\text{سـ}_{٣} - \text{سـ}_{٤} \to \text{سـ}_{١} - \text{سـ}_{٢}$$
$$\text{سـ}_{٤} - \text{سـ}_{٥} \to \text{سـ}_{٢} - \text{سـ}_{٣}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

والمجموعتان :

$$(\text{سـ} - \text{سـ}_{١}) \cup (\text{سـ}_{٢} - \text{سـ}_{٣}) \cup (\text{سـ}_{٤} - \text{سـ}_{٥}) \cup \ldots$$
$$(\text{سـ}_{٢} - \text{سـ}_{٣}) \cup (\text{سـ}_{٤} - \text{سـ}_{٥}) \cup (\text{سـ}_{٦} - \text{سـ}_{٨}) \cup \ldots \qquad (*)$$

obeikandi.com

والتنان تتكون كل واحدة منهما من اجتماع مجموعات منفصلة مثنى مثنى ، متكافئتان . لنضع الآن :

$$\tilde{\text{ص}} = \tilde{\text{س}} \cap \tilde{\text{س}}_1 \cap \tilde{\text{س}}_2 \cap \tilde{\text{س}}_3 \cap \ldots$$

فعندئذ يمكننا أن نبرهن بسهولة أن :

$$\tilde{\text{س}} = \tilde{\text{ص}} \cup (\tilde{\text{س}} - \tilde{\text{س}}_1) \cup (\tilde{\text{س}}_1 - \tilde{\text{س}}_2) \cup (\tilde{\text{س}}_2 - \tilde{\text{س}}_3) \cup \ldots$$

$$\tilde{\text{س}}_1 = \tilde{\text{ص}} \cup (\tilde{\text{س}}_1 - \tilde{\text{س}}_2) \cup (\tilde{\text{س}}_2 - \tilde{\text{س}}_3) \cup (\tilde{\text{س}}_3 - \tilde{\text{س}}_4) \cup \ldots$$

ومنه نجد :

$$\tilde{\text{س}} = [\tilde{\text{ص}} \cup (\tilde{\text{س}}_1 - \tilde{\text{س}}_2) \cup (\tilde{\text{س}}_3 - \tilde{\text{س}}_4) \cup \ldots] \cup [(\tilde{\text{س}} - \tilde{\text{س}}_1) \cup (\tilde{\text{س}}_2 - \tilde{\text{س}}_3) \cup \ldots]$$

$$\tilde{\text{س}}_1 = [\tilde{\text{ص}} \cup (\tilde{\text{س}}_1 - \tilde{\text{س}}_2) \cup (\tilde{\text{س}}_3 - \tilde{\text{س}}_4) \cup \ldots] \cup [(\tilde{\text{س}}_2 - \tilde{\text{س}}_3) \cup (\tilde{\text{س}}_4 - \tilde{\text{س}}_5) \cup \ldots]$$

ان ما بين القوسين الكبيرتين الاوليتين في الطرف الايمن في كل من المساواتين الاخيرتين العبارة ذاتها ، أما ما بين القوسين الباقيتين فنجد بسبب (*١) مجموعتين متكافئتين وبالتالي $\tilde{\text{س}} \approx \tilde{\text{س}}_1$ وبما أن $\tilde{\text{س}}_1 \approx \tilde{\text{ع}}$ فإن $\tilde{\text{س}} \approx \tilde{\text{ع}}$ وهو المطلوب .

٣٠٢ – برهن انه إذا كانت $م$ و $م'$ و $م''$ ثلاثة أعداد أساسية وإذا كان $م < م'$ و $م' < م''$ فان $م < م''$.

الحل :

لتكن $\tilde{\text{س}}$ و $\tilde{\text{ع}}$ و $\tilde{\text{ص}}$ المجموعات الممثلة للأعداد الاساسية $م$ و $م'$ و $م''$ على الترتيب ، فاستناداً إلى الفرض يوجد مجموعتان جزئيتان $\tilde{\text{ع}}_1$ و $\tilde{\text{ص}}_1$ بحيث :

obeikan.com

$ع_1 \subseteq ع$ ، $صـ_1 \subseteq صـ$ ، $سـ \approx ع_1$ ، $ع \approx صـ_1$

واستناداً إلى التكافؤ الأخير يوجد تقابل بين المجموعتين $ع$ و $صـ_1$ وبما أن $ع$ مجموعة جزئية من $ع$ فانه يوجد مجموعة $صـ_2$ جزئية من $صـ_1$ بحيث $ع_1 \approx صـ_2$ وبالتالي $سـ \approx صـ_2$. بقي أن نبرهن انه لا يمكن لـ $صـ$ أن تكافىء أية مجموعة جزئية من $سـ$. لنفرض مؤقتاً أنه يوجد مجموعة جزئية من $سـ$ ، ولتكن $سـ_1$ بحيث $صـ \approx سـ_1 \subseteq سـ$. عندئذ بما أن $سـ \approx ع_1$ فانه يوجد مجموعة $ع_2$ جزئية من $ع_1$ بحيث $سـ_1 \approx ع_2$ وبالتالي $صـ \approx ع_2$ وهذا يتنافى مع كون مَـ < مـً وهو المطلوب .

٣٠٣ – اذا كان مـ عدداً أساسياً غير محدود و ن عدداً أساسياً محدوداً فإن مـ > ن .

الحل :

لنفرض أن $سـ$ مجموعة ممثلة لـ مـ وأن $ع$ مجموعة ممثلة لـ ن فعندئذ يوجد في $سـ$ مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة $ع$ ($سـ$ مجموعة غير منتهية و $ع$ مجموعة منتهية) غير أن العكس غير ممكن أي أنه لا يمكن أن نجد في $ع$ المجموعة المنتهية ، مجموعة جزئية مكافئة للمجموعة غير المنتهية $سـ$.

٣٠٤ – أثبت ان أ. < ر. < تا.

الحل :

اذا أخذنا المستمر [٠ ، ١] ممثلاً لـ ر. فعندئذ نعلم أن المجموعة { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ... } الجزئية من المستمر مجموعة قابلة للعد ولكنه لا يمكن للمستمر أن يكافىء مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد وإلا لكافأ

obeikandi.com

المستمر مجموعة قابلة للعد (حسب التمرين ٣٠١) وهذا غير ممكن ومنه ينتج أن ﭏ. > ر. .

كذلك إذا أخذنا مجموعة التطبيقات الحقيقيـة تا المعرفة على المجـال [٠،١] ممثلة لـ با فإنه يوجد مجموعة جزئية من مجموعة التطبيقات هذه تكافىء المستمر . هذه المجموعة هي التطبيقات الثابتة :

$$\text{تا}\ (\text{س}) = \begin{cases} \text{ب} & \text{لما}\ \ \text{س} = \text{ب} \in [\,٠،١\,] \\ ٠ & \text{لما}\ \ \text{س} \in \{[\,٠،١\,] - \text{ب}\} \end{cases}$$

فكل عنصر من المستمر يقابل تطبيقاً وبالعكس كل تطبيق من المجموعة الجزئية التي ذكرناها يقابل عنصراً من المستمر . وبالوقت نفسه لا يمكن لمجموعة التطبيقات تا أن تكافىء مجموعة جزئية من المستمر وإلا (حسب التمرين ٣٠١) لكان المستمر مكافئاً للمجموعة تا وهذا غير ممكن وهو المطلوب .

٣٠٥ – اذا كانت ب ، حـ ، ء ثلاثة أعداد أساسية فاثبت أن :

$$\text{ب} + \text{حـ} = \text{حـ} + \text{ب}$$

$$(\text{ب} + \text{حـ}) + \text{ء} = \text{ب} + (\text{حـ} + \text{ء})$$

الحـل :

إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى ممثلة للأعداد ب ، حـ ، ء على الترتيب فإن :

$$\text{سـ} \cup \text{ع} \approx \text{ع} \cup \text{سـ}$$

$$(\text{سـ} \cup \text{ع}) \cup \text{صـ} \approx \text{سـ} \cup (\text{ع} \cup \text{صـ})$$

الأمر الذي ينتج عنه المطلوب .

obeikandl.com

٣٠٦ – برهن أنه إذا كان $م_1 \leq ن_1$ ، $م_2 \leq ن_2$ حيث $م_1$ ، $م_2$ ، $ن_1$ ، $ن_2$ أعداد أساسية فان :

$$م_1 + م_2 \leq ن_1 + ن_2$$

الحل :

لتكن $س_1$ ، $س_2$ ، $ع_1$ ، $ع_2$ أربع مجموعات منفصلة مثنى مثنى ، ممثلة للأعداد $م_1$ ، $م_2$ ، $ن_1$ ، $ن_2$ على الترتيب . عندئذ يوجد حسب الفرض مجموعة $\overline{ع_1}$ جزئية من $ع_1$ ومجموعة $\overline{ع_2}$ جزئية من $ع_2$ بحيث $س_1 \approx \overline{ع_1}$ و $س_2 \approx \overline{ع_2}$. وبما أن المجموعات المذكورة منفصلة فان $س_1 \cup س_2 \approx \overline{ع_1} \cup \overline{ع_2}$. ولما كانت $\overline{ع_1} \cup \overline{ع_2}$ جزئية من $ع_1 \cup ع_2$ فان $م_1 + م_2 \leq ن_1 + ن_2$ وهو المطلوب .

٣٠٧ – برهن أن :

(١) $\aleph_0 + ن = \aleph_0$

(٢) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

حيث ن عدد أساسي محدود .

الحل :

(١) لنفرض $\{١ ، ٢ ، ... ، ن\}$ المجموعة الممثلة لـ ن ولنفرض $\{ن + ١ ، ن + ٢ ، ...\}$ المجموعة الممثلة لـ $\aleph_0$ ، من الواضح أن اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها $\aleph_0$.

(٢) لبرهان القاعدة الثانية يكفي أن نمثل الحد الأول من الطرف الأيمن بمجموعة الأعداد الطبيعية الفردية والحد الثاني بمجموعة الأعداد الزوجية فعندئذ يكون اجتماع هاتين المجموعتين هو مجموعة الأعداد الطبيعية التي قدرتها $\aleph_0$.

obeikandi.com

٣٠٨ – برهن أن :

ر. + ر. = ر.

ر. + ن = ر.   (حيث ن عدد أساسي محدود)

ر. + م. = ر.

الحـل :

نبدأ ببرهان المساواة الأولى : لنعتبر المجموعة [٠،١] ممثل الحد الأول في الطرف الأيمن والمجموعة [١،٢] ممثل الحد الثاني . ان اجتماع هاتين المجموعتين هو المجموعة [٠،٢] التي لها قدرة المستمر وهو المطلوب .

ولبرهان المساواة الثانية نلاحظ أن ر. ≦ ن + ر. لأن المجموعـة الممثلة للطرف الأيمن تكافىء مجموعة جزئية من المجموعة الممثلة للطرف الأيسر . ثم إن : ن + ر. ≦ ر. + ر. = ر. اذن :

ر. ≦ ن + ر. ≦ ر.   ومنه   ن + ر. = ر.

وبالطريقة نفسها يمكن برهان المساواة الأخيرة .

٣٠٩ – برهن أنه إذا كانت ب ، حـ ، ء ثلاثة أعداد أساسية فان :

ب × حـ = حـ × ب

(ب × حـ) × ء = ب × (حـ × ء)

(ب + حـ) × ء = ب × ء + حـ × ء

الحـــل :

إذا كانت سـ و عـ و صـ ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى ممثلة لـ ب ، حـ ، ء على الترتيب فان :

سـ × عـ ≈ عـ × سـ

obeikandi.com

$$(\text{س} \times \text{ع}) \times \text{ص} \approx \text{س} \times (\text{ع} \times \text{ص})$$

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \times \text{ص} \approx (\text{س} \times \text{ص}) \cup (\text{ع} \times \text{ص})$$

ولقد سبق برهان التكافؤين الأول والثاني في التمرين ٢٨٩ ، ويبرهن على التكافؤ الثالث بالطريقة نفسها . ومن هذه التكافؤات ينتج المطلوب مباشرة ، إذا تذكرنا أن العدد الأساسي لـ $\text{س} \times \text{ع}$ هو ت . حـ وأن العدد الأساسي لـ $\text{ع} \times \text{ص}$ هو حـ . ى وأن العدد الأساسي لـ $\text{س} \times \text{ع} \times \text{ص}$ هو ت . حـ . ى .

٣١٠ – برهن أنه إذا كانت م_1 و م_2 و ن_1 و ن_2 أعداداً أساسية وكان :

$$\text{م}_1 \leqq \text{ن}_1 \quad ، \quad \text{م}_2 \leqq \text{ن}_2$$

فإن :

$$\text{م}_1 \, \text{م}_2 \leqq \text{ن}_1 \, . \, \text{ن}_2$$

الحـــل :

لتكن س_1 ، س_2 ، ع_1 ، ع_2 مجموعات ممثلة لـ م_1 ، م_2 ، ن_1 ، ن_2 على الترتيب عندئذ يوجد مجموعة $\overline{\text{ع}}_1$ جزئية من ع_1 ومجموعة $\overline{\text{ع}}_2$ جزئية من ع_2 بحيث يكون :

$$\text{س}_1 \approx \overline{\text{ع}}_1 \quad ، \quad \text{س}_2 \approx \overline{\text{ع}}_2$$

وبالتالي يكون :

$$\text{س}_1 \times \text{س}_2 \approx \overline{\text{ع}}_1 \times \overline{\text{ع}}_2 \subseteq \text{ع}_1 \times \text{ع}_2$$

$$|\text{س}_1 \times \text{س}_2| \leqq |\text{ع}_1 \times \text{ع}_2|$$

وبالعودة إلى تعريف ضرب الأعداد الأساسية نجد المطلوب .

obeikandl.com

٣١١ – برهن أن :

(١)   ا. . ا. = ا.

(٢)   ن . ا. = ا.   (∀ العدد المحدود ن)

الحل :

(١) نفرض أن ا. ممثل بالمجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } فعندئذ يتمثل الجداء ا. · ا. بمجموعة الأزواج المرتبة (ب،ح) أي بالمجموعة :

(١،١) ، (١،٢) ، ...

(٢،١) ، (٢،٢) ، ...

(٣،١) ، (٣،٢) ، ...

. . . . . .

وهذه المجموعة قابلة للعد كما يبرهن بسهولة .

(٢) نلاحظ استناداً إلى التمرين السابق أن :

ا. ≦ ن ا. ≦ ا. . ا. = ا.

ومنه ينتج المطلوب .

٣١٢ – برهن أن :

(١)   ا. . ر. = ر.

(٢)   ن . ر. = ر.   (∀ العدد المحدود ن)

(٣)   ر. . ر. = ر.

الحـــل :

لنفرض أن { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } مجموعة ممثلة لـ ا. وأن] ٠،١ [ممثلة لـ ر. فعندئذ تكون مجموعة الجداء لهاتين المجموعتين هي مجموعة

obeikandi.com

الأزواج (ن،س) حيث ن عدد طبيعي موجب كيفي و س عنصر كيفي من] ١،٠ [. فاذا قابلنا كل زوج (ن،س) بالعدد ن + س فعندئذ نكون قد قابلنا مجموعة الجداء الديكارتي (ن،س) بنصف المستقيم (س > ١) . ونصف المستقيم هذا ذو قدرة تساوي قدرة المستمر وهو المطلوب .

(٢) إن :

ر. ≤ ن. ر. ≤ م. . ر. = ر.

(٣) نفرض أن المستمر ممثل بالمجال] ١،٠] عندئذ تتمثل ر. . ر. بالمربع ٠ > س ≤ ١ ، ٠ > ع ≤ ١ الذي له قدرة المستمر كما في تمرين سابق وهو المطلوب .

★ ★

obeikandl.com

تمارين غير محلولة

٣١٣ – ابحث في التقابل بين المجموعتين :

مج = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } و ج = { ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ... }

واستنتج من ذلك تكافؤ المجموعتين .

٣١٤ – برهن أن مجموعة جميع الأعداد العادية (الموجبة والسالبة والصفر) قابلة للعد .

٣١٥ – ابحث في تكافؤ مجموعتي نقط ضلعين في مثلث .

٣١٦ – برهن أن مجموعة جميع الأعداد الجبرية (الحقيقية والعقدية) قابلة للعد .

٣١٧ – بيّن أن مجموعة جميع الأزواج المرتبة (ب ، حـ) حيث ب و حـ عددان صحيحان ، قابلة للعد .

٣١٨ – عيّن قدرة المجموعة ك :

ك = { س : جب $\frac{\pi}{2}$ س = ١ ∧ س ∋ ح }

٣١٩ – هل مجموعة نقط المستقيم ع = $\frac{3}{4}$ س + ٢ والتي احداثيا كل منها عددان صحيحان قابلة للعد .

obeikandi.com

٣٢٠ – هل مجموعة نقط القطع ع = $\frac{١}{س}$ والتي احداثيا كل منهما عددان صحيحان قابلة للعد .

٣٢١ – برهن انه إذا كان كل من سـ و ع مجموعة قابلة للعد فان المجموعة سـ × ع قابلة للعد كذلك .

٣٢٢ – يمكن مقابلة الأعداد الصحيحة بالأعداد الطبيعية الموجبة كما يلي:

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ...

٠ ١ −١ ٢ −٢ ...

أوجد التطبيق تا : ط* ← صـ الذي يعطي ذلك التقابل بين ط* و صـ .

٣٢٣ = برهن أن قدرة نقاط المكعب :

٠ ≤ س ≤ ١ ، ٠ ≤ ع ≤ ١ ، ٠ ≤ ص ≤ ١

هي قدرة المستمر .

٣٢٤ – إذا كان م عدداً أساسياً غير محدود فان م ≥ ا.

٣٢٥ – برهن أنه إذا كان م ≤ ن (م و ن عددان أساسيان) فإن:

م . ل ≤ ن . ل ∀ العدد الأساسي ل

م + ل ≤ ن + ل

٣٢٦ – برهن أنه مهما كان العدد غير المحدود م فإن :

ا + م = م .

٣٢٧ – برهن أنه إذا كانت ب مجموعة الأعداد الحقيقية غير الجبرية فان |ب| = ر.

obeikandi.com

أجوبة وإرشادات

٣١٣ – هنالك تطبيق غامر ومتباين : مج ⟵ $ج_{١}$

$س \longleftarrow ١٠^{س-١}$

٣١٤ – سبق لنا في تمرين محلول أن وجدنا أن مجموعة جميع الأعداد العادية الموجبة قابلة للعد ، فاذا فرضنا $\{ر_{١}، ر_{٢}، ر_{٣}، \ldots\}$ المتوالية التي وضعت وفقها الأعداد العادية الموجبة فعندئذ تكون مجموعة جميع الأعداد العادية هي :

$$\{\ldots، -ر_{١}، ر_{١}، -ر_{٢}، ر_{٢}، \ldots\}$$

الأمر الذي يؤكد قابلية العد للمجموعة المطلوبة .

٣١٥ – المجموعتان متكافئتان لأن هناك تقابلا بين الضلعين ويكفي من أجل ذلك أن نقابل كل نقطة من أحد الضلعين بالنقطة التي تقع معها على مستقيم مواز للضلع الثالث .

٣١٨ – ك = $\{١، -٣، ٥، -٧، ٩، -١١، \ldots\}$ ويكون :
$|ك| = ا$.

٣١٩ – نعم : النقط المطلوبة هي :
$\{(١،٠)، (٤،٤)، (-٤، -٢)، (٨،٧)، \ldots\}$

obeikandi.com

٣٢٠ - لا ، بل هي منتهية حيث تتكون من الزوجين (١ ، ١) ،
(- ١ ، - ١) فقط .

٣٢٣ - $تا(س) = \begin{cases} -\frac{س}{٢} + \frac{١}{٢} & \text{عندما يكون س فردياً} \\ \frac{س}{٢} & \text{عندما يكون س زوجياً} \end{cases}$

٣٢٥ - الجواب واضح لأن في كل مجموعة غير منتهية مجموعة جزئية
قابلة للعد .

★

obeikandl.com