الفصل السابع

التوابع ـ التطبيقات

درسنا في الفصل الخامس العلاقات بين عناصر مجموعتين متباينتين أو متساويتين ، وسندرس في هذا الفصل نوعاً خاصاً من العلاقات هي التوابع ، ويعدُّ مفهوم التابع من المفاهيم التي لها تطبيقاتها العديدة في الحياة .

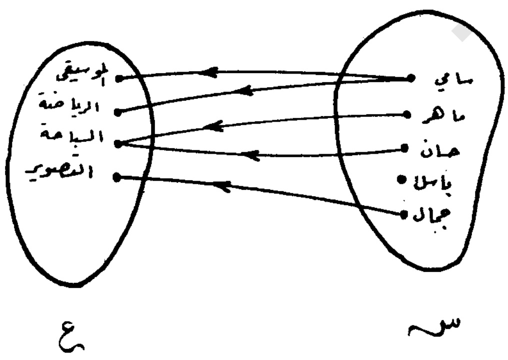
٦٦ – أمثلة توضيحية :

مثال (١) : ليكن : س = { سامي ، ماهر ، حسان ، باسل ، جمال }

و ع = { الموسيقى ، الرياضة ، السباحة ، التصوير }

والعلاقة من س إلى ع المعرفة بالخاصة (س يمارس ع)

حيث (س ، ع) ∋ س × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٦) .



الشكل (١٢٦)

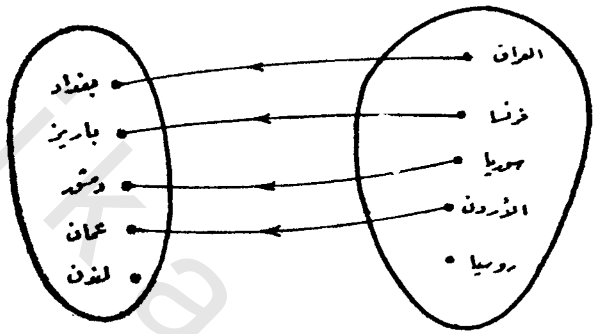
مثال (٢) : لتكن مجموعة الدول

سـ = { العراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن ، روسيا }

ومجموعة المدن ع = { باريز ، بغداد ، دمشق ، عمان ، لندن }

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س عاصمتها ع)

حيث (س،ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٧) :



ع الشكل (١٢٧) سـ

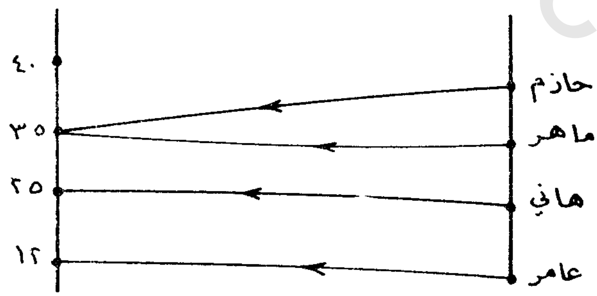
مثال (٣) : لتكن مجموعة الأشخاص

سـ = { عامر ، هاني ، ماهر ، حازم }

ومجموعة الأعمار ع = { ٣٥ ، ١٢ ، ٤٠ ، ٢٥ }

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س عمره ع)

حيث (س،ع) ∈ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٨) :



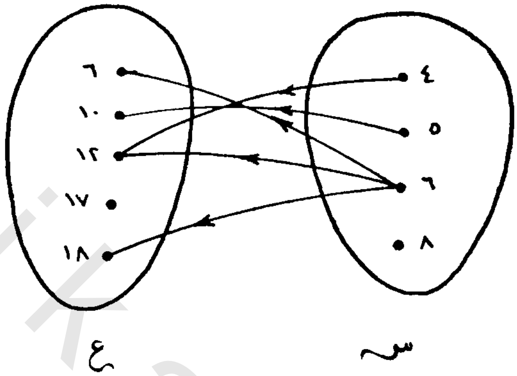
ع الشكل (١٢٨) سـ

مثال (٤) : لتكن مجموعة الأعداد سـ = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨}

ع = {٦ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٨}

والعلاقة من سـ إلى ع المعرفة بالخاصة (س يقسم ع)

حيث (س، ع) ∋ سـ × ع والممثلة سهمياً بالشكل (١٢٩) :



الشكل (١٢٩)

٦٧ – مفهوم التابع :

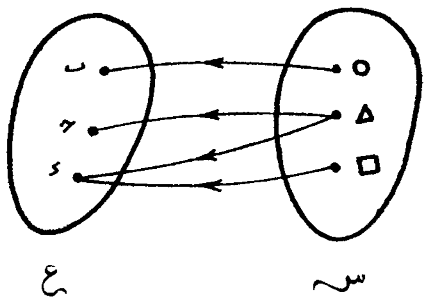
بتدقيق المخططات السهمية الأربعة السابقة نرى في المثالين (١، ٤) أن بعض العناصر من سـ ينطلق منها سهم واحد فقط ، والبعض الآخر ينطلق منها أكثر من سهم ، بينما نرى في المثالين (٢ ، ٣) أنه ينطلق من كل عنصر من سـ سهم واحد على الأكثر (أي صفر من الاسهم أو سهم واحد فقط) .

تسمى العلاقتان في المثالين ٢ ، ٣ ومثيلاتها **علاقات تابعية** أو توابع .

ومنه :

> **التابع** : نقول عن علاقة ثنائية من سـ إلى ع إنها تابع Fonction . Function إذا كان لكل عنصر من سـ مقابل واحد على الاكثر من ع .

مثال (٥) : العلاقة التي يبينها الشكل (١٣٠) ليست تابعاً لأن العنصر △ له مقابلان هما حـ ، ء .



الشكل (١٣٠)

مثال (٦) : العلاقة التي بيانها {(٣،٦) ، (٣،٩) ، (٢،٤) ، (٥،١٠)} ليست تابعاً لأن العنصر ٣ من منطلقها له مقابلان هما ٦،٩ من المستقر .

مثال (٧) : لتكن المجموعة س = {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} .

والعلاقة في س المعرفة بالخاصة س يليه العدد ع مباشرة حيث (س ، ع) ∈ س × س

إن بيان هذه العلاقة هو :

ء = {(−٢ ، −١) ، (−١ ، ٠) ، (٠،١) ، (١،٢) ، (٢،٣)}

ونلاحظ أن كل عنصر من س له مقابل واحد على الأكثر من س وفق العلاقة المفروضة . (فالعنصر ٣ ليس له مقابل ولكل من بقية العناصر مقابل واحد فقط) فالعلاقة المفروضة هي تابع .

٦٨ – تعاريف واصطلاحات :

١ – إذا كانت لدينا علاقة تابعية ر منطلقها س ومستقرها ع فإننا نستعمل الرمز تا (بدلاً من ر) ونكتب :

تا : سـ ⟵ ع   أو سـ $\xrightarrow{\text{تا}}$ ع

ونقرأ : (تا تابع منطلقة سـ ومستقره ع) ، أو (تا تابع من سـ إلى ع) .

٢ – العنصر الوحيد ع من المستقر الذي يرتبط بالعنصر س من المنطلق وفق التابع تا يسمى **صورة** س وفق تا أو **قيمة التابع** الموافقة للعنصر س من المنطلق .

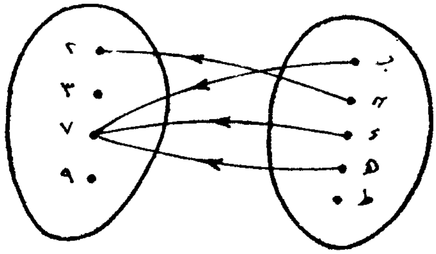
ويرمز له بالرمز تا (س) ويكون تا (س) = ع

٣ – يقال عن تابع إنه معرف من أجل عنصر من المنطلق إذا ارتبط بهذا العنصر عنصر من المستقر وفق هذا التابع ومجموعة عناصر المنطلق التي يرتبط كل منها بمقابل وحيد من مجموعة المستقر تسمى **مجموعة تعريف التابع** (قاعدة التابع) وعلى هذا فمجموعة تعريف التابع في المثال (٧) هي { – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } لأن التابع غير معرف من أجل العنصر ٣ .

ومجموعة تعريف التابع في المثال (٢) هي { العراق ، فرنسا ، سورية ، الأردن } والتابع غير معرف من أجل العنصر (روسيا).

مثال : العلاقة من المجموعة : سـ = { ب ، حـ ، ى ، هـ ، ط }
إلى المجموعة : ع = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }
التي يمثلها الشكل (١٣١) هي تابع .

لأن كل عنصر من مجموعة المنطلق سـ يقابله عنصر واحد فقط من مجموعة المستقر ع .



ع   س

الشكل (١٣١)

ولذا نكتب : تا : س ← ع ونعني بذلك التابع الذي :

منطلقه س = { ب ، ح ، د ، هـ ، ط } ومستقره ع = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }

إن صورة ح وفق هذا التابع هي ٢ أي تا (ح) = ٢

وصورة ب هي نفسها صورة كل من العنصرين د ، هـ

فالعناصر الثلاثة ب ، د ، هـ قيمة واحدة وفق التابع المفروض

أي أن : تا (ب) = تا (د) = تا (هـ) = ٧

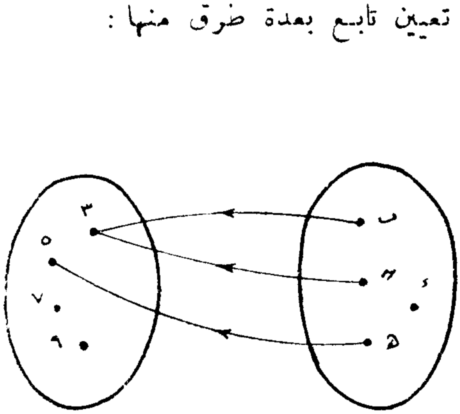
ونلاحظ أن التابع غير معرف من أجل العنصر ط من س

فمجموعة تعريف هذا التابع هي { ب ، ح ، د ، هـ }

٦٩ – طرق تعيين تابع : يمكن تعيين تابع بعدة طرق منها :

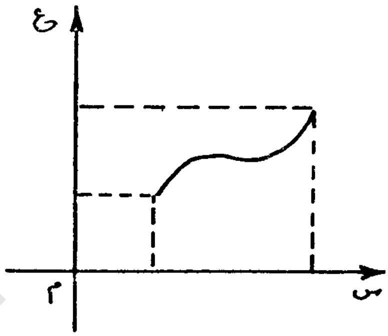
أولاً – بمخططه :

مثال (١) : التابع
تا : س ← ع
المعين بالتمثيل
السهمي في الشكل
(١٣٢) .



ع   الشكل (١٣٢)   س

مثال (٢) : التابع تا : س ← ع المعين بالتمثيل البياني في الشكل (١٣٣) .



الشكل (١٣٣)

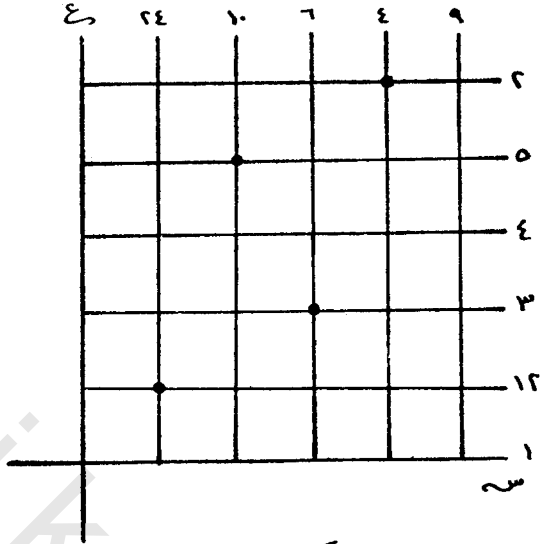
مثال (٣) : التابع تا : س ← ع المبين بالجدول الآتي :

س	أ	ب	حـ	ء
ع	١	٣	٣	٥

مثال (٤) : التابع تا : س ← ع المعين بالجدول الآتي :

س/ع	٣٠ درجة	٧٠ درجة	٩٠ درجة	١٥ درجة
حسان		×		
غازي			×	
رامي	×			

مثال (٥) : التابع تا : س ← ع المعين في الشكل (١٣٤) .



الشكل (١٣٤)

ثانياً – ببيانه :

مثال : التابع تا : سـ ← ع الذي بيانه :

د = { (٢،٦) ، (٣،٩) ، (٧،٢١) }

وواضح أنّ : تا (٢) = ٦ ، تا (٣) = ٩ ، تا (٧) = ٢١

ثالثاً – بقاعدة ربط أو أكثر :

مثال (١) : التابع تا : سـ ← ع من سـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ }
إلى ع = { ١، ٣، ٥، ٦، ٧ } وفق قاعدة الربط ع = س + ١
حيث (س ، ع) ∈ سـ × ع ويكتب التابع في هذه الحالة بالشكل :

تا : سـ ← ع

س ← س + ١

أو بالشكل : تا : سـ ← ع : س ← س + ١

مثال (٢) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$

حيث ح مجموعة الأعداد العادية .

وواضح أن هذا التابع معرف من أجل جميع قيم س عدا القيم التي تعدم المخرج أي إذا كان س + ١ ≠ ٠ إن مجموعة تعريف هذا التابع هي ح − {− ١} ويكون لدينا مثلاً :

تا (٠) = − ١ ، تا (+ ١) = ٠ ، تا (٣) = $\frac{١}{٢}$ ، . . . .

مثال (٣) : ليكن التابع تا : ح ← ح (حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية) والمعرف وفق قاعدتي التقابل الآتيتين :

س ← − س إذا كان س < ٠

س ← س إذا كان س ≥ ٠

أي أن : تا (− ٥) = ٥ ، تا (−٣) = ٣ ، تا (− ١) = ١

تا (٥) = ٥ ، تا (٧) = ٧ ، تا (٢٠) = ٢٠، ...

ونعبر عن هذا التابع بالشكل الآتي :

تا : ح ← ح : $\begin{cases} \text{س} \leftarrow -\text{س} & \text{إذا كان س} < ٠ \\ \text{س} \leftarrow \text{س} & \text{إذا كان س} \geq ٠ \end{cases}$

ملاحظة :

نرى مما تقدم أن التابع يتعين تماماً بمعرفة :

١ − مجموعة المنطلق : وهي المجموعة التي يأخذ المتحول قيمه فيها .

٢ − مجموعة المستقر : وهي المجموعة التي يأخذ التابع قيمه فيها .

٣ − القاعدة أو القواعد التي يتم وفقها التقابل بين عناصر المنطلق والمستقر .

٧٠ – انطباق تابعين « Coïncidence‹Coincidence » :

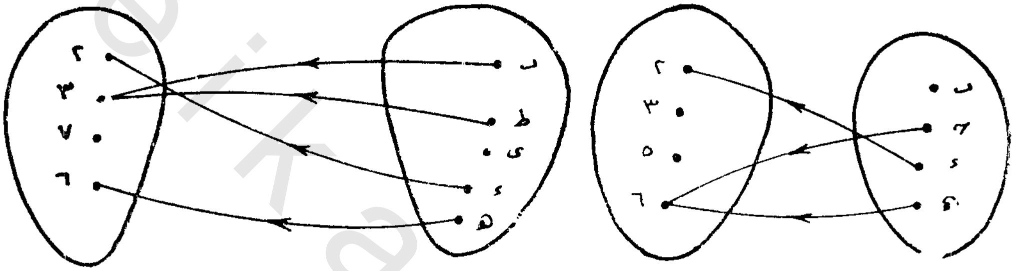
إذا كان لدينا تابعان تا$_1$: سـ$_1$ ← ع$_1$ ، تا$_2$: سـ$_2$ ← ع$_2$

ووجدت مجموعة صـ بحيث صـ $\subset$ سـ$_1$ ، صـ $\subset$ سـ$_2$

وإذا اتفق أنه من أجل كل عنصر س $\in$ صـ يكون تا$_1$ (س) = تا$_2$ (س)

فإننا نقول إن التابعين تا$_1$ ، تا$_2$ منطبقان في المجموعة صـ .

مثال : بملاحظة التابعين الممثلين في الشكل (١٣٥) :



تا$_1$: سـ$_1$ ← ع$_1$ تا$_2$: سـ$_2$ ← ع$_2$

الشكل (١٣٥)

نرى أن المجموعة الجزئية { د ، هـ } $\subset$ سـ$_1$ و { د ، هـ } $\subset$ سـ$_2$

ونلاحظ أنه : $\forall$ س $\in$ { د ، هـ } يكون تا$_1$ (س) = تا$_2$ (س)

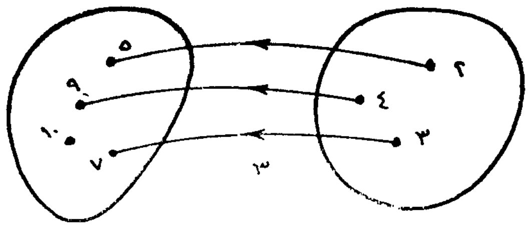
لأنّ : تا$_1$ (د) = ٢ = تا$_2$ (د) و تا$_1$ (هـ) = ٦ = تا$_2$ (هـ)

فالتابعان تا$_1$ ، تا$_2$ منطبقان في المجموعة { د ، هـ } .

٧١ – تساوي تابعين :

نقول عن تابعين تا$_1$ ، تا$_2$ إنهما **متساويان** ونكتب تا$_1$ = تا$_2$ إذا كانت مجموعـة تعريف الأول هي نفسهـا مجموعـة تعريف الثـاني ، وكان تا$_1$ (س) = تا$_2$ (س) $\forall$ س من مجموعة تعريفهما المشتركة .

مثال (٢) : ليكن التابع تا$_1$ الذي يمثله الشكل (١٣٦) :



الشكل (١٣٦)

والتابع تا$_2$: سـ ← ح : س ← ٢ س + ١

حيث سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

إن هذين التابعين متساويان أي تا$_1$ = تا$_2$ لتساوي مجموعتي تعريفهما من جهة ولأنه من أجل أي عنصر من مجموعة التعريف تكون صورة تا$_1$ هي صورة تا$_2$ نفسها .

مثال (٢) : التابعان تا$_1$: ح$^+$ ← ح : س ← س^2

تا$_2$: ط ← ح : س ← س^2

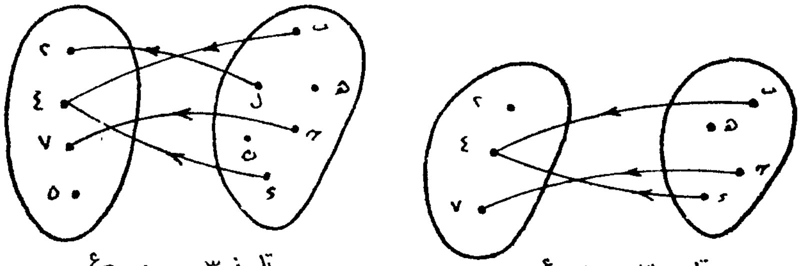
مجموعة تعريف الأول هى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح$^+$
ومجموعة تعريف الثاني هي مجموعة الأعداد الطبيعية ط

وهما مجموعتان مختلفتان فالتابعان المفروضان غير متساويين أي تا$_1$ ≠ تا$_2$ لاختلاف مجموعتي تعريفهما رغم أن قاعدتي التقابل فيهما واحدة .

٧٢ – ممدد تابع « Prolongement ، Extension »:

ليكن التابعان تا$_1$: سـ$_1$ ← ع$_1$ ، تا$_2$: سـ$_2$ ← ع$_2$
ولنفرض أنهما منطبقان في سـ$_1$ فتكون سـ$_1$ ⊆ سـ$_2$
وإذا كانت ع$_1$ ⊆ ع$_2$ أيضاً يقال إن التابع تا$_2$ **يمدد التابع** تا$_1$ على سـ$_2$ أو إن تا$_2$ **ممدد** تا$_1$ على سـ$_2$.

مثال (١) : في الشكل (١٣٧) التابع تا$_٢$ ممدد التابع تا (لماذا ؟)



الشكل (١٣٧)

مثال (٢) : لقد وجدنا أن التابعين الواردين في الشكل (١٣٥) منطبقان في المجموعة {ء ، هـ} ، ولكن ليس أي منهما ممدداً للآخر لأسباب عدة :

فهما ليسا منطبقين في مجموعة تعريف أحدهما وليكن تا$_١$ ومجموعة تعريف تا$_١$ ليست محتواة في مجموعة تعريف تا$_٢$ كما أن مجموعة المستقر للتابع تا$_١$ ليست محتواة في مجموعة مستقر تا$_٢$

٧٣ – مقصور تابع Restriction :

إذا كان لدينا تابعان تا$_١$: س ← ع ، تا$_٢$: ص ← ع حيث ص ⊆ س . وكانا منطبقين في ص سمي التابع تا$_٢$ مقصور التابع تا$_١$ في ص .

مثال : التابع تا$_١$ في المثال (١) من الفقرة السابقة هو مقصور التابع تا$_٢$ في {ب ، حـ ، ء} .

ملاحظة :

واضح أن للتابع الواحد ممددات عديدة على مجموعة مفروضة .

مثال : التابع تا : ح+ ← ح+ : س ← س شكل (١٣٨)

يقبل تابعاً ممدداً له التابع تا : ح ← ح : س ← س شكل (١٣٩)

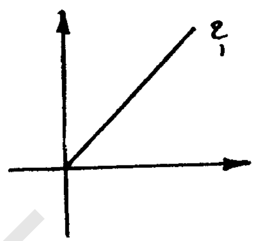
والتابع تا : ح ← ح : س ← |س| شكل (١٤٠)

كما يقبل ممدداً له كلاً من التابعين المعرفين كما يلي :

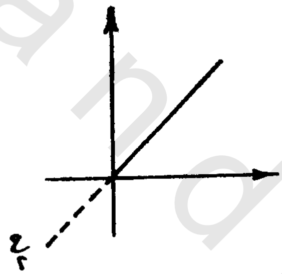
تا : ح ← ح { س ← س إذا كان س ∈ ح+
س ← تركيب جبري ما إذا كان س ∈ ح⁻ − {٠}

تا : ح ← ح { س ← س إذا كان س ∈ ح+
س ← − س + ١ إذا كان س ∈ ح⁻ − {٠}

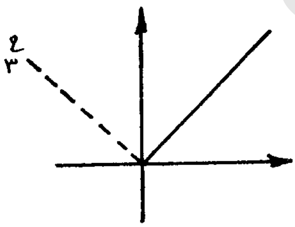
كما في الشكل (١٤١) ، ولو مثلنا التوابع الأربعة في شكل واحد لحصلنا على الشكل (١٤٢) .



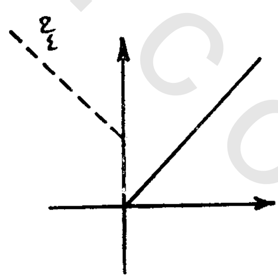
الشكل (١٣٨)



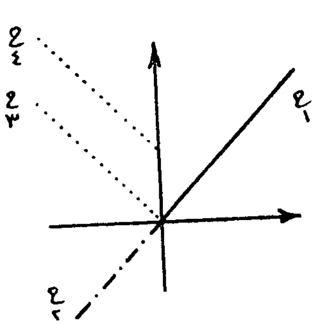
الشكل (١٣٩)



الشكل (١٤٠)



الشكل (١٤١)



الشكل (١٤٢)

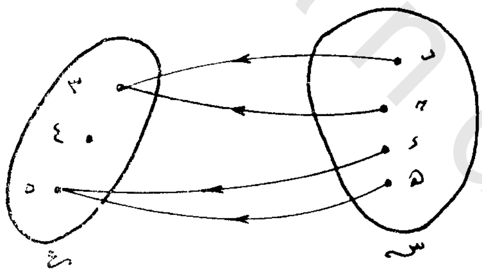
ونلاحظ أن هذه التوابع منطبقة في المجال] ٠ ، + ∞ [

وأن $ح_١$ هو مقصور كل من $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ في هذا المجال .

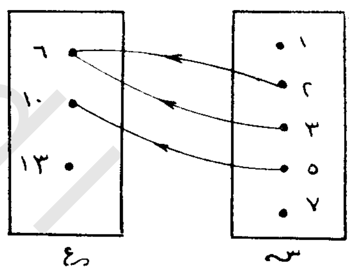
وأن كلاً من $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ هو ممدد للتابع $ح_١$ على مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

٧١ – التطبيق Mapping ، Application :

مثال : الشكلان (١٤٣ ، ١٤٤) يمثل كل منهما تابعاً ولكننا نلاحظ في التابع المُمثل سهمياً بالشكل (١٤٣) أنه توجد عناصر من منطلقه **لا** يرتبط بها أي عنصر من المستقر كالعنصر **٧** مثلاً بينما نرى في التابع الممثل سهمياً بالشكل (١٤٤) أنه يرتبط **بكل** عنصر من مجموعة منطلقة عنصر من مجموعة مستقرة .



الشكل (١٤٤)



الشكل (١٤٣)

فللتمييز بين النوعين نسمي كل تابع من النوع الثاني تطبيقاً ، ومنه :

> **تعريف** : إذا كانت مجموعة تعريف تابع هي مجموعة منطلقة نفسها فاننا نسمي هذا التابع **تطبيقاً** أي أن التطبيق علاقة يرتبط **بكل** عنصر من منطلقها عنصر واحد من مستقرها .

وسنستعمل للتطبيق الرمز تا نفسه الذي استعملناه للتابع ، فالتطبيق من المجموعة سـ إلى المجموعة ع يكتب بالشكل تا : سـ ← ع ومن الواضح أن التطبيق يكون معرفاً على جميع عناصر المنطلق سـ في حين أن التابع يكون معرفا على مجموعة جزئية من سـ .

٧٥ – التطبيق المقترن بتابع :

ليكن التابع تا : سـ ← ع المعرّف على المجموعة سـ$_{١}$ ⊆ سـ

إن هذا التابع يسمح لنا أن نربط بكل عنصر من سـ$_{١}$ عنصراً واحداً على الأكثر من ع . أي أنه يعين التطبيق تا$_{١}$: سـ$_{١}$ ← ع الذي نسميه **التطبيق المقترن** بالتابع تا . ونلاحظ أنه من أجل كل عنصر س من سـ$_{١}$ يكون للتابع تا وللتطبيق تا$_{١}$ الصورة نفسها ، ولذا فإن دراسة التوابع يمكن أن ترد إلى دراسة التطبيقات .

مثال : إذا كان لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن مجموعة التعريف لهذا التابع هي ح – {١} .

فالتطبيق المقترن به هو :

$$\text{تا}_{١} : \text{ح} - \{١\} \leftarrow \text{ح} : \text{س} \leftarrow \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١} .$$

٧٦ – أنواع هامة من التطبيقات :

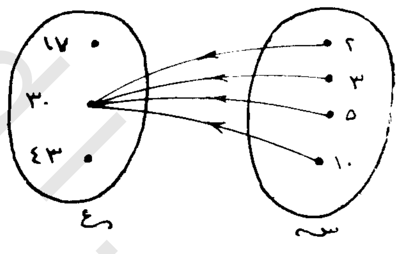
التطبيق الثابت Constant mapping ، Application Constante

مثال (١) : بفرض سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ١٠ } ، ع = { ١٧ ، ٣٠ ، ٤٣ }

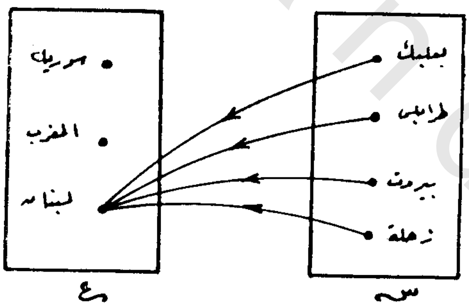
فالعلاقة المعرفة بالشكل (س يقسم ع) حيث س ∈ سـ ، ع ∈ عـ تعين التطبيق الممثل في الشكل (١٤٥) ونلاحظ أن لجميع عناصر منطلقه مقابلاً ثابتاً من المستقر هو العنصر ٣٠ لذلك ندعو هذا التطبيق **تطبيقاً ثابتاً** .

مثال (٢) : بفرض سـ = { بعلبك ، طرابلس ، بيروت ، زحلة } ،
عـ = { سورية ، المغرب ، لبنان } .

فالعلاقة المعرفة كالآتي (س مدينة في القطر ع) حيث س ∈ سـ ، ع ∈ عـ تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكل (١٤٦) ونلاحظ أيضاً أن لجميع عناصر منطلق هذا التطبيق مقابلاً واحداً لا يتغير هو العنصر لبنان من المستقر فهذا التطبيق هو تطبيق ثابت أيضاً ومنه :



الشكل (١٤٥)



الشكل (١٤٦)

تعريف : نقول عن تطبيق تا : سـ ← عـ إنه تطبيق ثابت إذا كان :

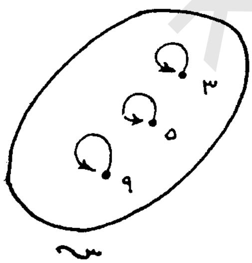
(∀ س ∈ سـ) ، تا (س) = ب حيث ب عنصر معين من عـ

التطبيق المطابق Identity mapping ، Application identique :

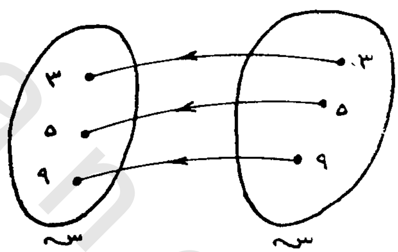
مثال (١) : بفرض سـ = {٣ ، ٥ ، ٩} فالعلاقة س ر س حيث س ∈ سـ تعين التطبيق الممثل سهمياً في الشكلين (١٤٧ ، ١٤٨) ونلاحظ في هذا التطبيق أن :

تا (٣) = ٣ ، تا (٥) = ٥ ، تا (٩) = ٩ اي ان تا (س) = س

نسمي مثل هذا التطبيق **تطبيقاً مطابقاً** ونرمز له بالشكل م سـ أو م ويقرأ التطبيق المطابق في سـ .



الشكل (١٤٨)

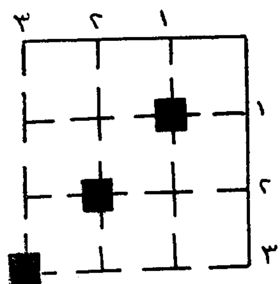


الشكل (١٤٧)

مثال (٢) : الأشكال (١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١) تمثل تطبيقاً مطابقاً واحداً في {١ ، ٢ ، ٣} :

٣	٢	١	س
٣	٢	١	تا (س)

الشكل (١٤٩)



الشكل (١٥٠)

٣	٢	١	
		×	١
	×		٢
×			٣

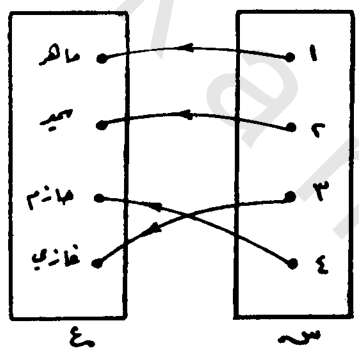
الشكل (١٥١)

> **تعريف** : التطبيق من سـ الى سـ الذي نربط وفقه بكل عنصر س من سـ العنصر س نفسه أي تا (س) = س يسمى تطبيقاً مطابقاً في سـ ونرمز له بالشكل م$_{سـ}$ بدلاً من تا ويكون :
>
> (∀ س ∈ سـ) ، م$_{سـ}$ (س) = س
>
> أي م : سـ ← سـ : س ← س

المتتالية « Sequence ، Suite » :

مثال (١) : لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ،
ع = { ماهر ، سمير ، حازم ، غازي }

وليكن التطبيق من سـ إلى ع الممثل سهميـاً بالشكل (١٥٢) :



الشكل (١٥٢)

مثال (٢) : إذا تقدم لاحدى المسابقات ٧٩ شخصاً وأعطينا لكل واحد منهم رقماً واحداً معيناً خاصاً بـه من مجموعة الأعداد سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٧٩ } فإن لكل عنصر من هذه المجموعة مقابلاً واحداً من مجموعة الأشخاص المتسابقين .

مثال (٣) : ليكن التطبيق تا : ط ← ح : س ← س^{٢} + ٣ س + ١
ولنرمز للتطبيق بالرمز ح بدلاً من تا ولنرمز لقيم هذا التطبيق بالرمز ح$_{ن}$ أي ح : ن ← ح$_{ن}$ فيكون :

$ح_1 = ٥$ ، $ح_2 = ١١$ ، $ح_3 = ١٩$ ، ... ، $ح_ن = ن^2 + ٣ن + ١$

بتدقيق كل من هذه التطبيقات الواردة في الأمثلة الثلاثة نلاحظ أن المنطلق في كل منها هو مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها والمستقر هو مجموعة ما. نسمي هذا النوع من التطبيقات متتالية ومنه :

> **تعريف** : المتتالية هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها ومستقره مجموعة ما عددية أو غير عددية.

وسنرمز للمتتالية بالرمز ح بدلاً من تا فنكتب $ح : ط_1 \longrightarrow ع$ حيث $ط_1 \subseteq ط$ كما نكتب $ح_ن$ بدلاً من تا (ن) وتعطى المتتالية في أكثر الأحيان بالشكل :

($ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، ... ، $ح_ن$ ، ...) ويسمى الحد $ح_ن$ الحد العام للمتتالية أو الحد الذي رتبته ن .

ملاحظة (١) :

إذا كانت $ط_1$ مجموعة منتهية قلنا إن المتتالية منتهية وإلا فهي غير منتهية.

ملاحظة (٢) :

في الحالة الخاصة التي يكون فيها مستقر المتتالية مجموعة عددية نسمي المتالية عندئذٍ **متتالية عددية** .

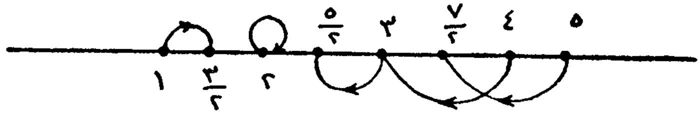
مثال (١) : اكتب المتتالية غير المنتهية التي حدها العام $ح_ن = \frac{ن}{٢} + ١$

ثم مثل الحدود ، $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ ، $ح_4$ ، $ح_5$ ، .... من هذه المتتالية على محور .

الحل :

نبدل ن بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ... على الترتيب فنجد :

$ح_١ = \frac{٣}{٢}$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = \frac{٥}{٢}$ ، $ح_٤ = ٣$ ، $ح_٥ = \frac{٧}{٢}$ ، ...



الشكل (١٥٣)

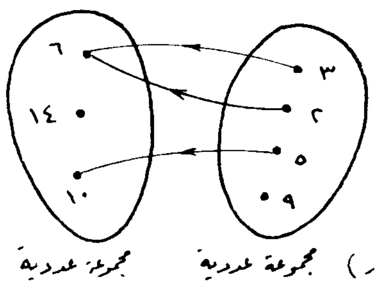
مثال(٢): اكتب الحدود $ح_١ ... ح_٥$ من المتتالية التي حدها العام: $ح_د = ٢د + ٥$

الحـــل :

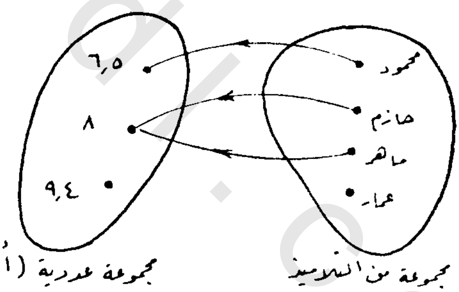
$ح_١ = ٧$ ، $ح_٢ = ٩$ ، $ح_٣ = ١١$ ، $ح_٤ = ١٣$ ، $ح_٥ = ١٥$

٧٧–التابع العددي «Fonction numérique . Numerical Function»:

إذا نظرنا الى الشكلين (١٥٤ ، ١٥٥) نجد أن كلا منهما يمثل تابعاً ونلاحظ أن المستقر في كل منهما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح (أي مجموعة عددية) .



الشكل (١٥٥)



الشكل (١٥٤)

نسمي كلا من هذين التابعين وأمثالهما **تابعاً عددياً** ، ومنه :

تعريف : كل تابع مستقره مجموعة عددية يسمى تابعاً عددياً .

٧٨ – التطبيق العددي

« Applicatian numérique . Numerical mapping »:

بالمثل كل تطبيق مستقره مجموعة عددية يسمى **تطبيقاً عددياً** .

٧٩ – التابع العددي ذو المتحول الحقيقي :

إذا كان منطلق التابع العددي مجموعة عددية حقيقية سمي **تابعاً عددياً لمتحول حقيقي** .

مثال (١) : بفرض سـ مجموعة من الطلاب تقدم بعضهم للامتحان وتغيب البعض الآخر .

فالتابع تا: سـ ← ح: س ← درجته في الامتحان هو تابع عددي.

مثال (٢) : بفرض سـ مجموعة من الأشكال الهندسية المستوية التي لها مساحات ، فإن :

التطبيق تا : سـ ← ح: س ← قياس مساحته هو تطبيق عددي.

مثال (٣) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{٥\ س}{س - ٣}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

مثال (٤) : التطبيق تا : [٢، ٣] ← ح : س ← $\frac{س - ١}{س + ١}$

هو تطبيق عددي ذو متحول حقيقي س ∈ المجال الحقيقي [٢، ٣]

مثال (٥) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\sqrt{(س - ٢)\ \ (س - ٥)}$

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون تا : ح –] ٢ ، ٥ [← ح : س ← $\sqrt{(س - ٢)(س - ٥)}$

هو التطبيق العددي ذي المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المفروض.

مثال (٦) : التابع تا : ح ← ح : س ← $\frac{س^{٢} - ٣ س}{س^{٢} - ٤}$ هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

ويكون تا : ح − { − ٢ ، ٢ } ← ح : س ← $\frac{س^{٢} - ٣ س}{س^{٢} - ٤}$

هو التطبيق العددي ذو المتحول الحقيقي المقترن بالتابع المعطى .

مثال (٧) : التابع تا : ح ← ح : { س ← ١ إذا كان س عدداً عادياً ، س ← ٠ إذا كان س عدداً غير عادي

هو تابع عددي ذو متحول حقيقي .

٨٠ – أنواع التطبيقات بالنسبة إلى مستقرها :

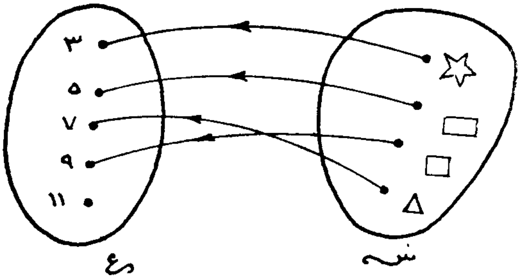
عندما نصنف العلاقات إلى علاقات تابعية وأخرى غير تابعية نحصر اهتمامنا فقط في عناصر المنطلق التي يرتبط بها عناصر من المستقر ونبحث فيما إذا كان لكل عنصر من عناصر المنطلق هذه مقابل وحيد من المستقر.

وعندما نميز من بين العلاقات التابعية تلك التي دعوناها تطبيقات نحصر اهتمامنا في منطلق العلاقة ونبحث فيما إذا كانت ، بجميع عناصر المنطلق، ترتبط عناصر من المستقر .

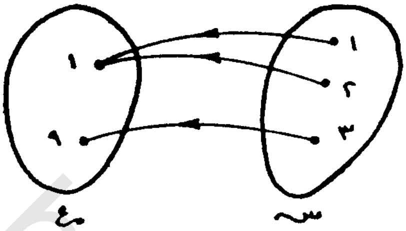
هذا ولو درسنا بالاضافة لذلك شكل ارتباط عناصر المستقر بعناصر المنطلق في التطبيقات فاننا نحصل على الأنواع التالية من التطبيقات :

التطبيق المتباين « Injection . One - One mapping » :

مثال : في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٦) نلاحظ أن أي عنصر من مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من منطلقه أي أن العنصرين المتمايزين من المستقر يقابلان عنصرين متمايزين من المنطلق،



الشكل (١٥٦)



الشكل (١٥٧)

بينما في التطبيق الممثل في الشكل (١٥٧) نجد أن أحد العناصر من مستقره هو صورة لأكثر من عنصر من المنطلق ، لذا نسمي التطبيق من النوع الأول **تطبيقاً متبايناً** ، ومنه :

> **تعريف** : نسمي التطبيق متبايناً إذا كان كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجموعة منطلقه . أي أن كل عنصر من المستقر إما أن يرتبط بعنصر واحد من المنطلق أو لا يرتبط بأي عنصر .

وهذا يعني أنه في التطبيق المتباين إذا كان س ، س′ عنصرين متمايزين من المنطلق فصورتاهما تا (س) ، تا (س′) وفق التطبيق تا متمايزتان أيضاً .

أي أنّ : س ≠ س′ ⇐ تا (س) ≠ تا (س′)

وهذا يكافىء القول تا (س) = تا (س′) ⇐ س = س′

مثال (١) : التطبيق تا : ط ⟵ ط : س ⟵ س + ٢

حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية هو تطبيق متباين لأنّ :

س ≠ س′ ⇐ س + ٢ ≠ س′ + ٢ ⇐ تا (س) ≠ تا (س′)

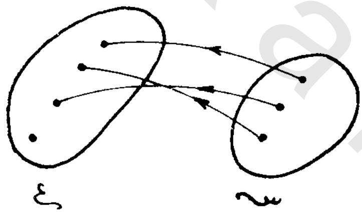
أو بطريقة ثانية ، لأنّ :

تا (س) = تا (س') أو س + ٢ = س' + ٢ ⇐ س = س'

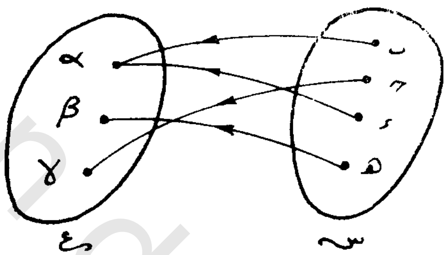
مثال (٢) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← جب س بفرض ٠ < س < π
حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية هو تطبيق غير متباين (لماذا؟)

التطبيق الغامر « Surjection , Onto mapping » :

مثال : في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٨) نلاحظ أن كل عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه، بينما في التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٥٩) نجد أن بعض العناصر من مستقره ليست صوراً لأي عنصر من المنطلق .



الشكل (١٥٩)



الشكل (١٥٨)

لذا نسمي التطبيق من النوع الأول **تطبيقاً غامراً** ، ومنه :

تعريف : نسمي التطبيق غامراً إذا كان **كل** عنصر من مجموعة مستقره هو صورة لعنصر على الأقل من مجموعة منطلقه .

وهذا يعني أنه في التطبيق الغامر من س إلى ع يكون :

$\forall$ ع $\in$ ع ، $\exists$ س $\in$ س : ع = تا (س)

ويقال أيضاً إن التطبيق الغامر هو تطبيق من س على ع .

ملاحظة :

التطبيق المتباين في الشكل (١٥٦) ليس غامراً (لماذا ؟)

والتطبيق غير المتباين في الشكل (١٥٧) هو غامر (لماذا ؟)

مثال (١) : التطبيق تا : ط ⟵ ط : س ⟵ ٢ س

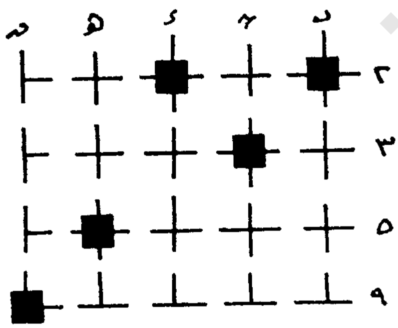
حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية ليس غامراً .

لأنه حتى يكون غامراً يجب أن يكون أي عدد طبيعي من مجموعة المستقر ط هو صورة وفق هذا التطبيق لعنصر على الأقل من مجموعة المنطلق ط .

أي أن يكون للمعادلة ٢ س = ع حل في ط مهما كانت ع ∈ ط .

وهذا غير صحيح لأن المعادلة ٢ س = ٣ مثلاً لا تقبل حلاً في ط أي لا يوجد عدد طبيعي ضعفه يساوي ٣ .

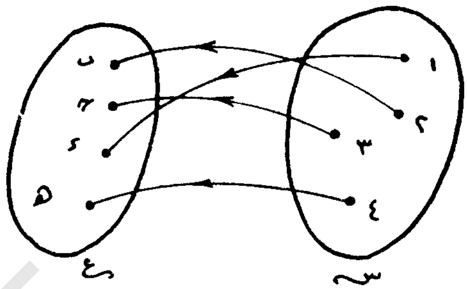
مثال (٢) : العلاقة الممثلة شبكياً في الشكل (١٦٠) حيث المنطلق هو المجموعة { ب ، ح ، ى ، هـ ، ن } والمستقر هو المجموعة { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ } هو تطبيق غامر (لماذا ؟)



الشكل (١٦٠)

التقابل « Bijection , One - one and Onto mapping » :

مثال : نلاحظ أن التطبيق الممثل سهمياً بالشكل (١٦١) متباين وغامر في آن واحد .



الشكل (١٦١)

نسمي هذا التطبيق وأمثاله **تقابلاً** ، ومنه :

تعريف : نسمي التطبيق تقابلاً إذا كان متبايناً وغامراً في آن واحد .

وهذا يعني أن التطبيق تا : سـ ← ع هو تقابل إذا كان :

من أجل كل عنصر ع ∈ ع يوجد عنصر وحيد س من سـ بحيث ع = تا (س) .

مثال (١) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← ٣ س − ١ هو تقابل .

في الحقيقة إنه غامر لأنه من أجل كل ع من ح يكون :

$$\text{٣ س} - ١ = \text{ع} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٣}(\text{ع} + ١)$$

وهو متباين لأنه من أجل كل عنصرين س ، س′ من المنطلق يكون :

$$\text{٣ س} - ١ = \text{٣ س}' - ١ \Leftarrow \text{س} = \text{س}'$$

مثال (٢) : التناظر الذي مركزه نقطة ن في مستوٍ والتناظر بالنسبة لمستقيم في هذا المستوي هما تقابلان من المستوي إلى المستوي نفسه.

مثال (٣) : ليكن التطبيق تا : س ← ع وليكن ه عدد عناصر س ، ه' عدد عناصر ع حيث س و ع مجموعتان منتهيتان ، والمطلوب

١ – قارن بين ه ، ه' إذا كان تا متبايناً .

٢ – قارن بين ه ، ه' إذا كان تا غامراً .

٣ – قارن بين ه ، ه' إذا كان تا تقابلاً .

الحــــل :

إذا كان تا متبايناً فإن ه ≤ ه'

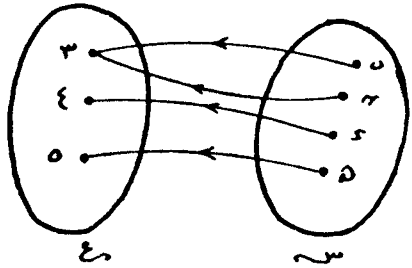
وإذا كان تا غامراً فإن ه' ≤ ه

وإذا كان تا تقابلاً فإن ه = ه'

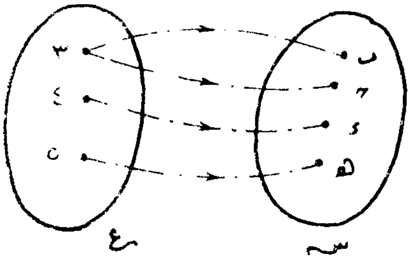
٨١ – العلاقة العكسية للتطبيق :

لتكن التطبيقات الممثلة في الأشكال (١٦٢ ، ١٦٤ ، ١٦٦) ، من الواضح أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق في الشكل (١٦٢) والممثلة في الشكل (١٦٣) ليست تطبيقاً حتى أنها ليست تابعاً وذلك لأنه ينطلق سهمان من العنصر ٣ .

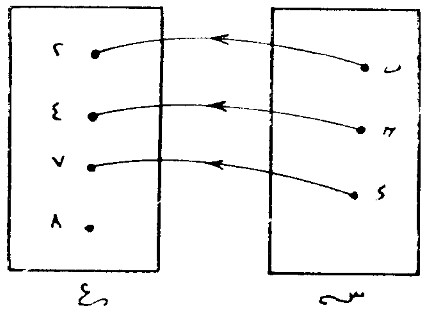
كما أن العلاقة العكسية لعلاقة التطبيق المتباين في الشكل (١٦٤) والممثلة في الشكل (١٦٥) هي تابع وليست تطبيقاً . أما العلاقة العكسية للتقابل من س إلى ع في الشكل (١٦٦) والممثلة في الشكل (١٦٧) فهي تقابل من المجموعة ع إلى المجموعة س .



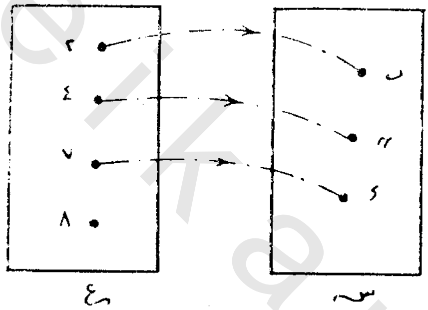
الشكل (١٦٢)



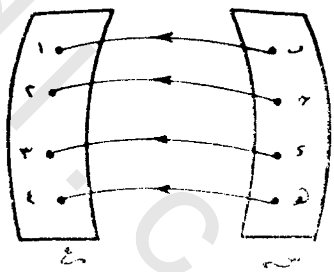
الشكل (١٦٣)



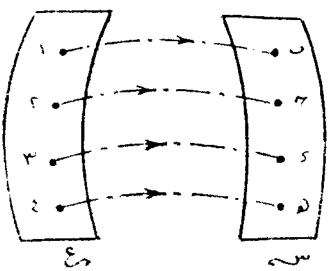
الشكل (١٦٤)



الشكل (١٦٥)



الشكل (١٦٦)



الشكل (١٦٧)

التطبيق العكسي :

مما تقدم نلاحظ أن العلاقة العكسية لتطبيق مفروض لا تكون تطبيقاً إلا عندما يكون التطبيق المفروض تقابلاً وفي هذه الحالة نسمي العلاقة

العكسية للتطبيق المفروض تطبيقاً عكسياً أو تقابلا عكسياً له .

ويبرهن بسهولة أن كل تقابل تا : سـ ← ع له تقابل عكسي من ع إلى سـ نرمز له بالرمز تا$^{-1}$ فنكتب تا$^{-1}$: ع ← سـ

مثال (١) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← س + ١

هو تقابل ولذا فإن له تقابلاً عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ح ← ح : س ← س − ١

مثال (٢) : التطبيق تا : ع ← ع : س ← ٣ س − ٢

هو تقابل ولذا فإن له تقابلا عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ع ← ع : س ← $\frac{\text{س} + ٢}{٣}$

مثال (٣) : التطبيق تا : ص ← ص : س ← ٥ س + ١

متباين وغير غامر فليس له تطبيق عكسي .

مثال (٤) : التطبيق تا : ح ← ح : س ← س^{٢}

غير متباين لأن دا (−٢) = دا (٢) = ٤ مثلا فليس له تطبيق معاكس.

مثال (٥) : التطبيق تا : ح$^{+}$ ← ح$^{+}$: س ← س^{٢}

هو تقابل ولذا فإن له تقابلا عكسياً هو :

تا$^{-1}$: ح$^{+}$ ← ح$^{+}$: س ← $\sqrt{\text{س}}$

مثال (٦) : التطبيق تا : ح* ← ح* : س ← س$^{-1}$ تقابل

ولذا فإن تا$^{-1}$: ح* ← ح* : س ← س$^{-1}$ هو التقابل المعاكس .

٨٢ – تركيب التطبيقات :

بما أن كل تطبيق هو علاقة فإن تركيب تطبيقين من الشكل :

$$\text{تا} : \text{سـ} \longrightarrow \text{عـ} \quad ، \quad \text{ها} : \text{عـ} \longrightarrow \text{صـ}$$

يتم بالطريقة ذاتها التي مرت معنا في تركيب العلاقات في الفقرة ٦٠ . ولكننا سنبرهن فيما يلي أن تركيب كل تطبيقين هو تطبيق أي أنه إذا كان تا وها تطبيقين فإن ها ∘ تا تطبيق منطلقه سـ ومستقره صـ .

في الحقيقة إذا كان س عنصراً كيفياً من سـ فإن له صورة وحيدة ع ∋ عـ وفق تا . وبما أن ها تطبيق فإن لـ ع صورة وحيدة ص ∋ صـ وفق ها وبالتالي تكون ص هي الصورة الوحيدة لـ س وفق التركيب ها ∘ تا الأمر الذي يؤكد أن هذا التركيب تطبيق .

يرمز لعملية التركيب كذلك بالشكل :

$$\begin{tikzcd} & \text{عـ} \arrow[dr, "\text{ها}"] & \\ \text{سـ} \arrow[ur, "\text{تا}"] \arrow[rr, "\text{ها} \circ \text{تا}"'] & & \text{صـ} \end{tikzcd}$$

أو بالشكل : $\text{س} \longrightarrow \text{تا}(\text{س}) \longrightarrow \text{ها}[\,\text{تا}(\text{س})\,]$.

أي أن : $(\text{ها} \circ \text{تا})(\text{س}) = \text{ها}[\,\text{تا}(\text{س})\,]$.

وقد وضعنا ها ∘ تا بين قوسين للدلالة على أن التطبيق الذي ندرسه هو التطبيق المركب ، فلو رمزنا للتطبيق المركب بالرمز كا لكان كا = ها ∘ تا وعندها نكتب كا (س) بدلاً من (ها ∘ تا) (س) .

ملاحظة :

١ً – للبحث عن صورة العنصر س من سـ وفق ها ∘ تا نبحث أولاً

عن صورة س وفق تا ولتكن ع = تا (س) ثم عن صورة ع من ع وفق ها ولتكن ها (ع) .

والمساواة ها (ع) = ها [تا (س)] تبين السبب الذي يجعلنا نكتب ها ه تا بدلاً من تا ه ها .

٢ً – التطبيق ها ه تا لا يكون معرفاً إلا إذا كان مستقر التطبيق تا هو منطلق التطبيق ها . ومن أجل التطبيقات من سہ إلى سہ يمكن تعريف كل من ها ه تا ، تا ه ها .

مثال (١) : لتكن المجموعة سہ = { ب ، حـ ، ى } والتطبيقان تا ، ها من سہ إلى سہ المعرفين كما يلي :

وفق تا : ب ← ب	وفق ها : ب ← حـ
حـ ← ى	حـ ← ب
ى ← حـ	ى ← ى

فإن : ها ه تا يكون :

سہ	$\xrightarrow{\text{تا}}$	سہ	$\xrightarrow{\text{ها}}$	سہ
ب	←	ب	←	حـ
حـ	←	ى	←	ى
ى	←	حـ	←	ب

أي أن (ها ه تا) (ب) = حـ ، (ها ه تا) (حـ) = ى ، (ها ه تا) (ى) = ب .

مثال (٢) ليكن تا : ط ← ط : س ← س + ٢

ها : ط ← ط : س ← س^{٢} + ١

احسب (ها ه تا) (س) ، ثم (تا ه ها) (س) وقارن النتيجتين.

الحل :

(ها ∘ تا) (س) = ها [تا (س)] = ها (س + ٢)

= (س + ٢)^{٢} + ١

ويمكن تلخيص ذلك بالشكل الآتي :

ط ⟵(تا) ط ⟵(ها) ط

س ⟵ س + ٢ ⟵ (س + ٢)^{٢} + ١

لنحسب (تا ∘ ها) س = تا [ها (س)] = تا (س^{٢} + ١)

= (س^{٢} + ١) + ٢ = س^{٢} + ٣

ونلاحظ في هذا المثال أن : ها ∘ تا ≠ تا ∘ ها

٨٣ – خواص التطبيقات :

خاصة (١) : بفرض التطبيق تا : سـ ⟵ عـ ، والتطبيق المطابق م$_{\text{سـ}}$ في سـ والتطبيق المطابق م$_{\text{عـ}}$ في عـ فإنّ :

$$\boxed{\text{تا} \circ \text{م}_{\text{سـ}} = \text{م}_{\text{عـ}} \circ \text{تا} = \text{تا}}$$

في الحقيقة : سـ ⟵(م) سـ ⟵(تا) عـ
س ⟵ س ⟵ تا (س) ⟸ تا ∘ م$_{\text{سـ}}$ = تا

سـ ⟵(تا) عـ ⟵(م) عـ
س ⟵ ع ⟵ ع ⟸ م$_{\text{عـ}}$ ∘ تا = تا

إذن : تا ∘ م$_{\text{سـ}}$ = م$_{\text{عـ}}$ ∘ تا = تا

خاصة (٢) : بفرض تا ، ها ، ما تطبيقات معينة بالشكل الآتي :

تا ها ما

سـ ← ع ← صـ ← ف

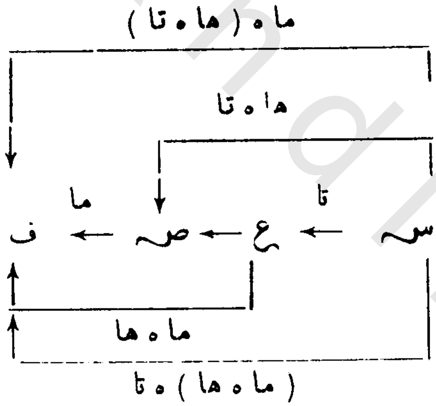
فإن : $\boxed{\text{(ما ∘ ها) ∘ تا = ما ∘ (ها ∘ تا)}}$

أي أن التركيب الناتج وحيد ولذا يكتب بالشكل ما ∘ ها ∘ تا
وهذا يعني أن تركيب التطبيقات يتمتع بالخاصة التجميعية (خاصة الدمج) .

في الحقيقة : ∀ س ∈ سـ نكتب :

[(ما ∘ ها) ∘ تا] (س) ≡ (ما ∘ ها) [تا (س)] ≡ ما [ها (تا (س))]
[ما ∘ (ها ∘ تا)] (س) ≡ ما [(ها ∘ تا) (س)] ≡ ما [ها (تا (س))]

إذن : (ما ∘ ها) ∘ تا ≡ ما ∘ (ها ∘ تا). وهو المطلوب .



خاصة (٣) : التطبيق الناتج من تركيب تطبيقين غامرين هو تطبيق غامر ومن تركيب تطبيقين متباينين هو تركيب متباين ، ومن تركيب تقابلين هو تقابل .

باستطاعة القارىء برهان هذه النظرية بسهولة بالاستناد إلى التعاريف.

خاصة (٤) : إذا كان التطبيق تا : $سـ \rightarrow ع$ تقابلا فإنّ :

$$\boxed{تا^{-1} \circ تا = م_{سـ} \quad ، \quad تا \circ تا^{-1} = م_{ع}}$$

في الحقيقة إن بيان التطبيق $تا^{-1} \circ تا$ هو مجموعة الثنائيات (س،س) أي $م_{سـ}$.

وبيان التطبيق $تا \circ تا^{-1}$ هو مجموع الثنائيات (ع ، ع) أي $م_{ع}$

وبشكل خاص إذا كان التطبيق تا : $سـ \rightarrow سـ$ تقابلا فإنّ :

$$\boxed{تا^{-1} \circ تا = تا \circ تا^{-1} = م_{سـ}}$$

* * *

تمارين محلولة

لتوابع والتطبيقات :

٢٣٦ – عيّن مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية :

١َ – تا : ط ← ط : س ← س + ١

٢َ – ها : ح ← ح : س ← $\sqrt{\text{س} - ١}$

٣َ – لا : ع ← ع : س ← $\frac{\text{س}}{٤\text{س}^٢ - ١}$

٤َ – جا : ع* ← ع : ز ← $\frac{٢\text{ز} + ١}{\text{ز}}$

الحل :

١َ – ∀ س ∈ ط (المنطلق) ← س + ١ ∈ ط (المستقر)

اذن تا معرّف على ط بكاملها .

٢َ – بما أن $\sqrt{\text{س} - ١}$ لا ينتمي إلى ح إلا إذا كان س – ١ ≥ ٠ أي س ≥ ١ . اذن التابع ها معرّف من أجل قيم س ∈ ح حيث س ≥ ١ أي أن مجموعة تعريف ها هي المجال [١ ، ∞ [.

٣َ – يكون $\frac{\text{س}}{٤\text{س}^٢ - ١}$ عدداً عادياً اذا كان ٤س٢ – ١ ≠ ٠

أي إذا كان $س \neq \mp \frac{١}{٢}$ ، وعليه فالتابع معرّف من أجل جميع قيم $س \in ع$ (المنطلق) عدا $س = \mp \frac{١}{٢}$ وبالتالي فإن مجموعة تعريف هذا التابع هي المجموعة $ع - \{\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\}$.

٤َ – بما أن $\frac{٢ز + ١}{ز} \in ع \quad \forall ز \in ع^*$ فالتابع حا معرّف $\forall ز \in ع^*$
وبالتالي فإن $ع^*$ هي مجموعة تعريف حا .

٢٣٧ – ميّز التطبيقات من بين التوابع التالية :

١َ – $تا_١ : ج \longrightarrow ط^* : س \longrightarrow$ عدد أشقائه بفرض ج مجموعة الناس.

٢َ – $تا_٢ : آ \longrightarrow ط : س \longrightarrow$ عدد أولاده بفرض آ مجموعة الآباء.

٣َ – $تا_٣ :]-١ ، +١[\longrightarrow ع : س \longrightarrow \frac{س}{س - ١}$

٤َ – $تا_٤ : [-١ ، ١[\longrightarrow ع : س \longrightarrow \frac{٥}{س + ١}$

الحل :

١َ – بما أنه يوجد بعض الأشخاص الذين لا أشقاء لهم ، فإن كل شخص من هؤلاء الأشخاص لا يرتبط به أي عنصر من المستقر $ط^*$ ولذا فإن $تا_١$ ليس تطبيقاً .

٢َ – إذا لم يكن لبعض الآباء أولاد فكل منهم يرتبط به العدد $٠ \in ط$ ، أما الأب الذي له أولاد فيرتبط به من ط العنصر الذي يمثل

عدد أولاده . ولذا فإن كل عنصر من آ يرتبط به عنصر من ط وبالتالي فإن تا$_{٢}$ تطبيق من آ إلى ط .

٣ً – إن $\frac{س}{س - ١}$ لا معنى له من أجل س = ١ أي أن العنصر ١ من المنطلق لا يرتبط به أي عنصر من ح (المستقر) ولذا فان تا$_{٣}$ ليس تطبيقاً .

٤ً – إن $\frac{٥}{س + ١}$ ∋ ح من أجل جميع قيم س من المنطلق]–١ ، +١[ولذا فان تا$_{٤}$ هو تطبيق .

٢٣٨ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← $\sqrt{س}$
عيّن التطبيق ها المقترن بالتابع تا .

الحـل :

يكون لعدد س ∋ ح جذر تربيعي اذا كان س ≥ ٠ ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح$^{+}$. والتطبيق المطلوب هو التطبيق :

ها : ح$^{+}$ ← ح : س ← $\sqrt{س}$

٢٣٩ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

حيث : تا (س) = { س من أجل س < ٠ ؛ ٠ من أجل ٠ < س ≤ ١ ؛ ١ من أجل س > ١ }

١ً – عيّن مجموعة تعريف تا .

٢ً – أوجد تا (–٣) ، تا ($\frac{١}{٢}$) ، تا (١) ، تا (٥) ، تا (١٠٠)

٣ ـ ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

الحـل :

١ً ـ إن العدد ٠ ∈ ح (المنطلق) لا يقابـــله أي عنصر من ح (المستقر) وفق تا . ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح*.

٢ً ـ من أجل كل عدد سالب س ∈ ح (المنطلق) يكون تا (س) = س

ومنه تا (− ٣) = − ٣

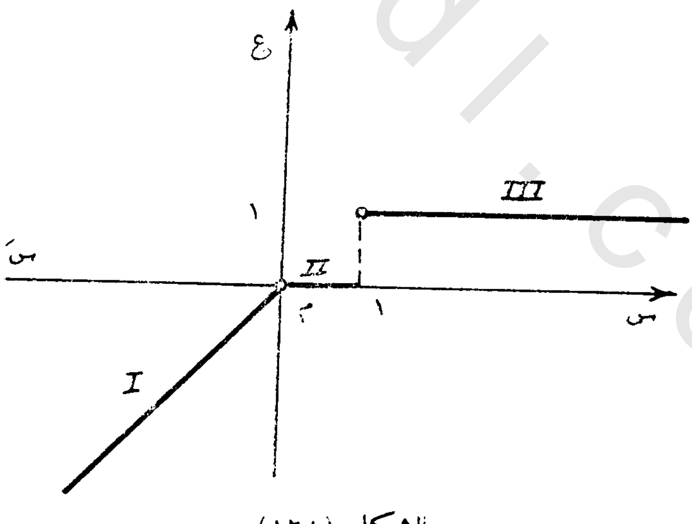
ومن أجل كل عدد ٠ < س ≤ ١ يكون تا (س) = ٠

اذن : تا ($\frac{١}{٢}$) = ٠ ، تا (١) = ٠

واذا كان س > ١ فان تا (س) = ١

اذن : تا (٥) = ١ ، تا (١٠٠) = ١

٣ً ـ المخطط الديكارتي كما هو مبين في الشكل (١٦٨) :



الشكل (١٦٨)

إن الدويرة على المخطط الديكارتي تشير إلى عدم انتماء النقطة (مركز الدويرة) الى بيان التابع . فالنقطتان (٠،٠) ، (١،٠) لا تنتميان الى بيان التابع السابق .

ومن الواضح أن الجزء I من المخطط هو جزء المستقيم الذي معادلته ع = س الموافق لقيم س السالبة . وأن الجزء II هو جزء المستقيم ع = ٠ الموافق لقيم س حيث ٠ < س ≦ ١ ، وأما الجزء III فهو جزء المستقيم ع = ١ الموافق لقيم س > ١ .

٢٤٠ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

حيث : تا (س) = { س + ١ لما س < −١ ؛ ١ لما −١ < س < ١ ؛ −٢س+٤ لما س ⩾ ١ }

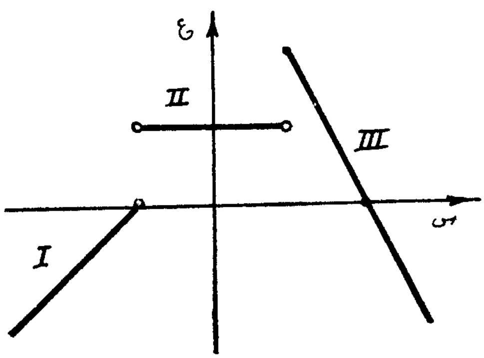
١ً – أوجد مجموعة تعريف تا .

٢ً – ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

الحل :

١ً – إن العدد −١ ∈ ح (المنطلق) لا يقابله أي عنصر من ح (المستقر) وفق تا ولذا فان مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح −{−١}

٢ً – أما المخطط الديكارتي فهو كما في الشكل (١٦٩) :



الشكل (١٦٩)

٢٤١ – لدينا المجموعتان س = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}
ع = {٢ ، ٤ ، ٦}

والعلاقات من س إلى ع التي بياناتها :

ر١ = {(١،٢) ، (٣،٢) ، (٥،٤)}

ر٢ = {(٣،٢) ، (٥،٢) ، (٣،٦) ، (٧،٦)}

ر٣ = {(١،٢) ، (١،٤) ، (١،٦) ، (٧،٦)}

ر٤ = {(١،٢) ، (٣،٢) ، (٥،٤) ، (٧،٦)}

أي العلاقات السابقة تابع وأي التوابع منها تطبيق ؟

الحل :

يلاحظ في البيان ر١ أن المركبات الأولى في الأزواج المرتبة مختلفة مثنى مثنى ، أي أن كل عنصر من س يرتبط به على الأكثر عنصر واحد من ع وبالتالي فالعلاقة التي بيانها ر١ هي تابع . والعلاقة التي بيانها ر٢ ليست تابعاً وذلك لوجود زوجين مرتبين (٣،٢) ، (٣،٦) المركبة الأولى واحدة في كل منهما ، أي أن العنصر ٣ من المنطلق يرتبط بعنصرين من المستقر .

وكذلك العلاقة التي بيانها ر٣ ليست تابعاً لوجود ثلاثة أزواج مرتبة في البيان ، المركبة الأولى واحدة فيها جميعاً .

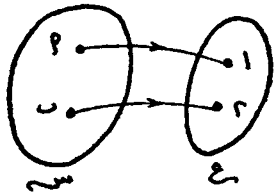
أما العلاقة التي بيانها ر٤ فهي تابع وهي بالإضافة لذلك تطبيق من س إلى ع لأن كل عنصر من المنطلق يرتبط بعنصر واحد من المستقر .

٢٤٢ – لدينا المجموعتان س = {أ ، ب} ، ع = {١ ، ٢}

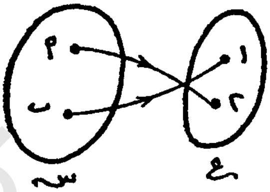
ما هي التطبيقات الممكنة من س إلى ع ؟

الحـل :

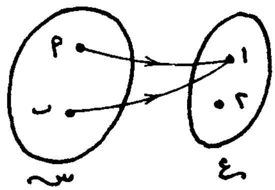
إن التطبيقات الممكنة هي الممثلة بالمخططات الآتية :



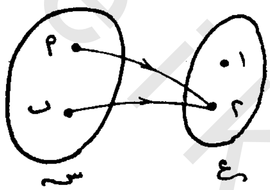
الشكل (١٧٠)



الشكل (١٧١)



الشكل (١٧٢)



الشكل (١٧٣)

ويلاحظ في جميع هذه المخططات أن كل عنصر من سہ يرتبط به عنصر واحد من ع .

٢٤٣ – ليكن س عنصراً من ط* والعبارة :

س ⟵ سہ = { ن : ن ∋ ط* و ن | س }

علماً أن (ن | س) يعني (ن تقسم س) .

١ – عيّن سہ من أجل س = ١ ، س = ٢ ، س = ٨

٢ً – هل يمكن استخدام العبارة المفروضة في تعريف تابع ؟ ما منطلقه وما مستقره ؟

الحـل :

اً – من أجل أي عنصر س ∋ ط* تكون سہ مجموعة جميع قواسم

س وعلى ذلك فان :

س = ١ ← س~ = { ١ }

س = ٢ ← س~ = { ١، ٢ }

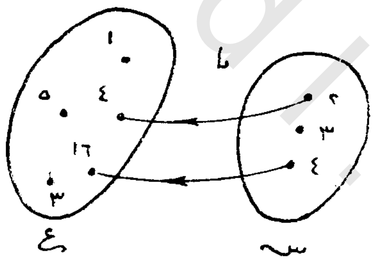
س = ٨ ← س~ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }

٣ – إن كل عنصر س ∈ ط* له قاسم واحد على الأقل وبالتالي فان كل عنصر س ∈ ط* تقابله وفق العباره المفروضة مجموعة وحيدة هي مجموعة جميع قواسم س . وبما أن مجموعة قواسم س ليست إلا مجموعة جزئية من ط* أي ليست سوى عنصر من المجموعة ج (ط*) مجموعة جميع أجزاء ط* ، فيمكننا باستخدام العبارة المفروضة الحصول على التابع :

تا : ط* ← ج (ط*) : س ← س~

نساوي تابعين ، مقصور تابع ، ممدد تابع

٢٤٤ – هل التابع تا الممثل بالشكل (١٧٤) :



الشكل (١٧٤)

والتابع ها ، { ٢ ، ٤ } ← ج : س ← س٢ متساويان ؟

الحل :

التابعان تا ، ها متساويان لأن لهما مجموعة التعريف نفسها ولأن قيمتيهما

عند كل عنصر من مجموعة التعريف متساويتان أي أن :

تا (٢) = ٤ و ها (٢) = ٢^{٢} = ٤ ومنه تا (٢) = ها (٢)

و تا (٤) = ١٦ و ها (٤) = ٤^{٢} = ١٦ ومنه تا (٤) = ها (٤)

٢٤٥ - هل التوابع :

تا$_{١}$: ح ← ح : س ← س^{٢} + ٢ س − ٥

تا$_{٢}$: ح ← ح : ز ← ز^{٢} + ٢ ز − ٥

تا$_{٣}$: ح ← ح : ع ← ع^{٢} + ٢ ع − ٥

متساوية ؟

الحل :

تا$_{١}$ = تا$_{٢}$ = تا$_{٣}$ لأنها معرّفة على المجموعة ح نفسها ولأن :

تا$_{١}$ (س) = تا$_{٢}$ (س) = تا$_{٣}$ (س) ∀ س ∈ ح

٢٤٦ - هل التابعان :

تا$_{١}$: { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ← ح : س ← س^{٣} + ١

تا$_{٢}$ ، { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ← ح : س ← س^{٣} + ١

متساويان ؟

الحل :

تا$_{١}$ ≠ تا$_{٢}$ بالرغم من كون قاعدة التقابل نفسها في التابعين وذلك لأن مجموعتي التعريف لهما مختلفتان .

٢٤٧ - لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← س + ٢

عيّن مقصوره على المجال المغلق [٢ ، ٣] . وأوجد مجموعة قيم هذا المقصور .

الحـل :

إن مقصور تا على المجال [٢،٣] هو التابع

ها : [٢،٣] ⟵ ح : س ⟵ س + ٢

وبما أن : ها (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، ها (٣) = ٣ + ٢ = ٥

فمجموعة قيم ها هي المجال المغلق [٤،٥] ⊇ ح (المستقر) .

٢٤٨ – لدينا التابع تا : ح ⟵ ح : س ⟵ $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

عيّن أوسع مجموعة جزئيــة من المنطلق ح يكون مقصور تا عليها تطبيقاً . عيّن قيم هذا المقصور من أجل

س = – ١ ، س = ١ ، س = ٥

الحـل :

إن مجموعة تعريف تا هي المجموعة ح* وهي أوسع مجموعة يكون مقصور تا عليها تطبيقاً .

ويكون المقصور هو التطبيق :

ها : ح* ⟵ ح : س ⟵ $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

ويكون : ها (–١) = ٠

ها (١) = ٢

ها (٥) = ١٫٢

٢٤٩ – إذا كان م هو التطبيق المطابق في مجموعة سـ ، فان مقصور م على أية مجموعة جزئية ع ⊇ سـ يسمى **التطبيق القانوني** للمجموعة ع في المجموعة سـ . مـا هو التطبيق القـانوني

للأعداد الأولية في مجموعة الأعداد الطبيعية ط . وما هي صور الأعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ بواسطة هذا التطبيق .

الحـل :

بفرض ل هي مجموعة الأعداد الأولية فان التطبيق القانوني المطلوب هو التطبيق :

$$\text{تا} : \text{ل} \longrightarrow \text{ط} : \text{س} \longrightarrow \text{س}$$

ونجد في هذا التطبيق :

تا (٢) = ٢ ، تا (٣) = ٣ ، تا (٥) = ٥

في حين أنه ليس للعدد ٦ مقابل لأن ٦ $\notin$ ل .

٢٥٠ - لدينا التابعان :

$$\text{تا} : \{١ ، ٢ ، ٣\} \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{ها} : [١ ، ٣] \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow \frac{١}{\text{س}}$$

بيّن أن ها هو ممدد تا على المجال [١ ، ٣] .

الحـل :

إن ها هو ممدد تا على المجال [١،٣] لأن تا هو مقصور ها على المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} $\subset$ [١،٣] .

٢٥١ - ليكن التابع تا : ح$^+$ ⟵ ح : س ⟵ س

اذكر أي التوابع الآتية يكون ممدداً للتابع تا وأيها ليس كذلك ؟

$$\text{ها}_١ : \text{ح} \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow |\text{س}|$$

$$\text{ها}_٢ : [-١،١] \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow \text{س}$$

$$\text{ها}_{٣} : \text{ح} \longleftarrow \text{ح} : \text{س} \longleftarrow \frac{\text{س} + |\text{س}|}{٢}$$

$$\text{ها}_{٤} : \text{ح} \longleftarrow \text{ح} : \text{س} \longleftarrow \text{س}$$

بما أن $|\text{س}| = \text{س}$ من أجل $\text{س} \leq ٠$ فان مقصور $\text{ها}_{١}$ على ح^{+} هو التابع تا . إذن $\text{ها}_{١}$ هو ممدد للتابع تا .

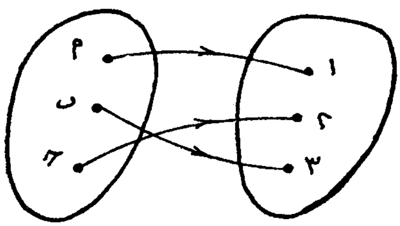
وبما أن ح^{+} ليست جزءاً من [‒ ١ ، ١] فلا يمكن أن يكون $\text{ها}_{٢}$ ممدداً للتابع تا .

وبما أنه من أجل $\text{س} \leq ٠$ يكون $\frac{\text{س} + |\text{س}|}{٢} = \frac{\text{س} + \text{س}}{٢} = \text{س}$ فان مقصور $\text{ها}_{٣}$ على ح^{+} هو التابع تا . إذن $\text{ها}_{٣}$ هو ممدد للتابع تا .

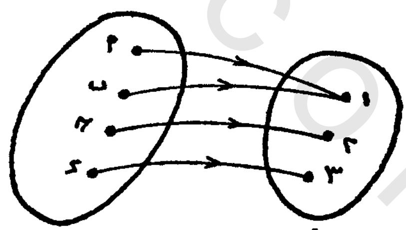
وأخيراً من الواضح أن $\text{ها}_{٤}$ هو أيضاً ممدد للتابع تا .

التطبيق المتباين ، التطبيق الغامر ، التقابل :

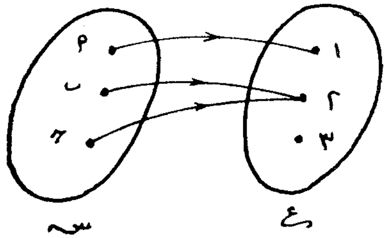
٢٥٢ – أيُّ التطبيقات الممثلة في الأشكال الآتية تطبيق متباين ؟



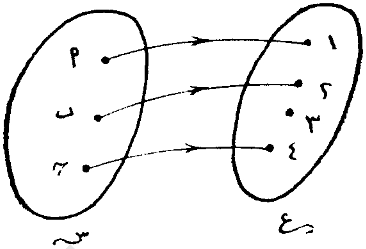
الشكل (١٧٦)



الشكل (١٧٥)



الشكل (١٧٧)



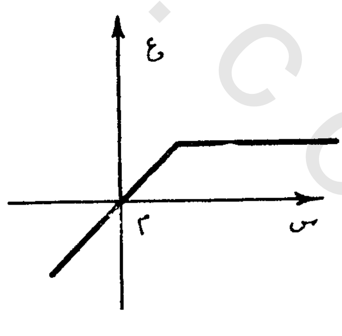
الشكل (١٧٨)

الحـل :

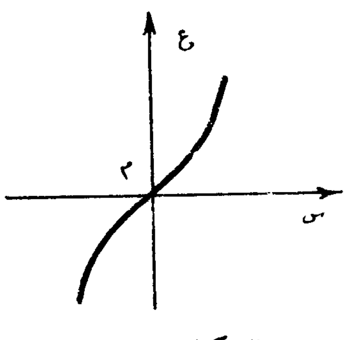
كل من الشكلين (١٧٦) ، (١٧٨) فقط يمثل تطبيقاً متبايناً ، **فالسهمان** المنطلقان من عنصرين مختلفين في س يستقران في عنصرين مختلفين في المستقر ع .

أما الشكل (١٧٧) فهو تطبيق غير متباين لأنه يستقر في العنصر (٢) سهمان وكذلك فان الشكل (١٧٥) تطبيق غير متباين لأنـه يستقر في العنصر (١) سهمان .

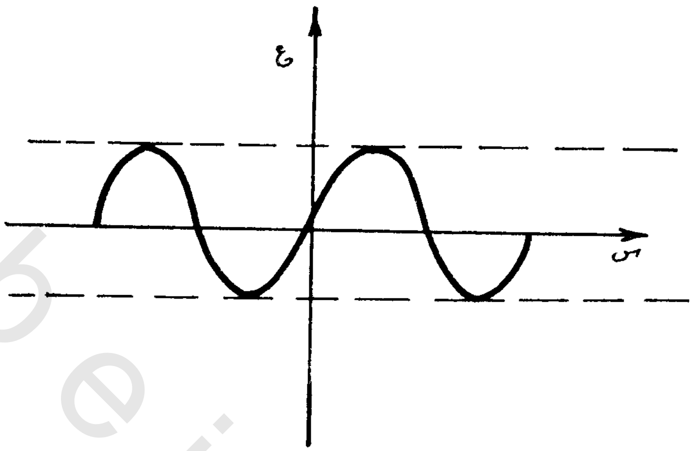
٢٥٣ – ما خاصة المخطط الديكارتي لتطبيق متباين ؟ أي المخططات الديكارتية الآتية هي مخطط تطبيق متباين لـ ح في ح .

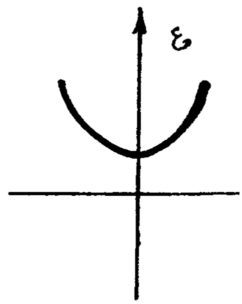


الشكل (١٧٩)



الشكل (١٨٠)





الشكل (١٨٢)   الشكل (١٨١)

الحل :

بفرض تا (س$_1$) = ع$_1$ ، تا (س$_2$) = ع$_2$

فالشرط س$_1$ $\neq$ س$_2$ $\Leftarrow$ تا (س$_1$) $\neq$ تا (س$_2$)

يعني أن س$_1$ $\neq$ س$_2$ $\Leftarrow$ ع$_1$ $\neq$ ع$_2$ أو ع$_1$ = ع$_2$ $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

ومعنى هذا عدم وجود نقطتين مختلفتين من المخطط الديكارتي على مستقيم يوازي م س . وعلى ذلك فان الشكل (١٨٠) فقط هو مخطط تطبيق متباين .

٢٥٤ ـ ما هي خاصة بيان التطبيق المتباين ؟

لتكن المجموعتان س = {أ ، ب ، حـ ، ء}

ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

و تا$_1$ ، تا$_2$ ، تا$_3$ ، تا$_4$ تطبيقات من س إلى ع بياناتها على الترتيب .

{(أ،١) ، (ب،٢) ، (حـ،٥) ، (ء،٤)}

{ (أ،٢) ، (ب،١) ، (حـ،٣) ، (د،٣) }

{ (ب،٥) ، (أ،٢) ، (حـ،٤) ، (د،٣) }

{ (أ،٣) ، (ب،٣) ، (حـ،٢) ، (د،٣) }

الحل :

ليس في بيان التطبيق المتباين زوجان مرتبان لهما المركبة الثانية نفسها . ولذا فان التطبيقين $تا_١$ ، $تا_٣$ ، متباينان ، إن كلاً من التطبيقين $تا_٢$ ، $تا_٤$ غير متباين .

٢٥٥ – برهن أن التطبيق تا : ح ⟵ ح : س ⟵ $س^٣$ متباين

الحل :

طريقة أولى : ∀ $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ح (المنطلق)

فان $س_١ \neq س_٢ \Leftarrow س_١^٣ \neq س_٢^٣$ لأن مكعبي عددين مختلفين مختلفان

$\Leftarrow$ تا $(س_١) \neq$ تا $(س_٢)$

طريقة ثانية :

تا $(س_١)$ = تا $(س_٢)$ $\Leftarrow س_١^٣ = س_٢^٣$ بالتعريف

$\Leftarrow س_١ = س_٢$ الجذران التكعيبيان لعددين متساويين متساويان

٢٥٦ – برهن أن التطبيق تا : ح ⟵ ح : س ⟵ $س^٢ - ١$ غير متباين .

الحل :

تا $(س_١)$ = تا $(س_٢)$ $\Leftarrow س_١^٢ - ١ = س_٢^٢ - ١$ بالتعريف

$\Leftarrow س_١^٢ = س_٢^٢$

$\Leftarrow س_١ = \mp س_٢$

وبما أن الشرط :

تا ($س_{١}$) = تا ($س_{٢}$) ⇐ $س_{١}$ = $س_{٢}$ لم يتحقق اذن فالتطبيق المفروض غير متباين .

٢٥٧ – بفرض ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، هل التطبيق :

تا : ط × ط ⟵ ط : (س،ع) ⟵ س + ع

متباين ؟

الحل : لدينا :

تا ((س،ع)) = تا ((س′،ع′)) ⇐ س + ع = س′ + ع′ بالتعريف

وهذا لا يؤدي إلى كون س = س′ و ع = ع′ بصورة عامة

فمن المعلوم مثلاً أن العدد ٤ هو صورة الأزواج المختلفة (٢،٢) ، (١،٣) ، (٣،١) وفق تا وذلك لأن :

تا ((١،٣)) = ١ + ٣ = ٤

و تا ((٣،١)) = ٣ + ١ = ٤

و تا ((٢،٢)) = ٢ + ٢ = ٤

ولذا فالتطبيق المفروض غير متباين .

٢٥٨ – أيُّ التوابع الآتية تابع متباين ؟

١ – تا : [٠ ، ١ [⟵ ح : س ⟵ $س^{٢}$ – ١

٢ – ها : [–١ ، ٠] ⟵ ح : س ⟵ $س^{٢}$ – ١

٣ – لا :] –١ ، ١ [⟵ ح : س ⟵ $س^{٢}$ – ١

الحل :

١ – لدينا تا ($س_{١}$) = تا ($س_{٢}$) ⇐ $س_{١}^{٢}$ – ١ = $س_{٢}^{٢}$ – ١ (بالتعريف)

⇐ $س_1^2 - س_2^2 = 0$ ⇐ $(س_1 - س_2)(س_1 + س_2) = 0$

⇐ $س_1 - س_2 = 0$ لأن $س_1 + س_2 \neq 0$ في منطلق التابع

⇐ $س_1 = س_2$

اذن التابع تا متباين .

٢ – بطريقة مماثلة لما سبق لدينا :

ها $(س_1)$ = ها $(س_2)$ ⇐ $(س_1 - س_2)(س_1 + س_2) = 0$

⇐ $س_1 - س_2 = 0$ لأن $س_1 + س_2 \neq 0$
في منطلق التابع

⇐ $س_1 = س_2$

اذن التابع ها متباين .

٣ – وكذلك لدينا :

لا $(س_1)$ = لا $(س_2)$ ⇐ $(س_1 - س_2)(س_1 + س_2) = 0$

⇐ $س_1 = س_2$ أو $س_1 + س_2 = 0$

ولما كان هذا الشرطان ممكنين في منطلق هذا التابع . فالتابع غير متباين .

٢٥٩ – أيّ التطبيقات الآتية تطبيق غامر ؟

١ – تا : ح ← ح : س ← $٢ س + ١$

٢ – تا : ح* ← ح : س ← $\frac{س + ١}{س}$

٣ – تا : ص+ ← ص+ : س ← $س^2$

الحل :

١ – لنبحث عما إذا كان كل عنصر ع ∈ ح (المستقر) هو صورة وفق تا لعنصر س على الأقل من ح (المنطلق) .

في الحقيقة ، لكي يكون ع صورة لعنصر س يجب أن يكون

$$٢\,س + ١ = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \frac{ع - ١}{٢} \qquad (١)$$

ومن الواضح أنه مهما كان $ع \in ح$ (المستقر) فان ع هو صورة لعنصر من $س \in ح$ (المنطلق) معين بالعلاقة (١) .

٢ – ليكن ع عنصراً من ح (المستقر) ، فلكي يكون ع صورة لعنصر س من $ح^*$ (المنطلق) يجب أن يكون :

$$\frac{س + ١}{س} = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \frac{١}{ع - ١} \qquad (٢)$$

وواضح من العلاقة (٢) أن العنصر $١ \in ح$ (المستقر) ليس صورة لأي عنصر س من المنطلق $ح^*$. ولذا فالتابع تا غير غامر .

٣ – لكي يكون عنصر ع من المستقر ، صورة لعنصر س من المنطلق يجب أن يكون :

$$س^٢ = ع \quad \text{ومنه} \quad س = \sqrt{ع} \qquad (٣)$$

وبما أن جذر العدد الصحيح الموجب ليس صحيحاً بالضرورة مثل $\sqrt{٣}$ فالعلاقة (٣) تدل على أن بعض الأعداد الصحيحة من المستقر ليست صوراً لأعداد صحيحة موجبة من المنطلق ، فالتابع تا اذن غير غامر .

٢٦٠ – بفرض ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، برهن أن التطبيق

$$تا : ط \times ط \longrightarrow ط \; : \; (س،ع) \longrightarrow س.ع$$

غامر .

الحل :

بما أن أي عنصر من المستقر ط هو حاصل ضرب عددين طبيعيين

أي أنه صورة لعنصر واحد على الأقل من ط × ط ، **فالتطبيق ما غامر**.

٢٦١ – لدينا التطبيقات :

١ – تا : ح ⟵ ح : س ⟵ $س^{٢}$

٢ – ها : ح ⟵ $ح^{+}$: س ⟵ $س^{٢}$

٣ – قا : $ح^{+}$ ⟵ ح : س ⟵ $س^{٢}$

٤ – كا : $ح^{+}$ ⟵ $ح^{+}$: س ⟵ $س^{٢}$

بيّن من أجل كل تطبيق ، هل هو متباين ؟ هل هو غامر ؟ هل هو تقابل ؟

الحل :

١ – بفرض $س_{١}$ ، $س_{٢}$ عنصرين من المنطلق يكون :

تا ($س_{١}$) = تا ($س_{٢}$) ⟸ $س_{١}^{٢} = س_{٢}^{٢}$ (بالتعريف)

⟸ ($س_{١} - س_{٢}$) ($س_{١} + س_{٢}$) = ٠

⟸ $س_{١} = س_{٢}$ أو $س_{١} = - س_{٢}$

وكلا الحالتين ممكنتان في المنطلق ح ، فالتابع تا **غير متباين** .
وبفرض ع ∈ ح (المستقر) و س ∈ ح (المنطلق) ويقابل ع وفق تا ، يكون :

$س^{٢}$ = ع ⟺ س = $\pm \sqrt{ع}$ (يؤخذ الجذرين لأن س ∈ ح)

وبما أن عملية الجذر التربيعي لا تتم إلا من أجل ع ≥ ٠ ، فليس كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل من المنطلق ، فالتابع تا **غير غامر** .

وبما أن تا غير متباين وغير غامر فهو **ليس تقابلاً** .

٢ – بطريقة مماثلة لما رأيناه في تا نجد أن التابع ها **غير متباين** .

وبفرض $ع \in ح^+$ (المستقر) و $س \in ح$ (المنطلق) ويقابل ع وفق ها ، يكون $س^2 = ع \Leftrightarrow س = \pm \sqrt{ع}$.

وبما أن $ع \in ح^+$ فعملية الجذر التربيعي ممكنة مهما كان ع من من المستقر ، أي أن كل عنصر من المستقر يقابل عنصراً على الأقل من المنطلق ، فالتابع ها **غامر** .

وبما أن التابع ها غامر وغير متباين فهو **ليس تقابلاً** .

٣ – لدينا $قا(س_1) = قا(س_2) \Rightarrow (س_1 - س_2)(س_1 + س_2) = 0$

$\Rightarrow س_1 - س_2 = 0$ (لعدم وجود عددين مختلفين في $ح^+$ مجموعهما صفر)

$\Rightarrow س_1 = س_2$

اذن فالتابع قا **متباين** .

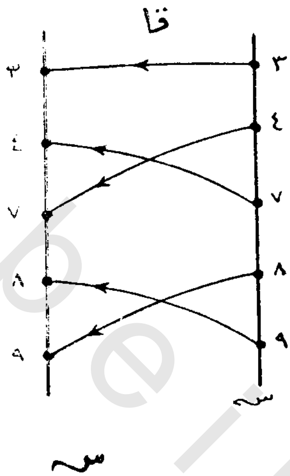
وبفرض $ع \in ح$ (المستقر) و $س \in ح^+$ (المنطلق) ويقابل ع وفق قا ، يكون $س^2 = ع \Leftrightarrow س = \sqrt{ع}$ (ويقتصر على الجذر الموجب لأن $س \in ح^+$) . وواضح أن كل عنصر $ع \geq 0$ (فقط) من المستقر يقابل عنصراً من المنطلق والتابع تا **غير غامر** .

وبما أن قا متباين وغير غامر فهو **ليس تقابلاً**

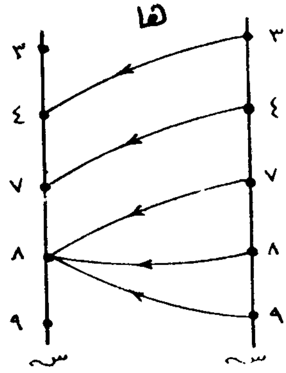
٤ – لأسباب مماثلة لما رأيناه في التابع قا نرى أن التطبيق كا **متباين** ولأسباب مماثلة لما رأيناه من أجل التابع ها نجد أن التطبيق كا **غامر** .

وبما أن كا متباين وغامر فهو **تقابل** .

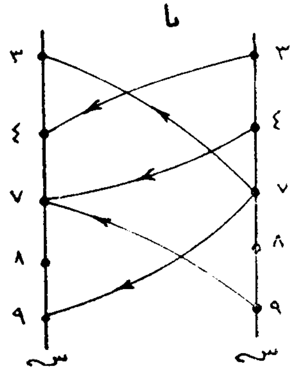
٢٦٢ – لتكن المجموعة $س = \{٣ ، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩\}$ والتطبيقات الثلاثة تا ، ها ، قا الممثلة في الأشكال (١٨٣) ، (١٨٤) ، (١٨٥) أي من هذه التطبيقات يقبل تطبيقاً عكسياً ؟



الشكل (١٨٥)



الشكل (١٨٤)



الشكل (١٨٣)

الحـــل :

من المعلوم أنه كي يقبل التطبيق تطبيقاً عكسياً يجب أن يكون التطبيق المفروض تقابلاً . وبما أن قا هو التقابل بين التطبيقات المفروضة فله تقابل عكسي .

٢٦٣ – برهن أن التطبيق :

تا : ح ← ح : س ← ٨ $س^{٣}$ − ١

تقابل ، ثم أوجد التطبيق العكسي له .

الحـــل .

بفرض $س_{١}$ ، $س_{٢}$ عنصرين من ح (المنطلق) يكون :

تا ($س_{١}$) = تا ($س_{٢}$) ⇐ ٨ $س_{١}^{٣}$ − ١ = ٨ $س_{٢}^{٣}$ − ١

⇐ ٨ $س_{١}^{٣}$ = ٨ $س_{٢}^{٣}$

⇐ $س_{١}^{٣}$ = $س_{٢}^{٣}$ ⇐ $س_{١}$ = $س_{٢}$

فالتابع تا متباين .

وبفرض ع ∋ ح (المستقر) و س ∋ ح (المنطلق) الذي يقابله ع يكون :

$$8 س^3 - 1 = ع \Leftrightarrow س = \frac{\sqrt[3]{ع+1}}{2} \qquad (1)$$

وواضح أن $\forall$ ع ∋ ح ⇐ ع + 1 ∋ ح ⇐ $\frac{\sqrt[3]{ع+1}}{2}$ ∋ ح أي أنه من أجل كل عنصر ع من المستقر يقابله عنصر س من المنطلق فالتابع تا غامر . وأخيراً فالتابع تا هو تقابل .

وبفرض ع هي صورة س وفق تا فان س تكون صورة ع وفق التقابل العكسي $تا^{-1}$ أي أن :

$$س = تا^{-1}(ع)$$

وحسب (1) يكون : $تا^{-1}(ع) = \frac{\sqrt[3]{ع+1}}{2}$

ويكون التقابل العكسي :

$$تا^{-1} : ح \longrightarrow ح : ع \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{ع+1}}{2}$$

وبما أن ع رمز اختياري لمتحول التطبيق ، أمكننا كتابة التقابل العكسي بالشكل :

$$تا^{-1} : ح \longrightarrow ح : س \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{س+1}}{2}$$

مستخدمين س الرمز المألوف لمتحول تابع .

٢٦٤ - لدينا التطبيق :

$$تا : ح - \{5\} \longrightarrow ح - \{2\} : س \longrightarrow \frac{2س + 1}{س - 5}$$

برهن أن تا تقابل وأوجد $تا^{-1}$.

الحـــل :

بفرض $س_1$ ، $س_2$ عنصرين من المنطلق يكون لدينا :

$$تا(س_1) = تا(س_2) \Leftarrow \frac{٢ س_1 + ١}{س_1 - ٥} = \frac{٢ س_2 + ١}{س_2 - ٥} \quad (\text{بالتعريف})$$

$\Leftarrow$ $(٢ س_1 + ١)(س_2 - ٥) = (٢ س_2 + ١)(س_1 - ٥)$ لأن

$س_1 \neq ٥$ ، $س_2 \neq ٥$

$\Leftarrow$ $س_1 = س_2$ ، فالتطبيق تا متباين .

وبفرض ع عنصراً من المستقر و س عنصراً من المنطلق يقابلـــه ع

يكون $\frac{٢ س + ١}{س - ٥} = ع$

وبحساب س بدلالة ع نجد :

$$س = \frac{٥ ع + ١}{ع - ٢}$$

وبما أن الكسر في العلاقة الأخيرة معرّف مهما كانت ع من المستقر $ح - \{٢\}$ لأن ع $\neq ٢$. فكل عنصر ع من المستقر يقابله وفق تا عنصر س من المنطلق أي أن التطبيق تا غامر . وأخيراً فالتطبيق تا تقابل .
ونجد بسهولة أن التطبيق العكسي هو :

$$تا^{-1} : ح \longleftarrow ح : س \longleftarrow \frac{٥ س + ١}{س - ٢}$$

٢٦٥ – نمثل كل علاقة من العلاقات الواردة في هذا التمرين تطبيقاً لـ ح في ح اكتب العلاقة الممثلة لـ حا ه تا وعيّن مجموعة

تعريف ومجموعة قيم هذا التابع المركب في كل حالة من الحالات التالية :

أ – تا (س) = س + ٤ ، حا (س) = س – ٧

ب – تا (س) = ٣ س – ٥ ، حا (س) = $س^{٢}$

حـ – تا (س) = ٤ س + ١ ، حا (س) = $س^{٣}$

د – تا (س) = س – ١ ، حا (س) = $\frac{١}{١ + س^{٢}}$

الحل :

لنرمز لمجموعة منطلق تا بـ سـ ولمتحولها بـ س ولمجموعة مستقره بـ عـ ولمتحولها بـ ع فتكون مجموعة منطلق حا هي عـ نفسها ، ولنرمز لمجموعة مستقرها بـ صـ ولمتحولها بـ ص ، فيكون :

أ – إن التطبيق تا غامر ومتباين يقابل بين كل عنصر س ∈ سـ وعنصر ع ∈ عـ بحيث يكون ع = س + ٤ وإن التطبيق حا (س) غامر ومتباين أيضاً يقابل بين كل عنصر ع ∈ عـ وعنصر وحيد ص ∈ صـ بحيث يكون :

ص = ع – ٧ ⇐ ص = (س + ٤) – ٧ = س – ٣

أي حا [تا (س)] = س – ٣ أو $س \xrightarrow{حا \circ تا} س - ٣$

إن التابع حا ه تا تطبيق غامر ومتباين (تقابل) ، فمجموعة تعريفه ح ومجموعة قيمه ح .

ب – إن التطبيق تا تقابل يحقق العلاقة ع = ٣ س – ٥ أما التطبيق حا فهو غير غامر وغير متباين لأن مجموعة قيمة ح + ولأن $(\pm س)^{٢} = س^{٢}$ وهو يحقق العلاقة :

ص = $ع^{٢}$ ⇐ ص = $(٣ س - ٥)^{٢}$

أي حا [تا (س)] = $(٣\,\text{س} - ٥)^{٢}$

إن التطبيق حا ه تا من ح إلى ح ليس بغامر لأن مجموعة قيمه هي ح + وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + \frac{٥}{٣} \Leftarrow \text{ص} = (٣\,\text{ب})^{٢} = ٩\,\text{ب}^{٢}$$

$$\text{و س} = -\,\text{ب} + \frac{٥}{٣} \Leftarrow \text{ص} = (-٣\,\text{ب})^{٢} = ٩\,\text{ب}^{٢}$$

وأما مجموعة تعريف هذا التطبيق فهي مجموعة منطلقه ح .

جـ − تا (س) تقابل علاقته ع = ٤ س + ١ و حا (س) تقابل أيضاً علاقته :

$$\text{ص} = \text{ع}^{٣} \Leftarrow \text{ص} = (٤\,\text{س} + ١)^{٣}$$

إن التطبيق حا ه تا متباين وغامر يطبق ح على ح .

د − تا تقابل علاقته ع = س − ١ أما حا فهو تطبيق غير غامر وغير متباين يحقق العلاقة $\text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ع}^{٢}} = \frac{١}{١ + (\text{س} - ١)^{٢}}$

إن التطبيق المركب : $\text{س} \xrightarrow{\text{حا ه تا}} \frac{١}{١ + (\text{س} - ١)^{٢}}$

ليس بغامر لأن قيمته موجبة دوماً أي مجموعة قيمه هي ح + وليس بمتباين لأن :

$$\text{س} = \text{ب} + ١ \longrightarrow \text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ب}^{٢}}$$

$$\text{و س} = -\,\text{ب} + ١ \longrightarrow \text{ص} = \frac{١}{١ + \text{ب}^{٢}}$$

وأما مجموعة تعريفه فهي ح .

٢٦٦ - تعرّف العلاقتان: تا (س) = (٢س-٧)، و حا (س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$

تابعين من ح ← ح (حيث ح مجموعة الأعداد العادية).

أ - اكتب علاقة التابع المركب. حا ه تا وعيّن مجموعة تعريف هذا التابع.

ب - ما هي المجموعة التي يجب أن نأخذها منطلقاً للتابع تا ليصبح حا ه تا تطبيقاً :

الحـل :

إن التابـع تا (س) = ٢ س - ٧ يربط بكل عنصر س ∈ ح عنصراً وحيداً من ح فهو تطبيق وهو غامر ومتباين، إذا رمزنا بـ ع لمتحول مستقره فانه يحقق علاقة من الشكل :

$$ع = ٢ س - ٧$$

أما التابع حا (س) فانه لا يمثل تطبيقاً لأنه غير معرف من أجـل س = + ١ من المنطلق ح ، إذا رمزنا بـ ع لمتحول منطلقـه وبـ ص لمتحول مستقره فان علاقة هذا التابع هي :

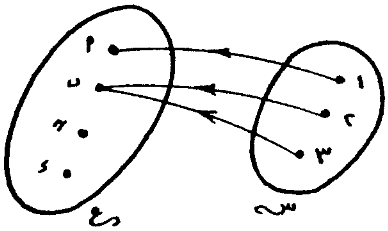
$$ص = \frac{ع + ١}{ع - ١} \Leftarrow ص = \frac{(٢ س - ٧) + ١}{(٢ س - ٧) - ١} = \frac{٢ س - ٦}{٢ س - ٨}$$

إن مجموعة تعريف هذا التابع كتابع مركب حا ه تا هي ح - { ٤ }

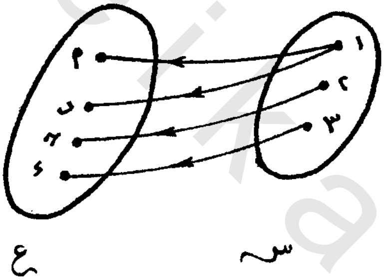
حـ - يصبح التابع حا ه تا تطبيقاً إذا كان منطلقه مساوياً لمجموعـة تعريفه أي إذا كانت مجموعة منطلقة هي المجموعة ح - { ٤ }.

تمارين غير محلولة

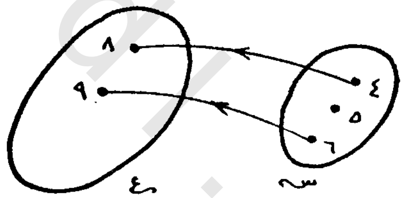
٢٦٧ – بيّن أي الأشكال الآتية يمثل تابعاً ، وعيّن مجموعة تعريف كل تابع :



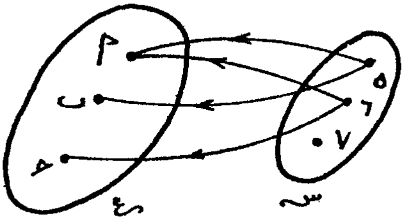
الشكل (١٨٦)



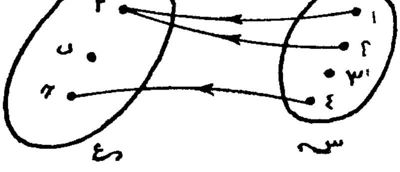
الشكل (١٨٧)



الشكل (١٨٨)



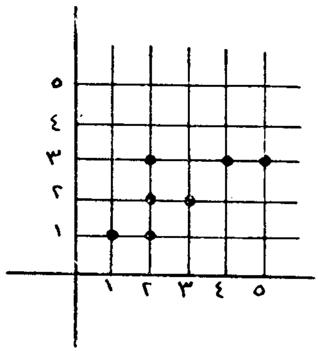
الشكل (١٨٩)



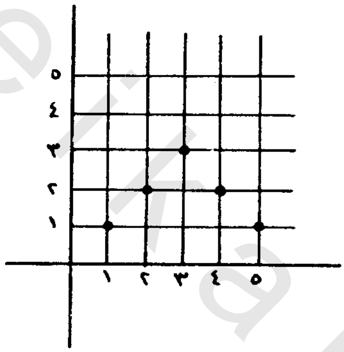
الشكل (١٩٠)

الشكل (١٩١)

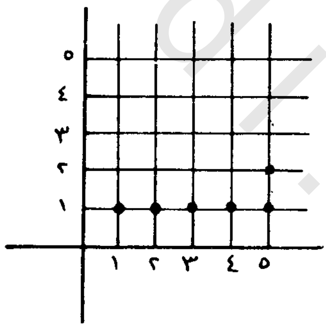
٢٦٨ - لتكن سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} والعلاقات من سـ إلى سـ الممثلة بالأشكال (١٩٢) ، (١٩٣) ، (١٩٤) :



الشكل (١٩٢)



الشكل (١٩٣)

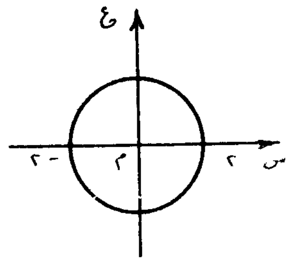


الشكل (١٩٤)

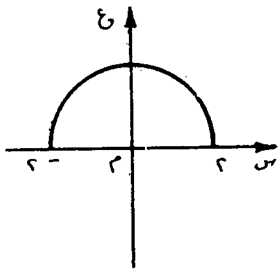
أي هذه الأشكال يمثل تابعاً ؟

٢٦٩ - أي العلاقات الآتية من ح إلى ح والممثلة بالمخططات

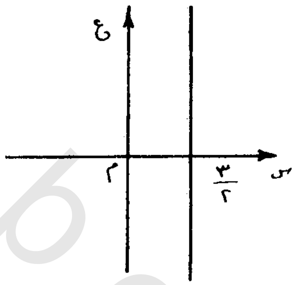
الديكارتية الآتية هي تابع . عيّن مجموعة تعريف كل تابع .



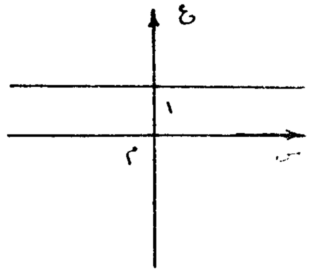
الشكل (١٩٥)



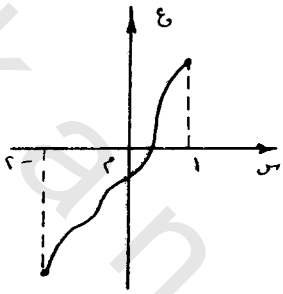
الشكل (١٩٦)



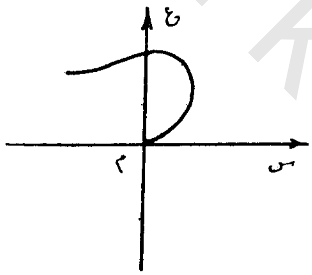
الشكل (١٩٧)



الشكل (١٩٨)



الشكل (١٩٩)



الشكل (٢٠٠)

٢٧٠ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

مع العلم أن : تا (س) = ٠ من أجل س ≤ ٠ ، تا (س) = س
من أجل ٠ < س ≤ ١ ، تا (س) = −١ من أجل س > ١

١ً – عيّن مجموعة تعريف التابع تا ، وأوجد قيمة تا (−٤) ،

تا (٠) ، تا ($\frac{١}{٢}$) ، تا (٢) ، تا (٥٠) .

٢ً – ارسم المخطط الديكارتي لهذا التابع .

٢٧١ – لدينا التابع تا : ح ← ح : س ← تا (س)

مع العلم أن : تا (س) = − س من أجل − ٥ ≦ س < ٠

و تا (س) = $س^{٢}$ من أجل ٠ ≦ س ≦ ٢

١ – ما مجموعة تعريف التابع تا ؟

٢ – ارسم المخطط الديكارتي للتابع تا .

٢٧٢ – ميّز التطبيقات بين التوابع الآتية :

$تا_{١}$: ج ← ح : س ← طوله لأقرب سنتمتر
حيث ج مجموعة سكان القاهرة

$تا_{٢}$: ج ← ط : س ← عمره لأقرب سنة
حيث ج مجموعة طلاب إحدى الثانويات .

$تا_{٣}$: ح ← ع : س ← $\frac{س + ١}{س}$

$تا_{٤}$: ح ← ح : س ← $\sqrt{س^{٢} + ١}$

$تا_{٥}$: ح ← ح : س ← $\frac{\sqrt{س}}{س - ١}$

٢٧٣ – لدينا المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

والعلاقات $ر_{١}$ ، $ر_{٢}$ ، $ر_{٣}$ ، $ر_{٤}$ من س الى س التي بياناتها على الترتيب هي :

{ (١،١) ، (١،٢) ، (٢،٣) ، (٤،٥) }

{ (١،٢) ، (٢،٣) ، (٣،١) ، (٤،٥) }

{ (١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) ، (٤،٣) ، (٥،٢) }

{ (١،٢) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،٥) ، (٤،١) }

أي العلاقات السابقة توابع ، عين مجموعة تعريف كل تابع وعين التطبيق من التوابع .

٢٧٤ – لدينا المجموعتان سـ = { أ، ب } و ع = { ١، ٢ }
ما هي التوابع الممكنة من سـ إلى ع ؟

٢٧٥ – لتكن سـ مجموعة مناحي مستقيمات مستو ولنعتبر فيها العلاقة ر المعرّفة كما يلي :

$$\text{س ر ع} \Leftrightarrow \text{س} \perp \text{ع}$$

أثبت أن العلاقة ر تابع .

٢٧٦ – لدينا المجموعتان سـ = { أ، ب } ، ع = { ١ ، ٢ ، ٣ }
ما هي التطبيقات الممكنة من سـ إلى ع ؟

٢٧٧ – لدينا التابع تا : ح ⟵ ح : س ⟵ س
عين مقصوره ها على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } . مثّل هذا المقصور ديكارتياً .

٢٧٨ – لدينا التابعان العدديان لمتحول حقيقي :

$$\text{تا} : \text{ح} \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$$

$$\text{ها} : \text{ح} \longrightarrow \text{ح} : \text{س} \longrightarrow \text{س} + ١$$

هل هذا التابعان متساويان ؟

٢٧٩ – ما التطبيقات المتباينة فيما يلي :
١ – التطبيق الذي يربط بكل ثانوية مديرها .
٢ – التطبيق الذي يربط بكل كتاب عدد صفحاته .
٣ – التطبيق الذي يربط بكل بيت من بيوت دمشق رقمه.
٤ – التطبيق الذي يربط بكل دجاجة وزنها .

٢٨٠ – أمن الممكن أن يكون التطبيق الثابت متبايناً ؟

٢٨١ – ما المجموعة سـ التي يكون عليها التطبيق المطابق متبايناً ؟

٢٨٢ – أمن الممكن أن يكون التطبيق الثابت غامراً ؟

٢٨٣ – متى يكون التطبيق الثابت متبايناً وغامراً معاً ؟

٢٨٤ – هل التطبيق المتطابق على مجموعة غامر ؟

٢٨٥ – ليكن سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٩ }
والتطبيق تا : سـ ← ع : س ← س^{٢} . برهن أن لـ تا تطبيقاً عكسياً يطلب تعيينه .

٢٨٦ – ليكن سـ = ح – { – $\frac{١}{٢}$ } ، ع = ح – { $\frac{١}{٢}$ }

والتطبيق تا : سـ ← ع : س ← $\frac{\text{س} - ٣}{٢\text{س} + ١}$. برهن أن تا$_{١}$ يقبل تطبيقاً عكسياً يطلب تعيينه .

٢٨٧ – نرمز بـ [ب ، حـ] لمجموعة الأعداد الصحيحة س المحققة للعلاقة ب ≤ س ≤ حـ وليكن تا ، حا تطبيقين لـ صـ في صـ معرفين بالعلاقتين :

تا (س) = ٢ س و حا (س) = س^{٢}

أجب على الأسئلة التالية :

١ً – هل التابعان تا ، حا غامران أم متباينان ؟

٢ً – بفرض هـ = [– ٣ ، ١] ، هـ' = [٠ ، ٢]

أ – احسب هـ ∪ هـ' واحسب تا (هـ ∪ هـ') و تا (هـ) ∪ تا (هـ')
ماذا تلاحظ ؟

ب – احسب المجموعة حا (هـ ∪ هـ') و حا (هـ) ∪ حا (هـ')
ماذا تلاحظ ؟

حـ – احسب ه $\cap$ ه′ ، تا (ه $\cap$ ه′) ، تا (ه) $\cap$ تا (ه′)
ماذا تلاحظ ؟

ء – احسب حا (ه $\cap$ ه′) ، حا (ه) $\cap$ حا (ه′) ماذا تلاحظ؟

علماً بأن تا (ه) ، حيث ه مجموعة جزئية من المنطلق ، هي المجموعة المكونة من صور عناصر ه وفق تا .

٢٨٨ – ليكن تا ، حا تطبيقين لـ ط في ط معرفين بالعلاقتين :

$$\text{تا (س)} = \text{٢ س} \ ، \quad \begin{cases} \text{حا (س)} = \dfrac{١}{٢}\,\text{س} & \text{إذا كان س زوجياً} \\ \text{حا (س)} = ٠ & \text{إذا كان س فردياً} \end{cases}$$

١ – بيّن فيما إذا كان تا و حا غامرين ومتباينين .

٢ – عرف حا ∘ تا

٣ – حل المعادلات تا (س) = ٤ ، تا (س) = ١٣ ، حا (س) = ٤ ، حا (س) = ١٣ ، حا (س) = ٠ .

أجوبة وارشادات

٢٦٧ – كل من الأشكال (١٨٦) ، (١٨٨) ، (١٩٠) ، (١٩١) يمثل تابعاً ومجموعات التعريف هي على الترتيب :
سـ ، {٤ ، ٦} ، {١ ، ٢ ، ٤} ، {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} .

٢٦٨ – الشكل (١٩٣) يمثل تابعاً حيث كل عنصر من سـ يقابله عنصر وحيد .

٢٦٩ – كل من الأشكال (١٩٦) ، (١٩٨) ، (١٩٩) ، يمثل تابعاً لأن كل عنصر من المنطلق يقابله عنصر على الأكثر من المستقر .. ونتأكد من ذلك برسم مستقيمات توازي م ع فبعض هذه المستقيمات لا يشترك مع المخطط بأية نقطة والبعض الآخر

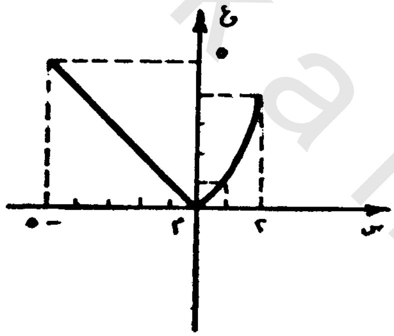
يشترك مع المخطط بنقطة واحدة . ومجموعات تعريف هذه التوابع هي على الترتيب [−٢ ، ٢] ، ح ، [−٢ ، ١] .

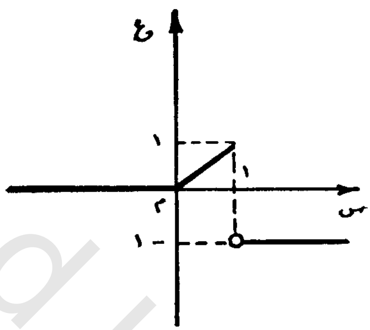
وكل من الأشكال (١٩٥) ، (١٩٧) ، (٢٠٠) لا يمثل تابعاً لأن بعض المستقيمات الموازية لـ م ع تشترك مع المخطط بأكثر من نقطة .

٢٧٠ — ١ً — مجموعة التعريف هي ح ، تا (−٤) = ٠ ، تا (٠) = ٠

تا ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ ، تا (٢) = −١ ، تا (٥٠) = −١

٢ً — المخطط الديكارتي الشكل (٢٠١)





(٢٠٢) الشكل (٢٠١)

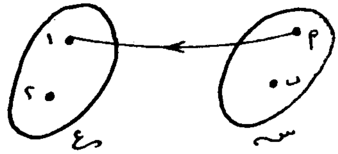
٢٧١ — ١ً — مجموعة تعريف التابع هي المجال [−٥ ، ٢] .

٢ً — المخطط الديكارتي الشكل (٢٠٢) .

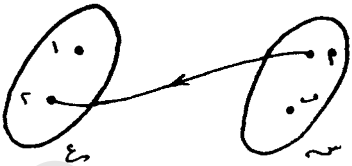
٢٧٢ — التطبيقات هي تا$_١$ ، تا$_٢$ ، تا$_٤$.

٢٧٣ — كل من س$_١$ ، س$_٤$ ليست تابعاً ، مجموعة تعريف التابع المعين بـ س$_٢$ هي {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ومجموعة تعريف التابع المعين بـ س$_٣$ هي {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، وهذا التابع تطبيق .

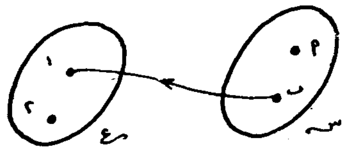
٢٧٤ – يضاف الى التطبيقات الوارة في التمرين المحلول رقم (٢٤٢). التوابع الممثلة بالأشكال (٢٠٣) ، (٢٠٤) ، (٢٠٥) ، (٢٠٦) :



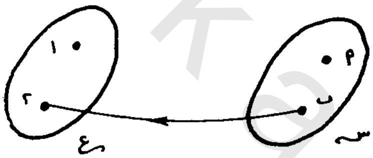
الشكل (٢٠٣)



الشكل (٢٠٤)



الشكل (٢٠٥)



الشكل (٢٠٦)

٢٧٥ – لأن كل منحى س ∋ س يقابله منحى من س متعامدمعه .

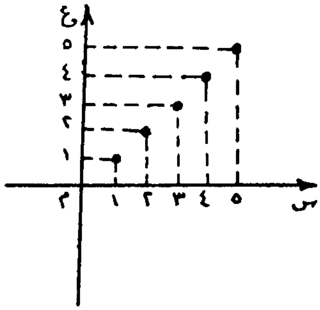
٢٧٦ – هي التطبيقات :

{ أ ← ١ ، ب ← ١ } { أ ← ٢ ، ب ← ٢ } { أ ← ٣ ، ب ← ٣ }

{ أ ← ١ ، ب ← ٢ } { أ ← ١ ، ب ← ٣ } { أ ← ٢ ، ب ← ٣ }

وكل تطبيق ينتج عن التطبيقات الثلاثة الأخيرة بتبادل موضعي أ و ب

٢٧٧ – ها : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ← ح : س ← س والتمثيل الديكارتي الشكل (٢٠٧) :



الشكل (٢٠٧)

٢٧٨ – ليسا متساويين لأن مجموعة تعريف الأول ح – {١} ومجموعة تعريف الثاني ح والمجموعتان غير متساويتين .

٢٧٩ – كل من التطبيقين ١ ، ٣ متباين .

٢٨٠ – يكون التطبيق الثابت متبايناً إذا كان المنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨١ – أية مجموعة سـ يكون التطبيق المطابق عليها متبايناً .

٢٨٢ – يكون التطبيق الثابت غامراً إذا كان المستقر مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٣ – يكون التطبيق الثابت غامراً ومتبايناً معاً إذا كان كل من المستقر والمنطلق مجموعة وحيدة العنصر .

٢٨٤ – التطبيق المطابق على مجموعة غامر .

٢٨٥ – $تا^{-1}$: ح ← سـ : س ← $\sqrt{س}$.

٢٨٦ – يبرهن كما في التمرين المحلول (٢٦٤) أن تا متباين وغامر والتطبيق المعاكس هو :

$$تا^{-1} : ح \leftarrow سـ : س \leftarrow \frac{س + ٣}{١ - ٢ س}$$

٢٨٧ - ١ً - (تا) غامر ومتباين ، (حا) ليس بغامر ولا متباين .

٢ً - أ - هـ ∪ هـ' = [-٣ ، ٢] ،

تا (هـ ∪ هـ') = { -٦ ، -٤ ، -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ }

تا (هـ) ∪ تا (هـ') = { -٦ ، -٤ ، -٢ ، ٠ ، ٢ } ∪ { ٠ ، ٢ ، ٤ }

= تا (هـ ∪ هـ')

ب - حا (هـ ∪ هـ') = { ٩ ، ٤ ، ١ ، ٠ }

حا (هـ) ∪ حا (هـ') = { ٩ ، ٤ ، ١ ، ٠ ، ١ } ∪ { ٠ ، ١ ، ٤ }

حا (هـ ∪ هـ') = حا (هـ) ∪ حا (هـ')

جـ - هـ ∩ هـ' = [٠ ، ١] ، تا (هـ ∩ هـ') = { ٠ ، ٢ } ،

تا (هـ) ∩ تا (هـ') = { ٠ ، ٢ }

حا (هـ ∩ هـ') = { ٠ ، ١ } ، حا (هـ) ∩ حا (هـ') = { ٠ ، ١ ، ٤ } ،

حا (هـ ∩ هـ') ≠ حا (هـ) ∩ حا (هـ') .

٢٨٨ - ١ً - (تا) غير غامر ومتباين ، (حا) غامر وغير متباين .

٢ً - حا [تا (س)] = س وهو غامر ومتباين .

٣ً - س = ٢ ، مستحيلة ، س = ٨ ، س = ٢٦ ، أي عدد فردي.