الفصل السّادس

علاقتا التكافؤ والترتيب

٦١ ـ علاقة التكافؤ :

Relation d'equivalence ، Equivalence relation

لنعرّف في سـ مجموعة سكان مدينة دمشق العلاقة ر بخاصة « السكن في شارع واحد » فاذا سكن علي في الشارع الذي يسكن فيه صلاح فإننا نقول إن علياً مكافىء لصلاح من حيث سكنهما في شارع واحد ويلاحظ بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

ولنعرف العلاقة ر في مجموعة الأعداد الصحيحة بالشكل :

ر = { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ صـ × صـ و أ ـ ب يقبل القسمة على ٥ } .

من المعروف أن :

« أ ـ ب يقبل القسمة على ٥ » ⟺ « باقيا قسمة أ و ب على ٥ متساويان » .

لذا نقول في هذه الحالة إن العددين أ ، ب متكافئان من حيث باقي قسمتها على ٥ . ويبرهن بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعدية .

تعريف : نقول عن علاقة $\mathcal{R}$ معرفة في مجموعة ما س إنها علاقة تكافؤ فيما إذا كانت :

١ – منعكسة ٢ – متناظرة ٣ – متعدية

ونقول عن عنصرين ا، ب مرتبطين بعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ إنهما متكافئان وفق $\mathcal{R}$ ونكتب :

$$ا \approx ب \quad \text{أو} \quad ا \equiv ب$$

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي هي علاقة تكافؤ وذلك لأنه إذا كان م ، م$_١$ ، م$_٢$ ثلاثة مستقيمات كيفية من هذه المجموعه فإن :

١ – المستقيم م يوازي نفسه م // م فالعلاقة منعكسة .

٢ – اذا كان م // م$_١$ فإن م$_١$ // م أي م // م$_١$ $\Leftrightarrow$ م$_١$ // م والعلاقة متناظرة .

٣ – اذا كان م // م$_١$ و م$_١$ // م$_٢$ فإن م // م$_٢$ والعلاقة متعدية أي : م // م$_١$ و م$_١$ // م$_٢$ $\Rightarrow$ م // م$_٢$

مثال (٢) : إن علاقة التعامد بين مستقيمات المستوي ليست بعلاقة تكافؤ وذلك لأن م كمستقيم من هذه المجموعة لا يمكن أن يكون متعامداً مع نفسه والعلاقة ليست منعكسة وهـذا يكفي للبرهان على ان العلاقة المذكورة ليست بعلاقة تكافؤ .

مثال (٣) : إن قولنا « ا من عمر ب » من أجل طلاب مدرسة يعرف علاقة تكافؤ تجعل كل طالبين ولدا في عـام واحد متكافئين من حيث العمر .

مثال (٤) : لنرمز بالزوج (ا ، ب) للعدد العادي ا / ب حيث يمثل ا صورة (بسط) الكسر و ب مخرج (مقام) الكسر ولنعرف في مجموعة الأعداد العادية العلاقة :

(ب ، حـ) ر (س ، ع) $\Leftrightarrow$ ب . ع = س . حـ

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لتمتعها بالخواص التالية .

١ – (ب ، حـ) ر (ب ، حـ) لأن ب . حـ = حـ . ب والعلاقة منعكسة

٢ – (ب ، حـ) ر (س ، ع) $\Leftarrow$ (س ، ع) ر (ب ، حـ) وذلك لأن :

ب ع = س حـ $\Leftarrow$ س حـ = ب ع والعلاقة متناظرة

٣ – (ب ، حـ) ر (س ، ع) و (س ، ع) ر (د ، هـ) $\Leftarrow$ (ب ، حـ) ر (د ، هـ)
وذلك لأن :

ب . ع = س حـ و س هـ = د ع $\Leftarrow$ ب هـ = د حـ

لأنه اذا ضربنا طرفي المساواة الأولى بـ هـ واستفدنا من المساواة الثانية نجد :

ع ب هـ = ع د حـ

وبالتقسيم على ع (الذي لا يساوي الصفر) نجد :

ب هـ = د حـ أي (ب ، حـ) ر (د ، هـ) والعلاقة متعدية وهو المطلوب

٦٢ – أصناف (صفوف) التكافؤ

Classes d'équivalence . Equivalence Classes

إذا عدنا إلى المثال (١) فسوف نلاحظ أن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي تقسم هذه المجموعة إلى مجموعات جزئية تتكون كل واحدة منها من جميع المستقيمات المتوازية فيما بينها ونقول إن مستقيمات كل من هذه المجموعات الجزئية متكافئة مع بعضها من حيث كونها موازية لواحد منها .

تعريف : إذا عرفنا في المجموعة سـ علاقة تكافؤ ر وإذا كان ا عنصر كيفي من سـ فإننا نسمي المجموعة الجزئية من سـ التي تتكون من العناصر المكافئة لـ ا وفق ر **صنف تكافؤ** ا ونرمز له بـ **ص** (ا) وتسمى (ا) ممثل هذا الصنف .

ينتج من هذا التعريف :

١ – كل عنصر س ∈ سـ ينتمي إلى صنف تكافؤ .

٢ – إذا اشترك صنفا التكافؤ **ص** (ب) ، **ص** (حـ) بعنصر فإنهما متطابقان أي يمثلان مجموعة جزئية واحدة من سـ .

في الحقيقة إذا كان س ∈ **ص** (ب) و س ∈ **ص** (حـ) وبما أن علاقة التكافؤ ر علاقة متناظرة ومتعدية فانه يكون :

س ر ب و س ر حـ ⟸ ب ر س و س ر حـ ⟸ ب ر حـ

وإذا كان $س_1$ ∈ **ص** (ب) فإن $س_1$ ر ب وبما أن ب ر حـ فإننا نجد $س_1$ ر حـ أي $س_1$ ∈ **ص** (حـ) . فكل عنصر من الصنف الأول هو عنصر من الصنف الثاني .

وبشكل مماثل نرى العكس فالصنفان متطابقان وهو المطلوب .

٣ – إذا كان ب، حـ غير متكافئين وفق ر فإن المجموعتين الجزئيتين **ص** (ب) و **ص** (حـ) منفصلتان وهذا يعني أنه لا يوجد بين هذين الصنفين أي عنصر مشترك أي :

ص (ب) ∩ **ص** (حـ) = ∅

وذلك لأنه إذا كان س مشترك بين هذين الصنفين فإنهما سيكونان متطابقين ويكون ب ر حـ خلافاً لما فرضنا .

نلخص الخاصتين (٢) ، (٣) بقولنا :

إن كل صنفي تكافؤ للعلاقة ر إما ان يكونا منفصلين وإلا فانهما متساويان

٤ – نقول إن أصناف التكافؤ تجزئة للمجموعة سـ ونعني بذلك أن أصناف التكافؤ مجموعات جزئية من سـ غير خالية ومنفصلة مثنى مثنى واجتماعها يساوي المجموعة سـ نفسها أي :

$$\forall\, \text{ا} \in \text{سـ} \Rightarrow \text{ص}(\text{ا}) \neq \emptyset$$

$$\forall\, \text{ا}،\ \text{ب} \in \text{سـ}،\ \text{ا}\ \overline{\text{ر}}\ \text{ب} \Rightarrow \text{ص}(\text{ا}) \cap \text{ص}(\text{ب}) = \emptyset$$

$$\text{ص}(\text{ا}) \cup \text{ص}(\text{ب}) \cup \ldots = \text{سـ}$$

نسمي مجموعة أصناف تكافؤ المجموعة سـ وفق ر ناتج قسمة سـ على ر ونرمز لذلك بالشكل سـ/ر .

مثال (١) : إن علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات المستوي تجزيء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ نسمي كل صنف منها **منحى** في هذا المستوي وهو مجموعة جزئية من مجموعة مستقيمات هذ المستوي مكونة من كل المستقيمات المتوازية فيما بينها .

مثال (٢) : إن التساوي المعرف في المجموعة سـ هو علاقة تكافؤ تجزىء هذه المجموعة إلى أصناف تكافؤ يتألف كل صنف منها من عنصر واحد أي :

$$\forall\, \text{س} \in \text{سـ} \quad \text{ص}(\text{س}) = \{\text{س}\}$$

مثال (٣) : إذا عرفنا علاقة ر في مجموعة الأعداد الطبيعية ط بقولنا :
« إن العددين الطبيعيين ب ، حـ زوجيان أو فرديان معاً »

فإن ر علاقة تكافؤ تجزىء المجموعة ط إلى صنفي تكافؤ هما مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ومجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

٦٣ – علاقة الترتيب Ordered relation ، Relation d'ordre :

إذا عرفنا في سكان مدينة ما العلاقة (ب سلف لـ حـ) فيما إذا كان ب هو حـ أو أحد والديه أو أحد أجداده فإننا نلاحظ أن هذه العلاقة :

١ً – منعكسة لأن ب سلف لـ ب مهما كان ب من سكان المدينة .

٢ً – متعدية لأنه إذا كان ب سلفاً لـ حـ ، و حـ سلفاً لـ ى ، فان ب سلف لـ ى .

٣ً – لاتناظرية لأنه إذا كان ب سلفاً لـ حـ ، و حـ سلفاً لـ ب ، فإن ب هي حـ نفسها .

وإذا عرفنا في المدن الواقعة على نهر الفرات علاقة بقولنا (ب أخفض من حـ) فيما إذا مر الماء في المدينة ب بعد مروره في المدينة حـ أو في الوقت ذاته ، فعندئذ نلاحظ أن هذه العلاقة تتمتع كذلك بالصفات الثلاث المذكورة قبل قليل .

(لقد أعطينا ، كما يلاحظ ، لكلمتي سلف واخفض في هذين المثالين معنى أوسع من المعنى المألوف حيث اعتبرنا الانسان سلفاً لنفسه واعتبرنا المدينة اخفض من نفسها) .

وبصورة عامة :

نقول عن علاقة ر معرّفة في مجموعة س إنها علاقة ترتيب فيما إذا كانت :
١ – منعكسة ٢ – لاتناظرية ٣ – متعدية .

وإذا كان ب ر حـ وفق علاقة ترتيب فاننا نرمز لذلك عادة بالشكل :

ب < حـ   أو   حـ > ب

ونقرأ ذلك بقولنا : إن ب سابق لـ حـ أو واقع قبل حـ كما نقول إن حـ لاحق لـ ب أو واقع بعد ب .

مثال (١) : إن علاقة الاحتواء ⊇ المعرفة في ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ هي علاقة ترتيب . لأنه اذا كان ب ، حـ ، ء ثلاث مجموعات جزئية من سـ فإنه يكون حسب تعريف الإحتواء :

١ – ب ⊇ ب علاقة الاحتواء منعكسة

٢ – إذا كان ب ⊇ حـ و حـ ⊇ ب ⇐ ب = حـ العلاقة لاتناظرية

٣ – إذا كان ب ⊇ حـ و حـ ⊇ ء ⇐ ب ⊇ ء العلاقة متعدية

مثال (٢) : أن علاقة « يقسم » المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة ط* هي علاقة ترتيب. وذلك لأنها :

١ – منعكسة : ∀ ب ∋ ط* ب | ب

٢ – لاتناظرية : ب | حـ و حـ | ب ⇐ ب = حـ

٣ – متعدية : ب | حـ ، حـ | ء ⇐ ب | ء

مثال (٣) : ان العلاقة المألوفة ≤ المعرفة في مجموعة الأعداد العادية هي علاقة ترتيب لأنها ، كما هو واضح ، منعكسة ولاتناظرية ومتعدية .

٦٤ – الترتيب الكلي والترتيب الجزئي

Ordre total . Ordre partiel . Total ordre . Partial ordre

إذا درسنا علاقة الترتيب المعرفة في مجموعة الأعداد العادية ع والتي نرمز لها بـ ≤ فإننا نستنتج بسهولة أنه مهما كان العددان العاديان ب ،حـ

فإنهما يحققان واحدة على الأقل من العلاقتين ب $\leq$ حـ ، ب $\geq$ حـ أي إنهما يحققان العلاقة المركبة :

ب $\leq$ حـ أو ب $\geq$ حـ

نقول إن العلاقة $\leq$ المعرفة على ع هي علاقة ترتيب كلي وإن ع مرتبة كلياً بالعلاقة $\leq$.

أما إذا عدنا إلى دراسة علاقة الإحتواء المعرفة في ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ فإننا نجد أزواجاً من عناصر هذه المجموعة لا تحقق علاقة الإحتواء بالشكل $\subseteq$ ولا العلاقة المعاكسة ذات الشكل $\supseteq$ نقول في هذه الحالة إن علاقة الإحتواء المعرفة في مجموعة أجزاء المجموعة سـ هي علاقة ترتيب جزئي وإن المجموعة ج (سـ) مرتبة جزئياً بهذه العلاقة.

نقول عن عنصرين ء ، هـ من مجموعة عرفنا فيها علاقة ترتيب إنهما متقارنان فيما اذا كان :

ء ر هـ أو هـ ر ء

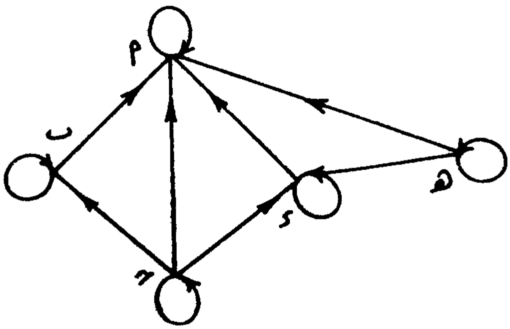
وإلا فإننا نقول إنهما غير متقارنين .

يرمز عادة لمجموعة سـ معرف عليها علاقة ر بالرمز (سـ، ر) . فإذا كانت ر علاقة ترتيب كلي قلنا ان (سـ ، ر) مرتبة كلياً وإلا قلنا إن (سـ، ر) مرتبة جزئياً .

إن (ط ، $\geq$) مرتبة ترتيباً كلياً، بينما (ج ، $\supseteq$) مرتبة ترتيباً جزئياً.

٦٥ – **التمثيل السهمي لعلاقة الترتيب** : لقد اصطلح أن تمثل علاقة ترتيب معرفة على مجموعة منتهية سـ بأن نرمز لعناصر هذه المجموعة بنقاط ونصل بين كل زوج محقق لعلاقة الترتيب المفروض بسهم ينطلق من المركبة الأولى لهذا الزوج ليستقر في المركبة الثانية . ولكي نبين أن هذه العلاقة منعكسة نرسم من كل نقطة من هذه النقاط منحنياً مغلقاً يبدأ من هذه النقطة وينتهي فيها .

مثال (١) : إن العلاقة المعرفة بالمخطط السهمي المرافق في المجموعة
{ أ ، ب ، حـ ، ى ، هـ }



الشكل (١١٧)

هي علاقة ترتيب جزئي تحققها الأزواج :

(حـ،ب) ، (ب،أ) ، (حـ،أ) ، (حـ،ى) ، (ى،أ) ،
(هـ،ى) ، (هـ،أ) ، (أ،أ) ، (ب،ب) ، (حـ،حـ) ،
(ى،ى) ، (هـ،هـ)

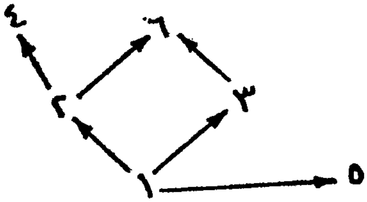
وغير محققة من قبل الأزواج :

(أ،ى) ، (أ،ب) ، (أ،حـ) ، (أ،هـ) ، (ب،حـ) ،
(ب،ى) ، (ب،هـ) ، (حـ،هـ) ، (هـ،حـ) ، (هـ،ب) ،
(ى،حـ) ، (ى،هـ) ، (ى،ب) .

لسهولة الرسم يرى بعض المؤلفين أن تمثل علاقة ترتيب (معروفة مقدماً) بمجموعة من النقاط يصل بين مركبتي كل زوج مرتب بهذه العلاقة سهم باتجاه الترتيب أو عدة أسهم متلاحقة من الاتجاه ذاته تمر بنقاط أخرى .

مثال : (٢) إن علاقة الترتيب المعرفة بـ (يقسم) على المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } تمثل بالمخطط السهمي المرافق وهي علاقة ترتيب جزئي لأن المخطط يحوي أزواجاً لا تتصل مركباتها ببعضها بسهم واحد أو

بأكثر من سهم من اتجــاه واحد مثل : (٥، ٣) ، (٥، ٦) ، (٢، ٣) ، (٤، ٦) .



الشكل (١١٨)

تعاريف :

١ - إذا وجد في مجموعة سـ مرتبة عنصر ب بحيث :

$$ب < س \quad \forall\, س \in سـ$$

فإننا نسميه العنصر الاول في هذه المجموعة .

وإذا وجد في سـ عنصر ب بحيث :

$$ب > س \quad \forall\, س \in سـ$$

فإننا نسميه العنصر الاخير في هذه المجموعة .

مثال (١) : إن الصفر هو العنصر الأول في مجموعة الأعداد الطبيعية وفق علاقة الترتيب $<$. ليس لهذه المجموعة عنصر أخـير وفق علاقة الترتيب هذه .

مثال (٢) : ان الصفر هو العنصر الأخير في مجموعـة الأعداد الصحيحـة السالبة والصفر ، وليس لهذه المجموعة عنصر أول وفق علاقة الترتيب $>$.

مثال (٣) : نلاحظ في المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } التي عرفنا فيها علاقة ترتيب « يقسم » أن العدد (١) هو عنصر أول في هذه المجموعة لأنه يقسم كل عنصر من عناصر هذه المجموعة وليس لها عنصر أخير لانه لا يوجد أي عدد من هذه المجموعة يقبل القسمة على كل واحد منها .

٢ – لتكن المجموعة المرتبة (سـ ، ر) وليكن أ ، ب عنصرين متقارنين وفق العلاقة ر بالشكل أ > ب . تعطى عادة التعاريف التالية :

١ – المجال المفتوح الذي يبدأ بـ أ وينتهي بـ ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة :

أ > س > ب ، س ≠ أ ، س ≠ ب .... (*)

نرمز لهذا المجال المفتوح بـ] أ ، ب [.

٢ – المجال المغلق الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر س المحققة للعلاقة (*) بالاضافة الى العنصرين أ ، ب ونرمز له بـ [أ ، ب] .

٣ – المجال المفتوح من اليمين الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالاضافة إلى ب ونرمز له بـ] أ ، ب] .

٤ – المجال المفتوح من اليسار الذي مبدؤه أ ونهايته ب هو المجموعة الجزئية في سـ المكونة من العناصر المحققة للعلاقة (*) بالاضافة إلى أ ونرمز له بـ [أ ، ب [.

مثال : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } علاقة الترتيب « يقسم » فإنه يكون :

] ٢ ، ٨ [= { ٤ }

[٣ ، ٩] = { ٣ ، ٩ }

[١ ، ٦ [= { ١ ، ٢ ، ٣ }

] ١ ، ٩] = { ٣ ، ٩ }

تمارين محلولة

علاقة التكافؤ :

٢٠٣ – نعرف في مجموعة الاعداد الصحيحة ص علاقة ثنائية ر بما يلي :

$$\text{ب ر ح} \Leftrightarrow (\exists\, \text{هـ} \in \text{ص} \text{ ، } \text{ب} - \text{ح} = \text{٦ هـ})$$

برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ وعيّن أصناف تكافؤ هذه العلاقة.

الحــل :

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لانها :

١ – منعكسة : ب ر ب لان $\text{ب} - \text{ب} = ٠ = ٦ \times ٠$ ، $٠ \in \text{ص}$

٢ – متناظرة : $\text{ب ر ح} \Leftarrow \text{ح ر ب}$ لأن :

$[\text{ب} - \text{ح} = \text{٦ هـ} \Leftarrow \text{ح} - \text{ب} = \text{٦ هـ}']$ حيث $\text{هـ}' = -\text{هـ}$

٣ – متعدية : $(\text{ب ر ح و ح ر د}) \Leftarrow \text{ب ر د}$ وذلك لأن :

$[\text{ب} - \text{ح} = \text{٦ هـ و ح} - \text{د} = \text{٦ هـ}'] \Leftarrow \text{ب} - \text{د} = ٦\,(\text{هـ} + \text{هـ}') : \text{هـ} + \text{هـ}' \in \text{ص}$

أصناف تكافؤ هذه العلاقة هي ما يلي حيث $\text{هـ} \in \text{ص}$:

$\text{ص}_0 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ}\}$ ، $\text{ص}_1 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ} + ١\}$

$\text{ص}_2 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ} + ٢\}$ ، $\text{ص}_3 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ} + ٣\}$

$\text{ص}_4 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ} + ٤\}$ ، $\text{ص}_5 = \{\text{س : س} = \text{٦ هـ} + ٥\}$

٢٠٤ – نعرف في ح*، مجموعة الاعداد الحقيقية غير المعدومة، علاقة ثنائية ر بالشكل :

س ر ع ⟺ س . ع > ٠ أي س و ع من إشارة واحدة .

برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ . ما هي أصناف تكافؤ هذه العلاقة.

إذا عرفنا في ح العلاقة ى بالشكل :

س ى ع ⟺ س . ع ≥ ٠

هل هذه العلاقة علاقة تكافؤ ؟

الحل :

إن العلاقة : س ر ع ⟺ س . ع > ٠ المعرفة في ح* هي علاقة تكافؤ لانها تتمتع بالخواص الثلاث التالية :

١ – منعكسة : ∀ س ∈ ح* س ر س . س > ٠

٢ – متناظرة : إذا كان س . ع > ٠ فإن ع . س > ٠ أي :

س ر ع ⟸ ع ر س

٣ – متعدية : إذا كان س . ع > ٠ و ع . ص > ٠ فان :

س . ص > ٠

أي إذا كان س و ع من إشارة واحدة وكان ع و ص من إشارة واحدة فان س،ص من إشارة واحدة هي الإشارة المشتركة بين (س،ع،ص) ونكتب ذلك :

س ر ع و ع ر ص ⟸ س ر ص

لهذه العلاقة صنفا تكافؤ فقط هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومجموعة الأعداد الحقيقية السالبة .

أما اذا عرفنا في المجموعة ح كاملة بما فيها الصفر العلاقة س . ع ≤ فإن هذه العلاقة :

١ – منعكسة لأن س . س ≤ ٠ ∀ س ∈ ح

٢ – متناظرة لأنه اذا كان س . ع ≤ ٠ فان ع . س ≤ ٠

٣ – غير متعدية دوماً لأن علاقة الاقتضاء :

س . ع ≤ ٠ و ع . ص ≤ ٠ ⇐ س . ص ≤ ٠

غير محققة مثلاً من أجل س = – ٣ ، ع = ٠ ، ص = + ٣ إذ أن الزوج (– ٣ ، ٠) يحقق العلاقة الاولى س . ع ≤ ٠ والزوج (٠ ، + ٣) يحقق العلاقة الثانية ع . ص ≤ ٠ بينما لا يحقق الزوج (– ٣ ، + ٣) العلاقة س . ص ≤ ٠

إن ما تقدم يبرهن على أن العلاقة س . ع ≤ ٠ المعرفة في المجموعة ح ليست بعلاقة تكافؤ لانها علاقة غير متعدية .

٢٠٥ – نعرف في ح (سـ) مجموعة أجزاء سـ العلاقة :

ب ر حـ ⇔ (هـ ∩ ب = هـ ∩ حـ) حيث هـ عنصر معين من ح(سـ)

١ – برهن أن العلاقة ر علاقة تكافؤ وعيّن أصناف التكافؤ .

٢ – برهن صحة العلاقة التالية :

ب ≈ حـ (وفق ر) ⇔ (ب Δ حـ) ∩ هـ = ∅

٣ – ماذا يصبح شكل العلاقة ر اذا كان هـ = ∅ أو هـ = سـ ؟

الحل :

ان العلاقة ر علاقة تكافؤ لأنها :

أ – منعكسة : ب ر ب ⇔ هـ ∩ ب = هـ ∩ ب وهذا صحيح .

٢ً – متناظرة : $\text{ب}\ \text{ر}\ \text{ح} \Rightarrow \text{ح}\ \text{ر}\ \text{ب}$ لأن :

$$\text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ح} \Rightarrow \text{ه} \cap \text{ح} = \text{ه} \cap \text{ب}$$

٣ً – متعدية : $\text{ب}\ \text{ر}\ \text{ح}$ و $\text{ح}\ \text{ر}\ \text{د} \Rightarrow \text{ب}\ \text{ر}\ \text{د}$ وذلك لأن :

$$[\text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ح}] \text{ و } [\text{ه} \cap \text{ح} = \text{ه} \cap \text{د}] \Rightarrow \text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ح}$$

لأن علاقة تساوي المجموعات علاقة متعدية .

أصناف تكافؤ هذه العلاقة :

إن $\text{ب} \approx \text{ح}$ (وفق ر) $\Leftrightarrow \text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ح} = \text{ه}_1$

(ه_1 مجموعة جزئية من ه) .

وبما أن : $\text{ه} \cap \text{ه}_1 = \text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ح} = \text{ه}_1$

فإن المجموعات الثلاث ه_1 ، ب ، ح وكل مجموعة مكافئة لواحدة منها متكافئة (وفق ر) وهي تكوّن صنف تكافؤ تمثله ه_1 نرمز له بـ **ص** (ه_1) إذا بدلنا بـ ه_1 كل مجموعة جزئية من ه فسوف نحصل على أصناف تكافؤ هذه العلاقة لأن :

١ً – هذه الأصناف غير خالية لأن كل واحد منها يحوي ممثله على الاقل.

٢ً – هذه الاصناف منفصلة لانه اذا كان $\text{ه}_1 \neq \text{ه}_2$ وحوى الصنفان **ص** (ه_1) و **ص** (ه_2) عنصراً مشتركاً ب مثلاً فسوف يكون:

$$\text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ه}_1 = \text{ه}_1 \quad ، \quad \text{ه} \cap \text{ب} = \text{ه} \cap \text{ه}_2 = \text{ه}_2$$

وهذا يؤدي $\text{ه}_1 = \text{ه}_2$ خلافاً لما فرضنا .

٣ً – كل عنصر د من ج (س) ينتمي إلى واحد من هذه الاصناف وذلك لأنه إذا كان $\text{ه} \cap \text{د} = \text{ه}_2$ (قد تكون ه_2 مجموعة خالية) فإن :

$\text{ه} \cap \text{د} = \text{ه} \cap \text{ه}_2 = \text{ه}_2$ وهذا يعني أن $\text{د} \in$ **ص** (ه_2) .

٢ ـ إن هذه العلاقة صحيحة لأن :

$$(\text{ب}\ \Delta\ \text{ح}) \cap \text{ه} = \varnothing \Leftrightarrow (\text{ب} \cap \text{ه})\ \Delta\ (\text{ح} \cap \text{ه}) = \varnothing$$

(خاصة توزيع $\cap$ على Δ)

$$\Leftrightarrow \text{ب} \cap \text{ه} = \text{ح} \cap \text{ه} \quad \text{(من خواص } \Delta \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \text{ب} \approx \text{ح} \quad \text{(وفق ر)}$$

٣ ـ اذا كان $\text{ه} = \varnothing$ فإن العلاقة $\varnothing \cap \text{ب} = \varnothing \cap \text{ح}$ محققة دوماً ونقول في هذه الحالة إن العلاقة ر محققة دوماً فهي مطابقة .

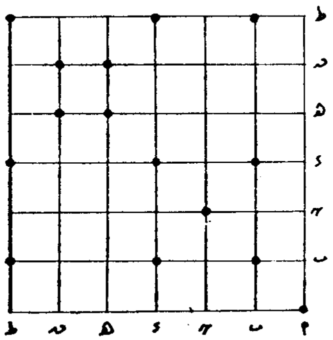
أما اذا كان $\text{ه} = \widetilde{\text{س}}$ فإنه تكون :

$$\widetilde{\text{س}} \cap \text{ب} = \widetilde{\text{س}} \cap \text{ح} \Leftrightarrow \text{ب} = \text{ح}$$

أي $\text{ب}\ \text{ر}\ \text{ح} \Leftrightarrow \text{ب} = \text{ح}$ والعلاقة ر هي علاقة التساوي .

٢٠٦ ـ برهن أن العلاقة المعرفة في المجموعة {أ، ب، ح، ء، ه، ن، ط} بالتمثيل الديكارتي التالي هي علاقة تكافؤ :

الحل :



الشكل (١١٩)

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ لانها :

١ ـ منعكسة إذ أنها تحوي جميع العناصر القطرية .

٢ ـ متناظرة إذ ان النقاط المحققة لهذه العلاقة متناظرة بالنسبة للقطر . يقابل كل زوج من الشكل (س،ع) محقق للعلاقة الزوج (ع، س) المناظر للقطر يحقق العلاقة المفروضة .

٣ ـ متعدية لأن الأزواج الممثلة للنقاط الواقعة على هذا الشكل تحقق العلاقة :

(س، ع) و (ع، ص) من الشكل ⇐ (س، ع) من الشكل

فمثلاً (ب، ى) و (ى، ط) من الشكل ⇐ (ب، ط) من الشكل

٢٠٧ – نقول عن علاقة ر معرفة في المجموعة سـ إنها دائرية فيما إذا حققت :

ب ر حـ و حـ ر ى ⇐ ى ر ب

برهن أنه إذا كانت علاقة منعكسة دائرية فإنها تكون علاقة تكافؤ وعلى العكس كل علاقة تكافؤ هي علاقة دائرية .

الحل :

بما أن العلاقة ر منعكسة فإنه ∀ ب ∋ سـ ، ب ر ب

وبما أن العلاقة دائرية فانه :

(حـ ر ب) و (ب ر ب) ⇐ ب ر حـ

وهذا يعني ان العلاقة ر متناظرة .

وبما أن العلاقة ر متناظرة فإن :

(ب، حـ) و (حـ، ى) ⇐ (ى، ب) ⇐ (ب، ى)

والعلاقة ر علاقة متعدية وبذلك يبرهن المطلوب .

العكس : إذا كانت العلاقة ر علاقة تكافؤ فإنها منعكسة ومتناظرة ومتعدية أي :

ب ر حـ و حـ ر ى ⇐ ى ر ب ⇐ ب ر ى

أي أن العلاقة دائرية .

٢٠٨ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ وليكن ٥ بيان هـــذه العلاقة ولنرمز بـ △ للعناصر القطريـة في الجـداء سـ × سـ و ٥ ⁻¹ بيان العلاقة العكسية .

١ – برهن أن قولنا : العلاقة ١ً – منعكسة . ٢ً – متناظرة . ٣ً – متعدية ، تكافىء على الترتيب :

١ً – $\Delta \subseteq ع$ ٢ً – $ع^{-1} = ع$ ٣ً – $ع \circ ع \subseteq ع$

٢ – برهن أن الشرطين (١ً) ، (٣ً) يؤديان الى $ع \circ ع = ع$

الحل :

١ً – ان قولنا $\forall ب \in س$ ، $ب ر ب \Leftrightarrow \forall ب ، (ب، ب) \in ع$

وبالعكس إذا كان $\Delta \subseteq ع$ فان $(ب، ب) \in ع$ ، $\forall ب \in س$
أي $ب ر ب$ ، $\forall ب \in س$

٢ً – اذا كان $(ب، ح) \in ع$ فان $(ح، ب) \in ع^{-1}$ (حسب تعريف العلاقة العكسية) .

وبما أن العلاقة متناظرة :

فان $(ب، ح) \in ع \Rightarrow (ح، ب) \in ع \Rightarrow (ب، ح) \in ع^{-1}$

أي $\forall (ب، ح) \in ع \Rightarrow (ب، ح) \in ع^{-1}$

وبصورة مماثلة $\forall (ح، ب) \in ع^{-1} \Rightarrow (ح، ب) \in ع$
وهذا يعني أن $ع = ع^{-1}$

وعلى العكس اذا كان $ع = ع^{-1}$ فانه يكون .

$\forall (ب، ح) \in ع \Leftrightarrow (ب، ح) \in ع^{-1}$

ولكن $(ب، ح) \in ع \Rightarrow (ح، ب) \in ع^{-1} \Rightarrow (ح، ب) \in ع$

وهذا ما يبرهن على أن العلاقة ر علاقة متناظرة .

٣ً – إذا كانت العلاقة متعدية فإنه يكون :

$(ب، ح) \in ع$ و $(ح، ى) \in ع \Rightarrow (ب، ى) \in ع$

إذا حقق (ب،حـ) العلاقة ر وحقق (حـ،ى) العلاقـة ر فإن (ب،ى) يحقق العلاقة المركبة ر ∘ ر أي أن (ب،ى) ∈ ن ∘ ن وهـو ينتمي بالوقت ذاته إلى ن وهذا يؤدي إلى العلاقة ن ∘ ن ⊆ ن

وعلى العكس إذا كان ن ∘ ن ⊆ ن وكان

(ب،حـ) ∈ ن و (حـ،ى) ∈ ن فإن (ب،ى) ∈ ن

وهذا ما يفسر قولنا إن العلاقة متعدية .

٢ – إذا تحقق الشرط الأول فهذا يعني ∀ ب ∈ سـ فإن (ب، ب) ∈ ن

لقد برهنا أن ن ∘ ن ⊆ ن ولنبرهن الآن أن كل عنصر من ن يقع في ن ∘ ن

لنفرض (ب ، حـ) ∈ ن واستنـاداً إلى الشرط (١) يكون أيضاً (حـ،حـ) ∈ ن وينتج عن هذا ان (ب،حـ) ∈ ن ∘ ن وهذا مـا يبرهن على أن :

ن ⊆ ن ∘ ن

وبالإضافة إلى الشرط (٣) يكون :

ن = ن ∘ ن

٢٠٩ – لتكن المجموعة سـ = { ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ ، و } . برهن أن المجموعات الجزئية { ا ، ب ، حـ } و { ى ، هـ } و { و } تشكل تجزئة للمجموعة سـ وأنها تعرف علاقـة تكافؤ ر في المجموعة سـ معطاة بالشكل :

س ر ع ⟺ س ، ع ينتميان إلى المجموعة الجزئية نفسها .

الحل :

لدينا : { ا ، ب ، حـ } ∩ { ى ، هـ } = ∅

{ ا ، ب ، حـ } ∩ { و } = ∅

{ ى ، هـ } ∩ { و } = ∅

و { أ ، ب ، حـ } ∪ { ء ، هـ } ∪ { و } = سـ

وإذا لاحظنا أن هـذه المجموعات الجزئية ليست خالية فإننـا نستطيع القول إن هذه المجموعات الجزئية تشكل تجزئة لـ سـ .

إن العلاقة ر علاقة تكافؤ لأنها :

١ً – منعكسة   س ر س

٢ً – متناظرة   س ر ع ⇐ ع ر س

٣ً – متعدية   (س ر ع) ∧ (ع ر ص) ⇐ س ر ص

٢١٠ – لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } . بيّن فيما إذا كانت كل من جماعة المجموعات الجزئية التالية تجزئة للمجموعة سـ :

١) { { ١ ، ٣ } ، { ٢ } }

٢) { { ١ ، ٤ } ، { ٢ } ، { ٣ } }

٣) { { ١ ، ٢ ، ٤ } ، { ٣ ، ٢ } }

٤) { { ١ } ، { ٢ ، ٣ } ، { ٤ } }

الحـل :

كي تكون جماعة مجموعات جزئية لمجموعة ما ، تجزئة لهذه المجموعة ، يجب أن تحقق ثلاثة شروط : أولاً أن تكون عناصر هذه الجماعة ليست خالية . ثانياً : المجموعات الجزئية منفصلة فيما بينها . ثالثاً : أن يكون اجتماعها هو المجموعة الأصلية . لنطبق هذا على المجموعات المعطاة فمن أجل :

١) المجموعات الجزئية منفصلة ولكن اجتماعها لا يساوي المجموعة سـ اذن لا تشكل تجزئة للمجموعة سـ .

٢) إن عناصر هذه الجماعة ليست خالية كما أن المجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة سـ اذن تشكل تجزئة للمجموعة سـ .

٣) إن المجموعتين الجزئيتين غير منفصلتين اذن لا تشكلان تجزئة .

٤) إن عناصر الجماعة ليست خالية والمجموعات الجزئية منفصلة واجتماعها يساوي المجموعة سـ فهي تشكل تجزئة للمجموعة سـ .

٢١١ – لتكن المجموعتان سـ و ع غير الخاليتين ولنفرض أن المجموعات الجزئية سـ_1 ، سـ_2 ، سـ_3 في سـ تشكل تجزئة للمجموعة سـ. برهن أن المجموعات الجزئية $\text{سـ}_1 \times \text{ع}$ ، $\text{سـ}_2 \times \text{ع}$ ، $\text{سـ}_3 \times \text{ع}$ تشكل تجزئة للمجموعة $\text{سـ} \times \text{ع}$.

الحل :

بما أن سـ_1 ، سـ_2 ، سـ_3 تشكل تجزئة لـ سـ فهي تحقق العلاقات التالية :

$$\text{سـ}_1 \cap \text{سـ}_2 = \text{سـ}_2 \cap \text{سـ}_3 = \text{سـ}_1 \cap \text{سـ}_3 = \emptyset$$

و $\text{سـ}_1 \cup \text{سـ}_2 \cup \text{سـ}_3 = \text{سـ}$.

لكي تشكل المجموعات الجزئية غير الخالية $\text{سـ}_1 \times \text{ع}$ ، $\text{سـ}_2 \times \text{ع}$ ، $\text{سـ}_3 \times \text{ع}$ تجزئة المجموعة $\text{سـ} \times \text{ع}$ ، يجب أن تكون منفصلة فيما بينها واجتماعها يساوي $\text{سـ} \times \text{ع}$. لنتحقق من هذه الأشياء :

$$(\text{سـ}_1 \times \text{ع}) \cap (\text{سـ}_2 \times \text{ع}) = (\text{سـ}_1 \cap \text{سـ}_2) \times \text{ع}$$
(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع التقاطع)

$= \emptyset \times \text{ع}$ (حسب الفرض)

$= \emptyset$ (حسب الخاصة الأولى من خواص الجداء الديكارتي)

كذلك $(\text{سـ}_1 \times \text{ع}) \cap (\text{سـ}_3 \times \text{ع}) = (\text{سـ}_1 \cap \text{سـ}_3) \times \text{ع}$

$= \emptyset \times \text{ع} = \emptyset$

$(\text{سـ}_2 \times \text{ع}) \cap (\text{سـ}_3 \times \text{ع}) = (\text{سـ}_2 \cap \text{سـ}_3) \times \text{ع}$

$= \emptyset \times \text{ع} = \emptyset$

وأخيراً :

$$(س_1 \times ع) \cup (س_2 \times ع) \cup (س_3 \times ع)$$

$$= ((س_1 \cup س_2) \times ع) \cup (س_3 \times ع)$$

(الخاصة التوزيعية للجداء الديكارتي مع الاجتماع)

$$= (س_1 \cup س_2 \cup س_3) \times ع$$ (حسب الفرض)

$$= س \times ع$$ وهو المطلوب

علاقة الترتيب :

٢١٢ – إذا كانت ر علاقة ترتيب في المجموعة س . بين أن العلاقة العكسية ، $ر^{-1}$ ، علاقة ترتيب على س .

الحل :

إن العلاقة ر ، باعتبارها علاقة ترتيب ، منعكسة ولامتناظرة ومتعدية وتكون العلاقة $ر^{-1}$.

١ – منعكسة وذلك لأن $(أ ، أ) \in ر \Leftarrow (أ ، أ) \in ر^{-1}$

٢ – لامتناظرة لأنه إذا كان $(أ ، ب)$ و $(ب ، أ) \in ر \Leftarrow أ = ب$

فإن : $(ب ، أ)$ و $(أ ، ب) \in ر^{-1} \Leftarrow ب = أ$

٣ – متعدية لأنه إذا كان

$(أ ، ب)$ و $(ب ، ح) \in ر \Leftarrow (أ ، ح) \in ر$

فإن $(ب ، أ)$ و $(ح ، ب) \in ر^{-1} \Leftarrow (ح ، أ) \in ر^{-1}$

فهي علاقة ترتيب .

٢١٣ – ر علاقة معرفة في المجموعة س . و ف مجموعة جزئية في س لنرمز بـ $ر_ف$ للعلاقة المعرفة بمجموعة الأزواج المرتبة :

ر‍ى = ر ∩ (ف × ف)   برهن صحة العلاقة :

ر علاقة ترتيب في س ⇐ ر‍ى علاقة ترتيب في ف .

الحـل :

ان بيان العلاقة ر‍ى تحتوى في مجموعة الجداء الديكارتي ف × ف .

فالعلاقة ر‍ى علاقة معرفة في المجموعة ف .

إن العلاقة ر‍ى هذه علاقة ترتيب لأنها :

١ – منعكسة لأن ∀ ب ∈ ف فإن :

(ب،ب) ∈ ر ∧ (ب،ب) ∈ ف × ف ⇐ (ب،ب) ∈ ر‍ى

٢ – لامتناظرة لأنه إذا كان ب،حـ∈ ف و[(ب،حـ)و(حـ،ب)∈ ر‍ى]

فان (ب،حـ) ، (حـ،ب) ∈ ر ⇐ ب = حـ .

٣ – متعدية لأنه إذا كان (ب،حـ) و (حـ،ى) ∈ ر‍ى فان :

(ب،حـ) و (حـ،ى) ∈ ر ⇐ (ب،ى) ∈ ر ومن جهة ثانية لدينا (ب،ى) ∈ ف × ف وبالتالي فان (ب،ى) ∈ ر‍ى .

ملاحظة :

نسمي علاقة الترتيب ر‍ى المعرفة في التمرين السابق **علاقة الترتيب المستنتجة** من العلاقة ر في المجموعة الجزئية ف .

٢١٤ – إذا كانت ر علاقة ترتيب معرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية ، ط ، بخاصة « يقسم » فالمطلوب :

١ – وضع الرمز المناسب < أو > بين أزواج الأعداد التالية :

٣ ... ٥ ، ٦ ... ٣ ، ١٧ ... ٣٥ ، ٤ ... ١٦ .

٢ً – بيان فيما إذا كانت علاقات الترتيب المستنتجة في المجموعات الجزئية التالية ، علاقات ترتيب كلي أم جزئي :

أ – مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية .

ب – مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية .

حـ – المجموعة {٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦} .

الحل :

١ً – إن ٣ و ٥ عددان غير متقارنين وفق ر إذن ٣ ∦ ٥ و ٣ ∦ ٥ وأن ٦ قابلة القسمة على ٣ أي ٦ يلي ٣ ومنه ٦ > ٣ ولكن ١٧ و ٣٥ غير متقارنين وفق ر إذن ١٧ ∦ ٣٥ و ١٧ ∦ ٣٥ أما ٤ فهي تقسم ١٦ أي ٤ يسبق ١٦ ومنه ٤ < ١٦ .

٢ً – إذا نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية فاننا نجد عناصر فيها مثل ٣ و ٥ غير متقارنين وفق ر. إذن فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي . كذلك لو نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية فاننا نجد عناصر فيها مثل ٤ و ٦ غير متقارنين وفق ر وبالتالي فالعلاقة المستنتجة علاقة ترتيب جزئي .

أما علاقة الترتيب المستنتجة في المجموعة {٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦} فهي علاقة ترتيب كلي لأن ٢ > ٤ > ٨ > ١٦ .

٢١٥ – لتكن المجموعتان س و ع مرتبتين وفق العلاقة « ≥ » . نعرف علاقة ر على المجموعة س × ع من الشكل :

(س١ ، ع١) ر (س٢ ، ع٢) ⟺ (س١ ≥ س٢ ∧ ع١ ≥ ع٢)

برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب .

الحل :

إن العلاقة ر علاقة ترتيب لأنها :

١َ – منعكسة لأن :

(س ، ع) ر (س ، ع) $\Leftrightarrow$ (س $\leq$ س $\wedge$ ع $\leq$ ع)

٢َ – لامتناظرة لأن :

($س_1$ ، $ع_1$) ر ($س_2$ ، $ع_2$) $\Leftrightarrow$ ($س_1 \leq س_2$ $\wedge$ $ع_1 \leq ع_2$)

و ($س_2$ ، $ع_2$) ر ($س_1$ ، $ع_1$) $\Leftrightarrow$ ($س_2 \leq س_1$ $\wedge$ $ع_2 \leq ع_1$)

ومن الواضح أن المتراجحات الأخيرة تؤدي الى :

$س_1 = س_2$ و $ع_1 = ع_2$ ومنه : ($س_1$ ، $ع_1$) = ($س_2$ ، $ع_2$)

٣َ – متعدية لأن :

($س_1$ ، $ع_1$) ر ($س_2$ ، $ع_2$) $\Leftrightarrow$ ($س_1 \leq س_2$ $\wedge$ $ع_1 \leq ع_2$)

و ($س_2$ ، $ع_2$) ر ($س_3$ ، $ع_3$) $\Leftrightarrow$ ($س_2 \leq س_3$ $\wedge$ و $ع_2 \leq ع_3$)

وأن المتراجحات الأخيرة تؤدي إلى :

($س_1 \leq س_3$ $\wedge$ $ع_1 \leq ع_3$) ومنه : ($س_1$ ، $ع_1$) ر ($س_3$ ، $ع_3$)

٢١٦ – إن الشكل (١٢٠) هو التمثيل السهمي لعلاقة معرفة في مجموعة النقاط { $ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$ ، $ب_4$ ، $ب_5$ ، $ب_6$ } . برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب .

الحل :

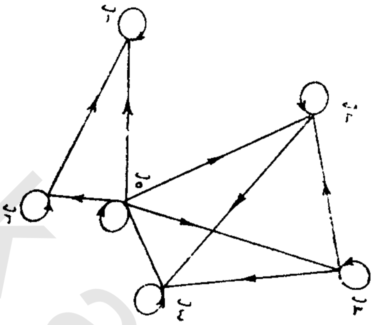
تتصف هذه العلاقة بالخواص التالية :

١ – منعكسة وذلك لأن كل نقطة من نقاط المجموعة تقع في عقدة تشير إلى أن هذه النقطة مرتبطة مع نفسها .

٢ – لاتناظرية لأنه لا يوجد أي زوج من هذه النقاط مرتبط بسهمين من اتجاهين مختلفين .

٣ – متعدية لأن الشكل مؤلف من مجموعة مثلثات من الشكل ب$_٢$ ب$_٣$ ب$_٤$ تحقق علاقة التعدي :

ب$_٣$ ر ب$_٢$ و ب$_٢$ ر ب$_٤$ ⇐ ب$_٣$ ر ب$_٤$



الشكل (١٢٠)

تمارين غير محلولة

٢١٧ – لتكن س مجموعة مثلثات المستوي ولتكن ر علاقة معرفة في س بخاصة « التشابه » .
برهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ .

٢١٨ – لتكن س مجموعة مستقيمات المستوي . لتكن ر علاقة معرفة في س بخاصة « التعامد » .
هل العلاقة ر علاقة تكافؤ ؟

٢١٩ – لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية . لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة ط × ط بالشكل التالي :

(أ،ب) ر (حـ،د) ⟺ أ + د = ب + حـ

حيث (أ،ب) و (حـ،د) ∈ ط × ط .

١) برهن أن ر علاقة تكافؤ .
٢) أوجد أصناف تكافؤ العناصر (١،٢) ، (١،٣) ، (٣،٥)

٢٢٠ – لتكن ر علاقة معرفة في مجموعة ما . برهن صحة ما يلي :
ر علاقة تكافؤ ⇐ ر ∩ ر$^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢١ – لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية . ولتكن ر علاقة معرفة في ط بالشكل س ر ع ⟺ س | ع حيث س ، ع ∈ ط .
١) بيّن خواص العلاقة ر وأوجد العلاقة العكسية ر$^{-1}$.
٢) برهن أن العلاقة ر ∪ ر$^{-1}$ علاقة تكافؤ .

٢٢٢ - لتكن المجموعة س = {أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، ل ، ك}.
بيّن فيما إذا كانت المجموعات الجزئية التالية تشكل تجزئة المجموعة س :

١) { {أ ، حـ ، ل} ، {ب} ، {د ، ك} }
٢) { {أ ، هـ ، ك} ، {حـ ، د} ، {ب ، د ، ل} }
٣) { {أ ، ب ، هـ ، ك} ، {حـ} ، {د ، ل} }

٢٢٣ - لتكن المجموعتان س و ع . بيّن فيما إذا كانت المجموعات الجزئية التالية تشكل تجزئة المجموعة س ∪ ع :

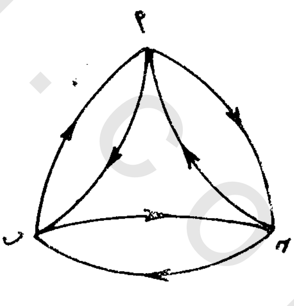
١) {س ∩ ع ، س − ع ، ع − س}
٢) {س ∩ ع ، س − ع ، س Δ ع}
٣) {س ∩ ع ، س Δ ع}.

٢٢٤ - نعرف في ح ، مجموعة الأعداد الحقيقية ، العلاقة :

س ر ع $\Leftrightarrow$ س^3 − ع^3 = س − ع

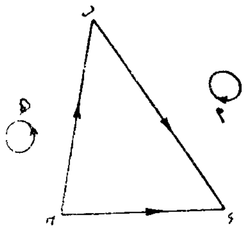
قرر فيما إذا كانت هذه العلاقة علاقة تكافؤ وإذا كان الأمر كذلك فما هي أصناف التكافؤ ؟

٢٢٥ - عيّن علاقات التكافؤ من بين العلاقات المعرفة بالأشكال التالية :



الشكل (١٢١)

الشكل (١٢٢)



الشكل (١٢٣)

٢٢٦ – ادرس العلاقات التالية المعرفة في مجموعة نقاط المستوي . عيّن أصناف التكافؤ عندما تكون العلاقة المذكورة علاقة تكافؤ .

أً – ب ، حـ على بعد واحد من نقطة ثابتة م .

٢ً – ب ، حـ يقعان في نصف مستوٍ واحد محدود بمستقيم معين ل.

٣ً – ب ، حـ لا يقعان في نصف واحد من نصفي المستوي اللذين يفصل بينهما مستقيم معين ل .

٢٢٧ – نعرف في صـ ، مجموعة الأعداد الصحيحة ، العلاقتين :

(س،ع) ∈ ر ⟸ س – ع مضاعف لـ ٢ و ٣

(س،ع) ∈ ر′ ⟸ س – ع مضاعف لـ ٢ أو ٣

هل العلاقة ر علاقة تكافؤ ؟ وإذا كان ذلك ما هي أصناف التكافؤ ؟
هل العلاقة ر′ علاقة تكافو ؟

٢٢٨ – لتكن المجموعة سـ = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ }
لتكن ر علاقة ترتيب معرفة في سـ بخاصة « يقسم » .

١) ضع الرمز المناسب بين أزواج الاعداد التالية :
٣ ... ١ ، ٤ ... ٨ ، ٩ ... ٣ ، ٧ ... ٩ ، ٨ ... ٢

٢) اكتب جميع المجموعات الجزئية في سـ والمرتبة ترتيباً كلياً وفق العلاقة المستنتجة من العلاقة ر .

٢٢٩ – هل يمكن لعلاقة ر على مجموعة سـ ، أن تكون علاقة ترتيب وتكافو في وقت معاً ؟

٢٣٠ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ . برهن صحة ما يلي:

١) ر علاقة ترتيب ⟸ ر ∪ ر$^{-1}$ علاقة ترتيب في سـ .

٢) ر علاقة ترتيب ⟸ ر علاقة ترتيب في كل مجموعة جزئية في سـ.

٢٣١ – لتكن المجموعتان $س$ و $ع$ المرتبتان وفق العلاقتين $ر_١$ و $ر_٢$ على الترتيب . نعرف علاقة $ر$ ، في المجموعة $س \times ع$ ، من الشكل :

$$(س_١ ، ع_١) \; ر \; (س_٢ ، ع_٢) \Leftrightarrow (س_١ \; ر_١ \; س_٢ ، ع_١ \; ر_٢ \; ع_١)$$

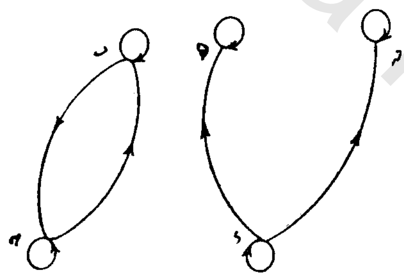
برهن أن $ر$ علاقة ترتيب ثم برهن أنه إذا كانت $ر_١$ و $ر_٢$ علاقتي ترتيب كلي فان $ر$ علاقة ترتيب كلي .

٢٣٢ – لتكن المجموعتان $س$ و $ع$ مرتبتين وفق العلاقتين $ر_١$ و $ر_٢$ على الترتيب . نعرف علاقة $ر$ في المجموعة $س \times ع$ من الشكل:

$$(س_١ ، ع_١) \; ر \; (س_٢ ، ع_٢) \Leftrightarrow \text{إما } س_١ \; ر_١ \; س_٢ \text{ و } س_١ \neq س_٢$$
$$\text{أو } س_١ = س_٢ \text{ و } ع_١ \; ر_٢ \; ع_٢ \text{ .}$$

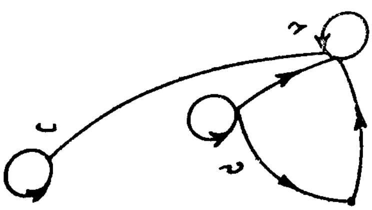
برهن أن هذه العلاقة علاقة ترتيب (الترتيب المعجمي) .

٢٣٣ – أضف الى البيان في الشكل (١٢٤) سهماً واحذف آخر ليصبح بيان علاقة ترتيب .



الشكل (١٢٤)

٢٣٤ – هل العلاقة التي بيانها كما في الشكل (١٢٥) هي علاقة ترتيب؟ برر قولك.



الشكل (١٢٥)

٢٣٥ -- نعرف في المجموعة : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ } علاقة بيانها :

ع = { (١،٢) ، (٣،٢) ، (٣،٤) ، (٥،٦) ، (٤،٤) ، (٦،٧) ، (٦،٦) ، (٨،٩) ، (١٠،٩) ، (١١،٩) ، (١١،١٢) } .

مثّل هذا البيان ديكارتياً وسهمياً واتممه ليصبح بيان علاقة ترتيب جزئي.

أجوبة وارشادات

٢١٨ - كلا .

٢٢١ - ر علاقة ترتيب .

٢٢٢ - ٣) تجزئة .

٢٢٣ - ١) و ٣) تجزئة .

٢٢٤ - علاقة تكافؤ .

٢٢٥ - شكل (١٢٢) علاقة تكافؤ .

٢٢٦ - ١) و ٢) علاقتا تكافؤ .

٢٢٧ - ر علاقة تكافؤ .

٢٢٨ - ١) ٣ > ١ ، ٤ < ٨ ، ٩ > ٣ ، ٨ > ٢ .

٢) { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ } ، { ١ ، ٢ ، ٦ } ، { ١ ، ٣ ، ٦ } ، { ١ ، ٣ ، ٩ } ، { ١ ، ٥ ، ١٠ } .

٢٢٩ - نعم إذا كانت العلاقة ر متناظرة ولامتناظرة في نفس الوقت.

٢٣٤ - ليست علاقة ترتيب لان ء $\overline{ر}$ ء .