الفصل الخامس

العلاقات

٥٥ – العلاقة الاحادية (الفردية) :

إذا نظرنا في مجموعة الأعداد الطبيعية ، ط ، وشكلنا فيها مجموعة جزئية ، سـ ، مؤلفة مثلاً من الأعداد الزوجية فإننا نقول إننا عرفنا علاقة أو خاصة على المجموعة ط . هذه العلاقة تقسم المجموعة ط إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين . تحقق عناصر المجموعة الجزئية الاولى العلاقة المذكورة بينما لا تحقق عناصر المجموعة الجزئية الثانية هذه العلاقة .

إذا أخذنا مجموعة سكان مدينة ما واستخرجنا منها مجموعة جزئية مؤلفة من الأشخاص الأميين ، فإننا نكون قد عرفنا علاقة أو خاصة في مجموعة سكان هذه المدينة . كذلك نكون أمام وضع مشابه إذا اعتبرنا مجموعة جزئية تحوي الأشخاص المتزوجين أو الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن أربعين سنة أو غير ذلك .

إن هذه العلاقات ، المميزات ، تميز بعض عناصر المجموعة المفروضة عن بقية العناصر . نسمي مثل هذه العلاقة **علاقة أحادية معرفة في المجموعة المفروضة .**

مثال ١ – لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ }
لنشكل المجموعة الجزئية سـ١ المؤلفة من مضاعفات العدد ٣ ، أي

المجموعة الجزئية سـ$_1$ = {٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٨} . اننا بذلك نكون قد عرفنا علاقة أحادية في المجموعة سـ معرفة بالخاصة : س من مضاعفات ٣ ، حيث س ∈ سـ . تقسم هذه العلاقة المجموعة سـ الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين ، الأولى سـ$_1$ وتحقق عناصرها العلاقة المفروضة ، والثانية سـ$_1'$ ، متممة المجموعة سـ$_1$ في سـ ، وجميع عناصرها لا تحقق العلاقة المفروضة .

مثال ٢ – لتكن المجموعتان سـ = {١ ، ٣ ، ٤} و ع {٢ ، ٣ ، ٤} . لنشكل الجداء الديكارتي **سـ** × ع = {(١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٤،٤)} .

نعرف في المجموعة سـ × ع علاقة أحادية معرفة بالخاصة : الزوج المرتب (س،ع) ∈ سـ×ع عندما يكون له مركبتان متساويتان أي س=ع. تقسم هذه العلاقة المجموعة سـ × ع إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين :

الأولى {(٣،٣) ، (٤،٤)} تحقق عناصرها العلاقة المفروضة بينما الثانية {(١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) ، (٣،٢) ، (٣،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٣)} لا تحقق عناصرها العلاقة المفروضة .

٥٦ – **العلاقة الثنائية** :

لتكن المجموعتان سـ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧} و ع = {٤ ، ٦ ، ٨} . لنشكل الجداء الديكارتي لهما . سـ × ع = {(٢،٤) ، (٢،٦) ، (٢،٨) ، (٣،٤) ، (٣،٦) ، (٣،٨) ، (٥،٤) ، (٥،٦) ، (٥،٨) ، (٧،٤) ، (٧،٦) ، (٧،٨)} .

إذا نظرنا في المجموعة الجزئية المؤلفة من الأزواج المرتبة {(٣،٤) ، (٥،٦) ، (٧،٨)} وجدنا أن المركبة الأولى في كل منها تنقص بمقدار ١ عن المركبة الثانية . نقول في هذه الحالة إننا عرفنا علاقة

ثنائية (Binary relation و Relation binoire) من **المجموعة سـ** إلى المجموعة ع بالخاصة : س + ۱ = ع حيث س ∋ **سـ** و ع ∋ ع . ان الازواج المرتبة (٣، ٤) و (٥، ٦) و (٧، ٨) تحقق العلاقة وتسمى **بيان هذه العلاقة** . بينما لا تتحقق هذه العلاقـة من أجل أي زوج من بقية أزواج الجداء سـ × ع غير الواقعة في البيان المذكور .

كذلك لو شكلنا المجموعة الجزئية من سـ × ع المؤلفة من الازواج { (٢، ٤) ، (٣، ٦) ، (٢، ٨) ، (٢، ٦) } فاننا نجد أن المركبة الأولى في كل منها تقسم المركبة الثانية . نقول هنا أيضاً إن هـــذه الأزواج المرتبة تعرف علاقــة ثنائية من سـ إلى ع معرفة بالخاصة : (س/ع) حيث س ∋ **سـ** و ع ∋ ع .

إذا رمزنا بـ ر لعلاقة ثنائيــة من المجموعــة سـ إلى المجموعة ع فإننا نكتب كل زوج مرتب (س ، ع) من الجداء الديكارتي **سـ**×ع يحقق هذه العلاقة بالشكل س ر ع . ونرمز لكل زوج (س ، ع) لا يحقق هذه العلاقة بالشكل س $\overline{ر}$ ع . ونرمز أيضاً لبيان العلاقة ر بالرمز دٍ ر .

بصورة عامة : للعلاقة الثنائية ر ثلاثة أمور أساسية هي :

۱) مجموعة أولى ، سـ ، ندعوها منطلق ر .

۲) مجموعة ثانية ، ع ، ندعوها مستقر ر .

۳) خاصة معرفة على الجداء سـ × ع تجزئه الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين تكون هذه الخاصة على احداهما (بيان العلاقة) محققة ، بينما تكون غير محققة على الثانية .

تشكل عناصر المجموعة سـ المرتبطة بعناصر من المجموعة ع وفق العلاقة الثنائية ر ، مجموعة جزئية ، سـ١ ، ندعوها **مجموعة تعريف** « Domain » **العلاقة** ر **أو قاعدتها** . كما أن عناصر ع التي تربطها العلاقة ر بعناصر من سـ تشكل مجموعة جزئية ، ع١ ، ندعوها **مجموعة قيم** « Range » **العلاقة** ر **أو دعامتها** .

نمثل علاقة ثنائية ر بشكل سهمي كما يلي : نرسم مخططي فين الموافقين للمجموعتين سـ و ع ثم نرسم أسهماً موجهة منطلقة من نقاط المجموعة سـ١ ومستقرة (منتهية) في نقاط المجموعة ع١ المرتبطة بها وفق العلاقة ر .

مثال ١ – لتكن سـ مجموعة سكان مدينة ما ، لنرمز بـ ع لمجموعة منازل هذه المدينة .

ان الخاصة : س يملك المنزل ع حيث س ∈ سـ و ع ∈ ع تعرف لنا علاقة ثنائية من المجموعة سـ إلى المجموعة ع . ان بيان هذه العلاقة هو :

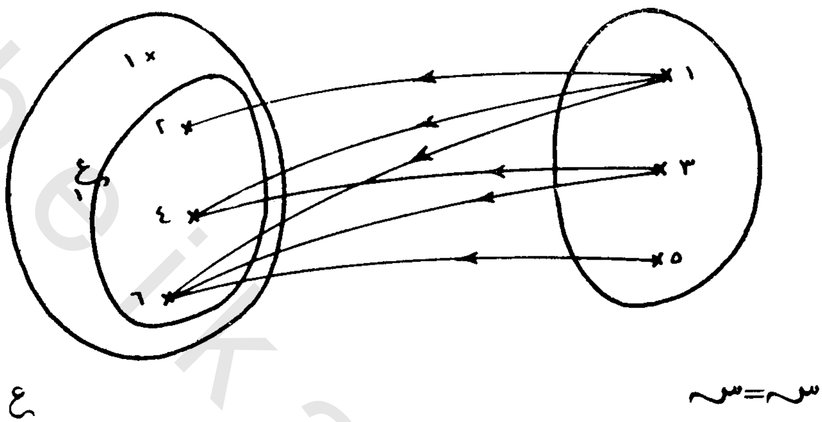
$$ب_ر = \{ (س ، ع) \in سـ \times ع : س \text{ يملك المنزل } ع \}$$

مثال ٢ – إذا كانت المجموعتان سـ = {١ ، ٣ ، ٥} و ع = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦}
فان الخاصة : « س < ع : س ∈ سـ و ع ∈ ع » تعرّف علاقة ثنائية ر معرفة من المجموعة سـ الى المجموعة ع . بيان هذه العلاقة هو :

$$ب_ر = \{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٦) \}$$

إن مجموعة تعريف ر هي المجموعة سـ١ = {١ ، ٣ ، ٥} = سـ
أما مجموعة قيم ر فهي ع٢ = {٢ ، ٤ ، ٦} .

نحصل على التمثيل السهمي للعلاقة ر برسم مخططي فين للمجموعتين س و ع ، ثم نرسم أسهماً موجهة تنطلق من س$_١$ وتستقر في نقاط ع$_١$ المرتبطة معها وفق العلاقة ر :



الشكل (١٠١)

ملاحظة :

كثيراً ما يدمج المؤلفون بيان العلاقة بها ويعتبرون العلاقـة معرفـة بالأزواج المحققة لهذه العلاقة فهي مجموعة جزئية من الجـداء س × ع حيث س منطلق العلاقة و ع مستقرها فنكتب مثلاً العلاقة المعرّفة بالمثال السابق بالشكل :

ر = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ٦)}

٥٧ – العلاقة العكسية Inverse relation ، Relation inverse :

العلاقة العكسية لعلاقة ثنائية ر معرفة من المجموعة س إلى المجموعة ع ، هي علاقة ثنائية من ع إلى س ومعرفة بجميع الأزواج المرتبة (ع ، س) حيث (س ، ع) ∈ ر . نرمز للعلاقة العكسية بـ ر$^{-١}$

ولبيانهـــا بـ (ﮆ ر)$^{-1}$.

(ﮆ ر)$^{-1}$ = { (ع ، س) : (س ، ع) ∈ ﮆ ر }

نحصل على التمثيل السهمي لعلاقة عكسية ر$^{-1}$ بعكس اتجاه الأسهم المرسومة في التمثيل السهمي للعلاقة ر .

مثال : لتكن المجموعتان سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } و ع = { ٢ ، ٤ ، ٦ } .

إذا كانت ر العلاقة المعرفة بالخاصة : « س | ع : س ∈ سـ و ع ∈ ع »

فان بيان هذه العلاقة :

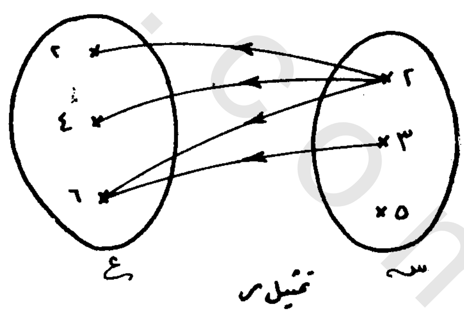
ﮆ ر = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) }

إذاً بيان العلاقة العكسية ر$^{-1}$ هو :

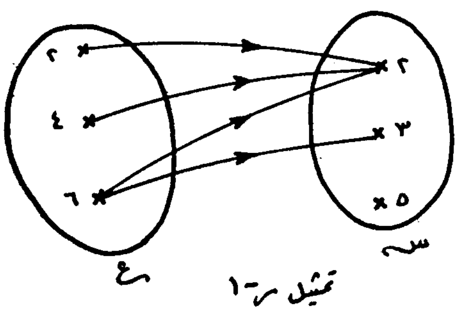
(ﮆ ر)$^{-1}$ = { (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

والعلاقة العكسية ر$^{-1}$ معرفة بالخاصة « ع من مضاعفات س » .

أما التمثيل السهمي للعلاقة ر والعلاقة العكسية ر$^{-1}$ فيعطى بالشكلين:



الشكل (١٠٣)



الشكل (١٠٤)

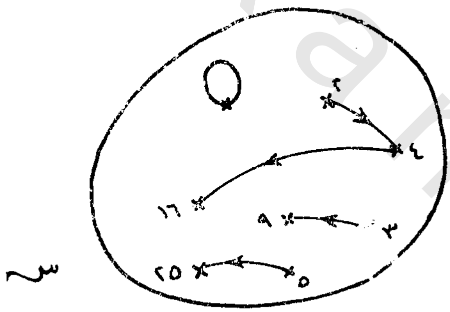
٥٨ – العلاقات في مجموعة :

يمكن اعتبار علاقة ثنائية ر معرفة من مجموعة ما سـ إلى المجموعة سـ نفسها . نقول في هذه الحالة اننا عرفنا **علاقة في المجموعة سـ** إن بيان هذه العلاقة هو مجموعة جزئية في مجموعة الجداء الديكارتي سـ × سـ .

مثال (١): إذا كانت المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ }
فإن الخاصة : « س^{٢} = ع : س ، ع ∈ سـ » تعرف علاقة ثنائية ر في المجموعة سـ . ان بيان هذه العلاقة هو :

ب ر = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١٦) ، (٥ ، ٢٥) }

تمثل سهمياً هذه العلاقة بالشكل :



الشكل (١٠٤)

(يمثل الزوج (س ، س) ∈ ب ر بسهم مغلق ينطلق ويستقر في النقطة س ∈ سـ) .

مثال (٢) : لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ } . إذا كانت ج (سـ) مجموعة أجزاء سـ فان الخاصة « أ ⊇ ب و أ ≠ ∅ : أ ، ب ∈ ج (سـ) » تعرف علاقة ر في المجموعة ج (سـ) .

ان المجموعة ج (سـ) = { ∅ ، { ١ } ، { ٢ } ، { ١ ، ٢ } }

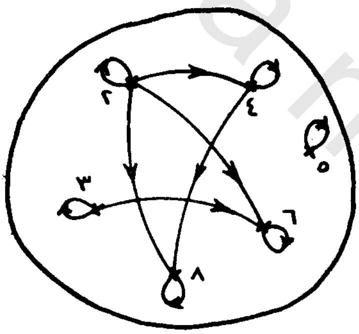
وبيان العلاقة ر هو :

ف ر = { ({١} ، {١ ، ٢}) ، ({٢} ، {١ ، ٢}) ،
({١} ، {١}) ، ({٢} ، {٢}) ، ({١ ، ٢} ،
{١ ، ٢}) } .

مثال (٣) : إذا كانت المجموعة سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨} فان الخاصة « س | ع : س ، ع ∈ سـ » تعرف علاقة ر في المجموعة سـ .
بيان هذه العلاقة هو :

ف ر = { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٦) ،
(٤ ، ٨) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ،
(٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) ، (٨ ، ٨) } .

والتمثيل السهمي لهذه العلاقة يعطى بالشكل :



الشكل (١٠٥)

٥٩ – خواص العلاقات في مجموعة :

يمكن لعلاقة معرفة في مجموعة أن تتمتع ببعض الخواص التالية :

١ – العلاقة المنعكسة « Reflexive ، Réflexive » : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة ما سـ إنها منعكسة إذا حقق كل عنصر من سـ مع نفسه العلاقة المفروضة . أو بعبارة ثانية :

∀ س ∈ سـ فان س ر س

مثال (١) : لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ولتكن ر علاقة معرفة في سـ وبيانها معطى بمجموعة الأزواج المرتبة :

$$\text{ذ}_{\text{ر}} = \{(١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٤)\}$$

هـذه العلاقـة غير منعكسة وذلـك لأن العنصر ٢ $\in$ سـ بينما (٢ ، ٢) $\notin$ $\text{ذ}_{\text{ر}}$.

مثال (٢): لتكن ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ . إذا كانت ر علاقة الاحتواء المعرفة في ج (سـ) فان بيانها :

$$\text{ذ}_{\text{ر}} = \{ (ف ، ن) \in ج(سـ) \times ج(سـ) : ف \subseteq ن \}$$

ان هذه العلاقة منعكسة لأن كل مجموعة جزئية ب من سـ تحوي نفسها « ب $\subseteq$ ب » اذن ب ر ب .

٢ – العلاقة المتناظرة « Symmetric ، Symetrique » : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة سـ إنها متناظرة إذا كان :

$$(س ، ع) \in \text{ذ}_{\text{ر}} \Leftrightarrow (ع ، س) \in \text{ذ}_{\text{ر}} \quad \forall \ (س ، ع) \in \text{ذ}_{\text{ر}}$$

نستنتج من تعريف العلاقة العكسية أن :

$$(س ، ع) \in \text{ذ}_{\text{ر}} \Leftrightarrow (ع ، س) \in (\text{ذ}_{\text{ر}})^{-1}$$

وبالتالي يمكن أن نقول **أن العلاقة ر المعرفة في المجموعة سـ متناظرة اذا كان** $\text{ذ}_{\text{ر}} = (\text{ذ}_{\text{ر}})^{-1}$.

مثال (١) : لتكن المجموعة سـ = { ١ ، ٥ ، ١٥ ، ٢٠ } . لتكن ر علاقة معرفة في سـ يعطى بيانها بالمجموعة :

$$\text{ذ}_{\text{ر}} = \{(١ ، ٥) ، (٢٠ ، ٥) ، (٥ ، ٢٠) ، (٥ ، ١٥) ، (١ ، ٢٠)\} .$$

ان هذه العلاقة ليست متناظرة وذلك لأن الزوج المرتب (١ ، ٥) ∈ ى بينما (٥، ١) ∉ ى .

مثال (٢): علاقة الاخوة المعرفة في مجموعة سكان احدى الابنية هي علاقة متناظرة .

مثال (٣): علاقة التوازي بين مستقيمات مستو علاقة متناظرة .

٣ – العلاقة اللاتناظرية (Anti - Symmetric ، Anti - Symetrique)

نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة س إنها لاتناظرية إذا كان :

(س ، ع) ∈ ى و (ع ، س) ∈ ى ⇐ س = ع

مثال (١): إذا عرفنا في مجموعة الأعداد الطبيعية ط ، العلاقة ر بخاصة « القسمة » فان هذه العلاقة لاتناظرية ، ذلك لأنه إذا كان (أ ، ب) و (ب ، أ) ∈ ى أي أن أ | ب و ب | أ فإن ذلك يؤدي إلى أ = ب .

مثال (٢) : إذا عرفنا في المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } العلاقة ر التي بيانها هو :

ى = { (١، ٢) ، (٣، ٤) ، (٤، ٤) ، (٤، ٣) }

فانه لا يمكننا القول إن هذه العلاقة لاتناظرية وذلك لأن (٣، ٤) و (٤، ٣) ∈ ى بينما ٣ ≠ ٤ .

مثال (٣) : ان علاقة الاحتواء في ج (س) مجموعة أجزاء المجموعة س ، علاقة لاتناظرية . .

مثال (٤) : ان علاقة التراجح « ≥ » في مجموعة الأعداد العادية ، علاقة لاتناظرية .

يتضح من التعريف ٣ أن كل علاقة ر يتكون بيانها من العناصر القطرية للجداء سـ × سـ هي علاقة لاتناظرية (العناصر القطرية للمجموعة سـ × سـ هي التي من الشكل (س ، س)) .

٤ – **العلاقة التخالفية (غير المتناظرة)** « Non - Symmetric ، Non - Symetrique » : نقول عن علاقة ر معرفة في مجموعة سـ إنها تخالفية إذا كان :

$$\forall (س، ع) \in \mathcal{D}_ر \quad (س ، ع) \in \mathcal{D}_ر \Leftarrow (ع ، س) \notin \mathcal{D}_ر$$

ينتج عن هذا التعريف أن كل علاقة تخالفية لا يمكن وصفها بأنها منعكسة لأن الزوج (س ، س) لا يمكن أن يقع في بيان العلاقة التخالفية وذلك لأن وجود مثل هذا الزوج يعني وجود الزوج المعاكس له وهو نفسه ، وكذلك لا يمكن للعلاقة المنعكسة أن تكون تخالفية .

مثال (١) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٧ } العلاقة ر التي بيانها هو :

$$\mathcal{D}_ر = \{ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٧) ، (٧ ، ٢) \}$$

فان هذه العلاقة تخالفية لأنه لا يوجد في بيانها عنصران من الشكل (س ، ع) و (ع ، س) . وهذه العلاقة في الوقت ذاته «لاتناظرية» .

مثال (٢) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = { ٣ ، ٥ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ } العلاقة ر التي بيانها هو :

$$\mathcal{D}_ر = \{ (٣ ، ٥) ، (٥ ، ١٥) ، (٢٠ ، ١٥) ، (٥ ، ٢٥) ، (١٥ ، ٥) \}$$

فان هذه العلاقة ليست تخالفية لأن: $(٥ ، ١٥) \in \mathcal{D}_ر$ و $(١٥ ، ٥) \in \mathcal{D}_ر$.

٥ – **العلاقة المتعدية** « Transitive » نقول عن علاقة ر معرفة في المجموعة سـ إنها متعدية إذا كان

∀ (س ، ع) و (ع ، ص) ∈ ع ر ⇐ (س ، ص) ∈ ع ر .

مثال (١) : إذا عرفنا في المجموعة سـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧} العلاقة ر التي بيانها هو :

ع ر = {(١، ٣) ، (٣، ٥) ، (١، ٥) ، (٥، ٣) ، (٥،٥) ، (٣، ٣)}

فان هذه العلاقة متعدية لأن :

(١،٣) و (٣،٥) ∈ ع ر كذلك (١،٥) ∈ ع ر

(١،٣) و (٣،٣) ∈ ع ر » (١،٣) ∈ ع ر

(٣،٥) و (٥،٣) ∈ ع ر » (٣،٣) ∈ ع ر

(٣،٥) و (٥،٥) ∈ ع ر » (٣،٥) ∈ ع ر

(١،٥) و (٥،٣) ∈ ع ر » (١،٣) ∈ ع ر

(١،٥) و (٥،٥) ∈ ع ر » (١،٥) ∈ ع ر

(٥،٣) و (٣،٥) ∈ ع ر » (٥،٥) ∈ ع ر

(٥،٣) و (٣،٣) ∈ ع ر » (٥،٣) ∈ ع ر

(٥،٥) و (٥،٣) ∈ ع ر » (٥،٣) ∈ ع ر

(٣،٣) و (٣،٥) ∈ ع ر » (٣،٥) ∈ ع ر

مثال (٢) : ان علاقة التراجح « ⩽ » في مجموعة الأعداد العادية علاقة متعدية.

مثال (٣) : ان علاقة الاحتواء « ⊆ » في ج (سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ ، علاقة متعدية .

٦٠ – **تركيب العلاقات** : لتكن علاقة ر علاقة ثنائيـة معرفـة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ و ن علاقة ثنائيـة أخرى معرفـة من المجموعة صـ إلى المجموعة ع . إن هناك علاقة جديدة مـ معرفـة من سـ الى ع نسميها بتركيب العلاقتين ر و ن ونرمز لها بـ :

مـ = ن ∘ ر

ونقرأ ذلك بقولنا ر دويره ن . نعرف هذه العلاقة المركبة بالشكل التالي :

تعريف : اذا حقق الزوج (س ، ص) العلاقـة ر وحقق الزوج (ص ، ع) العلاقة ن فإننا نقول إن الزوج (س ، ع) يحقق العلاقة المركبة مـ = ق ∘ ر ، ونمثل ذلك بالشكل الرمزي :

س مـ ع ⟺ س ∈ سـ و ع ∈ ع ، ∃ ص ∈ صـ : س ر ص و ص ن ع

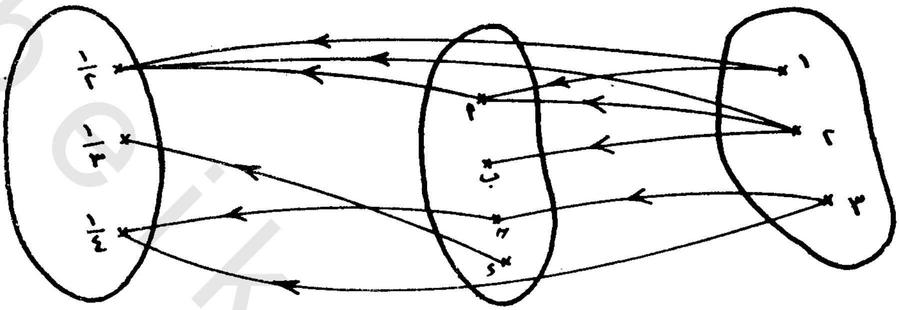
مثال (١) : لتكن العلاقة ر المعرفة على مجموعة سكان مدينة بـ « له ابن » والعلاقة ن المعرفة على المجموعة المذكورة ذاتها بـ « له بنت » إن العلاقة المركبة مـ = ن ∘ ر معرفة عـلى هـذه المجموعة بـ « له بنت ابن » .

نلاحظ من هذا المثال أن سـ = صـ = ع وأنه من الممكن وجود عناصر من المجموعة المتوسطة ترتبط بعناصر من سـ ولا ترتبط بعناصر من ع كما أنه من الممكن وجود عناصر من صـ مرتبطة مع عناصر من من ع وغير مرتبطة مع عناصر من سـ . إن العنصر ص ∈ صـ الذي يرتبط بعنصر س ∈ سـ ولا يرتبط بأي عنصر من ع لا يؤدي إلى زوج من الشكل (س،ع) يحقق العلاقة المركبة مـ وكذلك فإن العنصر ص∈ صـ الذي يرتبط مع عنصر ع ∈ ع ولا يرتبط بأي عنصر من سـ لا يؤدي الى زوج من الشكل (س ، ع) يحقق العلاقة المركبة مـ .

مثال (٢) : ليكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، صـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } ،

ع = { $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ }

إن الشكل (١٠٦) يعرف العلاقة ر من سـ الى صـ والعلاقة ن من صـ الى ع والعلاقة المركبة مـ من سـ الى ع



الشكل (١٠٦)

إن بيان العلاقة ر هو :

ب ر = { (١ ، أ) ، (٢ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، حـ) }

وبيان العلاقة ن هو :

ب ن = { (أ ، $\frac{١}{٢}$) ، (حـ ، $\frac{١}{٤}$) ، (ء ، $\frac{١}{٣}$) }

أما بيان العلاقة المركبة مـ فهو :

ب مـ = { (١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٤}$) }

تمارين محلولة

١٧٤ – لتكن المجموعتان

س = {١، ٢، ٤، ٦} و ع = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

اكتب مجموعة الجداء الديكارتي س × (س ∩ ع) ثم عيّن العلاقة ر المعرفة من س الى س ∩ ع بالخاصة « > » .

الحل :

بما أن س ∩ ع = {٢، ٤، ٦} فانه يكون :

س × (س ∩ ع) = {(١،٢)، (١،٤)، (١،٦)، (٢،٢)، (٢،٤)،
(٢،٦)، (٤،٢)، (٤،٤)، (٤،٦)، (٦،٢)،
(٦،٤)، (٦،٦)} .

أما بيان العلاقة ر فهو :

ر = {(أ، ب) : (أ، ب) ∈ س × (س ∩ ع) و أ > ب} اذن:

ر = {(٤،٢)، (٦،٢)، (٦،٤)} .

١٧٥ – إذا علمت أن ابراهيم أب لسالم وزيداً أب لعلي وعمران أب لمريم . أوجد مجموعات قيم وتعريف وبيان العلاقة ر المعرفة من المجموعة س = {ابراهيم، زيد، عمران، ليلى} إلى المجموعة ع = {سالم، علي، عمر، مريم} بخاصة « الابوة » . أوجد أيضاً بيان العلاقة العكسية ر$^{-1}$.

الحل :

ان مجموعة تعريف العلاقة ر هي المجموعة الجزئية في س التي ترتبط

عناصرها بعناصر من ح وفق العلاقة ر وهي في هذه الحالة { ابراهيم ، زيد ، عمران } .

أما مجموعة قيم العلاقة ر فهي المجموعة الجزئية في ح التي ترتبط بعناصرها عناصر من سـ وفق العلاقة ر وهي { سالم ، علي ، مريم } .

أما بيان العلاقة ر فهو :

$ه_ر$ = { (س ، ع) : (س ، ع) ∈ سـ × ح و س أبٌ لـ ع } ، اذن :

$ه_ر$ = { (ابراهيم ، سالم) ، (زيد ، علي) ، (عمران ، مريم) } .

أما بيان العلاقة العكسية $ر^{-1}$ فيعطى بالمجموعة

$(ه_ر)^{-1}$ = { (ب ، أ) : (أ ، ب) ∈ $ه_ر$ } ، اذن :

$(ه_ر)^{-1}$ = { (سالم ، ابراهيم) ، (علي ، زيد) ، (مريم ، عمران) }

١٧٦ — إذا كانت المجموعة سـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } أوجد خواص كل من العلاقات المعرّفة بما يلي[1] :

١ — $ر_١$ = { (أ ، أ) ، (ب ، حـ) ، (حـ ، ب) } .
٢ — $ر_٢$ = { (أ ، أ) ، (أ ، ء) }
٣ — $ر_٣$ = { (أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (ء ، ء) }
٤ — $ر_٤$ = { (ب ، حـ) ، (ب ، ء) ، (حـ ، ء) }

الحـل :

١ — العلاقة $ر_١$ متناظرة لأنه ∀ (س ، ع) ∈ $ر_١$ فإن (ع ، س) ∈ $ر_١$ ، وبشكل آخر إن $ر_١^{-1}$ = { (أ ، أ) ، (حـ ، ب) ، (ب ، حـ) } = $ر_١$.

---

(١) نرمز أحياناً لبيان العلاقة بـ ر بدلاً من $ه_ر$ ولبيان العلاقة العكسية بـ $ر^{-1}$ بدلاً من $(ه_ر)^{-1}$ لاختصار الكتابة .

ثم إن $ر_1$ ليست منعكسة ، لأنها كي تكون منعكسة يلزم ويكفي أن ينتمي (س،س) إلى $ر_1$ ($\forall$ س $\in$ سـ) ، وهذا الشرط غير محقق لأن (ب،حـ) $\notin ر_1$ مثلاً .

وكي تكون $ر_1$ متعدية يجب أن يتحقق الاقتضاء التالي :

$\forall$ (س،ع) و (ع،ص) $\in ر_1$ $\Leftarrow$ (س،ص) $\in ر_1$

ولكننا نلاحظ أنه بالرغم من كون (ب ، حـ) ، (حـ، ب) $\in ر_1$ فإن (ب،ب) $\notin ر_1$ فالعلاقة غير متعدية .

وتكون $ر_1$ لاتناظرية إذا تحقق ما يلي :

اذا كان (س،ع) و (ع،س) $\in ر_1$ فإن س = ع

ولكن $ر_1$ لا تحقق هذا الشرط لأن ب $\neq$ حـ على الرغم من كون (حـ، حـ) و (حـ،ب) $\in ر_1$ فالعلاقة ليست تناظرية .

ثم إن $ر_1$ ليست تخالفية ، لأنها كي تكون تخالفية يجب أن يتحقق الاقتضاء التالي :

$\forall$ (س،ع) $\in ر_1$ $\Leftarrow$ (ع،س) $\notin ر_1$

وهذا الشرط غير محقق لأن (ب،حـ) و (حـ،ب) $\in ر_1$

٢ ـ العلاقـــة $ر_2$ ليست متناظرة لأن (ى ، أ) $\notin ر_2$ في حين (أ،ى) $\in ر_2$ كما أنها ليست منعكسة لأن كلا من (ب،ب) ، (حـ،حـ)، (ى،ى) لا ينتمي الى $ر_2$.

كما أنها ليست تخالفية لأن (أ،أ) $\in ر_2$ في حين لا يمكن للعلاقـة التخالفية ان تحوي عناصر قطرية غير أن $ر_2$ متعديةلأن (أ،أ) و(أ،ى) $\in ر_2$ وكذلك (أ،ى) $\in ر_2$.

كما أنها لاتناظرية لأنه لا تحوي زوجين من الشكل (س،ع) و (ع،س).

٣ – العلاقة $ر_٣$ متناظرة ومتعدية ولا متناظرة ولكنها ليست منعكسة ((حـ،حـ) ∉ $ر_٣$) وليست تخالفية لأنها تحوي عناصر قطرية .

٤ – العلاقة $ر_٤$ متعدية وتخالفية ولكنها ليست منعكسة وليست متناظرة وليست لامتناظرة .

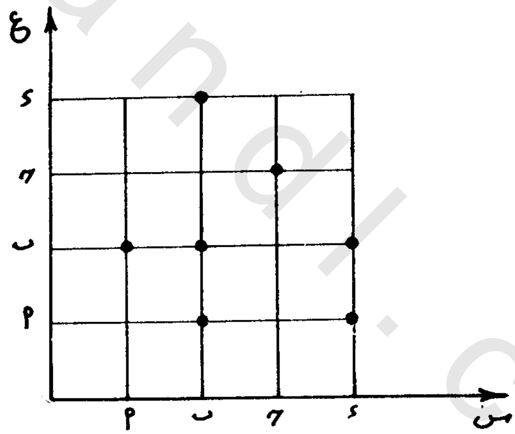
١٧٧ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ = {أ ، ب ، حـ ، ء} بالتمثيل الديكارتي التالي :

١ – بيّن صحة ما يلي :

حـ ر ب ، ء $\overline{ر}$ أ ، أ $\overline{ر}$ ء ، ب $\overline{ر}$ ب

٢ – هل هذه العلاقة منعكسة ؟ متناظرة ؟ متعدية ؟

٣ – أوجد العلاقة العكسية $ر^{-١}$ ومثّلها سهمياً .



الشكل (١٠٧)

الحل :

ان بيان العلاقة ر هو :

$ب_ر$ = {(أ،ب) ، (ب،أ) ، (ب،ب) ، (ب،ء) ، (حـ،حـ) ،

(ء،أ) ، (ء،ب) } ومنه :

١ – حـ ر ب خطأ لأن (حـ،ب) ∉ جر ، ء ر̄ أ خطأ لأن (أ،ء) ∈ جر ، أ ر̄ ء صح لأن (أ،ء) ∉ جر وأخيراً ب ر̄ ب خطأ لأن (ب ، ب) ∈ جر .

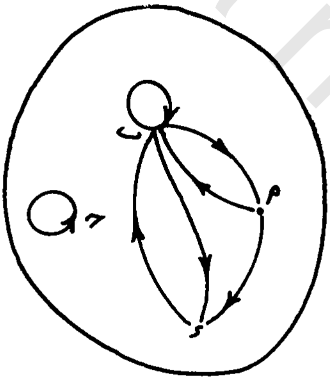
٢ – ان هذه العلاقة غير منعكسة لأن (أ،أ) ∉ جر وهي ليست متناظرة لأن النقاط التي تحققها ليست متناظرة مثنى مثنى بالنسبة للقطر فنجد مثلاً أنه ليس للنقطة (ء،أ) نظير بالنسبة للقطر .

وهي غير متعدية لان (أ،ب) و (ب،أ) ∈ جر بينما (أ،أ) ∉ جر .

٣ – ان بيان العلاقة العكسية ر⁻¹ هو :

{ (ب،أ) ، (أ،ب) ، (ب،ب) ، (ء،ب) ، (حـ،حـ) ، (أ،ء) ، (ب،ء) } .

والتمثيل السهمي للعلاقة العكسية ر⁻¹ هو :



الشكل (١٠٨)

١٧٨ – أوجد خواص العلاقة ر المعرفة في المجموعة س مجموعة مثلثات المستوي ، بخاصة التشابه .

الحل :

إن بيان العلاقة ر هو :

$ح_ر$ = { (أ،ب) : (أ،ب) ∈ س × س و أ يشابه ب } .

ان كل مثلث أ يشابه نفسه أي (أ،أ) ∈ $ح_ر$ ∀ أ ∈ س فالعلاقة منعكسة .

إذا كان (أ،ب) ∈ $ح_ر$ أي المثلث أ يشابه المثلث ب فان ب يشابه أ أي (ب،أ) ∈ $ح_ر$ فالعلاقة متناظرة .

إذا كان (أ،ب) و (ب،حـ) ∈ $ح_ر$ أي أ يشابه ب و ب يشابه حـ فان أ يشابه حـ أي (أ،حـ) ∈ $ح_ر$ فالعلاقة متعدية . وبما ان العلاقة متناظرة فهي ليست تخالفية . وبسهولة نرى أنها ليست لاتناظرية .

١٧٩ – إذا عرفنا في المجموعة ط*، مجموعة الاعداد الطبيعية المغايرة للصفر، العلاقة ر بالخاصة س + ع = ١٠ ، أوجد **خصائص** هذه العلاقة .

الحل :

ان بيان هذه العلاقة هو :

$ح_ر$ = { (١،٩) ، (٢،٨) ، (٣،٧) ، (٤،٦) ، (٥،٥) ، (٦،٤) ، (٧،٣) ، (٨،٢) ، (٩،١) } .

العلاقة ر غير منعكسة لان (٤،٤) ∉ $ح_ر$. وهي متناظرة لان

∀ (أ،ب) ∈ $ح_ر$ ⇐ (ب،أ) ∈ $ح_ر$ أو س + ع = ١٠ ⇐ ع + س = ١٠

وهي ليست لامتناظرة لان :

(١،٩) و (٩،١) ∈ $ح_ر$ بينما ١ ≠ ٩ . وهي غير متخالفـة لوجود

العنصر القطري (٥،٥) وهي غير متعدية لان (١،٩) ، (٩،١) $\in$ ر
بينما (١،١) $\notin$ ر .

١٨٠ – اذا كانت $ر_١$ و $ر_٢$ علاقتين متناظرتين معرفتين في المجموعة سـ ، برهن أن $ر_١ \cap ر_٢$ علاقة متناظرة في سـ .

الحل :

بما أن كلاً من العلاقتين $ر_١$ و $ر_٢$ تمثل مجموعة جزئية في المجموعة سـ $\times$ سـ فالعلاقة المعرفة بـ $ر_١ \cap ر_٢$ تمثل مجموعة جزئية في المجموعة سـ $\times$ سـ وبالتالي فهي علاقة معرفة في المجموعة سـ .

إذا كان (أ،ب) $\in ر_١ \cap ر_٢$ فـان (أ،ب) $\in ر_١$ وكذلك (أ،ب) $\in ر_٢$. إن $ر_١$ و $ر_٢$ متناظرتان حسب الفرض فيكون :
(أ،ب) $\in ر_١ \Leftarrow$ (ب،أ) $\in ر_١$ و (أ،ب) $\in ر_٢ \Leftarrow$ (ب،أ) $\in ر_٢$
وبالتالي (ب، أ) $\in ر_١ \cap ر_٢$ فالعلاقة $ر_١ \cap ر_٢$ متناظرة .

١٨١ – إذا كانت ر علاقة في المجموعة سـ و $ر^{-١}$ العلاقة العكسية، برهن صحة العلاقات التالية :

ر متناظرة $\Leftrightarrow$ $ر^{-١}$ متناظرة
ر متعدية $\Leftrightarrow$ $ر^{-١}$ متعدية

الحل :

إذا كانت ر متناظرة فان (أ،ب) $\in$ ر $\Leftarrow$ (ب،أ) $\in$ ر . ومن جهة ثانية (أ،ب) و (ب،أ) $\in$ ر $\Leftarrow$ (ب،أ) و (أ،ب) $\in ر^{-١}$
إذن $\forall$ (ب،أ) $\in ر^{-١} \Leftarrow$ (أ،ب) $\in ر^{-١}$ فالعلاقة $ر^{-١}$ متناظرة .

إذا كانت ر متعدية فإن (أ،ب) و (ب،حـ) $\in$ ر $\Leftarrow$ (أ،حـ) $\in$ ر

ومن جهة ثانية :

(أ،ب)، (ب،حـ) ، (أ،حـ) ∈ ر ⇐ (ب،أ) ، (حـ،ب) ، (حـ،أ) ∈ $ر^{-1}$

إذن : ∀ (حـ،ب) ، (ب،أ) ∈ $ر^{-1}$ ⇐ (حـ،أ) ∈ $ر^{-1}$ فالعلاقة $ر^{-1}$ متعدية .

من أجل البرهان على صحة العلاقات السابقة في الاتجاه المعاكس يكفي أن نلاحظ أن العلاقة العكسية للعلاقة $ر^{-1}$ هي العلاقة ر الأصلية كما هو واضح من تعريف العلاقة العكسية .

١٨٢ – إذا كانت $ر_1$ علاقة منعكسة معرفة في المجموعة سـ وكانت $ر_2$ علاقة ما معرفة في المجموعة نفسها ، برهن أن العلاقة $ر_1 \cup ر_2$ علاقة منعكسة .

الحل :

ان العلاقة $ر_1$ منعكسة ⇐ س $ر_1$ س ∀ س ∈ سـ .أو بعبارة ثانية : ∀ س ∈ سـ فان (س،س) ∈ $ر_1$ وبما أن :

$ر_1 \subseteq ر_1 \cup ر_2$ فإنه ∀ س ∈ سـ يكون (س، س) ∈ $ر_1 \cup ر_2$ فالعلاقة $ر_1 \cup ر_2$ منعكسة .

١٨٣ – لنأخذ في المجموعة سـ = {١ ، ٢ ، ٣} العلاقات التالية :

$ر_1$ = {(١،٢) ، (٢،٢)}

$ر_2$ = {(١،٢) ، (٢،٣) ، (١،٣) ، (٢،١) ، (١،١)}

$ر_3$ = {(١،٢)} . بيّن فيما اذا كانت هذه العلاقات متعدية.

الحل :

ان العلاقة $ر_1$ متعدية لأن (١،٢) و (٢،٢) ∈ $ر_1$ وكذلك (١،٢) ∈ $ر_1$.

أمـا العلاقة $ر_{٢}$ فليست متعدية لأن (٢،١) و (١،٢) $\in ر_{٢}$ بينما (٢،٢) $\notin ر_{٢}$.

وأما العلاقة $ر_{٣}$ فهي متعدية وذلك لأن بيان هذه العلاقة لا يحوي زوجين من الشكل (س،ع) و (ع،ص) كما فعلنا ذلك في التمرين رقم ١٧٦ .

١٨٤ – لتكن $ر_{١}$ و $ر_{٢}$ علاقتين معرفتين في الأعداد الحقيقية ح بالخاصتين $س^{٢} + ع^{٢} \leqslant ٤$ و $س + ع \leqslant ٢$ على الترتيب .

١ – ابحث في الانعكاس والتناظر والتعدي لكل من $ر_{١}$ و $ر_{٢}$ وأعط التمثيل الديكارتي لهما .

٢ – عيّن بيان العلاقة $ر_{١} \cap ر_{٢}$.

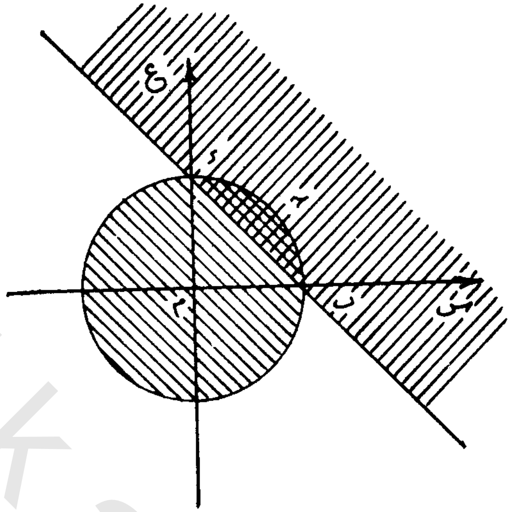
الحل :

١ – ان العلاقة $ر_{١}$ ليست منعكسة لأن $٣ \in$ ح بينما $(٣)^{٢} + (٣)^{٢} > ٤$ أي (٣،٣) $\notin ر_{١}$،وهي متناظرة لأنه $\forall$ (س،ع) $\in ر_{١}$ أي $س^{٢} + ع^{٢} \leqslant ٤$ فان (ع، س) $\in ر_{١}$ لأن $ع^{٢} + س^{٢} \leqslant ٤$. وهي أيضاً ليست متعدية لأن ($\sqrt{٣}$ ، ١) ، (١ ، $\sqrt{٢}$) $\in ر_{١}$ بينما ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$) $\notin ر_{١}$ حيث $٣ + ٢ > ٤$.

أما العلاقة $ر_{٢}$ فليست منعكسة لأن ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) $\notin ر_{١}$.ومن الواضح أنها متناظرة ولكنها ليست متعدية لأن (١،٢) و (٢ ، $\frac{١}{٣}$) $\in ر_{٢}$ بينما (١ ، $\frac{١}{٣}$) $\notin ر_{٢}$ حيث $١ + \frac{١}{٣} > ٢$.

إن التمثيل الديكارتي للعلاقة $ر_{١}$ يعطى بمجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة (التي مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها ٢) أو على محيطها .

بينما تعطى العلاقة ر$_2$ بمجموعة النقاط الواقعة على المستقيم ب ء الذي معادلته س + ع = ٢ أو على يمينه .



الشكل (١٠٩)

٢ – ان العلاقة ر$_1$ ∩ ر$_2$ تمثل مجموعة النقاط المحققة لكل من العلاقتين ر$_1$ و ر$_2$ وهي النقاط المشتركة بين بياني هاتين العلاقتين أي نقاط الجزء الشبكي من الشكل .

١٨٥ – لتكن المجموعات الثلاث سـ = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} و ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} و صـ = {١٢ ، ١٦} .

إذا كانت العلاقة ر$_1$ معرفة من سـ إلى ع بالخاصة «س – ١ = ع» والعلاقة ر$_2$ معرفة من ع إلى صـ بالخاصة «٢ ع = ص» حيث س ∈ سـ و ع ∈ ع و ص ∈ صـ . أوجد العلاقة المركبة ر$_2$ ∘ ر$_1$ ووضح ذلك بالمخطط السهمي .

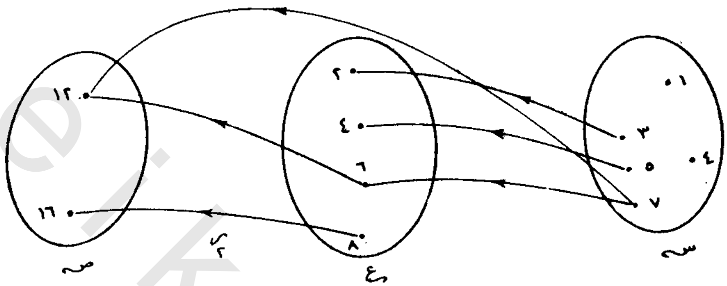
الحل :

ان بيان العلاقة ر هو :

$\hat{ر}_1 = \{(3,2),(5,4),(7,6)\}$. وبيان العلاقة $ر_2$ هو :

$\hat{ر}_2 = \{(6,12),(8,16)\}$.

إذن بيان العلاقة المركبة هو $\{(7,12)\}$ ويتضح هـــذا بالمخطط السهمي التالي :



الشكل (١١٠)

١٨٦ – إذا كانت $ر_1$ و $ر_2$ علاقتي التوازي والتعامـد على مجموعـة المستقيمات في مستو على الترتيب ، برهن صحة ما يلي :

١) $ر_1 \circ ر_1 = ر_1$ ٢) $ر_1 \circ ر_2 = ر_2 \circ ر_1 = ر_2$

٣) $ر_2 \circ ر_2 = ر_1$

الحـل :

١) إذا كان $(م_1 ، م_2)$ و $(م_2 ، م_3) \in ر_1$ فان $(م_1 ، م_3) \in ر_1 \circ ر_1$.
ومن جهة ثانية فان $(م_1 ، م_3) \in ر_1$ لأن المستقيمات الثلاثة $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ متوازية . وعلى العكس إذا كان $(م_1 ، م_3) \in ر_1$ فيمكن إيجاد مستقيم $م_2$ يوازي كلاً من $م_1$ و $م_3$ وبالتالي فان $(م_1 ، م_2)$ و $(م_2 ، م_3) \in ر_1$ ، أي $(م_1 ، م_3) \in ر_1 \circ ر_1$ ، إذن $ر_1 \circ ر_1 = ر_1$.

٢) إذا كان $(م_1 ، م_2) \in ر_2$ و $(م_2 ، م_3) \in ر_1$ فان $(م_1 ، م_3) \in ر_1 \circ ر_2$ ومن جهة ثانية يكون $م_3$ موازياً $م_2$ و $م_2$ عمودياً

على م$_1$ اذن م$_1$ عمودي على م$_3$ أي (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$. وعلى العكس إذا كان (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ أي م$_1$ عمودي على م$_3$ فيمكن إيجاد مستقيم م$_2$ يوازي م$_3$ فيكون عمودياً على م$_1$ أي (م$_2$ ، م$_3$) ∈ ر$_1$ و (م$_1$ ، م$_2$) ∈ ر$_2$ إذن (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_1$ ∘ ر$_2$ وهذا يعني أن ر$_1$ ∘ ر$_2$ = ر$_2$.

ولبرهان العلاقة ر$_2$ ∘ ر$_1$ = ر$_2$ نأخذ (م$_1$ ، م$_2$) ∈ ر$_1$ و (م$_2$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ فيكون (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ ∘ ر$_1$. ومن جهة ثانية إذا كان م$_1$ ∥ م$_2$ و م$_2$ ⊥ م$_3$ فان م$_1$ ⊥ م$_3$ أي (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$. وعلى العكس إذا كان (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ فانه يمكن إيجاد مستقيم م$_2$ ∥ م$_1$ ⇐ م$_2$ ⊥ م$_3$ ويكون (م$_1$ ، م$_2$) ∈ ر$_1$ و (م$_2$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ ⇐ (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ ∘ ر$_1$ أي ر$_2$ ∘ ر$_1$ = ر$_2$.

٣) إذا كان (م$_1$ ، م$_2$) و (م$_2$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ فإن المستقيم م$_2$ عمودي على كل من م$_1$ و م$_3$ وهذا يعني أن المستقيمين م$_1$ و م$_3$ متوازيان أي (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_1$. وعلى العكس إذا كان (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_1$ فيمكن ايجاد مستقيم م$_2$ عمودي على كل من م$_1$ و م$_3$ وبالتالي :

(م$_1$ ، م$_2$) و (م$_2$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ ⇐ (م$_1$ ، م$_3$) ∈ ر$_2$ ∘ ر$_2$

أي أن ر$_2$ ∘ ر$_2$ = ر$_1$.

١٨٧ – نعرّف في المجموعة { أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، و } العلاقة ر بالبيان :

ب$_{ر}$ = { (أ،أ) ، (حـ،حـ) ، (حـ،د) ، (حـ،و) ، (د،حـ) ، (د،د) ، (د،و) ، (و،حـ) ، (و،د) ، (و،و) }

اعط التمثيل الديكارتي لهذه العلاقة وارسم المخطط السهمي لها ، ثم قرر فيما اذا كانت هذه العلاقة منعكسة ، متناظرة أو متعدية .

ما هو الخطأ المرتكب في المحاكمة التالية :

« ر علاقة ثنائية معرفة في سـ متناظرة ومتعدية فيكون لدينا :

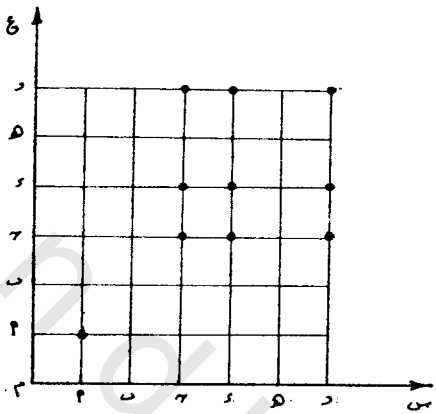
س ر ع ⇐ ع ر س (العلاقة متناظرة)

س ر ع و ع ر س ⇐ س ر س (العلاقة متعدية)

ينتج عما سبق أن العلاقة منعكسة » .

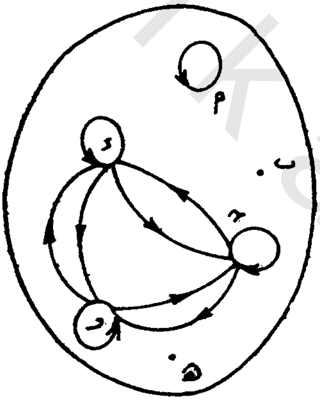
الحل :

إن التمثيل الديكارتي والمخطط السهمي للعلاقة ر هما :



التمثيل الديكارتي

الشكل (١١١)



المخطط السهمي

الشكل (١١٢)

ان العلاقة ر ليست منعكسة لأن (ب،ب) $\notin$ جـر وهي متناظرة لأن التمثيل الديكارتي متناظر بالنسبة للقطر . وهي متعدية لأنه كلما انطلق سهم من عنصر من هذه المجموعة إلى عنصر ثان ، ثم تبعه سهم من هذا العنصر إلى عنصر ثالث فإن هنالك سهماً من العنصر الأول إلى العنصر الثالث ، كما انه كلما انطلق سهم من عنصر من هذه المجموعة إلى عنصر ثان ، ثم تبعه سهم من هذا العنصر إلى العنصر الأول نفسه فإن هنالك

منحنياً مغلقاً عند العنصر الأول ، أي أن هـذا العنصر مرتبط بنفسه وفق العلاقة المفروضة .

إن الخطأ في المحاكمة المعطاة ناتج عن أن وصف العلاقة ر بأنها متناظرة لا يتطلب صحة العلاقة س ر ع ⇐ ع ر س من أجل كل زوج من الجداء سـ × سـ .

وكذلك فانه عندما نصف هـذه العلاقة بأنها متعدية فان ذلك لا يتطلب صحة العلاقة :

س ر ع و ع ر ص ⇐ س ر ص ∀ (س،ع) ، (ع،ص) ∈ سـ × سـ

بينما لا يمكننا أن نصف علاقة بكونها منعكسة ما لم تتحقق العلاقة

س ر س ∀ س ∈ سـ

ومثال ذلك العلاقة التي درسناها أعلاه فهي علاقة متناظرة ومتعدية ولكنها غير منعكسة .

١٨٨ – لتكن سـ١ و سـ٢ مجموعتين منفصلتين تحويهما تماماً المجموعة سـ . ولنعرف العلاقة ر في سـ بالشكل

(س ، ع) ∈ ر ⟺ (س ∈ سـ١ و ع ∈ سـ٢)

بيّن فيما إذا كانت هذه العلاقة منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

الحل :

ان العلاقة ر ليست منعكسة لأنه ∀ س ∈ سـ١′ (متممة سـ١ وهي ليست خالية) فإن (س،س) ∉ ر . وهي غير متناظرة لأن (س،ع) ∈ ر ⟺ (س ∈ سـ١ و ع ∈ سـ٢) بينما لا يحقق الزوج (ع،س) العلاقة ر لأن ع ∉ سـ١ و س ∉ سـ٢ وذلك لأن هاتين المجموعتين منفصلتان .

وأخيراً العلاقة ر متعدية لأن الاقتضاء :

(س ، ع) و (ع ، ص) ∈ ر ⇐ (س ، ص) ∈ ر

محقق لأن الفرض (س،ع) و (ع،ص) ∈ ر لا يمكن أن يتحقق ، أي أنه لا يوجد عنصران من الشكل (س،ع) و (ع،ص) ينتميان لـ ر (انظر التمرين ١٧٦) .

١٨٩ – لتكن المجموعات الثلاث :

سه = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، صه = { أ ، ب ، حـ ، ء } ،

ع = { $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{٧}$ }

ولتعرف العلاقتين ر من سه الى صه والعلاقة ن من صه الى ع بما يلي :

ر = { (١، ب) ، (١، حـ) ، (٢، أ) ، (٤، حـ) ، (٥، أ) }

ن = { (أ، $\frac{١}{٤}$) ، (أ ، $\frac{١}{٧}$) ، (ب ، $\frac{١}{٤}$) ، (حـ ، $\frac{١}{٢}$) ،

(حـ ، $\frac{١}{٤}$) ، (ء ، $\frac{١}{٥}$) }

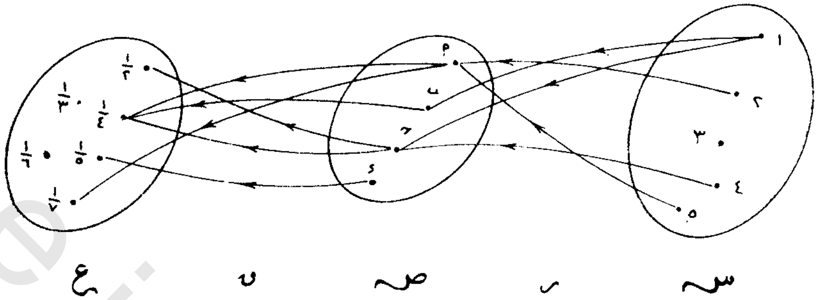
١ً – ارسم المخطط السهمي للعلاقة ر ثم للعلاقة ن وأخيراً للعلاقة ن ∘ ر واكتب عناصر العلاقة ن ∘ ر .

٢ً – ارسم المخطط السهمي للعلاقة $ر^{-1}$ ثم للعلاقة $ن^{-1}$ وأخيراً للعلاقة $ر^{-1}$ ∘ $ن^{-1}$ واكتب عناصر العلاقة $ر^{-1}$ ∘ $ن^{-1}$.

٣ً – تحقق من أن $(ن ∘ ر)^{-1}$ = $ر^{-1}$ ∘ $ن^{-1}$.

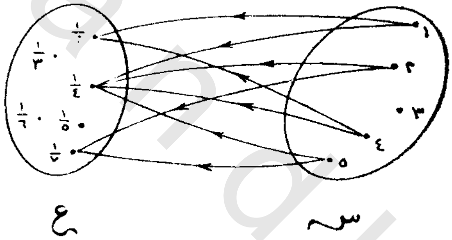
الحـل :

١ً ــ ان المخطط السهمي للعلاقتين ر و ن هو :



الشكل (١١٣)

إذن فالمخطط السهمي للعلاقة المركبة ن ه ر هو :



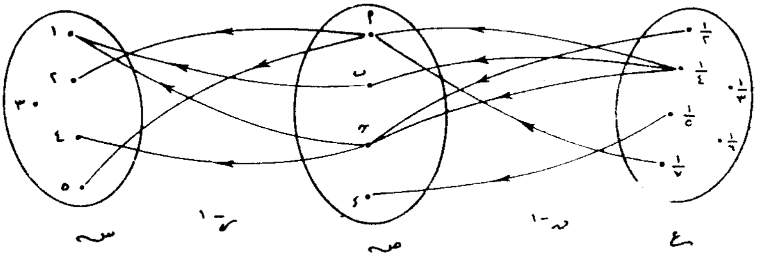
الشكل (١١٤)

وبيان العلاقة المركبة ن ه ر هو :

$$\{ (١ ، \frac{١}{٢}) ، (١ ، \frac{١}{٤}) ، (٢ ، \frac{١}{٤}) ، (٢ ، \frac{١}{٧}) ،$$

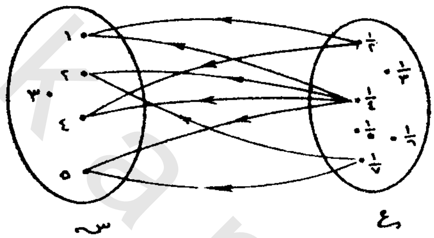
$$(٤ ، \frac{١}{٢}) ، (٤ ، \frac{١}{٤}) ، (٥ ، \frac{١}{٤}) ، (٥ ، \frac{١}{٧}) \} .$$

٢ً ــ المخطط السهمي للعلاقتين العكسيتين $ن^{-١}$ و $ر^{-١}$ هو :



الشكل (١١٥)

والمخطط السهمي للعلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ن^{-١}$ هو :



الشكل (١١٦)

بيان العلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ن^{-١}$ هو :

$$\{(\frac{١}{٢}، ١)، (\frac{١}{٢}، ٤)، (\frac{١}{٤}، ١)، (\frac{١}{٤}، ٢)،$$

$$(\frac{١}{٤}، ٤)، (\frac{١}{٤}، ٥)، (\frac{١}{٧}، ٢)، (\frac{١}{٧}، ٥)\} .$$

٣ – بمقارنة بيان العلاقة المركبة $ن \circ ر$ وبيان العلاقة المركبة $ر^{-١} \circ ن^{-١}$ نجد أن :

$$(ن \circ ر)^{-١} = ر^{-١} \circ ن^{-١}$$

ويمكن التحقق من هذا بمقارنة الشكل (١١٤) بالشكل (١١٦) والتأكد من أن أحدهما يطابق الثاني بعد تغيير اتجاه الأسهم .

تمارين غير محلولة

١٩٠ – لتكن سـ مجموعة سكان مدينة حلب . لنأخذ العلاقات المعرفة في سـ بالخواص التالية :

١ – س زوج لـ ع ٢ – س أكبر سناً من ع ٣ – س أخ لـ ع

حيث س ، ع ∈ سـ . اذكر خصائص كل من هذه العلاقات .

١٩١ – لنعتبر العلاقات المعرفة في مجموعة الأعداد الطبيعية ط بالخواص التالية :

١ – أ < ب . ٢ – أ من مضاعفات ب .

٣ – ٢ أ + ب = ٢٥ .

٤ – أ له رقم آحاد ب ، حيث أ ، ب ∈ ط .

اذكر خصائص كل من هذه العلاقات .

١٩٢ – إذا كانت ر و ن علاقتين معرفتين في المجموعة سـ . برهن صحة ما يلي :

١ – ر لاتناظرية ⟺ ر$^{-1}$ لاتناظرية .

٢ – ر متعدية ⟺ ر$^{-1}$ متعدية .

٣ – ر تخالفية ⟺ ر ∩ ر$^{-1}$ = [illegible] .

٤ – ر متناظرة و ن متناظرة ⟸ ر ∩ ن متناظرة .

٥ – (ر ∘ ن)$^{-1}$ = ن$^{-1}$ ∘ ر$^{-1}$.

٦ – ر لاتناظرية و ى لاتناظرية $\Leftarrow$ ر $\cup$ ى لاتناظرية .

٧ – ر متعدية و ى متعدية $\Leftarrow$ ر $\cup$ ى متعدية .

٨ – ر متناظرة $\Leftarrow$ ر $\cap$ ر$^{-١}$ $\neq \emptyset$.

١٩٣ – لتكن ر علاقة معرفة في المجموعة سـ . لنرمز بـ ك للمجموعة القطرية في سـ × سـ (ك = { (س ، س) : س $\in$ سـ })
برهن صحة العلاقة :

ر لاتناظرية $\Leftrightarrow$ ر $\cap$ ر$^{-١}$ $\subseteq$ ك

١٩٤ – أوجد الصلة بين علاقة منعكسة ر في المجموعة سـ والمجموعة القطرية ، ك ، في سـ × سـ .

١٩٥ – اذا كانت ر علاقة متعدية في المجموعة سـ ، برهن أن بيان العلاقة المركبة ر ∘ ر مجموعة جزئية في بيان العلاقة ر .

١٩٦ – لتكن ر علاقة معرفة في مجموعة الدوائر في مستو بخاصة التمركز (أي : أ ر ب $\Leftrightarrow$ لـ أ و ب مركز واحد) أوجد خواص هذه العلاقة .

١٩٧ – هل توجد مجموعة سـ بحيث تكون كل علاقة معرفة في سـ متناظرة ؟

١٩٨ – إذا كانت ر علاقة متناظرة ومتعدية في المجموعة سـ وكان $\forall$ س $\in$ سـ $\exists$ ع $\in$ سـ : س ر ع ، برهن أن ر منعكسة .

١٩٩ – لتكن ر و ى علاقتين معرفتين في مجموعة الأعداد الحقيقية ح بالخاصتين : س + ٢ ع $\geqslant$ ٢ و س + ع $\leqslant$ ١ على الترتيب .
اذكر خصائص كل من ر و ى ومثل ذلك ديكارتياً ثم أوجد العلاقة ر $\cap$ ى .

٢٠٠ – لتكن المجموعة سـ = {١، ٢، ٣، ٤} . اذكر العلاقة المقابلة لكل من البيانات التالية :

أ – {(٢،١)، (٣،٢)، (٤،٣)} .

ب – {(١،١)، (٢،١)، (٢،٢)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٣)، (٤،١)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٤،٤)}

حـ – {(١،١)، (٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)} .

ء – {(١،١)، (٢،١)، (٣،١)، (٤،١)، (٢،٢)، (٤،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)} .

هـ – {(١،٢)، (٢،٤)} .

٢٠١ – مثل ديكارتياً وسهمياً العلاقات التالية المعرفة من المجموعة سـ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤} إلى المجموعة ع = {−١، ٠، ١، ٢} :

أ – س ≥ ع + ١ ، ب – س = ع^{٢}

حـ – س/ع > ٠ ، ء – ٠ < س + ع ≤ ٤

هـ – |س − ع| < ٢ ، و – س^{٢} + ع^{٢} ≥ ٤

ز – س^{٢} = ع^{٢} ، ح – س + ع = مضاعف ٢

٢٠٢ – لتكن ج(سـ) مجموعة أجزاء المجموعة سـ ولنعرف فيها العلاقة « ب منفصلة عن حـ » حيث ب، حـ ∈ ج(سـ) .
بين الخواص التي تتمتع بها هذه العلاقة .

أجوبة وارشادات

١٩٠ – ١ – متناظرة . ٢ – متعدية ، متخالفة .

٣ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩١ – ١ – متعدية ، متخالفة . ٢ – منعكسة ، لامتناظرة ، متعدية

٣ – لا تتمتع بأي صفة من الصفات المعروفة .

٤ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩٤ – المجموعة القطرية محتواة في بيان العلاقة العكسية .

١٩٦ – منعكسة ، متناظرة ، متعدية .

١٩٧ – المجموعة الخالية أو المجموعة ذات عنصر واحد .

٢٠٠ – ٢ – س – ١ = ع . ب – س ≤ ع .

ح – س = ع . ى – س يقبل القسمة على ع .

ى – س أع حيث س المركبة الأولى و ع المركبة الثانية في كل زوج .

٢٠٢ – متناظرة .