الفصل الرابع

الجداء الديكارتي

٤٨ – **الأزواج المرتبة Ordered pairs** : من المعروف أنه إذا كان س فصل النقطة ب و ع ترتيبها فاننا نرمز لهذه النقطة بـ (س ، ع) ونقول إن الزوج (س ، ع) يمثل النقطة ب في المستوي حيث نسمي س الاحداثي الأول و ع الاحداثي الثاني . كما أن اضافة الإسمين محمد ومصطفى إلى بعضهما يعطي اسم شخص معين اسمه محمد واسم أبيه مصطفى ، ويمكن أن نمثل اسم هذا الشخص بالزوج (محمد ، مصطفى) .

نلاحظ مما تقدم ان الزوج (س ، ع) مفهوم يختلف عن مفهوم كل من س و ع وأن هذا المفهوم يختلف بحسب الترتيب الذي نعطيه لها . فالنقطة (س ، ع) تختلف بصورة علمة عن النقطة (ع ، س) ، كما أن الشخص الذي يحمل الاسم (محمد ، مصطفى) يختلف عن الشخص الذي يحمل الاسم (مصطفى ، محمد) .

تعريف : إن الزوج المرتب (س ، ع) هو كائن رياضي مؤلف من العنصرين س ، ع مأخوذين بالترتيب س ثم ع . نسمي س العنصر الأول أو المركبة الأولى و المسقط الأول للزوج المرتب كما نسمي ع العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني لهذا الزوج .

ينتج عما تقدم :

إذا كان أ ≠ ب فان (أ ، ب) ≠ (ب ، أ)

(أ ، ب) = (حـ ، د) ⇔ (أ = حـ) ∧ (ب = د)

(أ ، ب) ≠ (حـ ، د) ⇔ (أ ≠ حـ) ∨ (ب ≠ د)

أمثلة :

١ – (١ ، ٢) ≠ (٣ ، ٢)

٢ – (√٢ ، ٤) ≠ (√٢ ، –٤)

٣ – (√٢ ، ١) = (س ، ع) ⇔ س = √٢ ، ع = ١

٤٩ – الجداء الديكارتي: Cartisian Product ، Produit cartésient :

لتكن المجموعتان سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ } و عـ = { ٢ ، ٤ } . إذا شكلنا جميع الأزواج المرتبة التي تقع مركبتها الأولى في المجموعة الأولى ، سـ ، والمركبة الثانية في المجموعة الثانية ، عـ ، نحصل على مجموعة جديدة نسميها الجداء الديكارتي للمجموعة سـ في المجموعة عـ ، وهي :

{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٤) }

تعريف : الجداء الديكارتي لمجموعة ما سـ في مجموعة ثانية عـ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي تقع المركبة الأولى لكل منها في المجموعة الأولى سـ والمركبة الثانية في المجموعة الثانية عـ .

نكتب هذا الجداء بالشكل سـ × عـ ويقرأ سـ ضرب عـ ويكون:

سـ × عـ = { (س ، ع) : (س ∈ سـ) ∧ (ع ∈ عـ) }

مثال (١) ان الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = { ٠ ، ١ ، ٣ } في المجموعة عـ = { أ ، حـ } ، هو المجموعة :

س × ع = { (٠ ، أ) ، (١ ، أ) ، (٣ ، أ)
(٠ ، ح) ، (١ ، ح) ، (٣ ، ح) }

أما الجداء الديكارتي للمجموعة ع في المجموعة س فهو المجموعة :

ع × س = { (أ ، ٠) ، (أ ، ١) ، (أ ، ٣) ،
(ح ، ٠) ، (ح ، ١) ، (ح ، ٣) }

ويلاحظ أن س × ع ≠ ع × س

مثال (٢) : إن الجداء الديكارتي للمجموعة س = { سالم ، قاسم ، زيد }
في المجموعة ع = { دمشق ، القاهرة } هو المجموعة :

س × ع = { (سالم ، دمشق) ، (سالم ، القاهرة) ، (قاسم ،
دمشق) ، (قاسم ، القاهرة) ، (زيد ، دمشق) ،
(زيد ، القاهرة) } .

أما الجداء الديكارتي ع × س فهو المجموعة :

ع × س = { (دمشق ، سالم) ، (دمشق ، قاسم) ، (دمشق ،
زيد) ، (القاهرة ، سالم) ، (القاهرة ، قاسم) ،
(القاهرة ، زيد) } .

ويلاحظ أيضاً ان س × ع ≠ ع × س

٥٠ – ملاحظة :

إن جدول الانتماء للجداء الديكارتي هو :

س	ع	س × ع
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

إن (١) الموجود في العمود الأول يعني أن المركبة الأولى س من الزوج المرتب (س ، ع) ينتمي إلى المجموعة سـ . اما (٠) فإنه يعني أن المركبة الأولى من هذا الزوج لا تقع في سـ . وكذلك الأمر من أجل العمود الثاني . أما الاشارة (١) التي تقع في العمود الثالث فانها تعني ان المركبة الأولى من الزوج (س ، ع) تنتمي إلى المجموعة الأولى سـ من الجداء سـ × ع بينما تقع المركبة الثانية لهذا الزوج في المجموعة الثانية ع من الجداء الديكارتي المذكور .

٥١ – تمثيل الجداء الديكارتي :

١ – **التمثيل الجدولي** : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة سـ = {١ ، ٣ ، ٥} في المجموعة ع = {٢ ، ٤ ، ٦} بأن نضع عناصر المجموعة سـ في عمود جدول وعناصر المجموعة ع في سطر ونشكل الجدول :

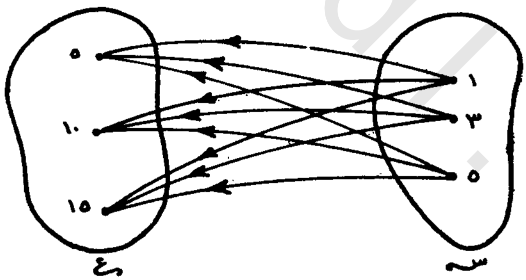
	٢	٤	٦
١	(١،٢)	(١،٤)	(١،٦)
٣	(٣،٢)	(٣،٤)	(٣،٦)
٥	(٥،٢)	(٥،٤)	(٥،٦)

بصورة عامة : إذا أردنا تشكيل جدول يضم الجداء الديكارتي للمجموعتين سـ في ع نتخذ جدولاً ذا مدخلين نكتب في مدخله الشاقولي (الرأسي) عناصر المجموعة الأولى سـ ونكتب في مدخله الأفقي عناصر المجموعة الثانية ع ثم نكتب عند التقاء كل سطر من أسطر هذا الجدول مع عمود من أعمدته الزوج المرتب الذي نضع مركبتيه على الترتيب على السطر والعمود اللذين يتقاطعان في موضع هذا الزوج .

مثال : يمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة س = {٢ ، ٥ ، ٧}
في المجموعة ع = {أ ، ب ، حـ ، ء} بالجدول :

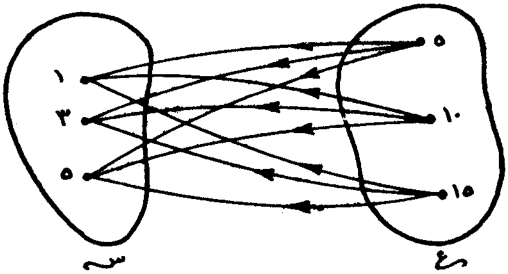
	أ	ب	حـ	ء
٢	(٢، أ)	(٢، ب)	(٢، حـ)	(٢، ء)
٥	(٥، أ)	(٥، ب)	(٥، حـ)	(٥، ء)
٧	(٧، أ)	(٧، ب)	(٧، حـ)	(٧، ء)

٢ – **التمثيل السهمي** : ويمكن تمثيل الجداء الديكارتي للمجموعة س = {١ ، ٣ ، ٥} في المجموعة ع = {٥ ، ١٠ ، ١٥} بأن نرسم مخطط فين – أولر والمثلثين للمجموعتين س و ع ، ومن ثم نرسم أسهماً موجهة تنطلق من عناصر المجموعة س وتنتهي في عناصر ع ، فنحصل على المخطط التالي الذي نسميه **المخطط السهمي** للجداء الديكارتي س × ع



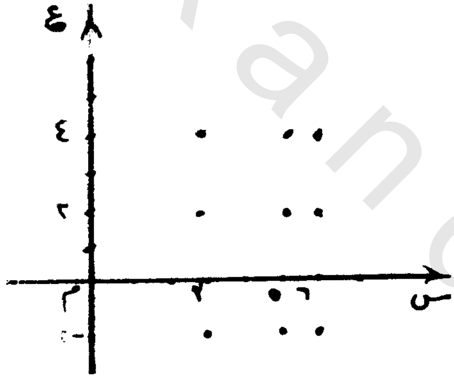
الشكل (٩٤)

أما المخطط السهمي للجداء الديكارتي ع × س فيعطى بالمخطط التالي :



الشكل (٩٥)

٣ – **التمثيل البياني** : ويمكن كذلك أن نمثل الجداء الديكارتي للمجموعة س = {٣، ٥، ٦} في المجموعة ع = {–٢، ٢، ٤}، بمجموعة نقاط في المستوي س م ع . تقع فواصل هذه النقاط في المجموعة س وتراتيبها في المجموعة ع . نحصل على الشكل (٩٦) الذي نسميه التمثيل البياني للجداء الديكارتي س × ع



الشكل (٩٦)

٥٢ – خواص الجداء الديكارتي :

١ – الجداء الديكارتي لمجموعة ما س في مجموعة خالية ∅ هو مجموعة خالية أي :

س × ∅ = ∅ ، ∅ × س = ∅

ذلك لأنــه لو كان سـ × ∅ ≠ ∅ فهنالك على الأقل زوج مرتب واحد ، (س ، ع) مثلاً ، حيث س ∈ سـ و ع ∈ ∅ ، ولكن هذا يناقض الفرض لأن ∅ مجموعة خالية لا تحوي أي عنصر .

ونبرهن بصورة مشابهة أن : ∅ × سـ = ∅ .

٢ - إذا كانت المجموعتان سـ و ع غير متساويتين وكانتا غير خاليتين فان :

سـ × ع ≠ ع × سـ (الجداء الديكارتي غير تبديلي).

وبالعكس إذا كان (سـ ≠ ∅) ∧ (ع ≠ ∅) فإنه يكون:

(سـ × ع = ع × سـ) ⟺ (سـ = ع)

البرهان :

إذا كانت المجموعتان سـ و ع غير متساويتين فهناك على الأقل عنصر واحد ، ﺃ مثلاً ، ينتمي لاحداهما ، ولنفرض أنها سـ ، ولا ينتمي إلى الثانية ، نستنتج من هذا أن جميع الأزواج المرتبــة (ﺃ ، ع) ∀ ع ∈ ع ، تنتمي إلى المجموعة سـ × ع ولا تنتمي إلى المجموعة ع × سـ وبالتالي فان سـ × ع ≠ ع × سـ .

العكس : إن سـ × ع = ع × سـ يعني :

∀ (ﺃ ، ب) ∈ سـ × ع ⟺ (ﺃ ، ب) ∈ ع × سـ

ان الطرف الأول من العلاقة السابقة يؤدي إلى أن :

(ﺃ ∈ سـ) ∧ (ب ∈ ع)

بينما يؤدي الطرف الثاني إلى أن : (ﺃ ∈ ع) ∧ (ب ∈ سـ) أي أن :

(∀ ﺃ ∈ سـ ⇐ ﺃ ∈ ع) ⟺ سـ ⊆ ع
(∀ ب ∈ ع ⇐ ب ∈ سـ) ⟺ ع ⊆ سـ
} ⟺ سـ = ع

أما اذا كان سـ = ∅ فإن سـ × ع = ع × سـ = ∅

وكذلك اذا كان ع = ∅ فإن سـ × ع = ع × سـ = ∅

مثال (١) : لتكن المجموعتان سـ = {٠ ، ١ ، ٢} و ع = {٣ ، ٥} .

الجداء الديكارتي : سـ × ع

= {(٠،٣) ، (٠،٥) ، (١،٣) ، (١،٥) ، (٢،٣) ، (٢،٥)}

والجداء الديكارتي : ع × سـ

= {(٣،٠) ، (٣،١) ، (٣،٢) ، (٥،٠) ، (٥،١) ، (٥،٢)}

ونلاحظ أن : سـ × ع ≠ ع × سـ

مثال (٢) : لتكن المجموعتان سـ = {-١ ، ٣} و ع = {٣ ، -١}

الجداء الديكارتي سـ × ع

= {(-١ ، ٣) ، (-١ ، -١) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، -١)}

والجداء السيكارتي : ع × سـ

= {(٣ ، -١) ، (٣ ، ٣) ، (-١ ، -١) ، (-١ ، ٣)}

ونلاحظ أن : سـ × ع = ع × سـ وهذا بالفعل ناتج من كون أن سـ = ع .

٣- الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للاجتماع أي أن :

سـ × (ع ∪ صـ) = (سـ × ع) ∪ (سـ×صـ)

حيث سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية .

البرهان :

يجب أن نثبت أن كل عنصر ينتمي إلى سـ × (ع ∪ صـ)

ينتمي إلى (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) وبالعكس .

(أ ، ب) ∈ سـ × (ع ∪ صـ)

⟺ [(أ ∈ سـ) ∧ (ب ∈ ع ∪ صـ)]   (حسب التعريف)

⟺ [(أ ∈ سـ) ∧ ((ب ∈ ع) ∨ (ب ∈ صـ))]

⟺ [(أ ∈ سـ ∧ ب ∈ ع) ∨ (أ ∈ سـ ∧ ب ∈ صـ)]

⟺ [(أ ، ب) ∈ سـ × ع ∨ (أ ، ب) ∈ سـ × صـ]

⟺ (أ ، ب) ∈ (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ)

يمكن برهان هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي :

سـ	ع	صـ	ع ∪ صـ	سـ × (ع ∪ صـ)	سـ × ع	سـ × صـ	(سـ × ع) ∪ (سـ × صـ)
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	١	١
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الواحد يمثل انتماء العنصر إلى المجموعة البسيطة أو مجموعة الجداء . أما الصفر فانه يمثل نفي هذا الانتماء مع ملاحظة أن الانتماء للجداء لا يكون محققاً إلا إذا تحقق انتماء المركبة الأولى للمجموعة الأولى والمركبة الثانية للمجموعة الثانية .

مثال : لتكن المجموعات :

سـ = {١} ، ع = {١ ، ٣ ، ٥} ، صـ = {-١ ، ١}

ان الجداء الديكارتي سـ × ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)}

والجداء الديكارتي سـ × صـ = {(١ ، -١) ، (١ ، ١)}

وبالتالي يكون : (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، -١)} .

ونرى من جهة ثانية أن :

ع ∪ صـ = {١ ، ٣ ، ٥ ، -١} وبالتالي الجداء الديكارتي :

سـ × (ع ∪ صـ) = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، -١)}

ذن : سـ × (ع ∪ صـ) = (سـ × ع) ∪ (سـ × صـ) .

٤ -

الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للتقاطع أي :
سـ × (ع ∩ صـ) = (سـ × ع) ∩ (سـ × صـ)
حيث سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات كيفية .

البرهان :

نبرهن أن كل عنصر ينتمي إلى سـ × (ع ∩ صـ) ينتمي إلى (سـ × ع) ∩ (سـ × صـ) وبالعكس .

(أ ، ب) ∈ سـ × (ع ∩ صـ)

⟺ [أ ∈ سـ ∧ (ب ∈ ع ∧ ب ∈ صـ)]

⟺ [(أ ∈ سـ ∧ ب ∈ ع) ∧ (أ ∈ سـ ∧ ب ∈ صـ)]

$\Leftrightarrow$ [(أ ، ب) $\in$ س × ع $\wedge$ (أ ، ب) $\in$ س × ص]

$\Leftrightarrow$ (أ ، ب) $\in$ (س × ع) $\cap$ (س × ص) .

ويمكن أيضاً إثبات هذه الخاصة بطريقة جدول الحقيقة بالشكل التالي:

س	ع	ص	ع $\cap$ ص	س × (ع $\cap$ ص)	س × ع	س × ص	(س × ع) $\cap$ (س × ص)
١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	٠	٠	١	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	٠	١	٠
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

مثال : لنأخذ المجموعات :

س = { ١ } و ع = { ١ ، ٣ ، ٥ } و ص = { – ١ ، ١ }

ان الجداء الديكارتي : س × ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) }

والجداء الديكارتي : س × ص = { (١ ، – ١) ، (١ ، ١) }

إذاً : (س × ع) $\cap$ (س × ص) = { (١ ، ١) }

ومن جهة ثانية نلاحظ أن ع $\cap$ ص = { ١ } وبالتالي نجد أن : س × (ع $\cap$ ص) = { (١ ، ١) } .

إذاً : س × (ع $\cap$ ص) = (س × ع) $\cap$ (س × ص).

٥ – إذا كان عدد عناصر المجموعتين س و ع هو $ن_١$ و $ن_٢$ على الترتيب فان عدد عناصر مجموعة الجداء الديكارتي س × ع هو $ن_١ \times ن_٢$.

وذلك لأن كل عنصر ينتمي إلى المجموعة س يشترك كمركبة أولى في $ن_٢$ زوجاً مرتباً في كل منها المركبة الثانية عنصر ينتمي الى المجموعة ع . ويمكن توضيح ذلك بالتمثيل الجدولي .

	$ع_١$	$ع_٢$	....	$ع_{ن_٢}$
$س_١$	$(س_١ ، ع_١)$	$(س_١ ، ع_٢)$	....	$(س_١ ، ع_{ن_٢})$
$س_٢$	$(س_٢ ، ع_١)$	$(س_٢ ، ع_٢)$	....	$(س_٢ ، ع_{ن_٢})$
⋮	⋮	⋮		⋮
$س_{ن_١}$	$(س_{ن_١} ، ع_١)$			$(س_{ن_١} ، ع_{ن_٢})$

مثال : لتكن المجموعتان س = {٢،٣} و ع = {١ ، ٤ ، ٥}

ان مجموعة الجداء الديكارتي س × ع = {(٢،١) ، (٢،٤) ، (٢،٥) ، (٣،١) ، (٣،٤) ، (٣،٥)} تتألف من ٢ × ٣ = ٦ عناصر .

٥٣ – الجداء الديكارتي لمجموعة في نفسها .

يتألف الجداء الديكارتي لمجموعة س في نفسها من جميع الأزواج المرتبة التي تكون فيها المركبتان الأولى والثانية عنصرين في س ونكتب ذلك بالشكل س × س أو $س^٢$ ويكون ،

$$س × س = \{(س ، ع) : س ، ع \in س\}$$

مثال : ان الجداء الديكارتي للمجموعة س = {١،٥} في نفسها هو :

$$س × س = \{(١،١) ، (١،٥) ، (٥،١) ، (٥،٥)\}$$

٥٤ – الجداء الديكارتي لثلاث مجموعات :

لتكن المجموعات الثلاث سـ ، ع ، صـ ، المختلفة او المتساوية ولنشكل كائناً رياضياً نسميه ثلاثية مرتبة ونرمز لها بالشكل (س ، ع ، ص) حيث العنصر الأول س من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الأولى سـ ، والعنصر الثاني ع من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثانية ع ، والعنصر الثالث ص من هذه الثلاثية هو عنصر كيفي من المجموعة الثالثة صـ .

نسمي بالجداء الديكارتي للمجموعات الثلاث سـ ، ع ، صـ الواردة بهذا الترتيب ، مجموعة جميع الثلاثيات المرتبة (س ، ع ، ص) حيث س ∈ سـ ، ع ∈ ع ، ص ∈ صـ .

ويكتب هذا الجداء بالشكل سـ × ع × صـ (ويقرأ سـ ضرب ع ضرب صـ) .

مثال (١) : يمكن تمييز كل شخص في قرية ما باسمه واسم أبيه واسم جده بهذا الترتيب فنكتب مثلاً (محمد ، سعيد ، خالد) .

حيث محمد ينتمي الى مجموعة أبناء القرية وينتمي سعيد الى مجموعة الآباء في هذه القرية بينما ينتمي خالد الى مجموعة الجدود في القرية .

مثال (٢) : يعطى تاريخ كل يوم بثلاثية من الشكل ١٢/٥/١٢٧٠ والتي يمكن كتابتها بالشكل (١٢ ، ٥ ، ١٢٧٠) .

حيث ١٢ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ٣٠ (اذا اعتبرنا أن عدد أيام كل شهر ثلاثين يوماً) والعدد ٥ عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية من ١ الى ١٢ .

أما العدد ١٢٧٠ فهو عنصر من مجموعة الأعداد الصحيحة

وينتج عن التعريف السابق أن :

$$(\text{س} ، \text{ع} ، \text{ص}) = (\text{ب} ، \text{حـ} ، \text{ء}) \Leftrightarrow \big((\text{س} = \text{ب}) \wedge (\text{ع} = \text{حـ}) \wedge (\text{ص} = \text{ء})\big)$$

يكتب الجداء $\underset{\sim}{\text{س}} \times \underset{\sim}{\text{س}} \times \underset{\sim}{\text{س}}$ بالشكل $\underset{\sim}{\text{س}}^{٣}$.

وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد من المجموعات: $\underset{\sim}{\text{س}}_{١} ، \underset{\sim}{\text{س}}_{٢} ، \ldots ، \underset{\sim}{\text{س}}_{\text{ن}}$ المختلفة أو المتساوية فإنـــه يمكننا أن نشكل كائناً رياضياً من الشكل $(\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}})$.

جيث $\text{س}_{١} \in \underset{\sim}{\text{س}}_{١} ، \text{س}_{٢} \in \underset{\sim}{\text{س}}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}} \in \underset{\sim}{\text{س}}_{\text{ن}}$

إن مجموعة جميع هذه الكائنات الرياضية التي يمكن تشكيلها كما سبق هي الجداء الديكارتي

$$\underset{\sim}{\text{س}}_{١} \times \underset{\sim}{\text{س}}_{٢} \times \ldots \times \underset{\sim}{\text{س}}_{\text{ن}}$$

تمارين محلولة

الازواج المرتبة :

١٥٤ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الأول في كل منها – ٢ ويكون المسقط الثاني أحد الأعداد ٠ ، – ١ ، $\sqrt{٥}$.

الحل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (–٢، ٠) ، (–٢، –١) ، (–٢، $\sqrt{٥}$).

١٥٥ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها أ ويكون المسقط الأول أحد العناصر حـ ، ك ، هـ .

الحل :

ان هذه الأزواج المرتبة هي (حـ، أ) ، (ك، أ) ، (هـ، أ) .

١٥٦ – أوجد قيمة س إذا علمت أن الزوجين المرتبين (٣س ، $\sqrt{٢}$) و (٢ س + ١ ، $\sqrt{٢}$) متساويان .

الحل :

لكي يتساوى الزوجان المرتبان يجب أن تتساوى المركبتان (المسقطان) المتقابلتان . اذن يجب أن يكون :

٣ س = ٢ س + ١ ⇐ س = ١

١٥٧ – أوجد قيمة كل من س و ع إذا علمت أن الزوجين المرتبين (س ، ٢) و (٣ ، ٢ س – ع) متساويان .

الحـل :

ينتج عن تساوي الزوجين المفروضين أن :

س = ٣
٢ = ٢ س – ع } ⇐ س = ٣ و ع = ٤

١٥٨ – لتكن المجموعتان :

سـ = { سالم ، قاسم ، فريد } و ع = { سعيد ، يونس }

أوجد الجداء الديكارتي سـ × ع . والجداء الديكارتي ع × ع ثم مثّل كلاً منهما سهمياً .

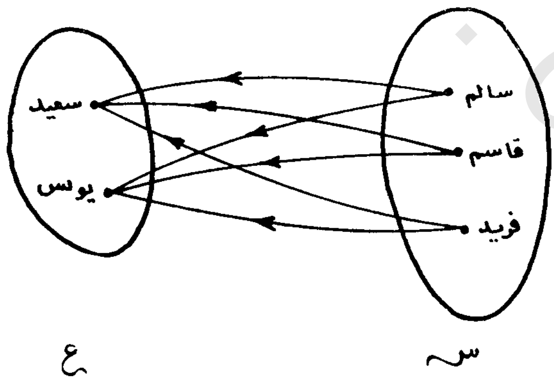
الحـل : الجداء الديكارتي

سـ × ع = { (سالم، سعيد) ، (سالم، يونس) ، (قاسم، سعيد) ، (قاسم، يونس) ، (فريد، سعيد) ، (فريد ، يونس)}

والجداء الديكارتي: ع × ع =

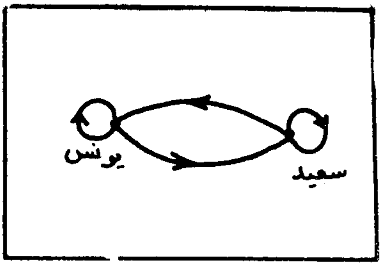
{ (سعيد ، سعيد) ، (سعيد ، يونس) ، (يونس ،يونس) ، (يونس ، سعيد)}

ان التمثيل السهمي للجداء سـ×ع هو :



الشكل (٩٧)

والتمثيل السهمي للجداء
ع × ع هو :



ع الشكل (٩٨)

١٥٩ – ينظم مكتب سياحي رحلات تقوم من إحدى المدن دمشق ، بيروت ، بغداد وتصل إلى احدى المدن التالية : القاهرة ، طرابلس ، الجزائر . مثّل هذه الرحلات بشكل جداء ديكارتي . ما هو عدد هذه الرحلات ؟ مثّل ذلك جدولياً .

الحل :

لنأخذ المجموعة س = { دمشق ، بيروت ، بغداد } . والمجموعة ع = { القاهرة ، طرابلس ، الجزائر } . يمكن أن نمثل كل رحلة بزوج مرتب مركبته الأولى المدينة التي تبدأ بها الرحلة والمركبة الثانية المدينة التي تصل اليها الرحلة . وتكون مجموعة الرحلات هذه هي مجموعة الجداء الديكارتي س × ع وهي :

س × ع = { (دمشق ، القاهرة) ، (دمشق ، طرابلس) ، (دمشق ، الجزائر) ، (بيروت ، القاهرة) ، (بيروت ، طرابلس) ، (بيروت ، الجزائر) ، (بغداد ، القاهرة) ، (بغداد ، طرابلس) ، (بغداد ، الجزائر) } .

إن عدد هذه الرحلات هو تسع وهو يساوي عدد عناصر س ، وهي ثلاثة ، مضروبة بعدد عناصر ع وهي ثلاثة .

والتمثيل الجدولي لهذه الرحلات هو :

	القاهرة	طرابلس	الجزائر
دمشق	(دمشق،القاهرة)	(دمشق،طرابلس)	(دمشق، الجزائر)
بيروت	(بيروت،القاهرة)	(بيروت،طرابلس)	(بيروت،الجزائر)
بغداد	(بغداد،القاهرة)	(بغداد،طرابلس)	(بغداد ، الجزائر)

١٦٠ – لتكن سـ و عـ و صـ ثلاث مجموعات اختيارية . برهن صحة العلاقة التالية :

$$\text{سـ} \times (\text{عـ} - \text{صـ}) = (\text{سـ} \times \text{عـ}) - (\text{سـ} \times \text{صـ})$$

(الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للفرق) .

الحل :

بالاستناد إلى تعريف الجداء الديكارتي والفرق نكتب :

$$\text{سـ} \times (\text{عـ} - \text{صـ})$$

$$= \{(\text{أ،ب}) : \text{أ} \in \text{سـ} \wedge (\text{ب} \in \text{عـ} \wedge \text{ب} \notin \text{صـ})\}$$

$$= \{(\text{أ،ب}) : (\text{أ،ب}) \in \text{سـ} \times \text{عـ} \wedge (\text{أ،ب}) \notin \text{سـ} \times \text{صـ}\}$$

$$= \{(\text{أ،ب}) : (\text{أ،ب}) \in [(\text{سـ} \times \text{عـ}) - (\text{سـ} \times \text{صـ})]\}$$

$$= (\text{سـ} \times \text{عـ}) - (\text{سـ} \times \text{صـ}) .$$

ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بطريقة جدول حقيقة بالشكل التالي :

س	ع	ص	ع − ص	س × (ع − ص)	س × ع	س × ص	(س × ع) − (س × ص)
١	١	١	٠	٠	١	١	٠
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	٠	٠	٠	١	٠
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

حيث ١ يمثل انتماء العنصر للمجموعة بينما ٠ يمثل عدم انتمائه .

١٦١ – لتكن س و ع و ص ثلاث مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقة التالية :

س × (ع Δ ص) = (س × ع) Δ (س × ص)

(الجداء الديكارتي توزيعي بالنسبة للفرق التناظري) .

الحل :

بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نكتب :

س × (ع Δ ص)

= { (أ ،ب) : أ ∈ س و (ب ∈ ع فقط أو ب ∈ ص فقط) }

= { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ س × ع فقط
أو (أ ، ب) ∈ س × ص فقط }

= { (أ ، ب) : (أ ،ب) ∈ (س × ع) Δ (س × ص) }

= (س × ع) Δ (س × ص) .

هذا ويمكن البرهان على صحة العلاقة السابقة بجدول الحقيقة على الشكل الآتي :

س	ع	ص	ع Δ ص	س × (ع Δ ص)	س × ع	س × ص	(س × ع) Δ (س × ص)
١	١	١	٠	٠	١	١	٠
١	١	٠	١	١	١	٠	١
١	٠	١	١	١	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

الرمز ١ يدل على انتماء العنصر إلى المجموعة بينما الرمز ٠ يدل على عدم الانتماء .

١٦٢ – لتكن س و ع و ص و ن أربع مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقة :

(س × ع) ∩ (ص × ن) = (س ∩ ص) × (ع ∩ ن)

الحل :

حسب تعريف الجداء الديكارتي والتقاطع يمكن أن نكتب :

(س × ع) ∩ (ص × ن)

= { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ س × ع ∧ (أ ، ب) ∈ ص × ن }

= { (أ ، ب) : (أ ∈ س ∧ ب ∈ ع) ∧ (أ ∈ ص ∧ ب ∈ ن) }

= { (أ ، ب) : (أ ∈ س ∧ أ ∈ ص) ∧ (ب ∈ ع ∧ ب ∈ ن) }

= { (أ ، ب) : أ ∈ س ∩ ص ∧ ب ∈ ع ∩ ن }

= { (أ ، ب) : (أ ، ب) ∈ (س ∩ ص) × (ع ∩ ن) }

= (س ∩ ص) × (ع ∩ ن) .

هذا ويمكن برهان العلاقة السابقة بطريقة جدول الحقيقة .

١٦٣ – لتكن المجموعات :

س = { ١،٢،٣ } و ع = { ٢،٣،٥ } و ص = { ١،٣،٥،٧ }

أوجد المجموعات التالية :

١ً – س × س   ٢ً – س × (ع – ص)

٣ً – ع × (س ∆ ص)

٤ً – (س × ع) ∩ (ع × س)

٥ً – (س – ع) × (س – ص)

٦ً – (ع ∆ س) × (ع ∆ ص)

الحـل :

استناداً إلى تعريف الجداء الديكارتي نجد :

١ً – س×س = { (١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،١) ،
(٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،١) ، (٣،٢) ،
(٣،٣) } .

٢ً – وبالاستناد إلى تعريف الفرق نجد أن :

ع – ص = { ٢ } وبالتالي فإن :

س × (ع – ص) = { (١،٢) ، (٢،٢) ، (٣,٢) } .

٣ً – بالاستناد إلى تعريف الفرق التناظري نجد أن :

س ∆ ص = { ٢ ، ٥ ، ٧ } وبالتالي فان :

ع×(س∆ص) = { (٢،٢) ، (٢،٥) ، (٢،٧) ، (٣،٢) ، (٣،٥) ،
(٣،٧) ، (٥،٢) ، (٥،٥) ، (٥،٧) } .

٤ً – هذا وان الجداء الديكارتي :

س × ع = { (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٥) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ،
(٢،٥) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٣،٥) }

وان ع × س = {(٢،١) ، (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،١) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٥،١) ، (٥،٢) ، (٥،٣)}

وبالتالي فان :

(س×ع) ∩ (ع × س) = {(٢،٢) ، (٢،٣) ، (٣،٢) ، (٣،٣)}

٥ً – ان الفرق س – ع = {١} والفرق س – ص = {٢}
وبالتالي فان :

(س – ع) × (س – ص) = {(١ ، ٢)}

٦ً – ان الفرق التناظري ع Δ س = {١ ، ٥} والفرق التناظري ع Δ ص = {٢ ، ١ ، ٧} وبالتالي فان :

(ع Δ س) × (ع Δ ص) = {(١،٢) ، (١،١) ، (١،٧) ، (٥،٢) ، (٥،١) ، (٥،٧)}.

١٦٤ – لتكن المجموعات : س = {١،٢} ، ع = {د ، ن} ، ص = {٠،١}. اكتب مجموعة الجداء الديكارتي س× ع× ص وكذلك مجموعة الجداء الديكارتي س × ص × (س – ص)

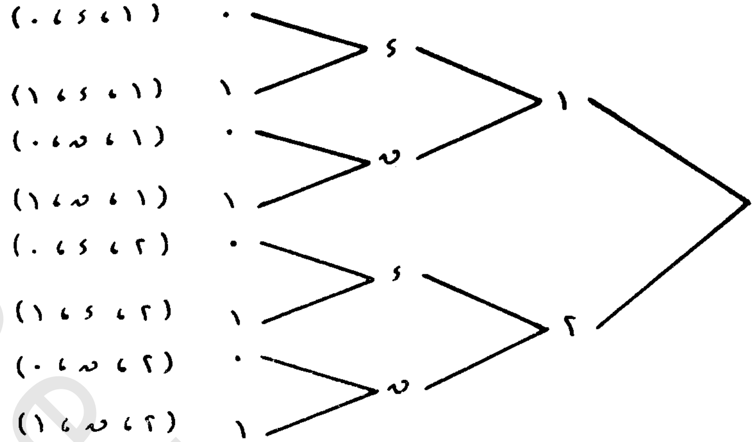
الحل :

استناداً إلى التعريف نجد أن :

١) مجموعة الجداء الديكارتي س × ع × ص هي :

{(١ ، د ، ٠) ، (١ ، ن ، ٠) ، (١ ، د ، ١) ، (١ ، ن ، ١) ، (٢ ، د ، ٠) ، (٢ ، ن ، ٠) ، (٢ ، د ، ١) ، (٢ ، ن ، ١)}

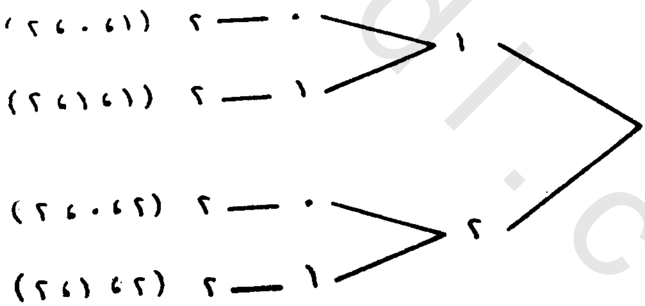
ويمكن كتابة مجموعة الجداء س × ع × ص هذه بالمخطط التالي:



الشكل (٩٩)

(نسمي هذا المخطط مخطط الشجرة للجداء س × ع × ص)

٢) ان مجموعة الفرق س − ص = {٢} وبالتالي فان مجموعة الجداء الديكارتي س × ص × (س − ص) تعطى بمخطط الشجرة التالي :



الشكل (١٠٠)

تمارين غير محلولة

١٦٥ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الاول في كل منها كرة والمسقط الثاني أحد العناصر : طائرة ، سلة ، قدم .

١٦٦ – اكتب الأزواج المرتبة التي يكون المسقط الثاني في كل منها والمسقط الاول أحد العناصر : س ، ب ، ١٥ ، $\sqrt{٣}$.

١٦٧ – أوجد قيمة كل من أ و ب إذا علمت أن الزوجين المرتبين (أ + ٢ ، ب – ١) و (٢ ب + ١ ، أ – ٢) متساويان .

١٦٨ – أوجد قيمة كل من س و ع إذا علمت أن الزوجين المرتبين (س + ع ، – ١) و (٧ ، س – ع) متساويان .

١٦٩ – لتكن المجموعتان سـ = { أ ، ب } و ع = { ب ، حـ ، ء } .
أوجد كلاً من المجموعات التالية :

١) سـ × (سـ △ ع) ومثّل ذلك سهمياً .
٢) (سـ – ع) × (سـ ∩ ع) .
٣) (سـ ∪ ع) × ع ومثّل ذلك جدولياً .

١٧٠ – لتكن المجموعات :

سـ = { ٣ ، ٤ ، ٥ } و ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } و ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } .

أوجد المجموعات التالية :

١) سـ × سـ　　　　٢) سـ × ع

٣) $(\text{س} \times \text{س}) \cap (\text{ع} \times \text{ع})$

٤) $(\text{س} \times \text{ع}) \cup (\text{ع} \times \text{س})$

٥) $\text{س} \times (\text{ص} - \text{ع})$

٦) $(\text{ع} - \text{ص}) \times (\text{س} \,\Delta\, \text{ص})$

٧) $(\text{س} - \text{ص}) \times \text{ص}$

٨) $(\text{س} \,\Delta\, \text{ع}) \times (\text{ص} - \text{س})$

١٧١ – لتكن س و ع و ص و ن أربع مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقتين التاليتين :

$$(\text{س} \times \text{ع}) \cup (\text{ص} \times \text{ن}) \subseteq (\text{س} \cup \text{ص}) \times (\text{ع} \cup \text{ن})$$

$$(\text{س} \subseteq \text{ص} \text{ و } \text{ع} \subseteq \text{ن}) \Rightarrow \text{س} \times \text{ع} \subseteq \text{ص} \times \text{ن}$$

١٧٢ – لتكن س و ع و ص ثلاث مجموعات كيفية . برهن صحة العلاقات التالية :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \times \text{ص} = (\text{س} \times \text{ص}) \cup (\text{ع} \times \text{ص})$$

$$(\text{س} \cap \text{ع}) \times \text{ص} = (\text{س} \times \text{ص}) \cap (\text{ع} \times \text{ص})$$

$$(\text{س} - \text{ع}) \times \text{ص} = (\text{س} \times \text{ص}) - (\text{ع} \times \text{ص})$$

$$(\text{س} \,\Delta\, \text{ع}) \times \text{ص} = (\text{س} \times \text{ص}) \,\Delta\, (\text{ع} \times \text{ص})$$

(الخواص التوزيعية للجداء الديكارتي من اليسار) .

١٧٣ – لتكن المجموعات :

$\text{س} = \{\text{٢ ، ٣}\}$ ، $\text{ع} = \{\text{١ ، ٣ ، ٥}\}$ ، $\text{ص} = \{\text{٣ ، ٤}\}$.

اكتب كلاً من المجموعات التالية :

١) $\text{س} \times \text{ع} \times \text{ص}$

٢) $\text{س} \times (\text{س} - \text{ع}) \times (\text{س} \,\Delta\, \text{ص})$

٣) $\text{س}^{2} \times \text{ع}$ ٤) $\text{س} \times \text{ص}^{2}$

أجوبة وإرشادات

١٦٥ – (كرة ، طائرة) ، (كرة ، سلة) ، (كرة ، قدم) .

١٦٦ – (س ، $\sqrt{٣}$) ، (ب ، $\sqrt{٣}$) ، (١٥ ، $\sqrt{٣}$) .

١٦٧ – أ = ٣ ، ب = ٢ .

١٦٨ – س = ٣ ، ع = ٤ .

١٦٩ – ١- {(أ ، أ) ، (أ ، حـ) ، (أ ، ء) ، (ب ، أ) ، (ب ، حـ) ، (ب ، ء)} .

٢- {(أ ، ب)} .

٣- {(أ ، ب) ، (أ ، حـ) ، (أ ، ء) ، (ب ، ب) ، (ب ، حـ) ، (ب ، ء) ، (حـ ، ب) ، (حـ ، حـ) ، (حـ ، ء) ، (ء ، ب) ، (ء ، حـ) ، (ء ، ء)} .

١٧٠ – استفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :

سـ △ عـ = { ١ ، ٢ ، ٥ }   و سـ △ صـ = { ١ ، ٢ }

و سـ – صـ = ∅   و صـ – سـ = { ١ ، ٢ }

و صـ – عـ = { ٥ }   و عـ – صـ = ∅ .

١٧٣ – استفد مما يلي في حساب الجداءات الديكارتية المطلوبة :

سـ – عـ = { ٢ }   سـ △ صـ = { ٢ ، ٤ } .