الفصل الثالث

العمليات على المجموعات

من المهم في الرياضيات في كثير من الأحيان تشكيل كائن رياضي من كائنين رياضيين معلومين ، فمثلاً من العددين ٢ ، ٧ يمكننا أن نشكل العدد ٩ وذلك بجمع هذين العددين ، ويمكننا أن نشكّل من هذين العددين نفسهما العدد ١٤ أيضاً وذلك بضرب أحدهما بالآخر .

وشبيه بهذا الأمر يمكن أن يتم في المجموعات . وسنرى في هذا البحث العمليات الأساسية التي نستطيع بواسطتها أن نشكّل مجموعات جديدة من مجموعات معلومة .

٢٨ – عملية الاجتماع :

لتكن ك مجموعة أعضاء الجمعية الرياضية في احدى الثانويات العربية

و سـ = { س : س ∋ ك ويلعب كرة اليد }

ع = { س : س ∋ ك ويلعب كرة الطاولة }

فالمجموعة الجزئية من ك المكونة من أعضاء الجمعية الذين يلعبون كرة اليد أو كرة الطاولة ، تتكون من كل عضو من ك يلعب كرة اليد فقط ، ومن كل عضو من ك يلعب كرة الطاولة فقط ، ومن كل

عضو يلعب كرة اليد وكرة الطاولة معاً . وتسمى هذه المجموعة **اجتماع**[1] **المجموعتين** سـ و ع ويرمز لها بالرمز سـ ∪ ع حيث ∪ **رمز عملية الاجتماع** التي أنجزت على المجموعتين سـ و ع ونكتب :

سـ ∪ ع = {س : س ∈ ك و س يلعب كرة اليد أو كرة الطاولة}

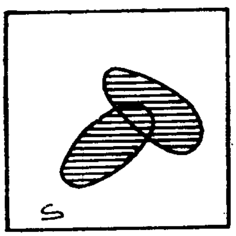
ونقرأ الرمز سـ ∪ ع : (سـ اجتماع ع) أو (اجتماع سـ و ع)

وبصورة عامة :

> **تعريف** : اجتماع مجموعتين سـ و ع هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي على الأقل إلى إحدى المجموعتين سـ و ع .
> أي أن :
>
> سـ ∪ ع = {س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع)}

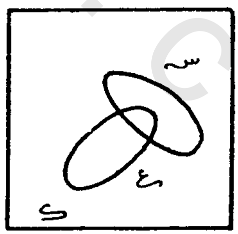
وللرمز ∨ هنا المدلول نفسه الموضح في الفصل الأول .

واذا كان الشكل (٢٢) هو مخطط المجموعتين الجزئيتين سـ و ع من المجموعة ك ، فالشكل (٢٣) يمثل مخطط اجتماعهما سـ ∪ ع ، وهو المجموعة الجزئية من ك التي يمثلها القسم المظلل الذي نحصل عليه بتظليل الأقسام المشتركة وغير المشتركة بين مخططي سـ و ع في الشكل (٢٣) .



سـ ∪ ع

الشكل (٢٣)



الشكل (٢٢)

(١) Réunion , Union

مثال (١) : إذا كان : س = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٥}

و   :   ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

فإن : س ∪ ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

ويلاحظ هنا وجود عناصر تنتمي إلى س فقط وعناصر تنتمي إلى ع فقط وعناصر تنتمى إلى س و ع معاً .

مثال (٢) : اذا كان   أ = {* ، △} و ب = {* ، ٥ ، △ ، □}

فإن : أ ∪ ب = {* ، △ ، ٥ ، □}

ويلاحظ هنا أن جميع عناصر أ تنتمي إلى ب وأن بعض عناصر ب لا تنتمي إلى أ .

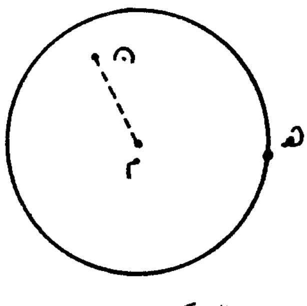
مثال (٣) : لدينا : ص* ∪ {٠} = ص

ويلاحظ هنا عدم وجود عناصر مشتركة بين ص* و {٠}

مثال (٤) : لدينا : ح− ∪ ح+ = ح

ويلاحظ هنا وجود عنصر واحد ينتمي الى كل من ح− و ح+ هو الصفر .

مثال (٥) : الشكل (٢٤) يمثل قرصاً دائرياً مركزه م ونصف قطره ر .



الشكل (٢٤)

فمجموعة نقاطه الداخلية هي المجموعة :

$$خ = \{ ء : ء م < ر \}$$

ومجموعة نقاطه المحيطية هي المجموعة :

$$ح = \{ ه : ه م = ر \}$$

وبفرض صـ مجموعة نقاط القرص يكون : صـ = ح ∪ خ

٢٩ – ملاحظات :

(١) كل عنصر لا ينتمي إلى كل من المجموعتين سـ و ع لا ينتمي إلى اجتماعها سـ ∪ ع . وبالعكس كل عنصر لا ينتمي إلى الاجتماع سـ ∪ ع لا ينتمي إلى أي من المجموعتين سـ و ع أي أن :

$$\boxed{(س \notin سـ \cup ع) \Leftrightarrow \big((س \notin سـ) \wedge (س \notin ع) \big)}$$

بحيث ∧ هو الرمز المنطقي لحرف العطف (و) .

(٢) يمكن تلخيص الحالات المختلفة الممكنة لانتماء عنصر إلى مجموعتين سـ و ع وما يقابلها بالنسبة للاجتماع سـ ∪ ع في الجدول التالي:

سـ	ع	سـ ∪ ع
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

ويسمى هذا الجدول **جدول الانتماء لعملية الاجتماع .**

لقد رمزنا بـ (١) للحالة التي يكون فيها العنصر س منتمياً إلى المجموعة وبـ (٠) للحالة التي لا يكون هذا العنصر منتمياً إلى المجموعة .

٣٠ – اجتماع عدة مجموعات :

بتطبيق تعريف اجتماع مجموعتين بالتدرّج يمكننا تعيين اجتماع عدة مجموعات:

مثال : لإيجاد اجتماع المجموعات الثلاث :

$$\text{س} = \{\text{أ ، ب ، حـ}\}$$
$$\text{ع} = \{\text{ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$
$$\text{ص} = \{\text{أ ، ب ، ء}\}$$

يمكننا أن نجري عملية الاجتماع هذه بشكلين مختلفين هما :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \cup \text{ص} \quad \text{و} \quad \text{س} \cup (\text{ع} \cup \text{ص})$$

ومن أجل الشكل الأول نكتب :

$$\text{س} \cup \text{ع} = \{\text{أ ، ب ، حـ}\} \cup \{\text{ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$
$$= \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$

ثم نعين اجتماع هذه المجموعة مع المجموعة الثالثة فيكون اجتماع المجموعات الثلاث هو المجموعة :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \cup \text{ص} = \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\} \cup \{\text{أ ، ب ، ء}\}$$
$$= \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$

ومن أجل الشكل الثاني نكتب :

$$\text{ع} \cup \text{ص} = \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$
$$\text{س} \cup (\text{ع} \cup \text{ص}) = \{\text{أ ، ب ، حـ}\} \cup \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$
$$= \{\text{أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ}\}$$

وهذه النتيجة تطابق النتيجة التي حصلنا عليها في الشكل الأول وسنبرهن في التمرين (٧١) صحة هذه الخاصة بشكل عام أي :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \cup \text{ص} = \text{س} \cup (\text{ع} \cup \text{ص})$$

وذلك $\forall$ (س ، ع ، ص)

٣١ – خواص عملية الاجتماع :

يبرهن أن عملية الاجتماع تحقق الخواص الآتية : (انظر التمارين المحلولة : ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١) .

(١) سـ ∪ سـ = سـ وتدعى **خاصة اللانمو**

(٢) سـ ∪ ∅ = سـ وتدعى **خاصة العنصر الحيادي**

(٣) سـ ∪ ع = ع ∪ سـ وتدعى **الخاصة التبديلية**

(٤) سـ ∪ ك = ك حيث ك المجموعة الكلية

(٥) (سـ ∪ ع) ∪ صـ = سـ ∪ (ع ∪ صـ) وتدعى **خاصة قابلية الدمج** .

وتفيد هذه الخاصة أن اجتماع ثلاث مجموعات يتم بالبدء بإيجاد اجتماع مجموعتين متجاورتين ما منها بالترتيب التي أعطيت به هذه المجموعات . وبناء على هذه الخاصة يرمز لعملية اجتماع ثلاث مجموعات بالرمز :

سـ ∪ ع ∪ صـ

دون ضرورة استخدام الأقواس ، وكذلك الأمر بالنسبة لاجتماع عدة مجموعات .

٣٢ – عملية التقاطع :

لنعد إلى مثال الجمعية الرياضية في إحدى الثانويات العربية الفقرة (٢٨) ولنفرض وجود أعضاء في الجمعية يلعبون كرة اليد وكرة الطاولة معاً . في هذه الحالة نستطيع أن نشكل من هؤلاء الأعضاء فرقة خاصة وتكون هذه الفرقة مجموعة جزئيـة من ك تتكون من العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين سـ و ع معاً أي من العناصر المشتركة بين سـ و ع . وتسمى هذه المجموعة **تقاطع**[١] **المجموعتين** سـ و ع ويرمز لها بالرمز

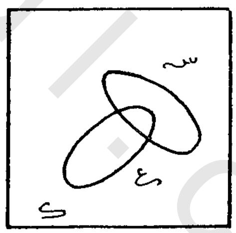
Intersetcion (١)

سـ ∩ ع حيث ∩ رمز **عملية التقاطع** التي انجـزت على المجموعتين سـ و ع ونكتب :

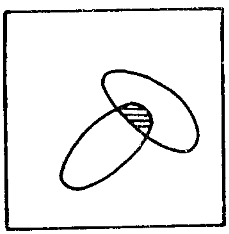
سـ ∩ ع = {س : س ∈ ك . و س يلعب كرة اليد و كرة الطاولة}
ونقرأ الرمز سـ ∩ ع (سـ تقاطع ع) أو (تقاطع سـ و ع) .
وبصورة عامة :

> **تعريف** : تقاطع مجموعتين سـ و ع هو المجموعـة المكونـة من العناصر التي تنتمي إلى كل من المجموعتين سـ و ع أي أن :
>
> سـ ∩ ع = {س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع)}

واذا كان الشكل (٢٥) هو مخطط المجموعتين الجزئيتين سـ و ع من ك . فالشكل (٢٦) يمثل مخطط تقاطعهما سـ ∩ ع وهو المجموعة الجزئية من ك التي يمثلها القسم المظلل الذي نحصل عليه بتظليل القسم المشترك بين مخطط سـ و ع في الشكل (٢٦) .



الشكل (٢٥)



سـ ∩ ع

الشكل (٢٦)

مثال (١) : إذا كان سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}
ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}
فإن سـ ∩ ع = {س : س ∈ سـ و س ∈ ع}
= {٢ ، ٤}

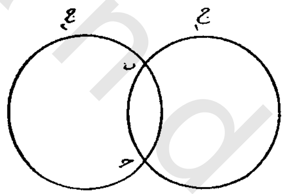
مثال (٢) : إذا كان سـ = {أ ، ب ، حـ ، ء} و ع = {أ ، حـ}
فإن سـ $\cap$ ع = {أ ، حـ}

مثال (٣) : لدينا ح$^{+}$ $\cap$ ح$^{-}$ = {٠}
لأن الصفر هو العنصر المشترك الوحيد بين ح$^{+}$ و ح$^{-}$

مثال (٤) : اذا كان سـ = {$\triangle$ ، $\bigstar$} و ع = {O ، $\square$}
فإن سـ $\cap$ ع = $\emptyset$ وذلك لعدم وجود عناصر مشتركة بين سـ و ع .

مثال (٥) : إذا كانت ج$_{١}$ و ج$_{٢}$ مجموعتي نقاط محيطي دائرتين متقاطعتين في النقطتين ب ، حـ الشكل (٢٧) فيمكننا أن نكتب :

ج$_{١}$ $\cap$ ج$_{٢}$ = {ب ، حـ}



الشكل (٢٧)

٣٣ – ملاحظات :

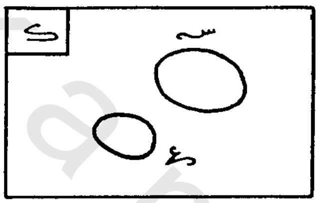
١ – إذا كان س عنصراً لا ينتمي إلى إحدى المجموعتين سـ و ع فإن س لا ينتمي إلى تقاطعهما سـ $\cap$ ع وبالعكس إذا كان س عنصراً لا ينتمي إلى التقاطع سـ $\cap$ ع فإن س لا ينتمي إلى إحدى المجموعتين سـ و ع (قد لاينتمي الى كل منهما) أي أن:

(س $\notin$ سـ $\cap$ ع) $\Leftrightarrow$ ((س $\notin$ سـ) $\vee$ (س $\notin$ ع))

٢ – من الواضح أن **جدول الانتماء لعملية التقاطع** هو :

س	ع	س ∩ ع
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

٣ – إذا كان س ∩ ع = ∅ قيل إن المجموعتين س و ع **منفصلتان** (disjoint ، Séparé) والشكل (٢٨) هو مخطط مجموعتين منفصلتين .



الشكل (٢٨)

٣٤ – تقاطع عدة مجموعات :

بتطبيق تعريف تقاطع مجموعتين بالتدرج يمكننا تعيين تقاطع عدة مجموعات.

مثال : لايجاد تقاطع المجموعات الثلاث :

س = {أ ، ب ، جـ ، د} ، ع = {أ ، ب ، جـ ، هـ}

ص = {أ ، ب ، د ، ط ، هـ}

يمكننا إجراء العملية بشكلين مختلفين هما :

(س ∩ ع) ∩ ص و س ∩ (ع ∩ ص)

ومن أجل الشكل الأول نكتب :

س ∩ ع = {أ ، ب ، جـ ، د} ∩ {أ ، ب ، جـ ، هـ

= {أ ، ب ، جـ}

ثم نعيّن تقاطع هذه المجموعة مع المجموعة الثالثة صـ فيكون تقاطع المجموعات الثلاث هو المجموعة :

(سـ $\cap$ ع) $\cap$ صـ = { أ ، ب ، حـ } $\cap$ { أ ، ب ، ء ، ط ، هـ }
= { أ ، ب }

ومن أجل الشكل الثاني نكتب :

ع $\cap$ صـ = { أ ، ب ، حـ ، هـ } $\cap$ { أ ، ب ، ء ، ط ، هـ }
= { أ ، ب ، هـ }

ومنه سـ $\cap$ (ع $\cap$ صـ) = { أ ، ب ، حـ } $\cap$ { أ ، ب ، هـ }
= { أ ، ب }

وهذه النتيجة تطابق النتيجة التي حصلنا عليها في الشكل الأول ويمكن برهان هذه الخاصة بصورة عامة أي أن :

(سـ $\cap$ ع) $\cap$ صـ = سـ $\cap$ (ع $\cap$ صـ)

وذلك $\forall$ (سـ ، ع ، صـ) .

٣٥ – خواص عملية التقاطع :

يبرهن أن عملية التقاطع تتمتع بالخواص الآتية : (انظر التمارين المحلولة : ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣) .

(١) سـ $\cap$ سـ = سـ (خاصة اللانمو)

(٢) سـ $\cap$ ك = سـ (خاصة العنصر الحيادي) حيث ك المجموعة الكلية .

(٣) سـ $\cap$ ع = ع $\cap$ سـ (الخاصة التبديلية)

(٤) سـ $\cap$ $\varnothing$ = $\varnothing$

(٥) (سـ $\cap$ ع) $\cap$ صـ = سـ $\cap$ (ع $\cap$ صـ)
(خاصة قابلية الدمج)

ومعنى هذه الخاصة أن تقاطع ثلاث مجموعات يتم بالبدء بإيجاد تقاطع مجموعتين متجاورتين ما منها بالترتيب التي أعطيت به هذه المجموعات .
وبناء على هذه الخاصة يرمز لعملية تقاطع ثلاث مجموعات بالرمز :

سـ ∩ ع ∩ صـ

دون ضرورة استخدام الأقواس ، وكذلك الأمر بالنسبة لتقاطع عدة مجموعات .

٣٦ – خاصتا قابلية التوزيع :

١ – إن عملية الاجتماع تقبل التوزيع بالنسبة لعملية التقاطع ، أي أنه إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإن :

سـ ∪ (ع ∩ صـ) = (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ)

٢ – وتقبل عملية التقاطع التوزيع بالنسبة لعملية الاجتماع . أي أن :

سـ ∩ (ع ∪ صـ) = (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ)

انظر التمرين (٨٤) .

٣٧ – عملية الاتمام :

يلاحظ أن كلاً من عمليتي الاجتماع والتقاطع يهدف إلى تشكيل مجموعة جديدة من مجموعتين معلومتين ، ويقال عن مثل هاتين العمليتين **عملية ثنائية** [1] . وهناك بالإضافة إلى عمليتي الاجتماع والتقاطع الثنائيتين عملية أساسية **أحادية** يتم بواسطتها تشكيل مجموعة جديدة من مجموعة معلومة ، وتسمى هذه العملية ، عملية الاتمام .

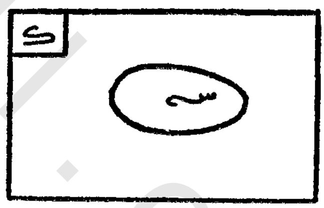
فاذا كانت ك مجموعة كتب مكتبتك و سـ مجموعة جميع الكتب الأجنبية منها ، فبقية كتب المكتبة وهي الكتب غير الأجنبية (العربية)

Operation binaire, Binary operation (١)

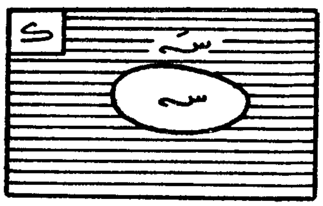
تشكل مجموعة جزئية من ك تسمى **المجموعة المتممة للمجموعة سـ بالنسبة لـ ك** أو اختصاراً **متممة** سـ (Complement) . ويلاحظ أن كل عنصر من عناصر متممة سـ لا ينتمي إلى سـ وبالعكس كل عنصر لا ينتمي إلى متممة سـ هو عنصر من سـ . وبصورة عامة :

> **تعريف** : إذا كانت سـ مجموعة جزئية من مجموعة كليـة ك ، فالمجموعة المكونـة من عناصر ك التي لا تنتمي إلى سـ ، تسمى متممة سـ . ويرمز لها بالرمز سـ' ويكون :
>
> سـ' = { س : س ∉ سـ }
>
> ويقرأ الرمز سـ' (متممة سـ)
>
> وواضح أن : (س ∈ سـ') ⇔ (س ∉ سـ)

وإذا كان الشكل (٢٩) يمثـل المجموعة سـ ، فالقسم المظلـل في الشكل (٣٠) يمثل المجموعة سـ' متممة سـ .



الشكل (٢٩)



(الشكل (٣٠)

مثال (١) : إذا كانت ك مجموعة سكان المعمورة و سـ مجموعة الذكور فان سـ' هي مجموعة الإناث والخناثى .

مثال (٢) : إذا كانت ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

وكانت ع = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

فإن $\underset{\smile}{ع}' = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨\}$ تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى $\underset{\smile}{ع}$.

مثال (٣) : إذا كانت صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة و ط* مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر ، فإن متممة هذه المجموعة بالنسبة لـ صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر أي :

$$ط^{*'} = صـ$$

مثال (٤) : إذا كانت ك مجموعة المثلثات في مستوٍ وكانت :

$$\underset{\smile}{ع} = \{س : س \text{ مثلث قائم}\}$$

$$\text{فإن } \underset{\smile}{ع}' = \{س : س \text{ مثلث غير قائم}\}$$

٣٨ – ملاحظة :

إن جدول الانتماء لمتممة مجموعة هو :

سـ	سـ'
٠	١
١	٠

٣٩ – خواص عملية الاتمام : وتتمتع عملية الإتمام بالخواص التالية :

(١) $ك' = \varnothing$ و $\varnothing' = ك$

(٢) $(سـ')' = سـ$ (خاصة الارتداد Involution)

(٣) $سـ \cap سـ' = \varnothing$

(٤) $سـ \cup سـ' = ك$

(٥) $سـ \subseteq \underset{\smile}{ع} \Leftarrow \underset{\smile}{ع}' \subseteq سـ'$ (انظر التمرين المحلول ٩٢)

(٦) $(سـ \cup \underset{\smile}{ع})' = سـ' \cap \underset{\smile}{ع}'$ (انظر التمرين المحلول ٩٣)

(٧) $(سـ \cap \underset{\smile}{ع})' = سـ' \cup \underset{\smile}{ع}'$

وتسمى الخاصتان (٦) ، (٧) بقانوني دو مورغان De Morgan .

وبالإضافة الى العمليات الأساسية الثلاث السابقة يوجد عمليتان ثنائيتان هامتان على المجموعات هما الفرق بين مجموعتين والفرق التناظري لمجموعتين ولا تعتبر هاتان العمليتان من العمليات الأساسية لامكانية التعبير عنهما بدلالة العمليات الأساسية كما سنرى .

٤٠ – الفرق بين المجموعتين :

إذا كانت **ك** مجموعة طلاب السنة النهائية في الدراسة الثانوية

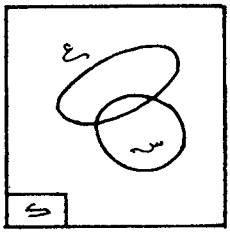
و سـ = { س : س طالب يلعب كرة السلة }

و ع = { س : س طالب يلعب كرة القدم }

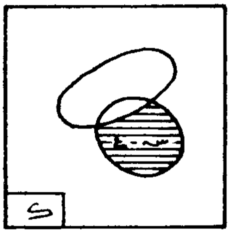
فالمجموعة المكونة من جميع الطلاب الذي يلعبون كرة السلة ولا يلعبون كرة القدم أي المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى ع تسمى **الفرق بين المجموعتين** سـ و ع أو **حاصل طرح المجموعة** ع **من المجموعة** سـ وبصورة عامة :

> **تعريف** : إذا كان سـ و ع جزئين لمجموعة **ك** فان مجموعة العناصر التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى ع تسمى **فرق** سـ **عن** ع ويرمز لها بالرمز سـ – ع أو سـ / ع ويكون :
>
> سـ – ع = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∉ ع) }

وإذا كان الشكل (٣١) يمثل المجموعتين سـ و ع فان الجزء المظلل في الشكل (٣٢) يمثل المجموعة سـ – ع .



الشكل (٣١)



الشكل (٣٢)

مثال (١) : اذا كانت ك مجموعة جميع الأشخاص

و سـ = {س : س شخص نحيف الجسم}

و ع = {س : س شخص طويل القامة}

فان سـ − ع = {س : س شخص نحيف الجسم وغير طويل}

و ع − سـ = {س : س شخص طويل القامة وغير نحيف}

مثال (٢) : إذا كانت سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

و ع = {٣ ، ٥ ، ٧}

فان سـ − ع = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

مثال (٣) : لدينا صـ* = صـ − {٠}

مثال (٤) : إذا كانت ج مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية و ف مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية فان :

ط − ج = ف

٤١ — **ملاحظة** :

إن جدول الانتماء لعملية الفرق هو :

سـ	ع	سـ − ع
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	٠
٠	٠	٠

٤٢ – خواص عملية الفرق : (انظر التمارين المحلولة ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠)

(١) $\text{سـ} - \text{ع} \neq \text{ع} - \text{سـ}$ (غير تبديلية)

(٢) $\text{سـ} - \text{سـ} = \varnothing$

(٣) $\text{سـ} - \varnothing = \text{سـ}$

(٤) $\varnothing - \text{سـ} = \varnothing$

(٥) $\text{سـ} - \text{ك} = \varnothing$

(٦) $\text{سـ} - \text{ع} \subseteq \text{سـ}$

(٧) $\text{سـ} - \text{ع} = \text{سـ} \cap \text{ع}'$

وتوضح الخاصة الأخيرة كيف يتعين حاصل طرح مجموعتين بالاعتماد على عمليتي التقاطع والاتمام .

٤٣ – الفرق التناظري :

لنعد إلى المجموعتين سـ و ع في المثال التمهيدي في الفقرة (٢٨) ونشكل فريقاً كل عضو فيه يلعب كرة اليد ولا يلعب كرة الطاولة أو يلعب كرة الطاولة ولا يلعب كرة السلة فنحصل بذلك على مجموعة من الرياضيين تسمى **الفرق التناظري للمجموعتين** سـ و ع .

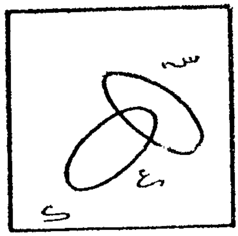
وواضح بالنسبة لهذه المجموعة أن كل عنصر فيها هو عنصر ينتمي إلى سـ ولا ينتمي إلى ع أو ينتمي إلى ع ولا ينتمي إلى سـ . ولا يوجد أي عنصر في المجموعة ينتمي إلى سـ و ع معاً . وبالعكس، إن كل عنصر ينتمي إلى سـ ولا ينتمي إلى ع أو ينتمي إلى ع ولا ينتمي إلى سـ فانه ينتمي إلى الفرق التناظري لـ سـ و ع ومنه :

تعريف : الفرق التناظري لمجموعتين سـ و ع هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى واحدة وواحدة فقط من المجموعتين سـ و ع .

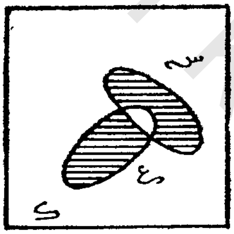
ويرمز لهذه المجموعة بالرمز سـ Δ ع الذي يقرأ (سـ دلتا ع) ويكون :

سـ Δ ع = {س : (س ∈ سـ و س ∉ ع) ∨ (س ∈ ع و س ∉ سـ)}

واذا كان الشكل (٣٣) يمثل المجموعتين سـ و ع فالجزء المظلل في الشكل (٣٤) يمثل الفرق التناظري سـ Δ ع .



الشكل (٣٣)



سـ Δ ع

الشكل (٣٤)

مثال (١) : إذا كان سـ = {أ ، ب ، حـ ، ء} ، ع = {ب ، ء ، هـ}
فإن : سـ Δ ع = {أ ، حـ ، هـ}

مثال (٢) : لدينا : ح$^{+}$ Δ ح$^{-}$ = ح*

مثال (٣) : إذا كانت ج$_{1}$ مجموعة النقاط المحيطية لقرص دائري و ج$_{2}$ مجموعة نقاطه الداخلية فإن :

ج$_{1}$ Δ ج$_{2}$ = ج

حيث ج مجموعة جميع نقاط القرص .

٤ – **ملاحظة** : إن جدول الانتماء لعملية الفرق التناظري هو :

س	ع	س Δ ع
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

٤٥ – خواص عملية الفرق التناظري : تتمتع هذه العملية بالخواص التالية :

(انظر التمارين المحلولة ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨)

(١) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = (\text{س} - \text{ع}) \cup (\text{ع} - \text{س})$

(٢) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \text{ع} \,\Delta\, \text{س}$ (الفرق التناظري عملية تبديلية)

(٣) $\text{س} \,\Delta\, \varnothing = \text{س}$

(٤) $\text{س} \,\Delta\, \text{س} = \varnothing$

(٥) $(\text{س} \,\Delta\, \text{ع}) \,\Delta\, \text{ص} = \text{س} \,\Delta\, (\text{ع} \,\Delta\, \text{ص})$ (الفرق التناظري عملية قابلة للدمج) .

٤٦ – جبر المجموعات :

نلاحظ مما تقدم أن عمليات الاجتماع والتقاطع والمتممة تحقق الخواص الآتية :

١ – خاصتا اللانمو Indempotent :

$$\text{س} \cup \text{س} = \text{س} \quad ، \quad \text{س} \cap \text{س} = \text{س}$$

٢ – خاصتا الدمج :

$$(\text{س} \cup \text{ع}) \cup \text{ص} = \text{س} \cup (\text{ع} \cup \text{ص})$$

$$(\text{س} \cap \text{ع}) \cap \text{ص} = \text{س} \cap (\text{ع} \cap \text{ص})$$

$$\text{س} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{س} \quad ، \quad \text{س} \cap \text{ع} = \text{ع} \cap \text{س}$$

٤ – خاصتا التوزيع :

$$\text{س} \cup (\text{ع} \cap \text{ص}) = (\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{س} \cup \text{ص})$$
$$\text{س} \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ص})$$

٥ – خواص ك و $\varnothing$:

$$\text{س} \cup \varnothing = \text{س} \qquad \text{س} \cap \text{ك} = \text{س}$$
$$\text{س} \cup \text{ك} = \text{ك} \qquad \text{س} \cap \varnothing = \varnothing$$

٦ – خواص المتممة :

$$\text{س} \cup \text{س}' = \text{ك} \qquad \text{س} \cap \text{س}' = \varnothing$$
$$(\text{س}')' = \text{س} \qquad \text{ك}' = \varnothing \text{ ، } \varnothing' = \text{ك}$$

٧ – خاصتا دو مورغان :

$$(\text{س} \cup \text{ع})' = \text{س}' \cap \text{ع}'$$
$$(\text{س} \cap \text{ع})' = \text{س}' \cup \text{ع}'$$

ونلاحظ في هذه الخواص :

أولا : عدم ظهور مفهومي (العنصر) و (الانتماء) .

ثانياً : أن هذه الخواص تكفي لاثبات صحة كثير من العلاقات بين المجموعات كما هي الحال في المثالين التاليين وفي بعض التمارين المحلولة في نهاية هذا الفصل .

وقد أوحت هاتان الملاحظتان بالكشف عن طريقة هامة لدراسة النظريات المتعلقة بالمجموعات ، وهذه الطريقة لا تعتمد على مفهومي (العنصر) و (الانتماء) اللذين كانا حجر الأساس عند عرض المفاهيم

الأساسية في نظرية المجموعات في الفقرات السابقة وإنما تقوم على القبول **بأن** مجموعة الأجزاء ج (ك) لأية مجموعة كلية ك تحقق الفرضيات الآتية :

(١) تخضع لعمليتين ثنائيتين هما الاجتماع والتقاطع تحققان الخواص من ١ إلى ٥ .

(٢) تخضع لعملية أحادية هي المتممة تحقق الخواص : ٦ و ٧ .

(٣) تُعرّف علاقة الاحتواء $\text{س} \subseteq \text{ع}$ بالعلاقة $\text{س} \cap \text{ع} = \text{س}$

وتعتبر هذه الفرضيات **المبادىء الاساسية** التي يجب الاعتماد عليها في اثبات العلاقات المختلفة بين المجموعات . والموضوع الذي يدرس النظريات المتعلقة بالمجموعات حسب هذه الطريقة يسمى (جبر المجموعات) .

مثال (١) : برهن أن : $\text{س} \cap (\text{س}' \cup \text{ع}) = \text{س} \cap \text{ع}$

البرهان :

(١) حسب خاصة التوزيع لدينا :

$$\text{س} \cap (\text{س}' \cup \text{ع}) = (\text{س} \cap \text{س}') \cup (\text{س} \cap \text{ع})$$

(٢) وحسب خاصة المتممة لدينا :

$$\text{س} \cap \text{س}' = \varnothing$$

(٣) بالتعويض في (١) يكون :

$$\text{س} \cap (\text{س}' \cup \text{ع}) = \varnothing \cup (\text{س} \cap \text{ع})$$

(٤) ولكن حسب خواص $\varnothing$:

$$\varnothing \cup (\text{س} \cap \text{ع}) = \text{س} \cap \text{ع}$$

(٥) وبالتعويض في (٣) يكون :

$$\text{س} \cap (\text{س}' \cup \text{ع}) = \text{س} \cap \text{ع}$$

مثال (٢) : برهن أن : $\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ}$

البرهان :

(١) حسب خاصة اللانمو لدينا :

$$\text{سـ} = \text{سـ} \cup \varnothing$$

(٢) بالتعويض في الطرف الأول من العلاقة المفروضة نجد :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = (\text{سـ} \cup \varnothing) \cap (\text{سـ} \cup \text{ع})$$

(٣) وحسب خاصة التوزيع يكون :

$$(\text{سـ} \cup \varnothing) \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ} \cup (\varnothing \cap \text{ع})$$

(٤) وحسب خاصة $\varnothing$ لدينا :

$$\varnothing \cap \text{ع} = \varnothing$$

(٥) بالتعويض في (٣) في (٢) يكون :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ} \cup \varnothing$$

(٦) وحسب خاصة $\varnothing$ يكون :

$$\text{سـ} \cap (\text{سـ} \cup \text{ع}) = \text{سـ}$$

٤٧ – مبدأ الثِنَويَّة (الازدواج) في جبر المجموعات :

إذا استعرضنا المتطابقات المذكورة في مطلع الفقرة السابقة وجدنا أن هذه المتطابقات تظهر أزواجاً أزواجـاً ، وان احدى المتطابقتين في كل زوج تنتج عن الأخرى إما بالمبادلة بين الإشارتين $\cap$ و $\cup$ كما في الخواص ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ أو بالمبـادلة بين الإشارتين $\cap$ و $\cup$ وبـين المجموعتين كـ و $\varnothing$ في حالة ظهورهما في العلاقة كما في الخواص ٥ ، ٦ .

وبصورة عامة نقبل انه اذا استبدلنا بالاشارات $\cup$ $\cap$ $\subseteq$ $\subset$ $\supseteq$

⊃ ∅ ك في متطابقة بين مجموعات ، الاشارات ∩ ∪ ⊇ ⊃ ⊆ ⊂ ك ∅ على الترتيب فاننا نحصل على متطابقة جديدة تسمى **(المطابقة** الثنوية للأولى) أو اختصاراً (ثِنْوية المتطابقة الأولى) .

فثنوية المتطابقة : (س ∩ ك) ∪ (ع ∩ ∅) = س

هي المتطابقة : (س ∪ ∅) ∩ (ع ∪ ك) = س

كذلك نقبل انه اذا استبدلنا بالاشارات ∪ ∩ ⊆ ⊂ ⊇ ⊃ في متطابقة بين مجموعات ، الاشارات ∩ ∪ ⊇ ⊃ ⊆ ⊂ على الترتيب وإذا استبدلنا بكل مجموعة متممتها فاننا نحصل على متطابقة جديدة تسمى كذلك ثنوية المتطابقة الأولى .

فثنوية المتطابقة :

(س ∪ ع) ∩ (س ∪ ع′) = س

هي المتطابقة :

(س′ ∩ ع′) ∪ (س′ ∩ ع) = س′

مثال (١) : برهن أن : س ∪ (س′ ∩ ع) = س ∪ ع

البرهان : ان هذه المتطابقة صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة التي أثبتنا صحتها في المثال (١) في هذه الفقرة .

مثال (٢) : برهن أن : س ∪ (س ∩ ع) = س

البرهان : ان هذه المتطابقة صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة التي أثبتنا صحتها في المثال (٢) في هذه الفقرة .

تمارين محلولة

الاجتماع :

٦٣ – لدينا المجموعات :

أ = {٢، ٤، ٦} ، ب = {٢، ٥} ، حـ = {٢، ٣، ٥، ٦}

أوجد : أ ∪ ب ، أ ∪ حـ ، ب ∪ حـ ، أ ∪ ب ∪ حـ

الحل :

بتطبيق تعريف اجتماع مجموعتين نجد :

أ ∪ ب = {٢، ٤، ٦} ∪ {٢، ٥} = {٢، ٤، ٥، ٦}

أ ∪ حـ = {٢، ٤، ٦} ∪ {٢، ٣، ٥، ٦}

= {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ب ∪ حـ = {٢، ٥} ∪ {٢، ٣، ٥، ٦} = {٢، ٣، ٥، ٦}

وبالتدرج نجد :

أ ∪ ب ∪ حـ = (أ ∪ ب) ∪ حـ

= {٢، ٤، ٥، ٦} ∪ {٢، ٣، ٥، ٦}

= {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٦٤ – إذا كانت س مجموعة قواسم العدد ٢٤ و ع مجموعة قواسم العدد ١٨ فعيّن س ∪ ع .

الحـل :

لدينا : سـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ١٢، ٢٤}

ع = {١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٨}

ومنه سـ ∪ ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٢، ١٨، ٢٤}

٦٥ – لدينا المجموعتان :

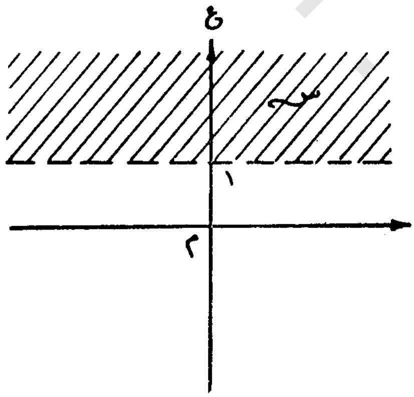
سـ = {(س، ع) : س، ع ∈ ح و ع > ١}

ع = {(س، ع) : س، ع ∈ ح و س > ١}

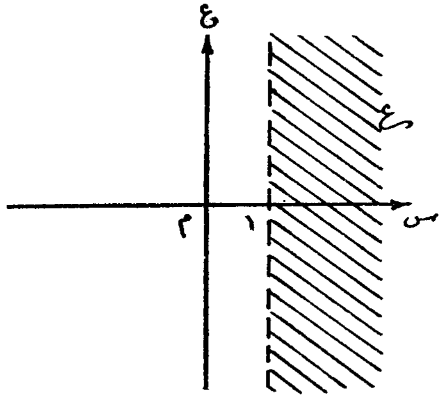
عيّن في مستوي المحورين الاحداثيين سـ ∪ ع. علماً بأن (س، ع) نقطة احداثياها س، ع في هذا المستوي.

الحـل :

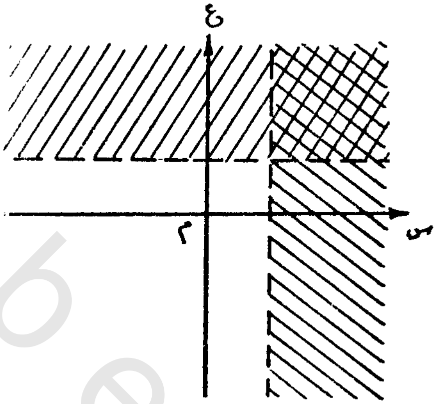
المنطقة المظللة في الشكل (٣٤) تمثل المجموعة سـ . لاحظ أن المستقيم ع = ١ الموازي لمحور السينات رسم متقطعاً لأن نقاطه لا تنتمي الى المجموعة سـ والمنطقة المظللة في الشكل (٣٥) تمثل المجموعة ع والمنطقة المظللة في الشكل (٣٦) تمثل المجموعة سـ ∪ ع .



الشكل (٣٤)

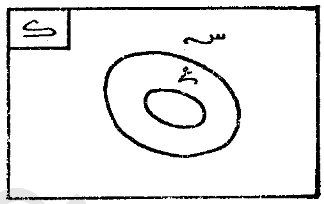


الشكل (٣٥)

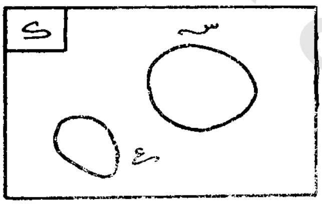


الشكل (٣٦)

٦٦ – في الشكلين (٣٧) (٣٨) ظلل سـ ∪ ع .



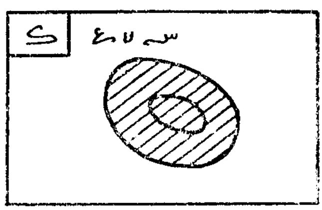
الشكل (٣٧)



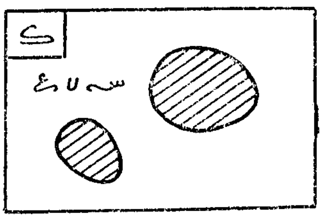
الشكل (٣٨)

الحـل :

نظلل الأقسام المشتركة (إن وجدت) وغير المشتركة بين مخططي سـ وع فنحصل على الشكلين (٣٩) ، (٤٠) .



الشكل (٣٩)



الشكل (٤٠)

٦٧ – من أجل أية مجموعة سـ أثبت أن :

$\text{سـ} \cup \text{سـ} = \text{سـ}$ (خاصة اللاغو)

البرهان :

$\text{سـ} \cup \text{سـ} = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{سـ} \ \text{أو} \ \text{س} \in \text{سـ} \}$

$= \{ \text{س} : \text{س} \in \text{سـ} \} = \text{سـ}$

٦٨ – من أجل أية مجموعة سـ أثبت أن :

$\text{سـ} \cup \varnothing = \text{سـ}$ (خاصة العنصر الحيادي)

البرهان : لدينا :

$\text{سـ} \cup \varnothing = \{ \text{س} : \text{س} \in \text{سـ} \ \text{أو} \ \text{س} \in \varnothing \}$ (تعريف الاجتماع)

$= \{ \text{س} : \text{س} \in \text{سـ} \}$ (**لأن** $\text{س} \notin \varnothing$)

$= \text{سـ}$

٦٩ – إذا كانت سـ و ع مجموعتين فأثبت أن :

$\text{سـ} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{سـ}$ (الخاصة التبديلية)

البرهان : طريقة أولى : لدينا :

$\text{سـ} \cup \text{ع} = \{ \text{س} : (\text{س} \in \text{سـ}) \vee (\text{س} \in \text{ع}) \}$ (تعريف الاجتماع)

$= \{ \text{س} : (\text{س} \in \text{ع}) \vee (\text{س} \in \text{سـ}) \}$ (خاصة أو التبديلية)

$= \text{ع} \cup \text{سـ}$ (تعريف الاجتماع)

طريقة ثانية : نشكّل جدول الانتماء للاجتماعين $\text{سـ} \cup \text{ع}$ و $\text{ع} \cup \text{سـ}$ في جدول واحد هو الجدول :

سـ	ع	$\text{سـ} \cup \text{ع}$	$\text{ع} \cup \text{سـ}$
١	١	١	١
١	٠	١	١
٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠

ونستنتج بملاحظة العمودين الأخيرين في هـــذا الجدول تحقق شرط تساوي المجموعتين $\text{سـ} \cup \text{ع}$ و $\text{ع} \cup \text{سـ}$ أي أن :

$$\text{سـ} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{سـ}$$

٧٠ – لتكن ك مجموعة كلية ، فأثبت من أجـل أي جزء سـ من ك أن :

$$\text{سـ} \cup \text{ك} = \text{ك}$$

البرهان : لدينا :

$\text{سـ} \cup \text{ك} = \{\text{س} : (\text{س} \in \text{سـ}) \vee (\text{س} \in \text{ك})\}$ (تعريف الاجتماع)

وبما أن $\text{سـ} \subseteq \text{ك}$ اذن : $\text{س} \in \text{سـ} \Rightarrow \text{س} \in \text{ك}$

وعليه : $\text{سـ} \cup \text{ك} = \{\text{س} : \text{س} \in \text{ك}\} = \text{ك}$

٧١ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

$(\text{سـ} \cup \text{ع}) \cup \text{صـ} = \text{سـ} \cup (\text{ع} \cup \text{صـ})$ (خاصة قابلية الدمج لعملية الاجتماع)

البرهان : **طريقة أولى** : لدينا : $(\text{سـ} \cup \text{ع}) \cup \text{صـ}$

$= \{\text{س} : (\text{س} \in \text{سـ} \cup \text{ع}) \vee (\text{س} \in \text{صـ})\}$ (تعريف الاجتماع)

$= \{\text{س} : ((\text{س} \in \text{سـ}) \vee (\text{س} \in \text{ع})) \vee (\text{س} \in \text{صـ})\}$ (تعريف الاجتماع)

$= \{\text{س} : (\text{س} \in \text{سـ}) \vee ((\text{س} \in \text{ع}) \vee (\text{س} \in \text{صـ}))\}$

(خاصة قابلية الدمج للربط بـ $\vee$)

$= \{\text{س} : (\text{س} \in \text{سـ}) \vee (\text{س} \in \text{ع} \cup \text{صـ})\}$ (تعريف الاجتماع)

$= \text{سـ} \cup (\text{ع} \cup \text{صـ})$ (تعريف الاجتماع)

طريقة ثانية : باستخدام جدول الانتماء الآتي :

سـ	ع	صـ	سـ ∪ ع	ع ∪ صـ	(سـ ∪ ع) ∪ صـ	سـ ∪ (ع ∪ صـ)
١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	١	١	١
١	٠	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١
١	٠	٠	١	٠	١	١
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

وبملاحظة العمودين الأخيرين نستنتج صحة المساواة .

٧٢ – اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

١ – سـ ⊆ سـ ∪ ع   ٢ – ع ⊆ سـ ∪ ع

البرهان :

١ – من أجل أي عنصر س من سـ لدينا :

س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∪ ع   (تعريف الاجتماع)

ومنه   سـ ⊆ سـ ∪ ع   (تعريف الاحتواء)

٢ – وبالمثل نجد من أجل أي عنصر س من ع لدينا :

س ∈ ع ⇐ س ∈ سـ ∪ ع   (تعريف الاجتماع)

ومنه   ع ⊆ سـ ∪ ع   (تعريف الاحتواء)

٧٣ – لتكن سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات فإذا كان :

سـ ⊆ صـ و ع ⊆ صـ فأثبت أن :

سـ ∪ ع ⊆ صـ

البرهان :

من أجل كل عنصر س ∈ سـ ∪ عـ يكون س ∈ سـ أو س ∈ عـ (تعريف الاجتماع) .

وفي كلتا الحالتين يكون س ∈ صـ وذلك لأن سـ ⊆ صـ و عـ ⊆ صـ (فرضاً) . وهكذا نجد أن :

س ∈ سـ ∪ عـ ⇐ س ∈ صـ

ومعنى هذا أن سـ ∪ عـ ⊆ صـ (تعريف الاحتواء)

٧٤ – اذا كانت سـ و عـ مجموعتين ما فأثبت أن :

سـ ⊆ عـ ⇔ سـ ∪ عـ = عـ

البرهان : طريقة أولى :

أولا : لنفرض أن سـ ⊆ عـ ولنبرهن أن سـ ∪ عـ = عـ .

في الحقيقة ، لدينا :

سـ ∪ عـ = { س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ عـ) } (تعريف الاجتماع)

وبملاحظة أن س ∈ سـ ⇐ س ∈ عـ لأن سـ ⊆ عـ (فرضاً)

يكون لدينا : سـ ∪ عـ = { س : س ∈ عـ } = عـ

ثانياً : لنفرض بالعكس أن سـ ∪ عـ = عـ ولنثبت أن سـ ⊆ عـ

في الحقيقة ، من أجل كل عنصر س ∈ سـ لدينا :

س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∪ عـ (تعريف الاجتماع)

وبما أن س ∪ عـ = عـ

إذن س ∈ سـ ⇐ س ∈ عـ

ومنه فان سـ ⊆ عـ (تعريف الاحتواء)

طريقة ثانية :

أولاً : لنفرض أن سـ ⊆ ع ولنثبت أن سـ ∪ ع = ع

في الحقيقة ، لدينا سـ ⊆ ع (فرضاً)

ولدينا ع ⊆ ع

ومن هاتين العبارتين نجد : سـ ∪ ع ⊆ ع (التمرين ٧٣)

ومن المعلوم أن : ع ⊆ سـ ∪ ع (التمرين ٧٢)

ومن العبارتين الأخيرتين يكون سـ ∪ ع = ع

ثانياً : لنفرض أن سـ ∪ ع = ع ولنثبت أن سـ ⊆ ع

في الحقيقة ، بما أن سـ ∪ ع = ع (فرضاً)

إذن سـ ∪ ع ⊆ ع

ولكن سـ ⊆ سـ ∪ ع (التمرين ٧٢)

ومن العبارتين الأخيرتين نجد سـ ⊆ ع (التمرين ٣٦)

التقاطع :

٧٥ – لدينا المجموعات :

أ = {١، ٢، ٤، ٦} ، ب = {٤، ٦، ٨} ، جـ = {٨، ١٠}

عيّن المجموعات : أ ∩ ب ، ب ∩ جـ ، أ ∩ جـ ، أ ∩ ب ∩ جـ

الحل :

بتطبيق تعريف تقاطع المجموعات نجد :

أ ∩ ب = {١، ٢، ٤، ٦} ∩ {٤، ٦، ٨} = {٤، ٦}

ب ∩ جـ = {٤، ٦، ٨} ∩ {٨، ١٠} = {٨}

أ ∩ جـ = {١، ٢، ٤، ٦} ∩ {٨، ١٠} = { }

أ ∩ ب ∩ جـ = (أ ∩ ب) ∩ جـ = {٤، ٦} ∩ {٨، ١٠} = { }

٧٦ – إذا كانت سـ مجموعة قواسم العدد ١٢ و ع مجموعة قواسم العدد ١٨ .

١ – ماذا تمثل المجموعة سـ ∩ ع

٢ – عيّن المجموعة سـ ∩ ع

الحل :

١ – بما أن سـ ∩ ع = مجموعة العناصر المشتركة بين سـ و ع فالمجموعة سـ ∩ ع هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين ١٢، ١٨

٢ – لدينا سـ = { ١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢ }

ع = { ١، ٢، ٣، ٦، ٩، ١٨ }

ومنه سـ ∩ ع = { ١، ٢، ٣، ٦ }

٧٧ – لتكن ك مجموعة جميع المثلثات في مستوٍ و سـ مجموعة جميع المثلثات المتساوية الساقين منها و ع مجموعة جميع المثلثات القائمة منها.

١ – عيّن المجموعة سـ ∩ ع

٢ – مثّل باستخدام مخططات فين المجموعات :

ك ، سـ ، ع ، سـ ∩ ع

الحل :

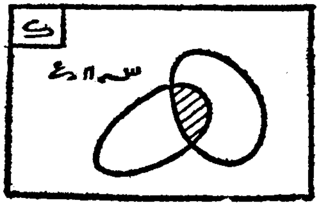
١ – لدينا : سـ = { س : س مثلث متساوي الساقين }

و ع = { س : س مثلث قائم الزاوية }

فالمجموعة سـ ∩ ع تتكون من المثلثات التي تنتمي إلى المجموعتين سـ و ع معاً ، فكل مثلث من هذه المثلثات يجب أن يكون متساوي الساقين وقائماً في آن واحد ومنه فإن :

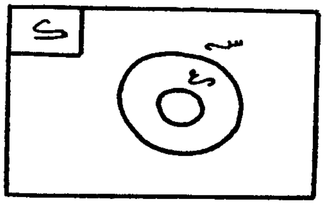
سـ ∩ ع = { س : س مثلث قائم متساوي الساقين }

٢ – بما أن المجموعة س $\cap$ ع ليست خالية كما رأينا فالمخطط المطلوب هو كما في الشكل (٤١) .

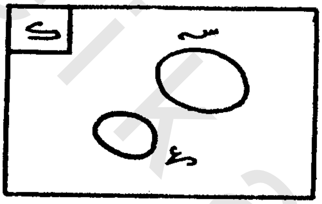


الشكل (٤١)

٧٨ – ظلل س $\cap$ ع في الشكلين (٤٢) (٤٣) .



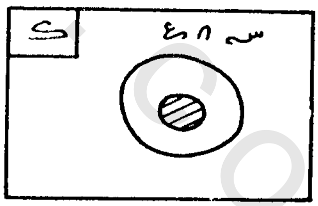
الشكل (٤٢)



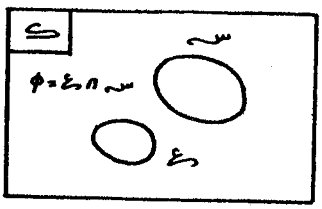
الشكل (٤٣)

الحـــل :

في الشكل (٤٢) مخطط ع يمثل القسم المشترك بين س و ع ، وبتظليل مخطط ع نحصل على مخطط س $\cap$ ع كما الشكل (٤٤) . أما في الشكل (٤٥) فلا يمكن تظليل س $\cap$ ع لأن س و ع



الشكل (٤٤)



الشكل (٤٥)

منفصلتان ، وبالتالي فان س $\cap$ ع = $\varnothing$ ونكتفي بالاشارة إلى ذلك على الشكل (٤٥) .

٧٩ – من أجل كل مجموعة سـ أثبت أن :

سـ ∩ سـ = سـ (خاصة اللانمو)

البرهان : لدينا :

سـ ∩ سـ = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ سـ) } (تعريف التقاطع)

= { س : س ∈ سـ } = سـ (خاصة ٣ صفحة ٢٠)

٨٠ – من أجل كل جزء سـ من مجموعة كلية ك أثبت :

سـ ∩ ك = سـ (خاصة العنصر الحيادي)

البرهان : لدينا :

سـ ∩ ك = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ك) } (تعريف التقاطع)

وبما أن سـ ⊆ ك فان (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ك) ⇔ س ∈ سـ

وعليه فان سـ ∩ ك = { س : س ∈ سـ } = سـ

٨١ – من أجل أي مجموعتين سـ و ع أثبت أن :

سـ ∩ ع = ع ∩ سـ (الخاصة التبديلية)

البرهان : **طريقة أولى** : لدينا :

سـ ∩ ع = { س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع) } (تعريف التقاطع)

أو سـ ∩ ع = { س : (س ∈ ع) ∧ (س ∈ سـ) }

(الخاصة التبديلية للربط بـ ∧)

ومنه سـ ∩ ع = ع ∩ سـ

طريقة ثانية : نشكل جدول الانتماء للتقاطعين سـ ∩ ع و ع ∩ سـ في جدول واحد هو الجدول :

س~	ع~	س~ ∩ ع~	ع~ ∩ س~
١	١	١	١
١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤

١ ، ٢	٣	٤
جدول المجموعتين س~ ، ع~	جدول للتقاطع بناءً على ١ و ٢	جدول التقاطع من ٢ و ١

وبالتدقيق في العمودين ٣ ، ٤ في هذا الجدول نستنتج تساوي المجموعتين س~ ∩ ع~ و ع~ ∩ س~ أي أن : س~ ∩ ع~ = ع~ ∩ س~

٨٢ – إذا كانت س~ مجموعة ما فأثبت أن :

س~ ∩ ∅ = ∅

البرهان : لدينا :

س~ ∩ ∅ = { س : (س ∈ س~) ∧ (س ∈ ∅) }

وبما أن ∅ هي المجموعة الخالية فليس بينها وبين س~ أي عنصر مشترك أي أن مجموعة العناصر المشتركة هي المجموعة الخالية أي أن :

س~ ∩ ∅ = ∅

٨٣ – إذا كانت س~ ، ع~ ، ص~ فأثبت أن :

(س~ ∩ ع~) ∩ ص~ = س~ ∩ (ع~ ∩ ص~) (خاصة قابلية الدمج)

البرهان : لدينا : (سـ ∩ ع) ∩ صـ

= { (س ∈ سـ ∩ ع) ∧ (س ∈ صـ) } (تعريف التقاطع)

= { ((س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع)) ∧ (س ∈ صـ) } (تعريف التقاطع)

= { (س ∈ سـ) ∧ ((س ∈ ع) ∧ (س ∈ صـ)) }
(قابلية الدمج في عملية الربط بـ ∧)

= { (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع ∩ صـ) } (تعريف التقاطع)

= سـ ∩ (ع ∩ صـ) (تعريف التقاطع)

ملاحظة :

يمكن استخدام جدول الانتماء لاثبات صحة الخاصة السابقة كما في التمرين المحلول رقم ٧١ (حاول ذلك بنفسك)

٨٤ – إذا كانت سـ ، ع ، صـ ثلاث مجموعات فأثبت أن :

(أ) سـ ∪ (ع ∩ صـ) = (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ)
(خاصة قابلية توزيع الاجتماع على التقاطع)

(ب) سـ ∩ (ع ∪ صـ) = (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ)
(خاصة قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

(حـ) تحقق من صحة الخاصيتين (أ) ، (ب) من اجل المجموعات:

سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، صـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

الحل :

(أ) لدينا : سـ ∪ (ع ∩ صـ)

= { س : (س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع ∩ صـ) }. (تعريف الاجتماع)

= {س : (س ∈ سـ) ∨ ((س ∈ ع) ∧ (س ∈ صـ))} (تعريف التقاطع)

= {س : [(س ∈ سـ) ∨ (س ∈ ع)] ∧
[(س ∈ سـ) ∨ (س ∈ صـ)]

(قابلية توزيع الربط بـ ∨ على الربط بـ ∧)

= {س : (س ∈ سـ ∪ ع) ∧ (س ∈ سـ ∪ صـ)} (تعريف الاجتماع)

= {س ∈ (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ)} (تعريف التقاطع)

= (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ)

(ب) لدينا : سـ ∩ (ع ∪ صـ)

= {س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع ∪ صـ)} (تعريف التقاطع)

= {س : (س ∈ سـ) ∧ ((س ∈ ع) ∨ (س ∈ صـ))} (تعريف الاجتماع)

= {س : [(س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع)] ∨
[(س ∈ سـ) ∧ (س ∈ صـ)

(قابلية توزيع الربط بـ ∧ على الربط بـ ∨)

= {س : (س ∈ سـ ∩ ع) ∨ (س ∈ سـ ∩ صـ)} (تعريف التقاطع)

= {س : س ∈ (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ)} (تعريف الاجتماع)

= (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ)

(حـ) من اجل تحقق الخاصة الأولى لدينا :

ع ∩ صـ = {٣، ٤، ٥} ∩ {٤، ٥، ٦}
= {٤، ٥}

و سـ ∪ (ع ∩ صـ) = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥}
= {٢، ٣، ٤، ٥} (١)

ولدينا سـ ∪ ع = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥، ٦} = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

و سـ ∪ صـ = {٢، ٣، ٤} ∪ {٤، ٥} = {٢، ٣، ٤، ٥}

ومنه (سـ ∪ ع) ∩ (سـ ∪ صـ) = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ∩ {٢، ٣، ٤، ٥}

= {٢، ٣، ٤، ٥} (٢)

وبمقارنة (١) ، (٢) نجد أن الخاصة الأولى محققة .

ومن اجل تحقق الخاصة الثانية لدينا :

ع ∪ صـ = {٣، ٤، ٥} ∪ {٤، ٥، ٦} = {٣، ٤، ٥، ٦}

ومنه سـ ∩ (ع ∪ صـ) = {٢، ٣، ٤} ∩ {٣، ٤، ٥، ٦}

= {٣، ٤} (١)′

ولدينا أيضاً : سـ ∩ ع = {٢، ٣، ٤} ∩ {٣، ٤، ٥} = {٣، ٤}

و سـ ∩ صـ = {٢، ٣، ٤} ∩ {٤، ٥، ٦} = {٤}

ومنه (سـ ∩ ع) ∪ (سـ ∩ صـ) = {٣، ٤} ∪ {٤} = {٣، ٤} (٢)′

وبمقارنة (١)′ ، (٢)′ نجد أن الخاصة الثانية محققة .

٨٥ – اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

(١) سـ ∩ ع ⊆ سـ (٢) سـ ∩ ع ⊆ ع

البرهان :

من أجل أي عنصر س ∈ سـ ∩ ع لدينا :

س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ سـ و س ∈ ع

وينتج من ذلك نتيجتان :

(١) س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ سـ وهذا يكافىء :

سـ ∩ ع ⊆ سـ وهو المطلوب الأول

(٢) س ∈ سـ ∩ ع ⇐ س ∈ ع   وهذا يكافيء :

سـ ∩ ع ⊆ ع   وهو المطلوب الثاني

٨٦ - إذا كانت سـ و ع و صـ ثلاث مجموعات وكان :

صـ ⊆ سـ و صـ ⊆ ع فأثبت أن : صـ ⊆ سـ ∩ ع

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ صـ لدينا :

س ∈ صـ ⇐ س ∈ سـ و س ∈ ع

لأن صـ ⊆ سـ و صـ ⊆ ع فرضاً

ومنه س ∈ صـ ⇐ س ∈ سـ ∩ ع (تعريف التقاطع)

ومنه صـ ⊆ سـ ∩ ع (تعريف الاحتواء)

٨٧ - اذا كانت سـ و ع مجموعتين ما فأثبت أن :

سـ ⊆ ع ⇔ سـ ∩ ع = سـ

البرهان : طريقة أولى :

أولاً : لنفرض أن سـ ⊆ ع ولنثبت أن سـ ∩ ع = سـ

لدينا سـ ∩ ع ⊆ سـ (١)   (التمرين ٨٥)

وبما أن سـ ⊆ ع فانه :

∀ س ∈ سـ ⇐ (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع) ⇐ س ∈ سـ ∩ ع

ومنه فإن سـ ⊆ سـ ∩ ع (٢)

ومن (١) و (٢) ينتج أن سـ ∩ ع = سـ

ثانياً : لنفرض بالعكس أن سـ ∩ ع = سـ ولنبرهن أن سـ ⊆ ع

في الحقيقة ، من أجل كل عنصر س ∈ سـ لدينا :

س ∈ سـ ⇐ س ∈ سـ ∩ ع

وذلك لأن سـ = سـ ∩ ع (فرضاً)

ومنه س ∈ سـ ⇒ س ∈ سـ و س ∈ ع (تعريف التقاطع)

ومنه س ∈ سـ ⇒ س ∈ ع

ومنه سـ ⊆ ع (تعريف الاحتواء)

طريقة ثانية :

أولاً : لنفرض أن سـ ⊆ ع ولنثبت أن سـ ∩ ع = سـ

في الحقيقة ، لدينا سـ ⊆ ع (فرضاً)

و سـ ⊆ سـ

ومن هاتين العبارتين نجد : سـ ⊆ سـ ∩ ع (التمرين ٨٦)

ولكن من المعلوم أن : سـ ∩ ع ⊆ سـ (التمرين ٨٥)

ومن هاتين العبارتين نجد : سـ ∩ ع = سـ

ثانياً : لنفرض أن سـ ∩ ع = سـ ولنبرهن أن سـ ⊆ ع

في الحقيقة ، بما أن سـ ∩ ع = سـ

اذن سـ ⊆ سـ ∩ ع

ولكن سـ ∩ ع ⊆ ع (التمرين ٨٥)

ومن العبارتين الأخيرتين نستنتج أن :

سـ ⊆ ع (التمرين ٣٦)

٨٨ – أثبت أن :

ع ∪ سـ ⊆ صـ ∪ سـ (١)
و ع ∩ سـ ⊆ صـ ∩ سـ (٢) } ⇐ ع ⊆ صـ

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ ع لدينا :

س ∈ ع ⇐ س ∈ ع ∪ سـ (تعريف الاجتماع)

⇐ س ∈ صـ ∪ سـ (اعتماداً على (١))

ولكن :

س ∈ صـ ∪ سـ ⇐ { س ∈ صـ فقط
أو س ∈ صـ و سـ ⇐ س ∈ صـ
أو س ∈ سـ }

ومن الحالة الأخيرة يكون س ∈ ع ∩ سـ لأن س ∈ ع أصلاً ومنه ينتج س ∈ صـ ∩ سـ (اعتماداً على (٢)) وهذا يؤدي الى س ∈ صـ . وفي جميع الحالات نلاحظ أن :

س ∈ ع ⇐ س ∈ صـ

أي أن ع ⊆ صـ

المتممة :

٨٩ – أوجد سـَ في الحالات الآتية :

(١) ك = {أ ، ب ، حـ ، د} و سـ = {ب ، حـ}
(٢) ك = {٢ ، ٤ ، ٦} و سـ = {٤}
(٣) ك = مجموعة الأشكال الرباعية في مستوٍ
سـ = مجموعة المربعات في هذا المستوي .
(٤) ك = مجموعة الأعداد الطبيعية
سـ = {س : س = ٢ ب و ب ∈ ط}

الحل :

حسب تعريف المتممة يكون :

سـَ = {س : (س ∈ ك) ∧ (س ∉ سـ)}

وعليه نجد :

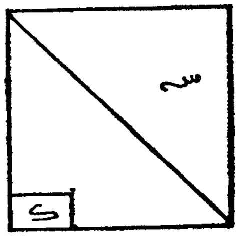
(١) سـَ = {أ ، د}

(٢) سَ = {٢ ، ٦}

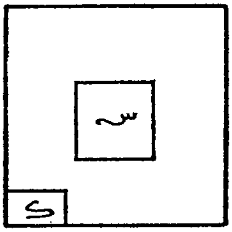
(٣) سَ = {س : س شكل رباعي ليس مربعاً}

(٤) سَ = {س : س = ٢ح + ١ ، ح ∈ ط}

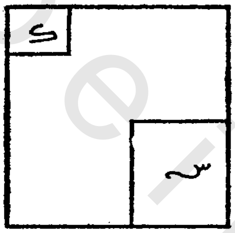
٩٠ – ظلل سَ في الأشكال الآتية :



الشكل (٤٦)



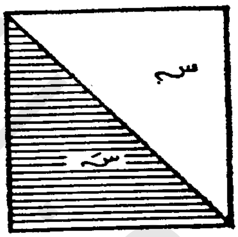
الشكل (٤٧)



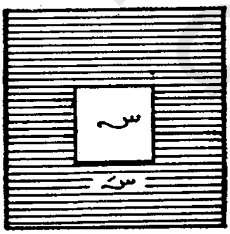
الشكل (٤٨)

الحل :

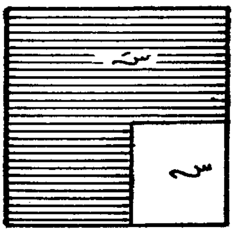
نظلل الجزء الباقي من ك فنحصل على الأشكال :



الشكل (٤٩)



الشكل (٥٠)



الشكل (٥١)

٩١ – إذا كانت ك = {أ ، ب ، ح} فأوجد متممات جميع أجزاء ك .

الحل :

إن مجموعة أجزاء ك هي :

ج (ك) = { ∅ ، ك ، {أ} ، {ب} ، {ح} ، {أ ، ب} ، {أ ، ح} ، {ب ، ح} }

ومتممات هذه الأجزاء هي :

∅ = ك ، ك′ = ∅

{أ}′ = {ب ، ح} ، {ب}′ = {أ ، ح} ،

{ح}′ = {أ ، ب}

{أ ، ب}′ = {ح} ، {أ ، ح}′ = {ب} ، {ب ، ح}′ = {أ}

٩٢ – أثبت أن : سـ ⊆ ع ⇐ ع′ ⊆ سـ′

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ ع′ لدينا :

س ∈ ع′ ⇐ س ∉ ع (١) (تعريف المتممة)

وبما أن سـ ⊆ ع فرضاً فإن س ∈ ع′ ⇐ س ∉ سـ

ومنه ينتج أن (١) تصبح :

س ∈ ع′ ⇐ س ∉ سـ

أو س ∈ ع′ ⇐ س ∈ سـ′ (تعريف المتممة)

ومنه ع′ ⊆ سـ′

٩٣ – إذا كان سـ و ع جزئين من مجموعة كلية ك فأثبت أن :

(أ) (سـ ∪ ع)′ = سـ′ ∩ ع′

(ب) (سـ ∩ ع)′ = سـ′ ∪ ع′ (قانون دو مورغان)

البرهان :

(أ) لنبرهن أولاً أن (سـ ∪ ع)′ ⊆ سـ′ ∩ ع′ (١)

في الحقيقة ، لدينا :

س ∈ (سـ ∪ ع)′ ⇐ (س ∈ ك) ∧ (س ∉ سـ ∪ ع) (تعريف المتممة)

$\Leftarrow$ (س $\notin$ سـ) $\wedge$ (س $\notin$ ع) (الفقرة ٢٩)
$\Leftarrow$ (س $\in$ سـ$'$) $\wedge$ (س $\in$ ع$'$) (تعريف المتممة)
$\Leftarrow$ س $\in$ سـ$'$ $\cap$ ع$'$

ثم لنبرهن أن : سـ$'$ $\cap$ ع$'$ $\subseteq$ (سـ $\cup$ ع)$'$ (٢)

في الحقيقة لدينا :

س $\in$ سـ$'$ $\cap$ ع$'$ $\Leftarrow$ (س $\in$ سـ$'$) $\wedge$ (س $\in$ ع$'$) (تعريف التقاطع)
$\Leftarrow$ (س $\notin$ سـ) $\wedge$ (س $\notin$ ع)
$\Leftarrow$ س $\notin$ سـ $\cup$ ع (الفقرة (٢٩))
$\Leftarrow$ س $\in$ (سـ $\cup$ ع)$'$ (تعريف المتممة)

ومن (١) و (٢) تحقق المساواة (أ) .

(ب) نتبع الاسلوب ذاته الذي استعملناه لإثبات (أ) .

٩٤ – إذا كانت ك = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} و أ = {٣ ، ٥ ، ٧}
و ب = {١ ، ٥ ، ٩} أوجد :

(١) أ$'$ (٢) ب$'$ (٣) أ$'$ $\cup$ ب$'$ (٤) أ$'$ $\cap$ ب$'$
(٥) (أ $\cup$ ب)$'$ (٦) (أ $\cap$ ب)$'$.

ماذا تستنتج من مقارنة نتيجتي (٣) و (٦) ومن مقارنة نتيجتي (٤) و (٥) .

الحل :

(١) أ$'$ تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى أ أي أ$'$ = {١ ، ٩}
(٢) ب$'$ تتكون من عناصر ك التي لا تنتمي إلى ب أي ب$'$ = {٣ ، ٧}
(٣) أ$'$ $\cup$ ب$'$ = {١ ، ٩ ، ٣ ، ٧}
(٤) أ$'$ $\cap$ ب$'$ = $\varnothing$
(٥) أ $\cup$ ب = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ١ ، ٩} ومنه (أ $\cup$ ب)$'$ = $\varnothing$

(٦) ﻡ ∩ ب = {٥} ومنه (ﻡ ∩ ب)' = {١، ٣، ٩، ٧}

بمقارنة نتيجتي (٣) و (٦) نجد : (ﻡ ∩ ب)' = ﻡ' ∪ ب'

وبمقارنة نتيجتي (٤) و (٥) نجد : (ﻡ ∪ ب)' = ﻡ' ∩ ب' أي أن المجموعتين ﻡ و ب تحققان قانوني دو مورغان .

٩٥ – أثبت أن : سـ ∩ (سـ ∪ ع)' = ∅ .

البرهان : لدينا على التوالي :

سـ ∩ (سـ ∪ ع)' = سـ ∩ (سـ' ∩ ع') (قانون دو مورغان)

= (سـ ∩ سـ') ∩ ع' (خاصة الدمج)

= ∅ ∩ ع' (الخاصة ٣ الفقرة ٣٩)

= ∅ (الخاصة ٤ الفقرة ٣٥)

٩٦ – إذا كان سـ ∩ ع = ∅ فأثبت أن سـ ⊆ ع' .

البرهان : من أجل كل عنصر س ∈ سـ

لدينا : س ∈ سـ ⇐ س ∉ ع لأن سـ ∩ ع = ∅ فرضاً

ولكن : س ∉ ع ⇔ س ∈ ع'

وعليه فإن : س ∈ سـ ⇐ س ∈ ع'

وهذا يكافىء : سـ ⊆ ع'

الفرق :

٩٧ – عيّن المجموعتين ﻡ – ب و ب – ﻡ في كل من الحالات الآتية

(١) ﻡ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ب = {٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

(٢) ﻡ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، ب = {٣، ٤}

(٣) $\text{أ} = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨\}$ ‏ $\text{ب} = \{٢\}$

(٤) $\text{أ} = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨\}$ ‏ $\text{ب} = \{١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩\}$

(٥) $\text{أ} = \{٢ ، ٤\}$ ‏ $\text{ب} = \{\ \}$

(٦) أ = ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) ب = ع (مجموعة الأعداد العادية)

الحل :

إن المجموعة أ ــ ب هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب .

وإن المجموعة ب ــ أ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى ب ولا تنتمي إلى أ . وعلى ذلك نجد :

(١) أ ــ ب $= \{١ ، ٢ ، ٣\}$ ، ب ــ أ $= \{٧ ، ٨ ، ٩\}$

(٢) أ ــ ب $= \{١ ، ٢ ، ٥\}$ ، ب ــ أ $= \varnothing$

(٣) أ ــ ب $= \{٤ ، ٦ ، ٨\}$ ، ب ــ أ $= \varnothing$

(٤) أ ــ ب $= \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨\}$ ، ب ــ أ $= \{١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩\}$

(٥) أ ــ ب $= \{٢ ، ٤\}$ ، ب ــ أ $= \{\ \}$

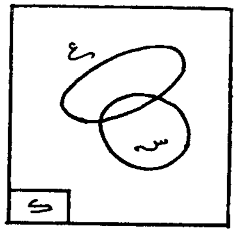
(٦) أ ــ ب = ح ــ ع = مجموعة الأعداد غير العادية

ب ــ أ = ع ــ ح = $\varnothing$ لعدم وجود عدد عادي غير حقيقي .

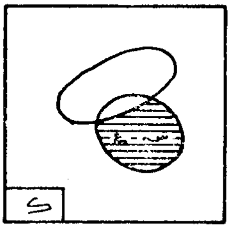
٩٨ ــ بيّن باستخدام المخططات أن سـ ــ ع $\neq$ ع ــ سـ بصورة عامة . هل يساعد التمرين السابق على توضيح هذه الخاصة .

الحل :

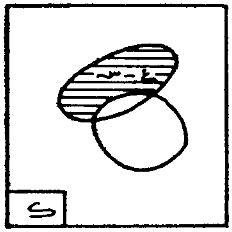
الشكل (٥٢) يمثل المجموعتين سـ و ع والشكل (٥٣) يمثل المجموعة سـ ــ ع والشكل (٥٤) يمثل المجموعة ع ــ سـ ويتضح من الشكلين الأخيرين أن سـ ــ ع $\neq$ ع ــ سـ



الشكل (٥٢)



الشكل (٥٣)



الشكل (٥٤)

وباستعراض نتائج التمرين السابق نلاحظ أيضاً أن أ − ب ≠ ب − أ في جميع الحالات .

٩٩ – اذا كان سـ و ع جزئين من مجموعة ك فأثبت أن :

سـ − ع = سـ ∩ ع′

البرهان :

لدينا : سـ − ع = {س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∉ ع)}
(تعريف)

ولكن : س ∉ ع ⟺ س ∈ ع′

ومنه : سـ − ع = {س : (س ∈ سـ) ∧ (س ∈ ع′)}

اذن : سـ − ع = سـ ∩ ع′ (تعريف التقاطع)

١٠٠ – من أجل أية مجموعة جزئية سـ لمجموعة ك أثبت أن :

(١) سـ − سـ = ∅ (٢) سـ − ∅ = سـ

(٣) ∅ − سـ = ∅ (٤) سـ − ك = ∅

(٥) سـ − ع ⊇ سـ (حيث ع ⊇ ك)

البرهان :

(١) لدينا سـ − سـ = سـ ∩ سـ′ (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

ومنه سـ − سـ = ∅ (خاصة ٣ ، فقرة ٣٩)

(٢) لدينا سـ − ∅ = سـ ∩ ∅′ (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= سـ ∩ ك (خاصة ١ ، فقرة ٣٩)

= سـ (خاصة ٢ ، فقرة ٣٥)

(٣) لدينا ∅ − سـ = ∅ ∩ سـ′ (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= ∅ (خاصة ٤ ، فقرة ٣٥)

(٤) لدينا سـ − ك = سـ ∩ ك′ (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

= سـ ∩ ∅ (خاصة ١ ، فقرة ٣٩)

= ∅ (خاصة ٤ ، فقرة ٣٥)

(٥) لدينا سـ − ع = سـ ∩ ع′ (خاصة ٧ ، فقرة ٤٢)

ولكن سـ ∩ ع′ ⊇ سـ (التمرين ٨٥)

ومنه سـ − ع ⊇ سـ

١٠ - أثبت أن سـ ∪ ع = (سـ − ع) ∪ ع

البرهان :

لدينا (سـ − ع) ∪ ع = (سـ ∩ ع′) ∪ ع (الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

= (سـ ∪ ع) ∩ (ع′ ∪ ع) (الخاصة التوزيعية)

= (سـ ∪ ع) ∩ ك (الخاصة ٤ ، الفقرة ٣٩)

$= \text{س} \cup \text{ع}$ (الخاصة ٢ ، الفقرة٣٥)

١٠٢ – أثبت أن $\text{ع} \subseteq \text{س} \Leftrightarrow (\text{س} - \text{ع}) \cup \text{ع} = \text{س}$

البرهان :

لدينا $(\text{س} - \text{ع}) \cup \text{ع} = \text{س} \cup \text{ع}$ حسب المسألة السابقة

ولكن $(\text{س} \cup \text{ع} = \text{س}) \Leftrightarrow \text{ع} \subseteq \text{س}$

(التمرين٧٤)

إذن : $(\text{س} - \text{ع}) \cup \text{ع} = \text{س} \Leftrightarrow \text{ع} \subseteq \text{س}$

الفرق التناظري :

١٠٣ – عيّن المجموعة $\text{س} \,\Delta\, \text{ع}$ في الحالات الآتية :

(١) $\text{س} = \{\text{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}\}$ ، $\text{ع} = \{\text{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}\}$

(٢) $\text{س} = \{\text{١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}\}$ ، $\text{ع} = \{\text{١ ، ٧}\}$

(٣) $\text{س} = \{\text{٢ ، ٤ ، ٦}\}$ ، $\text{ع} = \{\text{١ ، ٣ ، ٥}\}$

(٤) $\text{س} = \{\text{٢ ، ٥ ، ٧}\}$ ، $\text{ع} = \{\ \}$

(٥) $\text{س} = \varnothing$ ، $\text{ع} = \{\text{٢}\}$

الحل :

بتطبيق تعريف $\text{س} \,\Delta\, \text{ع}$ في كل حالة نجد :

(١) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \{\text{١ ، ٢ ، ٥ ، ٦}\}$

(٢) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \{\text{٣ ، ٥}\}$

(٣) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \{\text{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}\}$

(٤) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \{\text{٢ ، ٥ ، ٧}\}$

(٥) $\text{س} \,\Delta\, \text{ع} = \{\text{٢}\}$

١٠٤ – إذا كانت ك مجموعة المثلثات في مستوٍ . و سـ = {س : س مثلث متساوي الساقين} . ع = {س : س مثلث قائم} . مم تتكون المجموعة سـ Δ ع .

الحل :

حسب التعريف لدينا :

سـ Δ ع = {س : (س ∈ سـ و س ∉ ع) ∨ (س ∈ ع و س ∉ سـ)}

ومنه : سـ Δ ع = {س : س مثلث متساوي الساقين غير قائم أو مثلث قائم غير متساوي الساقين} .

١٠٥ – أثبت أن سـ Δ ع = (سـ – ع) ∪ (ع – سـ)

البرهان : بانشاء جدول الانتماء الآتي :

سـ	ع	سـ Δ ع	سـ – ع	ع – سـ	(سـ – ع) ∪ (ع – سـ)
١	١	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	٠	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦
جدول المجموعتين المفروضتين	جدول الفرق التناظري بناءً على ١ ، ٢	جدول الفرق بناء على ١ ، ٢	جدول الفرق بناء على ٢ ، ١	جدول الاجتماع بناءً على ٤ ، ٥	

وبمقارنة العمودين ٣ ، ٦ يثبت لدينا أن للمجموعتين
س Δ ع و (س – ع) ∪ (ع – س)
العناصر نفسها .

١٠٦ – أثبت أن س Δ ع = ع Δ س

البرهان :

لدينا : س Δ ع = (س – ع) ∪ (ع – س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

أو س Δ ع = (ع – س) ∪ (س – ع)
(الخاصة التبديلية للاجتماع)

= ع Δ س (الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

١٠٧ – من أجل أية مجموعة جزئية س من مجموعة ك أثبت أن :
(١) س Δ ∅ = س ، (٢) س Δ س = ∅

البرهان :

(١) س Δ ∅ = (س – ∅) ∪ (∅ – س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

= س ∪ ∅ (الخاصتان ٣ و ٤ ، الفقرة ٤٢)

= س

(٢) س Δ س = (س – س) ∪ (س – س)
(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

= ∅ ∪ ∅ (الخاصة ٢ ، الفقرة ٤٢)

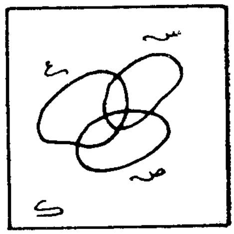
= ∅

١٠٨ – إذا كانت س ، ع ، ص ثلاثة مجموعات جزئية من مجموعة ك ،
فأثبت أن :

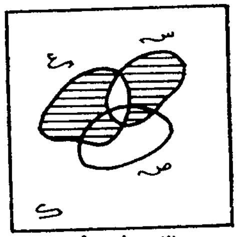
$$(س \,\Delta\, ع) \,\Delta\, ص = س \,\Delta\, (ع \,\Delta\, ص)$$

(خاصة قابلية الدمج)

البرهان : يمكننا التحقق من صحة العبارة المفروضة باستخدام المخططات ، نأخذ المجموعات س ، ع ، ص الممثلة بالشكل (٥٥) .

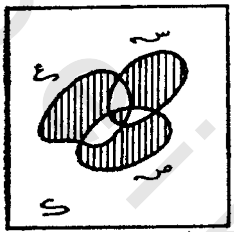


الشكل (٥٥)



س Δ ع

الشكل (٥٦)

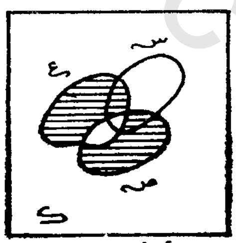


(س Δ ع) Δ ص

الشكل (٥٧)

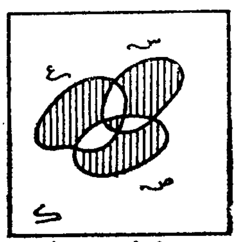
ننشىء س Δ ع كما في الشكل (٥٦) ، ثم ننشيء الفرق التناظري لـ س Δ ع و ص أي أننا نظلل العناصر التي تنتمي لـ س Δ ع ولا تنتمي لـ ص والعناصر التي تنتمي لـ ص ولا تنتمي لـ س Δ ع فنحصل على الشكل (٥٧) .

وبنفس الطريقة نعيّن أولاً المجموعة ع Δ ص كما في الشكل (٥٨) ثم نعيّن الفرق التناظري للمجموعتين س و ع Δ ص كما في الشكل (٥٩)



ع Δ ص

الشكل (٥٨)



س Δ (ع Δ ص)

الشكل (٥٩)

وبمقارنة الشكلين (٥٧) (٥٩) تتحقق صحة المساواة المفروضة ويمكن اثباتها بصورة عامة كما يلي :

طريقة أولى : نشكل جدول الانتماء الآتي :

سـ	ع	صـ	سـ Δ ع	(سـ Δ ع) Δ صـ	ع Δ صـ	سـ Δ (ع Δ صـ)
١	١	١	٠	١	٠	١
١	١	٠	٠	٠	١	٠
١	٠	١	١	٠	١	٠
١	٠	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
جدول المجموعات المفروضة			الفرق التناظري من ١ ، ٢	الفرق التناظري من ٤ ، ٣	الفرق التناظري من ٢ ، ٣	الفرق التناظري من ١ ، ٦

وبمقارنة العمودين ٥ ، ٧ ينتج المطلوب .

طريقة ثانية : **أولاً** : $\forall$ س $\in$ (سـ Δ ع) Δ صـ لدينا :

س $\in$ (سـ Δ ع) Δ صـ ⇐ { (١) س $\in$ سـ Δ ع و س $\notin$ صـ
(٢) س $\notin$ سـ Δ ع و س $\in$ صـ

ولكن :

(١) ⇐ { س $\in$ سـ و س $\notin$ ع و س $\notin$ صـ
س $\notin$ سـ و س $\in$ ع و س $\notin$ صـ

و (٢) ⇐ { س ∈ سـ و س ∈ ع و س ∈ صـ
س ∉ سـ و س ∉ ع و س ∈ صـ }

ثانياً : ∀ س ∈ سـ △ (ع △ صـ) لدينا :

س ∈ سـ △ (ع △ صـ) ⇐ { (١) س ∈ سـ و س ∉ ع △ صـ
(٢) س ∉ سـ و س ∈ ع △ صـ }

ولكن :

(١) ⇐ { س ∈ سـ و س ∈ ع و س ∈ صـ
س ∈ سـ و س ∉ ع و س ∉ صـ }

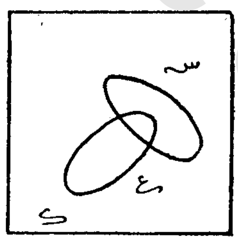
و (٢) ⇐ { س ∉ سـ و س ∈ ع و س ∉ صـ
س ∉ سـ و س ∉ ع و س ∈ صـ }

وبمقارنة نتائج (أولاً) و (ثانياً) نلاحظ ان للمجموعتين

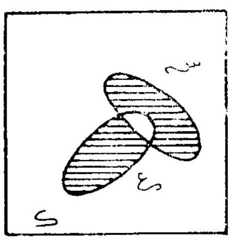
(سـ △ ع) △ صـ و سـ △ (ع △ صـ) العناصر نفسها .

١٠٩ – أثبت أن سـ △ ع = (سـ ∪ ع) – (ع ∩ سـ)

البرهان : يمكننا أن نتحقق من صحة العبارة السابقة باستخدام المخططات . نأخذ المجموعتين سـ و ع الممثلتين بالشكل (٦٠) .

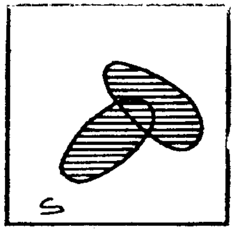


الشكل (٦٠)



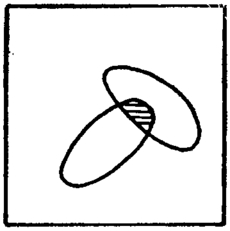
سـ △ ع

الشكل (٦١)



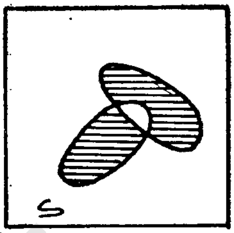
س ∪ ع

الشكل (٦٢)



س ∩ ع

الشكل (٦٣)



س ∪ ع − س ∩ ع

الشكل (٦٤)

وننشيء مخطط س Δ ع كما في الشكل (٦١) ثم ننشيء مخطط س ∪ ع في الشكل (٦٢) ومخطط س ∩ ع في الشكل (٦٣) ثم مخطط (س ∪ ع) − (س ∩ ع) في الشكل (٦٤) وبالنظر في الشكلين (٦١) (٦٤) نتأكد من صحة العبارة المفروضة . ويمكن اثباتها بصورة عامة كما يلي :

طريقة أولى : نشكل جدول الانتماء الآتي :

س	ع	س Δ ع	س ∪ ع	س ∩ ع	س ∪ ع − س ∩ ع
١	١	٠	١	١	٠
١	٠	١	١	٠	١
٠	١	١	١	٠	١
٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٢	٣	٤	٥	٦
جدول المجموعتين المفروضتين		الفرق التناظري من ١، ٢	الاجتماع من ١، ٢	التقاطع من ١، ٢	الفرق من ٤ ، ٥

وبمقارنة العمودين (٣) ، (٦) ينتج المطلوب .

طريقة ثانية :

لدينا :

$$\text{س} \cup \text{ع} - \text{ع} \cap \text{س} = (\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع} \cap \text{س})'$$

(الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

$$= (\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع}' \cup \text{س}')$$

(دو مورغان ، الفقرة ٣٩)

$$= [(\text{س} \cup \text{ع}) \cap \text{ع}'] \cup [(\text{س} \cup \text{ع}) \cap \text{س}']$$

(قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

$$= [(\text{س} \cap \text{ع}') \cup (\text{ع} \cap \text{ع}')] \cup [(\text{س} \cap \text{س}') \cup (\text{ع} \cap \text{س}')]$$

(قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

$$= [(\text{س} \cap \text{ع}') \cup \varnothing] \cup [\varnothing \cup (\text{ع} \cap \text{س}')]$$

(الخاصة ٣ ، الفقرة ٣٩)

$$= (\text{س} \cap \text{ع}') \cup (\text{ع} \cap \text{س}')$$

(الخاصة ٢ ، الفقرة ٣١)

$$= (\text{س} - \text{ع}) \cup (\text{ع} - \text{س})$$

(الخاصة ٧ ، الفقرة ٤٢)

$$= \text{س} \, \Delta \, \text{ع}$$

(الخاصة ١ ، الفقرة ٤٥)

جبر المجموعات ومبدأ الثنوية :

١١٠ – بفرض س ، ع جزءان من مجموعة ك فبرهن أن :

$$(\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ع}') = \text{س}$$

الحل : لدينا :

$$(\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ع}')$$

= س ∩ (ع ∪ ع′)   (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= س ∩ ك   (خاصة ٤ الفقرة ٣٩)

= س   (خاصة ٢ الفقرة ٣٥)

١١١ – بفرض س ، ع ، ص ثلاثة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن:

س − (ع − ص) = (س − ع) ∪ (س ∩ ص)

الحل : لدينا : س − (ع − ص)

= س − (ع ∩ ص′)   (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= س ∩ (ع ∩ ص′)′   (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= س ∩ (ع′ ∪ ص)   (قانون دو مورغان الثاني)

= (س ∩ ع′) ∪ (س ∩ ص)   (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= (س − ع) ∪ (س ∩ ص)   (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٢ – بفرض س ، ع ، ص ثلاثة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن:

س − (ع ∩ ص) = (س − ع) ∪ (س − ص)

الحل : لدينا : س − (ع ∩ ص)

= س ∩ (ع ∩ ص)′   (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

= س ∩ (ع′ ∪ ص′)   (قانون دو مورغان الثاني)

= (س ∩ ع′) ∪ (س ∩ ص′)   (قابلية توزيع التقاطع على الاجتماع)

= (س − ع) ∪ (س − ص)   (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٣ – بفرض س ، ع ، ص ، ى أربعة أجزاء من مجموعة ك فبرهن أن :

(س − ع) ∩ (ص − ى) = (س ∩ ص) − (ع ∪ ى)

الحل : لدينا : $(\text{س} - \text{ع}) \cap (\text{ص} - \text{ى})$

$= (\text{س} \cap \text{ع}') \cap (\text{ص} \cap \text{ى}')$ (خاصة ٧ للفقرة ٤٢)

$= \text{س} \cap (\text{ع}' \cap \text{ص}) \cap \text{ى}'$ (الخاصة التجميعية للتقاطع)

$= \text{س} \cap (\text{ص} \cap \text{ع}') \cap \text{ى}'$ (الخاصة التبديلية للتقاطع)

$= (\text{س} \cap \text{ص}) \cap (\text{ع}' \cap \text{ى}')$ (الخاصة التجميعية للتقاطع)

$= (\text{س} \cap \text{ص}) \cap (\text{ع} \cup \text{ى})'$ (قانون دو مورغان الأول)

$= (\text{س} \cap \text{ص}) - (\text{ع} \cup \text{ى})$ (خاصة ٧ الفقرة ٤٢)

١١٤ – إذا فرضنا س ، ع جزأين من مجموعة ك . فبرهن أن :

$$\text{س} \subseteq \text{ع} \Leftrightarrow \text{س} \cap \text{ع}' = \varnothing \Leftrightarrow \text{س}' \cup \text{ع} = \text{ك}$$

الحل : لدينا :

$\text{س} \subseteq \text{ع} \Leftrightarrow \text{س} - \text{ع} = \varnothing$ (تعريف الفرق)

$\Leftrightarrow \text{س} \cap \text{ع}' = \varnothing$ (خاصة ٧ الفقرة٤٢)

$\Leftrightarrow (\text{س} \cap \text{ع}')' = \varnothing'$

$\Leftrightarrow \text{س}' \cup (\text{ع}')' = \text{ك}$ (قانون دو مورغان الثاني

$\Leftrightarrow \text{س}' \cup \text{ع} = \text{ك}$ (خاصة ٢ الفقرة ٣٩)

١١٥ – أوجد ثنوية كل من المتطابقتين :

١ً – $\text{س} \cap (\text{س} \cup \text{ع}) = \text{س}$

٢ً – $(\text{س} \cap \varnothing) \cup (\text{س} \cup \text{ك}) = \text{ك}$

الحل :

١ً – يكفي أن نضع في المتطابقة المفروضة الاشارة $\cup$ عوضاً عن $\cap$ والاشارة $\cap$ عوضاً عن $\cup$ فنحصل على ثنويتها وهي المتطابقة :

$$\text{س} \cup (\text{س} \cap \text{ع}) = \text{س}$$

٢ً – نبدل في المتطابقة المفروضة الإشارة $\cup$ بـ $\cap$ والإشارة $\cap$ بـ $\cup$ و $\varnothing$ بـ ك و ك بـ $\varnothing$ فنحصل على ثنويتها وهي المتطابقة :

$$(\text{سـ} \cup \text{ك}) \cap (\text{سـ} \cap \varnothing) = \varnothing$$

١١٦ – برهن صحة المتطابقتين :

١ً – $(\text{سـ} \cap \text{ك}) \cup (\text{ع} \cap \varnothing) = \text{سـ}$

٢ً – $(\text{سـ} \cup \varnothing) \cap (\text{ع} \cup \text{ك}) = \text{سـ}$

الحل :

١ً – لدينا :

$$\text{سـ} \cap \text{ك} = \text{سـ} \quad \text{و} \quad \text{ع} \cap \varnothing = \varnothing$$

وبالتالي : $(\text{سـ} \cap \text{ك}) \cup (\text{ع} \cap \varnothing) = \text{سـ} \cup \varnothing = \text{سـ}$

٢ً – بما أن المتطابقة الثانية هي ثنوية المتطابقة الأولى وبما أن الأولى صحيحة فثنويتها وهي المتطابقة الثانية صحيحة أيضاً .

١١٧ – أثبت أن : $(\text{سـ} \subseteq \text{ع} \ \text{و} \ \text{ع} \subseteq \text{ص}) \Rightarrow \text{سـ} \subseteq \text{ص}$

الحل :

إن $\text{سـ} \subseteq \text{ع} \Leftrightarrow \text{سـ} \cap \text{ع} = \text{سـ}$ (١)
و $\text{ع} \subseteq \text{ص} \Leftrightarrow \text{ع} \cap \text{ص} = \text{ع}$ (٢) } (تعريف التقاطع)

بالتعويض من (٢) في (١) نجد :

$$(\text{سـ} \cap \text{ع}) \cap \text{ص} = \text{سـ}$$

أو $\text{سـ} \cap (\text{ع} \cap \text{ص}) = \text{سـ}$ (الخاصة التجميعية للتقاطع)

أو $\text{سـ} \cap \text{ص} = \text{سـ}$ (بالتعويض اعتماداً على (٢))

ومنه $\text{سـ} \subseteq \text{ص}$ (تعريف التقاطع)

تمارين غير محلولة

الاجتماع :

١١٨ – لتكن ك مجموعة طلاب الصف الأول الثانوي في إحدى الثانويات العربية .

و سـ = {س : س ∈ ك ومتفوق بالرياضيات}

و ع = {س : س ∈ ك ومتفوق بالفيزياء}

١ً – عيّن المجموعة سـ ∪ ع   ٢ً – إذا كان س طالباً ∈ ك ومتفوقاً بالرياضيات وبالفيزياء فهل س ∈ سـ ∪ ع .

١١٩ – أوجد سـ ∪ ع في كل من الحالات الآتية :

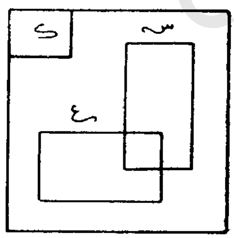
١ً – سـ = {أ ، ب ، حـ} ، ع = {ب ، حـ ، ء}

٢ً – سـ = {أ ، ب ، حـ} ، ع = {أ ، ب}

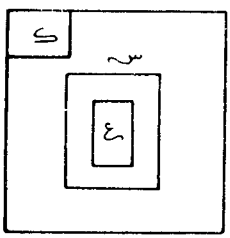
٣ً – سـ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ع = {٤}

٤ً – سـ = {★ ، O} ، ع = {+ ، −}

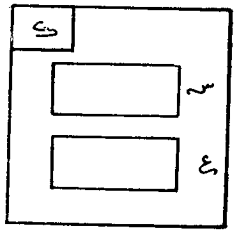
١٢٠ – ظلل سـ ∪ ع في كل من الأشكال الآتية :



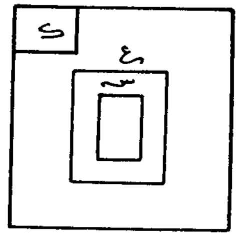
الشكل (٦٥)



الشكل (٦٦)



(الشكل (٦٨)



الشكل (٦٧)

١٢١ – اذا كانت س ⊆ ع و ص مجموعة ما فأثبت أن :

س ∪ ص ⊆ ع ∪ ص

١٢٢ – اذا كان س ∪ ع = ∅ فأثبت أن :

س = ∅ و ع = ∅

التقاطع :

١٢٣ – أوجد أ ∩ ب في كل من الحالات الآتية :

١ – أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٥} ، ب = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

٢ – أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {٤ ، ٢}

٣ – أ = {٣ ، ٧ ، ٨} ، ب = {٨ ، ٣ ، ٧}

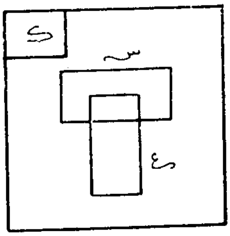
٤ – أ = {+ ، −} ، ب = {× ، ÷}

٥ – أ = {٠ ، ٢ ، ٤} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥}

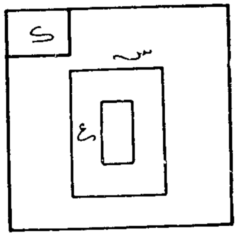
٦ – أ = ط ، ب = ط*

١٢٤ – اذا كانت س مجموعة قواسم العدد ٢٤ ، و ع مجموعة قواسم العدد ١٨ فأوجد س ∩ ع .

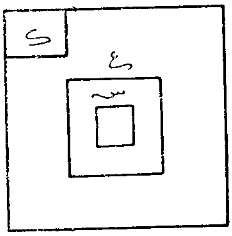
١٢٥ – ظلل س ∩ ع في كل من الأشكال الآتية :



الشكل (٦٩)



الشكل (٧٠)



الشكل (٧١)

١٢٦ – لتكن سـ مجموعة طلاب مدرستك الذين لا تقل أطوالهم عن ١٨٠ سم و ع مجموعة الطلاب الذين لا تقل أوزانهم عن ٦٠ كغ . مم تتكون المجموعة سـ ∩ ع ؟ ومتى تكون هي المجموعة الخالية ؟

١٢٧ – لتكن ك مجموعة الأشكال الرباعية في مستوي و

سـ = { س : س ∈ ك و س متوازي أضلاع }

ع = { س : س ∈ ك و س مستطيل }

صـ = { س : س ∈ ك و س معين }

مم تتكون المجموعات سـ ∩ ع ، ع ∩ صـ ، سـ ∩ صـ

١٢٨ – لتكن (س ، ع) نقطة في مستوي المحورين الاحداثيين و سـ، ع مجموعتي النقاط : سـ = { (س، ع) : س، ع ∈ ح و س – ع ≤ ٠ }

و ع = { (س، ع) : س، ع ∈ ح و ع ≥ ٠ }

و صـ = { (س، ع) : س، ع ∈ ح و ع ≥ س وع ≤ ١ }

١ – مثّل على مستوي المحورين الاحداثيين سـ ∩ ع .

٢ – مثّل على مستوي المحورين الاحداثيين (سـ ∩ ع) ∪ صـ

١٢٩ – اذا كان سـ ⊆ صـ فأثبت أن :

سـ ∩ ع ⊆ صـ

١٣٠ – من أجل أي مجموعتين سـ و ع أثبت أن :

سـ ∩ ع ⊇ سـ ∪ ع

كيف تصبح هذه العبارة إذا كان سـ = ع ؟

١٣١ – من أجل أي مجموعتين سـ ، ع أثبت أن :

سـ = ع ⟺ سـ ∪ ع = سـ ∩ ع

١٣٢ – إذا كان سـ ⊇ ع وكانت صـ مجموعة ما فأثبت أن :

سـ ∩ صـ ⊇ ع ∩ صـ

المتممة :

١٣٣ – إذا كانت سـ = مجموعة جميع الأشخاص السّمان

ع = مجموعة جميع الأشخاص القصار

١ً – مم تتكون المجموعات

سـ′ ، ع′ ، (سـ ∪ ع)′ ، (سـ ∩ ع)′

٢ً – هل تحقق سـ و ع قانوني دو مورغان .

١٣٤ – لتكن ك مجموعة جميع الأشخاص

و سـ = { س : س شخص عربي }

و ع = { س : س شخص يشرب الشاي }

و صـ = { س : س شخص مسن } .

مم تتكون المجموعات التالية : سـ′ ، سـ ∩ ع ، ع′ ∩ صـ′ ، (ع ∪ صـ) ، (سـ ∩ ع) ∩ صـ ، سـ′ ∪ (ع ∩ صـ) ، ع ∪ ع′ ، سـ ∪ ع ، ك′ ، ع ∩ صـ′ ، (ع ∩ صـ)′ .

١٣٥ – أثبت أن : ١ً – سـ ∪ ع = (سـ' ∩ ع')'

٢ً – سـ ∩ ع = (سـ' ∪ ع')'

الفرق :

١٣٦ – عيّن المجموعة سـ في كل من الحالات الآتية :

١ً – سـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } – { هـ ، ء ، د }

٢ً – سـ = { أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و } – { حـ ، هـ ، و }

٣ً – سـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } – { هـ ، ط ، د }

٤ً – سـ = { أ ، ب ، حـ ، ء } – { }

٥ً – سـ = { } – { أ ، ب ، حـ ، ء }

٦ً – سـ = { أ ، ب ، حـ } – { حـ ، أ ، ب }

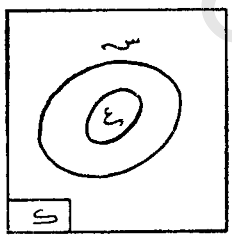
٧ً – سـ = { أ } – { أ ، ب ، حـ }

٨ً – سـ = { د } – { أ ، ب ، حـ }

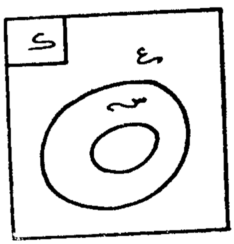
٩ً – سـ = { س : س متوازي أضلاع } – { س : س مستطيل }

١٠ً – سـ = صـ$^{+}$ – صـ$^{-}$

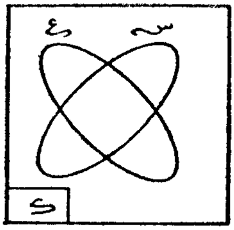
١٣٧ – ظلّل سـ – ع في كل من الأشكال الآتية :



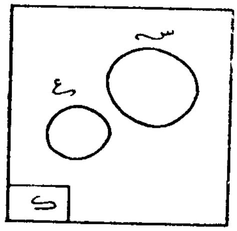
الشكل (٧٢)



الشكل (٧٣)



الشكل (٧٥)



الشكل (٧٤)

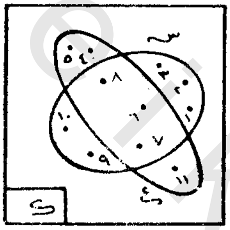
١٣٨ – في الشكل (٧٦)

أوجد :

١ً – س   ٢ً – ع

٣ً – س ∩ ع   ٤ً – س – ع

٥ً – ع – س   ٦ً – س ∪ ع



الشكل (٧٦)

١٣٩ – اكتب بشكل أبسط كلاً من المجموعات الآتية :

١ً – س ∩ ∅′ ،   ٢ً – س ∪ ك′

٤ً – س – س′ ،   ٤ً – س ∩ ك′

١٤٠ – أثبت أن ع – س هو جزء من س .

الفرق التناظري :

١٤١ – عيّن المجموعة س في كل من الحالات الآتية :

١ً – س = {أ ، ب ، حـ} Δ {حـ ، ى ، هـ}

٢ً – س = {أ ، ب ، حـ ، ى} Δ {أ ، ى}

٣ً – س = {أ ، ب ، حـ} Δ {د ، هـ}

٤ً – س = { أ ، ب ، حـ } Δ { }

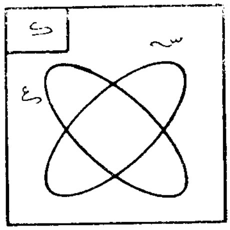
٥ً – س = { } Δ { ء ، هـ ، و }

١٤٢ – إذا كانت أ = مجموعة جميع الأشخاص القصار

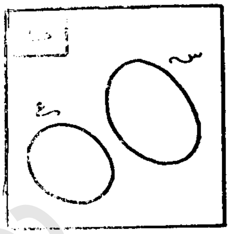
ب = مجموعة جميع الأشخاص السمان

مم تتكون المجموعات : أ – ب ، ب – أ ، أ Δ ب .

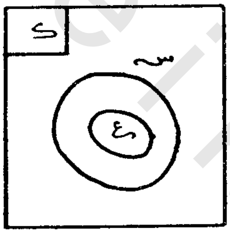
١٤٣ – ظلل س Δ ع في كل من الأشكال الآتية :



الشكل (٧٧)



الشكل (٧٨)



الشكل (٧٩)

جبر المجموعات ومبدأ الثنوية :

١٤٤ – أثبت أن : س ∪ (س ∩ ع)' = ك

١٤٥ – إذا كان س ∩ ع = ∅ فأثبت أن ع ∩ س' = ع

١٤٦ – إذا كان س ∩ ع = ∅ فأثبت أن س ∪ ع' = ع'

١٤٧ – أثبت أن (س – ع) ∩ ع = ∅

١٤٨ – برهن أن س – ع' = س ∩ ع

١٤٩ – برهن أن س' – ع' = ع – س

١٥٠ – أثبت أن أ Δ ب = (أ ∩ ب') ∪ (ب ∩ أ')

١٥١ – أوجد ثنوية كل من المتطابقات الآتية :

١ً – $(\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{ع} \cap \text{ص}) = (\text{س} \cup \text{ص}) \cap \text{ع}$

٢ً – $(\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{س} \cup \text{ع}') = \text{س}$

٣ً – $(\text{ع} \cup \text{س}') \cap \text{س} = \text{ع} \cap \text{س}$

٤ً – $\text{س} \cup (\text{ع} \cap \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ك}) \cup (\text{ع} \cap \text{ص})$

١٥٢ – أثبت أن $(\text{س} \cap \text{ك}) \cap (\varnothing \cup \text{س}') = \varnothing$

١٥٣ – أثبت أن $(\text{س} \cup \varnothing) \cup (\text{ك} \cap \text{س}') = \text{ك}$

أجوبة وارشادات

الاجتماع :

١١٨ – ١ً – $\text{س} \cup \text{ع} = \{\text{س} : \text{س طالب متفوق بالرياضيات أو بالفيزياء}\}$

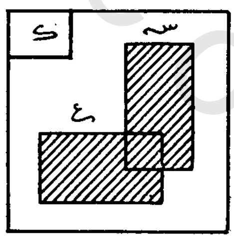
٢ً – كل طالب متفوق بالرياضيات والفيزياء $\in \text{س} \cup \text{ع}$

(انظر معنى أو في الفقرة ٧ ، ٤ً)

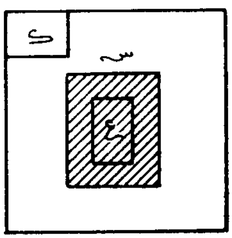
١١٩ – ١ً – {أ ، ب ، حـ ، د} ٢ً – {أ ، ب ، حـ}

٣ً – {٢ ، ٤ ، ٦} ٤ً – {★ ، ○ ، + ، −}

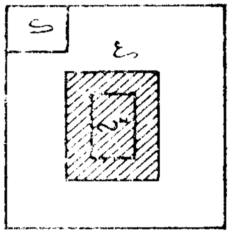
١٢٠ – نظلل الأجزاء غير المشتركة والمشتركة إن وجدت فنحصل بالترتيب على الأشكال الآتية :



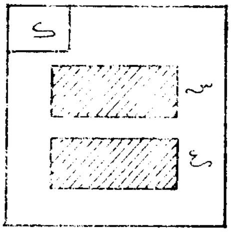
الشكل (٨٠)



الشكل (٨١)



الشكل (٨٢)



الشكل (٨٣)

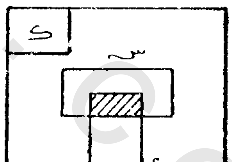
١٢٢ – من المعلوم أن سـ ⊆ سـ ∪ ع ولكن سـ ∪ ع = ∅
اذن سـ ⊆ ∅ ولكن ∅ ⊆ سـ ومنه سـ = ∅ ...
وبالمثل نبرهن أن ع = ∅ .

التقاطع :

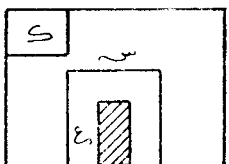
١٢٣ – ١ً – {١ ، ٢ ، ٥} ٢ً – {٢ ، ٤}
٣ً – {٣ ، ٧ ، ٨} ٤ً – ∅
٥ً – {٢} ٦ً – ط*

١٢٤ – {١ ، ٢ ، ٣ ، ٦}

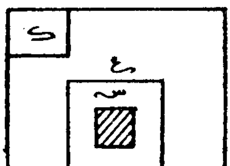
١٢٥ – نظلل الجزء المشترك بين مخططي سـ و ع فنحصل على الأشكال :



الشكل (٨٤)



الشكل (٨٥)



الشكل (٨٦)

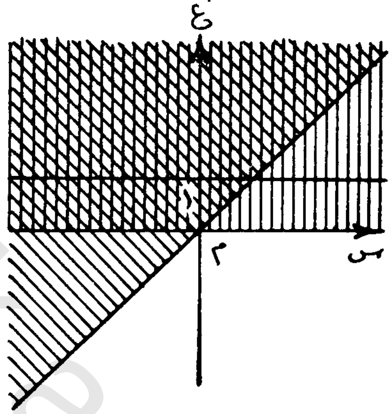
١٢٦ – سـ ∩ ع = {س : س طالب لا يقل طوله عن ١٨٠ سم ولا يقل وزنه عن ٦٠ كغ} . وتكون المجموعة خالية عندما لا يوجد أي طالب في المدرسة طوله ١٨٠ سم على الأقل ووزنه ٦٠ كغ على الأقل

١٢٧ – سـ ∩ ع = { س : س ∈ ك و س مستطيل }

ع ∩ صـ = { س : س ∈ ك و س مربع }

سـ ∩ صـ = { س : س ∈ ك و س معين }

١٢٨ – ١ً – سـ ∩ ع هو الجزء المظلل بخطوط متقاطعة في الشكل (٨٧)



الشكل (٨٧)

٢ً – (سـ ∩ ع) ∪ صـ هو كذلك الجزء المظلل بخطوط متقاطعة في الشكل نفسه .

المتممة :

١٣٣ – ١ً – سـ′ = مجموعة جميع الأشخاص الذين ليسوا سماناً ،

ع′ = هي مجموعة جميع الأشخاص الذين ليسوا قصاراً.

(سـ ∪ ع)′ = مجموعة الأشخاص الذين ليسوا سماناً ولا قصاراً

(سـ ∩ ع)′ = مجموعة الأشخاص الذين ليسوا سماناً أو ليسوا قصاراً.

٢ً – واضح أن (سـ ∪ ع)′ = سـ′ ∩ ع′

وأن (سـ ∩ ع)′ = سـ′ ∪ ع′

١٣٤ – سـ′ = { س : س شخص غير عربي }

سـ ∩ ع = { س : س عربي ويشرب الشاي }

ع′ ∩ صـ′ = { س : س غير مسن ولا يشرب الشاي }

$($ع $\cup$ صـ$)'$ = { س : س غير مسن ولا يشرب الشاي }

(سـ $\cap$ ع) $\cap$ صـ = { س : س عربي ومسن ويشرب الشاي }

سـ$'$ $\cup$ (ع $\cap$ صـ) = { س : س (غير عربي أو يشرب الشاي)
و (غير عربي أو مسن) }

ع $\cup$ ع$'$ = { س : س يشرب الشاي أو لا يشربه } = ك

سـ $\cup$ ع = { س : س عربي أو يشرب الشاي }

ك$'$ = $\varnothing$

ع $\cap$ صـ$'$ = { س : س يشرب الشاي وغير مسن }

(ع $\cap$ صـ$'$)$'$ = { س : س لا يشرب الشاي أو غير مسن }

ملاحظة :

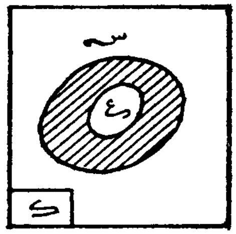
يستفاد في كتابة المجموعات السابقة من خواص العمليات على القضايا (راجع الفصل الأول) .

الفرق :

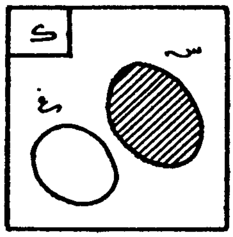
١٣٦ - ١ً - { أ ، ب ، حـ }   ٢ً - { أ ، ب ، ى }
٣ً - { أ ، ب ، حـ ، ى }   ٤ً - { أ ، ب ، حـ ، ى }
٥ً - $\varnothing$ ٦ً - $\varnothing$
٧ً - $\varnothing$ ٨ً - { ى }
٩ً - { س : س متوازي أضلاع وليس مستطيلا }
١٠ً - صـ$^+$ - { ٠ }

١٣٧ - في الشكل (٧٢) نظلل من مخطط سـ المنطقة الخارجية عن مخطط ع فنحصل على الشكل (٨٨) . في الشكل (٧٣) لا يمكننا تظليل سـ - ع لأن سـ - ع = $\varnothing$. وفي الشكل

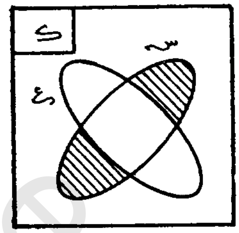
(٧٤) نظلل سـ فقط فنحصل على الشكـل (٨٩) . وفي الشكل (٧٥) نظلل مناطق مخطط سـ الخارجية عن مخطط ع فنحصل على الشكل (٩٠) .



الشكل (٨٨)



الشكل (٨٩)



الشكل (٩٠)

١٣٨ – ١َ – {١، ٢، ٣، ٩، ١٠، ٦، ٧، ٨}
٢َ – {٦، ٧، ٨، ١١، ٤، ٥}   ٣َ – {٦، ٧، ٨}
٤َ – {١، ٢، ٣، ٩، ١٠}   ٥َ – {١١، ٤، ٥}
٦َ – {١، ٢، ٣، ٩، ١٠، ٦، ٧، ٨، ١١، ٤، ٥}

١٣٩ – ١َ – سـ   ٢َ – سـ   ٣َ – سـ   ٤َ – ∅

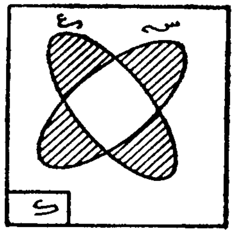
١٤٠ – لدينا ع – سـ = ع ∩ سـ′ ⊆ سـ′

الفرق التناظري :

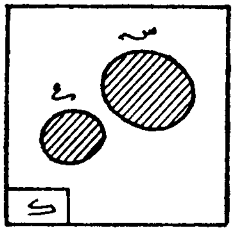
١٤١ – ١َ – {أ، ب، د، هـ}   ٢َ – {ب، حـ}
٣َ – {أ، ب، حـ، د، هـ}   ٤َ – {أ، ب، حـ}
٥َ – {د، هـ، و}

١٤٢ – أ – ب = {س : س شخص قصير وليس سميناً}
ب – أ = {س : س شخص سمين وليس قصيراً}
أ Δ ب = {س : س شخص قصير وليس سميناً أو شخص سمين وليس قصيراً}

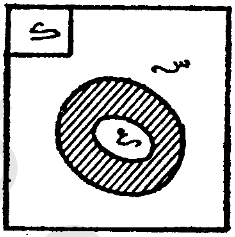
١٤٣ – نترك الجزء المشترك بين مخططي س و ع (إن وجد) بدون تظليل فنحصل على الأشكال (٩١)، (٩٢)، (٩٣).



الشكل (٩١)



الشكل (٩٢)



الشكل (٩٣)

جبر المجموعات ومبدأ الثِنوية :

١٤٤ – $\text{س} \cup (\text{س} \cap \text{ع})' = \text{س} \cup (\text{س}' \cup \text{ع}')$

$= (\text{س} \cup \text{س}') \cup \text{ع}' = \text{ك} \cup \text{ع}' = \text{ك}$

١٤٥ – $\text{س} \cap \text{ع} = \varnothing \Leftrightarrow \text{ع} - \text{س} = \text{ع} \Leftrightarrow \text{ع} \cap \text{س}' = \text{ع}$

$\Leftrightarrow \text{س}' \cap \text{ع} = \text{ع}$

١٤٦ – اعتماداً على نتيجة التمرين السابق نكتب :

$\text{س}' \cap \text{ع} = \text{ع} \Leftrightarrow (\text{س}' \cap \text{ع})' = \text{ع}'$

$\Leftrightarrow (\text{س}')' \cup \text{ع}' = \text{ع}' \Leftrightarrow \text{س} \cup \text{ع}' = \text{ع}'$

١٤٧ – $(\text{س} - \text{ع}) \cap \text{ع} = (\text{س} \cap \text{ع}') \cap \text{ع}$

$= \text{س} \cap (\text{ع}' \cap \text{ع}) = \text{س} \cap \varnothing = \varnothing$

١٤٨ – $\text{س} - \text{ع}' = \text{س} \cap (\text{ع}')' = \text{س} \cap \text{ع}$

١٤٩ – $\text{س}' - \text{ع}' = \text{س}' \cap (\text{ع}')' = \text{س}' \cap \text{ع} = \text{ع} \cap \text{س}'$

$= \text{ع} - \text{س}$.

١٥٠ - $\text{أ} \,\Delta\, \text{ب} = (\text{أ} - \text{ب}) \cup (\text{ب} - \text{أ}) = (\text{أ} \cap \text{ب}') \cup (\text{ب} \cap \text{أ}')$

١٥١ - ١ - $(\text{س} \cup \text{ع}) \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ص}) \cup \text{ع}$

٢ - $(\text{س} \cap \text{ع}) \cup (\text{س} \cap \text{ع}) = \text{س}$

٣ - $(\text{ع} \cap \text{س}') \cup \text{س} = \text{ع} \cup \text{س}$

٤ - $\text{س} \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cup \varnothing) \cap (\text{ع} \cup \text{ص})$

١٥٢ - $(\text{س} \cap \text{ك}) \cap (\varnothing \cup \text{س}') = \text{س} \cap \text{س}' = \varnothing$

١٥٣ - صحيحة لأنها ثنوية المتطابقة السابقة .

* * *